控制论导论

W. R. 艾什比

科学出版社

控制论导论

W. R. 艾什比 著

張理京 譯

科学出版社

W. Ross Ashby
AN INTRODUCTION TO CYBERNETICS
Chapman & Hall Ltd., 1956

內 容 簡 介

本书是介紹控制论入門的一本好书，共分三篇十四章．第一篇介紹控制论中对“机构”的观点和处理方法；第二篇介紹信息论的意义及其在生物学中的应用；第三篇介紹生物系統中关于調节和控制作用的原理．

可供生物、医、农、生物物理科研及教学工作者参考．

控 制 论 导 论

〔英〕 W. R. 艾什比 著

張 理 京 譯

*

科 学 出 版 社 出版
北京朝阳門内大街 117 号
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
上海新华印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店經售

*

1965 年 6 月 第 一 版 开本：850×1168 1/32
1965 年 6 月第一次印刷 印張：10
印数：0001—4,550 字数：260,000

統一书号：13031・2066
本社书号：3168・13—10

定价：[科六] 1.50 元

序

許多生物科学工作者——生理学家、心理学家、社会学家，都对控制論发生兴趣，希望能把控制論中的方法和技术应用到自己的专业上去．然而許多人不敢钻研这門学科，因为他們覺得要运用这門学科，必須先长时期地学过电子学和高深的純粹数学．他們已經形成这么一种印象，以为控制論是和这些学科分不开的．

作者深信这种印象只是一个假象．控制論的基本概念不用电子学也能讲，而且这些概念原本都是簡单的；因此，虽然在高深的应用上可能需要高深的数理技术，但是我們也可用很簡单的数理技术来做很多工作，特别是在生物科学上，只要在应用时能清楚而深刻地理解其中的原理．作者认为，如果根据普通的和众所周知的知識来讲这門科学，然后再逐步深入，那末即使讀者只具有初等数学知識，也完全可以理解这門科学的基本原理．学会了这些基本原理之后，他就会确切知道再进一步研究还需要什么知識；而且尤其有帮助的是，他可以从而知道哪些知識对他的研究无关紧要，可以略而不顾．

本书的目的就是給讀者提供这样一个导論．书中先从一些普通、众所周知的概念讲起，然后逐步使讀者认識到，怎样把这些概念弄得更确切，怎样来进一步发展这些概念，直到引出“反饋”、“稳定性”、“調节”、“超稳定”、“信息”、“編碼”、“干扰”等題目和其它控制論課題．从头到尾，讀者閱讀本书所需的数学知識不超出初等代数；特别是，本书中的論証沒有一处需要用微积分（偶尔提到微积分的地方可以略去而无損于理解，因为那些地方不过是为了表明，如果需要用微积分时，它怎样用在控制論的討論上）．书中的說明和举例大都是生物学上的，而不是物理科学方面的．本书和

作者的另一本书“Design for a Brain”重复处很少，因此这两本书几乎是完全独立的. 但是它們也有密切关系，因此最好把两书作为互相补充的讀物；讀了其中的一本，有助于更好地了解另一本.

本书分为三篇.

第一篇讲机构原理，讲怎样用变换(transformation)来表示机构，讲什么叫“反饋”，讲在一个机构內的自主性可能有哪些种形式，讲机构与机构可以怎样耦合起来. 书中讲到当所研究的系統很龐大很复杂(例如大脑和社会)，以致只能用統計方法来处理时，应該遵循什么原則来研究. 这里还讲到当系統的各部分并不能都让我們直接观察到的情况，这就是所謂黑箱理論.

第二篇用第一篇所讲的方法来研究什么叫做“信息”，研究它通过一个机构时是怎样編碼的. 书中用这些方法来研究生物学上的各种問題，并設法使讀者多少认識到这方面应用的可能是多么广泛. 本篇內容引向申农(Shannon)的理論(信息論)；因此，讀了本篇之后，讀者再去研究申农本人的著作就不会发生困难了.

第三篇研究用于生物的調节和控制系統(包括生理学上所研究的先天系統和心理学上所研究的后天系統)中的机构和信息这两个概念. 它告訴我們怎样把这些調节器和控制器的各部分一級接一級地，一环套一环地建立起来，从而可以看出怎样使調节的放大成为可能. 书中以新的而且簡单得多的方式讲解了超稳定性原理，为复杂調节系統的一般理論奠定了基础，并进一步发揮了作者在“Design for a Brain”一书中所提出的思想. 这样，书中一方面說明了大脑为什么会具有这样卓越的調节功能，另一方面又給想制造具有同等功能机器的人提出了設計原理.

本书虽然是作为一本淺近的入門书而写的，但并不打算只作为跟讀者随便聊聊控制論的一本书，它是为那些想深入钻研控制論，想确实懂得控制論內容的讀者而写的. 因此，书中包含了許許多多容易做的练习題，都是由淺入深、經过周密安排的，此外还附有提示和解答，当讀者一步步做下去时，就可借以測驗自己对讀过的材料掌握到什么程度，并可借此鍛练他所获得的新本領. 少

数几个須用特殊技巧来解的练习题标有星号(*)．如果略去这些练习题，并不会妨碍讀者理解本书后面的內容．

为了使讀者在閱讀过程中便于查考前后的材料，本书的內容是分节来讲的．书中所有提示参閱之处都指的是节，节碼是这样来編的：例如 9-14 表示第九章第十四节．图表以及练习題的号碼都是按各节分編的；例如图 9-14-2 表示 9-14 节里的第二图．如果书中仅仅提到"題4"，那就是指本节的第四題．凡給予正式定义的术語，都下加着重点．

本书內容虽然涉及了許多問題，但这些問題本身并非本书主要目的；全书的目的在于說明：当我們打算使一个非常复杂的有病机体，例如病人，恢复他的正常机能时，我們应該遵循什么原則去做．我深信如果(医务工作者)对这些原則有了新的理解，那就会得出新的与有效的治疗方法，因为这方面的需要是很大的．

W. R. 艾什比

目　　录

第二篇 变 异 度

第三篇 調节与控制

第一章　緒論（談談控制論中的新观点和新方法）

1-1. 維納（Wiener）把控制論定义为"（关于）动物和机器中控制和通信的科学"，簡言之，这是讲掌舵术的学問，本书就要讲这方面的东西．本书要討論的問題是：协調、調节、控制，因为从生物学的以及从实用的观点讲，这些都是极重要的問題．

因此我們必須研究机构这一概念；但最好先让我讲几句开場白，因为控制論是从新的、不同于平常的角度来看机构的．如果不讀这些开場白，一开始就看第二章就会觉得很别扭．讀者必須对新观点有明确的理解，因为如果在新旧两种观点之間有任何无意識的搖摆，都会引起混乱和誤解．

1-2. 控制論的特点　有許多书的书名叫"机器理論"，讲的往往是些机械方面的物件，如杠杆和齿輪之类．控制論也是一种"机器理論"，但它讲的不是物件而是动作方式．它并不深究"这是什么东西？"而要研究"它做什么？"因此，控制論中很重視象"这个变量作簡諧振蕩"之类的話，而对于这变量究竟是一个点的位置还是电路中的电势，却远沒有那样重視．因此，控制論本质上是研究机能和动态的．

控制論兴起之初在許多方面与物理学有关，但它在本质上并不依賴于物理定律和物质的性质[1]．控制論研究一切形式的动态，只要它們是有規則的，或者說是一定的，或者說是可以再現的．至于物质实体是什么，并无关系，同样，平常的物理定律之成立与否对它也无关宏旨（讀者从 4-15 节的例子[2]可以明白这句話的意

[1] 控制論中的定律誠然不依賴于物理定律，但显然要依賴于物质的性质，而且它們也象任何科学定律一样，都是从物质的性质推出来的——俄譯本編者注．

[2] 那个例子实际上也并不是完全脱离現实生活的，例如作者工作范圍內所接触的那个精神病院里，很可能就会遇到类似的情况，在 4-15 节中我們将以附注对該例另作一种解釋——譯者注．

思）.控制論的眞理不需要以其他科学为依据. 控制論有它自己的基础. 本书的部分目的也在于說明这些基础.

1-3. 控制論与現实机器——电子管的、机械的、神經的或經济的机器——之間的关系，也正象几何学与現实空間中具体对象的关系一样. 在以前，所謂“几何学”是研究三維空間物体之間与平面图形之間的关系的. 但地球上的空間形式，无論是动物界的、植物界的以及矿物界的，其性质远比初等几何所能提供的空間形式复杂得多. 在那时，几何上所提出的空間形式，如果不能在平常的空間中表現出来，那末这种形式就无人相信，或是不能被人接受. 那时，几何学所研究的，完全是普通空間.

現在，情形大不相同了. 几何学有它独立的地位，有它本身存在的价值. 現在它能准确而系統地研究那些远非地球上的空間所能提供的空間和形式. 在今日，几何包括了現实世界的空間形式，而不是現实世界的空間形式包括了几何，因为現实世界的种种空間形式，不过是这包罗万象的几何的特例而已.

几何进展过程中所获得的成就是无待贅言的. 現今，几何学好比一个大框架，在这里面，所有現实世界的空間形式都可找到它們合适的位置，并且在这里面使我們很易于看出这种形式之間的关系. 对空間形式有了这样更多的理解，自然就会相应地有更多的本領来控制它們.

控制論与現实机器之間的关系也是这样的. 它是以“一切可能的机器”为其研究对象的，至于其中有的机器有沒有被人或在自然界創造出来，对它来說倒是次要的事. 控制論給我們提供一个框架，在它里面可以把一切个别的机器排列配置起来，使人易于了解它們.

1-4. 因此，尽管有人說控制論中所研究的机器在現实世界里是找不到的，我們对这些批評也并不介意. 在这方面，数学物理曾經走过同样的道路，获得显著的成就. 在数学物理中，很早以来就注重研究一些并不存在的系統，例如研究沒有质量的彈簧，有质量而沒有体积的质点，具有理想性质的气体等等. 如果說这些东

西不存在，那倒是千真万确的；但尽管它們不存在，这却并不意味着数学物理仅仅是些空談；物理学家也不会因此把他研究无质量彈簧的論文撕掉，因这种理論对他的实际工作是有莫大意义的．这是因为，尽管現实世界中不存在无质量的彈簧，但这种彈簧的某些性质，对帮助我們去了解甚至象钟表那样簡单的系統也有很大作用．

生物学家对蛞蝓或对某一已絕种的生物作詳細研究时，也是懂得这个道理并且按照这种原則来做的，尽管从生态学或經济方面的观点来說，对这些研究所花的力气是远远超过对象本身价值的．

同样，控制論中特别提出某些类机构（見 3-3 节），把它們看作一般理論中的重要对象；而它之所以要特别研究这些机构，并不是因为現实世界的机器大都具有这种形式．只是在充分研究了机器与机器間可能有的关系之后，控制論才来考察某一門科学中确实有的机器形式．

1-5. 由于控制論的这种方法主要是处理全面的和一般的，所以控制論在研究某一給定的机器时，照例并不关心这机器在“此时此地的变动形式是什么”，而要关心“它可能有的全部变动形式是什么？”

基于这一情况，信息論对控制論中的問題就有了重大的意义；因为信息論的主要特点，正在于它总是研究“一批”可能性的；在它的原始数据和最后結論中，总是对整个集合本身来說的，而不是只对集合中某一个别对象（元素）来說的．

有了这种新的观点，就得考虑一类新的問題．按照旧的观点，比方說看到一个卵子成长为兎，那就会問：“为什么它成长为兎？为什么它不能永远保持卵子的形式？”要想解决这个問題，就得去研究动能方面的問題，从而找出何以卵子会起变化的許多理由：它会使所含脂肪氧化，从而放出自由能量；它有磷酸化酶，能使它的新陈代謝物作 Krebs 循环，等等．在作这些研究时，能量这一概念是必不可少的．

控制論的观点却大不相同，然而也是同样可靠的．它承认卵子具有很多自由能量，而且这自由能量处于这样一种差一点点就不能保持新陈代謝平衡的状态，以至在某种意义上来說是具有爆炸性的．結果卵子一定会生长成某种形式；这时，控制論中要問的是："为什么要变到兎的形式，而不变到狗的形式、魚的形式，甚或一种畸形生物？"控制論要考虑到比現实范圍大得多的一批可能性，然后研究为什么具体情形会受具体条件的限制．在这种討論中，能量問題几乎不起作用，能量只假定是已存在的．甚至对于所研究的系統，从能量方面来讲是开放的还是封閉的（系統的能量是否受外界影响），也常认为无关紧要；重要的只是該系統受决定因素或主导因素所影响的程度．因此，从系統中一部分傳到另一部分的任何信息或訊号或者說决定因素，都要认为是个重要事件記录下来，因此，控制論也确实可以定义为：它是研究这样一类系統的科学，在这类系統中能量无关紧要，而信息及控制却非常重要，换言之，它研究的系統是"不透信息"的（見 9-19 节）．

1-6. 控制論的用处　在叙述了控制論的梗概之后，就可以来讲讲控制論能有哪些用处．这里只讲控制論在生物学上最有前途的一些用处，而且只能作些簡略与籠統的論述．有許多应用已經有人实际做过了，而且大家都很知道，这里无需再詳述；将来控制論无疑还会有更多的应用．但是控制論在科学上有两点重要的价值，特别值得一提．

第一是控制論給予我們一套統一的詞汇和概念，使我們足以用来描述形形色色、一切类型的系統．在这以前，比方說要把有关伺服机构的和有关小脑的許多事实联系起来加以比較，就会有很多不必要的困难，因为伺服机构的性质是用那些自动駕駛、无綫电接收机、液压制动器等等的术語来描述的，而有关小脑作用的事实则是用解剖室和临床实践等术語来描述的，但所用术語尽管不同，伺服机构与小脑的反射作用却有相似之处．控制論給了我們一整套統一的概念，它在每門学科中都有相应的概念，因此可以建立各門学科之間的准确关系．

如果发现了两門学科之間的关系，結果就会使两者互有显著的促进，这类事例在科学史上是屢見不鮮的(参閱 6-8 节)．如无窮小分析与天文学，病毒与蛋白分子，染色体与遺傳，便是我們馬上就会想到的一些例子．当然，各門科学之中不能用任何一門科学来証明另一門科学的定律，但它們彼此間可以提供很有用和很重要的綫索．到 6-8 节中我們还要回头再来談这个問題．这里只要指出，控制論能告訴我們机器、大脑和社会之間，有許多有趣且有意义的相似之处．它給我們一种共同語言，使我們能把一門学科中的发現和研究成果立即应用到另一門学科上去．

1-7． 复杂系統　控制論第二个独特的好处是，对于那些以复杂著称而其复杂性不容忽視的系統，控制論給出一种新的科学研究方法．而复杂系統在生物界中則是司空見慣的．

对比較簡单的系統来說，控制論方法并不比那些早已熟知的方法有什么特別了不起的优点．只有当所研究的系統很复杂，这种新方法才显出它的功效．

今日科学正处于一种分水岭的时代．两世紀以来，科学所研究的系統，如果不是本身就是簡单的，那也是可以分解为簡单組成部分的系統．一个世紀以来，人們一直接受了“每次变动一个因素”这种教条式的研究方法，这一事实足以說明，为什么迄今为止，科学家所重視的大多是許可用这种方法来研究的那些系統；因为对复杂系統来說，这种方法是根本不适用的．一直到了二十年代，出現了費歇尔 (Ronald Fisher) 的著作，再加上在农田上的实驗，人們才认識到有些复杂系統是不可以用每次变动一个因素的办法来研究的，因为各种因素具有这样大的能动性，而且彼此間又有这样密切的联系，以至只要变动一个因素，就会立即引起別的一些(甚或很多很多)因素的变动．直到最近，科学上还是回避这类的系統，而只注重研究那些簡单的，特別是那些可約的系統 (見 4-14 节)．

但在研究某些系統时，复杂性是不可能完全回避的．动物的大脑皮质組織、过着一种社会生活的蟻穴、乃至人类的經济系統，

就其在实践上的重要性而論，都是非常突出的．因此現今我們眼看着精神病患者不得治愈，眼看着社会衰退經济失調，而科学家除了对其研究对象的复杂性咋舌之外别无他法．但今日的科学已开始把“复杂性”本身作为一个題目来研究了．

研究复杂系統的种种方法里，控制論是数一数二的．我們平常从那些簡单机器如鬧鈡和自行車等得来的关于机器的概念，是含糊的，限于感性方面的，控制論对这都舍弃不用，而另树严格的基础．剛学的时候（例如讀本书的头几章时），也許你会覚得所讲的尽是些老生常談和妇孺皆知的道理，但这不过是为了使控制論的基础显得寬广而且牢靠．打好了这些基础，就可以一步步深入学控制論，不致于象过去搞复杂系統特别是打算研究象活的大脑这种对象时，一开始就夹杂許多模糊不清的概念．

对于想研究并控制那些本身极端复杂的系統的人，控制論有可能提供有效的方法．首先它可以告訴我們什么是办得到的（因为过去許多研究之所以失敗，可能就是由于試图做那些明明是办不到的事），其次是它給出能用来对付各种特殊情况的一般策略，其价值是可用試驗来証实的．現今由于其本身的复杂性而使我們束手无策的許多病变，如心理上的、社会上的以及經济上的許多病变，我們有可能从控制論中得出对付它們的根本办法[1]．在本书的第三篇中，作者并不自詡能完善給出这一类方法，但作者打算給出建立这种方法的基础，并指引讀者往正确的方向去找。

[1] 在一种新的科学方法刚产生和获得初步成功的时候，人們往往对之寄予过奢的希望，如 Laplace 之对于微分方程那样．控制論的确可以提供一种新的极有效的工具，但是不大可能专靠它来找出解决社会問題和經济問題的根本办法．N. Wiener 对这方面曾发表过相当清醒的見解（参看 N. Wiener 著“Cybernetics”，34 頁及 181—191 頁）——譯者注。

第一篇 机　构

我們认为某一事物所具有的种种性质，归根到底无非是給它的行为起些名字.

(Herrick)

第二章 变　化

2-1. 控制論中最基本的概念是“差异”. 不但是两个事物之間可以分辨出差异来，就是同一事物也会随着时間的推移发生变化. 差异这一概念的应用范围，現在不必多讲，以后各章中会有許多事实来說明的. 随着时間的推移而产生的一切变化，自然都属于差异之列，因为无論是植物的生长，行星的衰老，机器的运轉，这里面都含有从一种状态轉到另一种状态的变化. 所以我們第一步是要讲“变化”这一概念，不但要把它讲得更确切，还要丰富它的内容，而且进一步把这概念提炼成一种数学形式，因为根据經驗，若要从这概念得出有用的結果，非得把它化成数学形式不可.

变化往往是漸进的或者說是連續产生的，也就是說，常常是以无穷小的步伐进行的. 但是，若我們要考察无穷小的变化步伐，那就要用到純粹数学上較难的一些概念，因此我們要根本避免讲这样的变化. 反之，在本书的任何地方，我們都假定所讲的变化是在一段时間內分成有限步跳着产生的，而且每变一次(或者說跳动一次)，所产生的差异也是有限的，而不是无穷小的. 我們假定，变化是每次跳过一定数量而发生的，好比銀行存折里的存款数目，每次变化的数額起碼是一分錢. 通常在这个世界中变化都是連續发生的，我們这样把变化都当作是一步步跳着发生的，看来似乎很不自然，但在这本导論中，这样假定之后有很大的好处，而且也不象初步所設想的那样不自然. 因若差异是以有穷的大小跳着发生的，

那末以后可以看到，所有重要的問題，就都可用簡单的計算来解决，就容易断定所得的解答是对还是不对．如果我們一开头就来研究連續的变化，那我們就常要拿无穷小与无穷小相比，或者要考察无穷多个无穷小加起来会得到什么，而这些問題并不都是很容易回答的．

分步跳动的变化（或离散变化）可以轉到連續的变化，这有一个簡单的办法，并且在实用上足够准确，就是作一个图，用一个个的点来表示分步变化中的各个数值．然后只要設想这样作出的点无限增多并且彼此无限靠攏，就容易看出，所考察的分步变化如果化成連續变化，它会取什么样的形式．

事实上，即使我們只限于讲有穷的分步变化这种情形，也可以把事情面面都讲到，一点不会遺漏．因为，如果我們确切知道每步按一定大小的差异来变会得出什么結果，那也就可以考察差异小得多时的情形．确切掌握了这一情形，又可进一步考察差异更小的变化．对每一步的情形都有了把握之后，我們就可以一直推下去，直到我們能掌握变化的趋势为止；然后我們可以說出每一步变化的差异趋于零时的极限情形是怎么样的一种情形．事实上，数学家要想确切知道連續变化究竟是怎样进行的时候，也常是用这个方法来研究的．

所以，单讲有穷差异这种情形，还是什么都能学到手的；它可以提供簡单而又明确的基础知識；而且，如果需要的話，还总可以把它化为連續变化的形式来讲．

这个問題我們在 3-3 节中还要再談．

2-2. 其次，提一下以后不断要用到的几个概念．拿皮肤被阳光晒黑这个簡单的例子来讲吧．这里，有一件东西——皮肤，受到一种因素——太阳——的作用，从而变黑了．那个受到作用的东西——皮肤，我們叫它做原象或被映元素，那个起作用的因素叫做算子或作用素，而由原象或即被映元素（皮肤）所变成的那个东西（晒黑的皮肤），叫做映象（变换象）．所发生的这一变化，可以明确地記为

白皮肤→黑皮肤

这一变化叫做轉移.

变　换

2-3. 但如果变化过程只含单独一次轉移，这种情形未免太簡单了．經驗告訴我們，要使变化这一概念成为有用的概念，必須把它扩大，使算子所能作用的范圍不限于一个原象，并使每个原象在这算子的作用下各自起独特的轉移．例如，“在日光曝晒”这一算子的作用下，可以引起好些不同的轉移，其中有

寒士→温士

沒感过光的胶卷→感过光的照相底片

彩色涂料→褪色涂料

对于一批原象的这样一批轉移，整个說来就叫做变换.

变换的另一个例子是象下面这样的一种編碼法：把文件中每个拉丁字母变换为字母表中的下一个字母，而最后的一个拉丁字母 Z 则变为 A；这样 CAT 就变成 DBU．这个变换可用下表来規定：

$$A \to B$$
$$B \to C$$
$$\cdots$$
$$Y \to Z$$
$$Z \to A$$

应該注意到，我們規定这变换时，并沒有說到它“本身”是什么，也沒有提到产生这变化的物理原因，而只是給出了一批被映元素（原象），并指出每个原象变成了什么．做变换时所关心的，是发生了什么变化，或者說变成了什么东西，而并不关心为甚么会发生变化．同样，虽然有时我們也会对算子（作用素）本身能有一些认識（例如我們懂得一些有关日光的知識），但这些知識常常是无关宏旨的；我們在这里所必需知道的，只是它（算子）怎样对原象（被映元素）起作用；即是說，我們只必須知道算子所产生的整个变换.

为了排印方便起見，上面讲过的这一簡单变換也可以表示成这样：

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & \cdots & Y & Z \\ B & C & \cdots & Z & A \end{matrix}$$

以后我們就用这种形式，作为表示变換的标准形式。

2-4. 封閉性　算子(作用素)作用在一批原象(被映元素)上时，便得出另一批元素，叫做原来那批元素(原象)的映象。在許多情形下，构成映象的这一批元素，可能都已包含在原来那批被映元素(原象)中，換言之，变換的結果可能并沒有产生什么新的元素。例如，在变換

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & \cdots & Y & Z \\ B & C & \cdots & Z & A \end{matrix}$$

中，下面一行里的元素都是在上面一行里已經有的。如果发生这种情形，我們就說这一批原象在所說变換作用之下是封閉的。“封閉性”是指变換与一批原象之間的一种关系；如果換成别的变換或換成别的一批原象，封閉性就很可能不存在了。

我們要知道，檢驗一批原象在某变換作用之下有沒有封閉性，不必涉及产生变換的原因，而只要从变換本身的前前后后去找。因此，即使我們对发生变化的原因一无所知，我們也可以檢驗变換是不是封閉的。

題 1: 若原象是正整数 1, 2, 3, 4，算子是“加上三”这样一步运算，便得下列变換：

$$\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}$$

問这变換是不是封閉的？

題 2: 設原象是拼音字母里具有相应希腊字母的那些字母(即是除掉了 j, q 等以外的字母)，算子是“把每个拼音字母換成与它相当的希腊字母”。問这一变換是不是封閉的？

題 3: 下列各变換是不是封閉的：

$$A{:}\ \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ a & a & a & a \end{matrix} \qquad B{:}\ \downarrow \begin{matrix} f & g & p & q \\ g & f & q & p \end{matrix}$$

$$C{:}\ \downarrow \begin{matrix} f & g & p \\ g & f & q \end{matrix} \qquad D{:}\ \downarrow \begin{matrix} f & g \\ g & f \end{matrix}$$

题 4: 有一变换，只有一原象，而且是封閉的. 試照題 3 的形式把这变换写下来.

題 5: 怪人国际象棋会的 C 先生有一种下棋法，对白子和黑子的每一可能位置（除了已被逼攻住的那些位置以外），都严格規定下一步最好的下法是什么. 因此，这种下棋法規定了把棋子从一个位置变到另一位置的一种变换. D 先生研究了 C 先生的下法之后，肯定这一变换是个封閉变换，而且还肯定知道 C 先生总是照着这个方法下棋的，他就立刻下一大笔赌注，要和 C 先生决一胜負. 你想 D 先生的这个賭注下得对不对?

2-5. 一个变换中，可能有无穷多个原象；例如以下的变换：

$$\downarrow \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \end{array}$$

这里我們用几个点表示往下还要这样无限地继續下去. 讲无穷集合会使我們遇到困难，而本书中則只限于讲些簡单明确的理論. 要檢驗这样的变换是不是封閉的，就要看我們是否能指出某个特定的映象（原象經变换作用后所变成的元素），使它不是能从原象中找得出来的. 在上面所举这个变换的例子中，任何一个特定的映象，比方說是 142857，显然都可以在原象中找到. 因此，上述这一无穷变换是封閉的.

題 1: 在变换 A 中，原象是从 2 起的所有偶数，映象是它們的平方：

$$A: \downarrow \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 6 & \cdots \\ 4 & 16 & 36 & \cdots \end{array}$$

問 A 是不是封閉的?

題 2: 在变换 B 中，原象是所有正整数 1, 2, 3, …，而每一映象是原象的末位数碼字，例如 $127 \rightarrow 7$，$6493 \rightarrow 3$. 問 B 是不是封閉的?

2-6. 記法　有許多变换，如果把其中的原象和映象全部写出来，就会显得很长很不方便. 如在 2-3 节中，我們已經不得不用点子……，来表示那些沒有一一写出的原象. 以下关于变换的簡写法，仅仅是为了实用方便而讲的，并且这里还要預先声明，不管用的簡写記号是什么，变换的意义还是一样，还是要照着 2-3 节中所規定的那样来理解. 現在就来讲讲变换的几种不同的縮写法. 不过要記住，它們仅仅是些速写記号，并不給变换带来什么新的意义，变换的意义还是跟前面几节中所讲明了的一样，不多也不少.

如果所有原象与其所对应的映象之間存在簡单的关系，那末

要規定这种变换就很簡单．例如，我們可把題 2-4-1 中的那个变换改写成一行：

原象 → 原象加三

因此整个变换可用一个总的法則来規定，这法則可以用符号进一步簡写成

原象 → 原象 + 3

同时再指出原象是 1, 2, 3, 4 这些数．这个写法平常还可以再进一步簡縮为

$$n \to n+3 \qquad (n=1, 2, 3, 4)$$

讀者对上面各式中的"原象"二字或字母 n (两者的意义完全一样)，可能会覺得有些不够清楚．但是，如果我們脑子里想一想，比方說 2 这个数是怎样变的，那末这时式中的"n"就代表 2 这个数，而不代表什么别的，于是这个式子就告訴我們：这里的 2 要变为 5．但即使不給 n 以任何特定的数值，这同一个式子还仍然可用．这时它就代表整个变换．因此，这样記虽然不够清楚，但实际用起来是不会发生混淆的，因为我們可以根据上下文来看出式子所要表明的意义．

題 1： 試把下列变换簡写成一行：

$$\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \end{matrix}$$

題 2： 用同样的簡写法来記以下各变换：

$$\text{a:}\begin{cases}1\to 7\\2\to 14\\3\to 21\end{cases}\qquad \text{b:}\begin{cases}1\to 1\\2\to 4\\3\to 9\end{cases}\qquad \text{c:}\begin{cases}1\to 1\\2\to 1/2\\3\to 1/3\end{cases}$$

$$\text{d:}\begin{cases}1\to 10\\2\to 9\\3\to 8\end{cases}\qquad \text{e:}\begin{cases}1\to 1\\2\to 1\\3\to 1\end{cases}\qquad \text{f:}\begin{cases}1\to 1\\2\to 2\\3\to 3\end{cases}$$

若用字母 n 来記原象，也常需要用另一記号来表示它的映象．我們可以用一种方便的办法，在原象的記号上打一撇，作为映象的記号．因此，不管 n 是什么，我們可以写出 $n \to n'$．例如，若把題 1 中的原象記为 n，則該題中的整个变换可写为 $n'=n+10$ $(n=1, 2, 3)$．

題 3： 設原象是 5, 6, 7 三个数，变换是 $n'=n-3$，試把这变换全部写出来．这变换是不是封閉的？

题 4: 把下式所规定的各变换全部写出来:

$$\text{(i)}\quad n'=5n\ (n=5,\ 6,\ 7)$$

$$\text{(ii)}\quad n'=2n^2\ (n=-1,\ 0,\ 1)$$

题 5: 設原象是 0 与 1 之間的一切数(包括分数),而 $n'=\frac{1}{2}n$,問这变换是不是封閉的?(提示:用 n 的一些典型数値 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, 0.01, 0.99 来試做,一直試到你完全相信你所給出的解答沒有錯誤为止)

题6 (續上題): 原象同上題,而 $n'=\frac{1}{(n+1)}$,問这个变换是不是封閉的?

2-7. 以上所讲的各个变换都有这么一个特点,即它們都是"单值"的. 一个变换,如果它把每个原象都变成唯一的一个映象,这种变换就称为单值的(其它类型的变换也可能有,而且也是重要的,以后讀到 9-2 节与 12-8 节就可知道). 例如,变换

$$\downarrow\begin{matrix} A & B & C & D \\ B & A & A & D \end{matrix}$$

是单值的;但变换

$$\downarrow\begin{matrix} A & B & C & D \\ B\text{或}D & A & B\text{或}C & D \end{matrix}$$

却不是单值的.

2-8. 单值变换中,有一类在特殊情况下頗为重要的变换,这就是一一对应的变换(簡称一一变换). 在一一变换中,所有的映象都是互不相同的. 于是在一一变换下,不仅可从每个原象定出唯一的映象(由于变换是单值的),而且还可以倒过来从每个映象定出它的唯一原象来. 这一类变换的例子是

$$\downarrow\begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ F & H & K & L & G & J & E & M \end{matrix}$$

这个例子給出的是一一变换,但不是封閉变换.

另一方面,如题 2-6-2(e) 中的变换就不是一一变换,因为其中"1"这个映象并不对应唯一的原象. 凡单值的而并非一一的变换,以后将称为多一变换.

题 1: 設原象是 0, 1, …9 这十个数碼字;映象是 $\log_{10}(n+4)$ 的小数点后第三个数碼字(例如,若原象是 3,則可依次求出 7, $\log_{10}7$, 0.8451, 5; 故得 $3\to5$). 問这

是个一一变换还是个多一变换？（提示：依次求出 0，1 等等的映象；用四位对数表查）

2-9. 全同 有一个重要的变换，很容易被初学者忽略掉，把它当作是无关紧要的．这就是全同变换．全同变换并不引起什么变化，其中每个映象都跟原象相同．如果原象都是各不相同的，这种变换必然是一一变换．题 2-6-2(f)中的变换，就是这种变换的一个例子．这种变换的简記法是 $n'=n$.

题 1：自动售貨机硬币箱里原有的硬币数目可以看作是原象，售貨过程中顾客把硬币投入箱内，这可以看作是对原象（箱内原有硬币数目）施行一种变换．若箱上装有指示器，能指出对箱内錢数作了什么样的变换，又若指示器上指出这一天的变换是全同变换，那末这里的全同变换說明什么售貨情况？

题 2：板球戏中，一場里的跑程会使一方的得分从一个数值变到另一个数值．每一不同的跑程数就規定了一个不同的变换：例如，若某場有 8 个跑程，則变换由 $n'=n+8$ 規定．在这种游戏中，对全同变換有什么名称？

2-10. 用矩陣表示变換 所有这些变换，都可写成一种簡单的图式，把其中的关系明确表示出来（这种表示法在第九章以及以后各章特别有用）．

我們可以把原象写成一横行，把可能有的所有映象排成直的一列，写在前一横行左下方，使这一行一列构成矩形的两个邻边．这样，如果給出了一个特定的变换，我們就可从第一列起填写这張矩形表．如果写在这一列上端的原象，經所給变换的作用后变为左边某一行的元素，那就在第一列与該行相交的方格上填写“+”号（或填写“1”也可以），在第一列的其他各格上就填“0”．例如，变换

$$\downarrow\begin{array}{ccc} A & B & C \\ A & C & C \end{array}$$

就可按这种方式写为

↓	A	B	C
A	+	0	0
B	0	0	0
C	0	+	+

矩形表左上角的箭头表示轉移的方向．这样，每一变换都可用一矩形表——矩陣来表示．

如果变换的范圍很大，也就是說，如果变换所涉及的原象和映象数目很多，那就可以在矩陣中写……来表示，只要能使人理解它們所表示的意义就行．例如，若 $n'=n+2$ 这一变换中的原象是从 1 起的所有正整数，那末这一变换可写为

↓	1	2	3	4	5	…
1	**0**	0	0	0	0	…
2	0	**0**	0	0	0	…
3	+	0	**0**	0	0	…
4	0	+	0	**0**	0	…
5	0	0	+	0	**0**	…
…	…	…	…	…	…	…

(这里，我們把从左上角起那个主对角綫上的一些“0”号都排成黑体，为的是让讀者易于看出每个符号之間的位置关系)．

题 1：在表示全同变换的一个矩陣中，“+”号的位置是怎样分布的？

题 2：下列三个变换中，(a)哪个是一一变换；(b)哪个是单値变换但不是一一变换；(c)哪个不是单値的？

(i)

↓	A	B	C	D
A	+	0	0	+
B	0	0	+	0
C	+	0	0	0
D	0	+	0	+

(ii)

↓	A	B	C	D
A	0	+	0	0
B	0	0	0	+
C	+	0	0	0
D	0	0	+	0

(iii)

↓	A	B	C	D
A	0	0	0	0
B	+	0	0	+
C	0	+	0	0
D	0	0	+	0

题 3：封閉变换的矩陣，是不是可能(a)有一行全是 0？(b)有一列全是 0？

题 4：有变换 $n'=2n$，以整数为原象，試写出它的矩陣，并說明矩陣中“+”号分布的情况．問这些“+”号是不是在一直綫上？試画出方程 $y=2x$ 的图形；这图形与矩陣中“+”号所形成的綫是否有相似之处？

题 5：拿一副扑克牌，洗好了，抽出 16 張来，花朝上，排成方形．然后按下法写出一个四行四列的矩陣．在矩陣中，凡相应位置是黑花牌的地方画上“+”号，是紅花牌的地方画上“0”号．照这样写出几个矩陣，并照题 2 那样来說明它們是哪一类的矩陣．

題6: 若变换是封閉的而原象只有两个,問表示这种变换的不同矩陣可能有几种?
題7(續上): 其中有几个是单值的?

重复变化

2-11. 变换的乘幂 对只作用一次的封閉单值变换,我們已經讲过了它的种种基本性质;但这种变换可以接連做好几次,产生出一系列的变化,有如一个能动系統在起作用时所經历的一系列变化一样. 现在我們来讲这样的一系列变化是怎样产生的,以及它們有些什么性质.

假設我們用2-3节中的第二个变换(称它为甲),把一篇英文文件編成密碼. 如果編成了密碼的这一文件再用变换甲来继續編成新的密碼,这会得出什么結果?所得出的这个新密碼是可以逐字追查出来的. 例如,第一次編碼后,A变成B,而在第二次編碼后又变成了C;因此,做了两次变换甲之后,A变成了C,用以前的写法来記,这就是$A\to C$. 同样$B\to D$;一直到$Y\to A$和$Z\to B$. 因此,做了两次变换甲所产生的变化,正好同做了一次以下的变换

$$\downarrow\begin{matrix} A & B & \cdots & Y & Z \\ C & D & \cdots & A & B \end{matrix}$$

所产生的变化一样. 因此,給定了每一封閉变换之后,总可以得出另一封閉变换,使后者只做一次所产生的結果,同前者做两次所产生的結果一样. 这时,我們說后一变换是前一变换的"平方",或者說它是前一变换的某次"乘幂"(見2-14节). 如果把前一变换記作T,則可把后一变换記为T^2;暂时我們只把T^2看作是后面那个新变换的一种簡明而又方便的記号.

題1: 若A是$\downarrow\begin{matrix} a & b & c \\ c & c & a \end{matrix}$,$A^2$是怎样的?

題2: 試写出一全同变换,再看看它的平方是怎样一个变换.

題3: (参看題2-4-3) A^2是怎样的?

題4: 若对正整数作两次变换$n'=n+1$,得出什么一个变换来? 把答案用$n'=\cdots$这种縮写形式写出来(提示: 先照2-4节中那样把变换全部写出来).

題5: 若对正整数作两次变换$n'=7n$;結果是什么变换?

題6: 若K是下一变换

$\downarrow$	A	B	C
A	0	+	+
B	0	0	0
C	+	0	0

那末 K^2 是怎样一个变换? 試把結果写成矩陣形式(提示: 先把 K 和 K^2 写成別的形式,然后再化成矩陣形式)。

題 7: 試把变换 W 做两次:

$$W:\downarrow\begin{matrix} f & g & h \\ g & h & k \end{matrix}$$

2-12. 讀者做过上面这一批练习題中的試驗之后,可以明白变换之有无封閉性是一件很重要的事. 象 W 那样一个不封閉的变换是不可能重复做两次的; 因为, 虽然它把 h 变成 k, 但它对 k 起什么作用却沒有規定, 因此做了一次变换之后就不能再做下去了. 因此,沒有封閉性的变换好比是部出了毛病的机器,只动了一下,往后就不再动了.

2-13. 消去法 若变换用縮写形式給出, 如給出 $n'=n+1$, 則在求它两次作用的結果时,要是只用前面讲过的方法来做,就得把变换詳詳細細写一遍,写出每一个原象,然后做出两次变换,再重新把它化为縮写形式. 但是我們还有一种快一点的做法. 为举例說明这种做法,試把对正整数的变换 T: $n'=n+1$ 全部写出来,表明施行两次变换所得的結果,并写出它的一般記号:

$$\begin{matrix} & & 1 & 2 & 3 & \cdots n & \cdots \\ T: & \downarrow & & & & & \\ & & 2 & 3 & 4 & \cdots n' & \cdots \\ T: & \downarrow & & & & & \\ & & 3 & 4 & 5 & \cdots n'' & \cdots \end{matrix}$$

n'' 記 n' 的映象,正如 n' 記 n 的映象一样,这是很自然的.

这里所給的变换是 $n'=n+1$. 再做一次这个变换时, n'' 也必定比 n' 多 1. 所以 $n''=n'+1$.

为定出 T^2 这个单独做一次的变换, 必須有一个式子, 直接用原象 n 来表示最后的結果 n''. 要找出这一式子很簡单, 那就是只要从 $n''=n'+1$ 和 $n'=n+1$ 两个方程消去 n', 做一次代数消去法就行了. 用第二式代替第一式中的 n', 得到(用括号表示推算过

程）$n''=(n+1)+1$，这就是：$n''=n+2$。

这个方程正确地給出了施行 T^2 时原象（n）与映象（n''）間的关系，从而也規定了 T^2。为使所用記号一致起見，这方程应再改写为 $m'=m+2$。做一次这个变换（因此在它的标准記号里，映象只用 m 加一撇来表示）所产生的变化，同做两次 T 所产生的变化一样。这里把 n 改为 m，仅仅是改个名称，为了避免混淆。

这法則是很一般化的。例如，若变换是 $n'=2n+3$，則做第二次变换所得出的第二次映象 n''，同做第一次变换所得出的映象 n' 之間，有 $n''=2n'-3$ 这种关系。把第一次变换的 n' 代进去，利用括号表示代入步驟，得

$$n''=2(2n-3)-3=4n-9$$

这样，做两次变换所产生的变化，跟做一次变换 $m'=4m-9$ 所产生的变化一样。

2-14. 高次幂 求变换的高次幂很簡单，这只要添加 n''' 等記号来表示高次映象，然后再消去各个中間映象就行了。例如，我們来求做三次变换 $n'=2n-3$ 的結果，把它表示成单独一次变换。先写出在做每一步变换时，映象与原象間的关系式：

$$\begin{aligned} n' &= 2n-3 \\ n'' &= 2n'-3 \\ n''' &= 2n''-3 \end{aligned}$$

我們来看第三式，把第二式的 n'' 代进去，得

$$\begin{aligned} n''' &= 2(2n'-3)-3 \\ &= 4n'-9 \end{aligned}$$

現在再把 n' 代进去：

$$n'''=4(2n-3)-9=8n-21$$

所以，做三次变换 $n'=2n-3$ 所产生的变化，同做一次变换 $m'=8m-21$ 的結果一样。若原来的变换 $n'=2n-3$ 是 T，那末 $m'=8m-21$ 这一变换就是 T^3。

題1： 从 $n''=3n'$ 及 $n'=3n$ 消去 n'。做出相应于所得結果的变换，并驗証做两次 $n'=3n$ 的結果跟这一样。

题 2: 从 $a''=a'+8$ 及 $a'=a+8$ 消去 a'.

题 3: 从 $a'''=7a''$, $a''=7a'$, $a'=7a$ 消去 a'' 及 a'.

题 4: 从 $k''=-3k'+2$, $k'=-3k+2$ 消去 k'. 再象题 1 那样加以驗証.

题 5: 从 $m''=\log m'$, $m'=\log m$ 消去 m'.

题 6: 从 $p''=(p')^2$, $p'=p^2$ 消去 p'.

题 7: 以大于 1 的所有正数为原象,各求一变换,使做一次这个变换的結果,同重复做两次下列各变换的結果一样:

$$\text{(i)}\quad n'=2n+3$$

$$\text{(ii)}\quad n'=n^2+n$$

$$\text{(iii)}\quad n'=1+2\log n$$

题 8: 以正負整数及 0 为原象,求一变换,使做一次这个变换的結果等价于做三次变换 $n'=-3n-1$ 的結果. 照题 1 那样来驗証.

题 9: 求一变换,使其做一次的結果相当于做两次、三次及更多次变换 $n'=\dfrac{1}{1+n}$ 的結果(注意: 十二世紀数学家斐波那吉 (Fibonacci) 所发現的数列 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, 可以取前两項之和作为紧接着的下一項, 把数列不断写下去; 如 3+5=8, 5+8=13, 8+13=…等等).

题 10: 若以所有正有理数(即所有分数)为原象,問做两次变换 $n'=\dfrac{1}{n}$ 的結果是什么?

题 11: 試做下面这个几何变换. 在紙上画一段直綫,記其两端为 A 及 B,以这段直綫的长度和位置作为原象. 規定变换法則 R 如下: A' 是 AB 的中点; 把綫段 $A'B$ 繞 A' 按逆时針方向轉过一直角得 B' 点, 則以 A' 及 B' 为两端的綫段 $A'B'$ 是对 AB 做变换 R 后的映象. 画出直綫段 $A'B'$, 并継續做变换 R, 一直做到你已經深知这一系列变换的性质和作用为止.

题 12* (續上题): 如果你熟悉解析几何,可取 A 为 (0, 0),取 B 为 (0, 1),然后再求不断做变换 R 所得的极限位置(提示: 把 A 点最后位置的 x 坐标写成一級数, 然后求級数之和;对 A 的 y 坐标也这样做).

2–15. 記法 在原象右上角加一撇 (′) 来表示映象, 这种記法只有在仅仅考察一个变换时才是方便的; 如果有好几个变换作用在 n 上, 那末 n' 这个記号就表示不出它是哪个变换作用的結果. 为此, 我們有时常用另一种写法: 如果 n 是原象, 而对它做了变换 T, 則映象可記为 $T(n)$. 这由两个字母和一付圓括号組成的整个記号, 只表示一个量. 这一点, 在沒有用慣以前可能会引起混淆. 这里的 $T(n)$ 实际上就是 n' 的化身, 并且对它还可以做变换 T, 同时为着使写法一致起見, 就得把第二次做变换 T 的結果写成 $T(T(n))$, 而这又不过是 n'' 的另一种写法; 但是, 在实际写的

时候，写这么許多括号太麻烦了，因此外面的一层括号常常省去，并且几个 T 也可合并起来，把 $T(T(n))$ 或 n'' 写成 $T^2(n)$. 下面的习题不过是为使讀者熟悉用这种写法，因为这里沒有什么新的道理，不同的只是記法.

题 1：若 $f: \downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$. 問 $f(3)=?$ $f(1)=?$ $f^2(3)=?$

题 2：若 $g(6)=8$, $g(7)=7$, $g(8)=8$；試把以 6, 7, 8 为原象的变换 g 整个写出来.

题 3：若 $h(\alpha)=\gamma$, $h^2(\alpha)=\beta$, $h^3(\alpha)=\delta$, $h^4(\alpha)=\alpha$, 試把以 α, β, γ, δ 为原象的变换 h 全部写出来.

题 4：若 $A(n)=n+2$, 問 $A(15)=?$

题 5：若 $f(n)=-n^2+4$, $f(2)=?$

题 6：若 $T(n)=3n$, $T^2(n)=?$（提示：如果你对回答这个問題沒有把握，可把 T 全部写出来）

题 7：若 I 是全同变换，t 是其一原象，問 $I(t)$ 是什么？

2-16. 变换的乘积　以上我們看到，若对原象 n 作一次变换 T 后，所得映象 $T(n)$ 还可以当作原象，再对它做一次变换 T，得出 $T(T(n))$，这个記号我們把它簡写为 $T^2(n)$. 同样，这 $T(n)$ 也可以当作是做另一变换 U 的原象，結果得出映象 $U(T(n))$. 例如，設 T 及 U 分別是

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ b & d & a & b \end{matrix} \quad 及 \quad U: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ d & c & d & b \end{matrix}$$

那末 $T(b)$ 是 d，而 $U(T(b))$ 是 $U(d)$ 即是 b. 按照这一次序来做变换 T 及 U 的結果，便定出一个新的变换 V，这变换很容易求出如下：

$$V: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ c & b & d & c \end{matrix}$$

我們称 V 是 T 与 U 的乘积或复合. 它不过給出了把 T 和 U 依次各做一次所得的結果.

若先做 U，那末就上例来說，$U(b)$ 是 c，而 $T(c)$ 是 a；于是 $T(U(b))$ 是 a，这就跟 $U(T(b))$ 不同了. 当按这另一次序做 U 及 T 时，乘积是

$$W:\downarrow\begin{matrix} a & b & c & d \\ b & a & d & b \end{matrix}$$

为便于記忆，V 可記为 UT，W 可記为 TU．讀者应时刻記住：若改变乘积中的次序，它所代表的变换可能就要改变．

还要指出的是，V 也許是不可能做的，这在 T 的映象并非 U 的原象时便是如此，这时我們說变换 V 不存在．

題 1： 把变换 U^2T 全部写出来．

題 2： 把变换 UTU 全部写出来．

題 3： 用矩陣来表示 T 及 U，然后按矩陣的乘法（前一矩陣按行，后一矩陣按列，取某行与某列的对应元素相乘后相加，得矩陣乘积中該行該列处的元素）把这两矩陣相乘，并令"+"号与"+"号相乘及相加的結果仍为"+"号；把所得的矩陣乘积称为 M_1．再用矩陣来表示 V，称它为 M_2．試比較 M_1 及 M_2．

2–17． 动态图　在这以前，我們研究每一变换的方式，主要是在考察：对可能有的一切原象，单独做一次这个变换后，会得出什么結果来（例如見 2–3 节）．另一种研究变换的方式是（只对封閉变换适用），只取一个原象，但接連不斷地重复对它做多次变换，然后考察所得結果．这个方法相当于研究能动系統时所采取的下列步驟：让它从某一个初始状态开始，往后不加干涉，随它自己按着其內在性质所决定的方式，通过一系列的变化变下去．例如，我們可以用这种方式，来考察在自动电話机上撥了一个号碼之后所产生的一系列变化；也可用这个方法，在蟻群旁放小块肉，然后考察这以后接着发生的一切变化．

为确定起見，假如說我們来研究下面这个变换：

$$U:\downarrow\begin{matrix} A & B & C & D & E \\ D & A & E & D & D \end{matrix}$$

如果对 C 做 U，然后継續把 U 作用到 $U(C)$，再作用到 $U^2(C)$，再作用到 $U^3(C)$ 等等上，便得出 $C, E, D, D, D, \cdots$ 以后一直是 D 的一系列結果．如果同样地把 U 作用于 A，那便得出 $A, D, D, \cdots$ 这一系列往后仍然一直是 D 的結果．

这些結果可以画成图，使得本来要經过仔細考察才能发现的

結果，在图上一眼就能看得出来．为要作出一个变换的动态图，可把一批原象各自写在适当的地方，然后在元素和元素之間用箭头連接起来，并且按照这样的法則来画箭头：当且仅当 A 在做过一次变换后变为 B 时，才画上一个从 A 到 B 的箭头．这样，上述的 U 給出了如下的动态图：

$$C \to E \to D \leftarrow A \leftarrow B$$

（至于 D 变到 D 这个从自己出发又回到自己那里的箭头要不要画出来，这是可以随便的，只要不致引起誤会就行了）．

如果动态图是由一些扣子（原象）和連在扣子間的一些綫（各步变移）构成的，那末这动态图就象个网絡，可以拉成种种不同的形状，如

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] C \arrow[r] & E \arrow[dr] & & & B \arrow[r] & A \arrow[dd] & \\ & & D & \text{或} & & & \\ B \arrow[r] & A \arrow[ur] & & & & D & E \arrow[l] & C \arrow[l] \end{tikzcd}$$

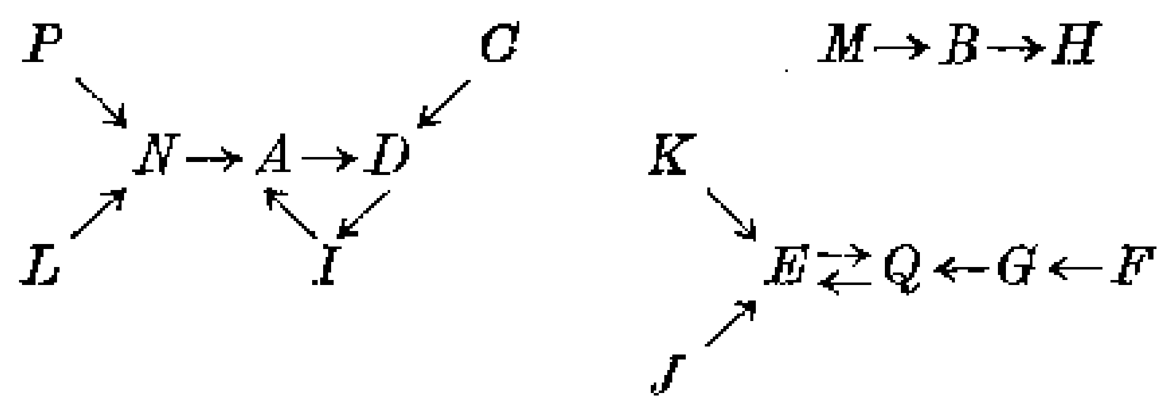
等等．只要其中的連法一样，我們并不把这各种外形不同的动态图看作是不同的．

把变换 U 不断作用于 C 而产生的元素（C, E, D, D, …这一串元素），跟动态图中自 C 起每次按箭头所示方向一步步移动时所經历过的各个状态，显然总是彼此相对应的．看着一个点在一条綫上的移动，比計算 $U(C)$, $U^2(C)$ 等等自然要方便得多（特别是在变换相当复杂的情形下），因此动态图常是表示变换的最方便办法．在图上按箭头方向移动的点，以后将称为示象点．

当变换变得复杂一些的时候，就开始出现一种重要的情况．例如，設有变换

$$T:\downarrow \begin{array}{cccccccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K & L & M & N & P & Q \\ D & H & D & I & Q & G & Q & H & A & E & E & N & B & A & N & E \end{array}$$

它的动态图是



不論从哪一点开始，照着箭头方向看下去，总会看到示象点到达某一終点状态，或进入一个不断循环的圈子．这种动态图好比一个国家的水渠图，它指出：从任何一处出发的一滴水或一个示象点，最后会到达什么地区．这些地区叫动态图里的洼(basin)；这些事跟我們以后在第五章中要讲的所謂“稳定性”显然有些关系．

题 1: 画出题 2-4-3 中变換 A 及 B 的动态图．

题 2: 若动态图表示的是全同变換，怎样能一眼就看出来？

题 3: 对一些簡单的封閉的一一变換画出它們的动态图．从这些图里可以看出什么特征来？

题 4: 設变換 V 的 n' 是 $\log_{10}(n+20)$ 的小数点后第三个数碼，而原象是 0, 1, …, 9 这十个数碼，試作 V 的动态图．

题 5(續上题): 从 V 的动态图尽快讀出 $V(8)$，$V^2(4)$，$V^4(6)$，$V^{64}(5)$是什么．

题 6: 若变換是一一的，动态图上能否有两个箭头指向同一点？

题 7: 若变換是多一的，两个箭头能否指向同一点？

题 8: 作一些象 T 那样的封閉单值变換，画出它們的动态图，指出它們有什么特征．

题 9: 若变換是单值的，一个洼里能否有两个循环圈？

第三章　确定性机器

3-1. 讲完了有关变换的这一批明确的概念之后，现在可以来讲讲它們的第一种用法：从前面所讲有关变换的各种性质，同現实世界中所見的机器及能动系統的性质之間，找出确切的类似之处.

关于“机器”的定义以那一种說法为最好，这当然是大可爭論的問題. 我們把行为与封閉单值变换相同的那种机器，定义为确定性机器(determinate machine). 所以确定这一名称，是因为它用起来合适，沒有一处地方会跟我們直觉上认为合理的情况出入过大. 其所以是合理的眞正原因并不在于本节中所讲的，而在于本书中以后所讲的一切，而且也許还在于更往后的发展.

应該指出的是，定义是就行为的方式来下的，而不是按物质方面的东西来下的. 本书所要研究的是关于系統的具有确定性的那些方面的性质，那些循正常的而且可以重复出現多次的路綫运动的性质. 我們要研究的是确定的这一面，而不去关心对象的实质(这問題在第一章中已談到了).

在这第一篇中，整篇都要讲确定性机器，而且跟它們有关的变换都假定是单值的. 一直要到 9-2 节才讲那种一般类型的，只有在統計意义下才算是确定性的机器.

第二个限制是，本章所要讲的机器都是孤立的机器，即外界对它不产生积极作用的那种机器.

举一个簡单而典型的例子来說明什么是确定性机器. 比方說有个重的鉄架子，装有一些重的鉄球，球与球之間以及球与架子之間都用彈簧連起来. 如果周圍都是靜止不动的，把那些球一次一次地重复拉到确定的位置再把它們放开，那末球的每次运动都是

一样的，就是說，每次都循一样的路綫运动．所以整个系統从一确定的“状态”开始，每次都經历相同的一系列状态．

所謂一个系統(一組东西)的一种状态，是指有确定标志的任何性质或情况，只要它每次出現时都能被我們辨认得出来就行．每一个系統当然具有許多可能的状态．

把鉄球放开之后，它們的位置(P)就要經历一系列的变化 P_0，P_1，$P_2\cdots$；按照这一观点，我們自然可以說这系統經受了如下的变换：

$$\downarrow\begin{matrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \cdots \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \cdots \end{matrix}$$

很明显，这变换中的原象即相当于系統的各个状态。

这一系統随时間的推移而取的一系列位置，相应于变换的多次乘幂所产生的一系列元素(見2-14节)．这一系列的状态就定出了一个变迹或行为綫．

其次，一个确定性机器是不能从一个状态过渡到两个不同的状态的．这事实相当于：变换中的每次轉移都是单值的．

現在仅仅为了开始說明我們的問題，再举几个例子，一步步地加入一些复杂的因素．

一瓶細菌培养液里引入細菌之后，液内的細菌数就每时每刻地增加起来．如果在开始的时候細菌数目每小时增一倍，那末每隔一小时后这数目的变动状况，就会跟变换 $n'=2n$ 的各次幂在 n 变化时的变化情形一样．

如果細菌的生长情况有些别扭，不大正常，那末这系統的行为——即继一确定状态以后出現什么状态的規律——就会变得不怎么确定．所以，現实系統中的“确定性”显然相当于变换的单值性，即相当于变换中一給定原象的映象是唯一确定的这一性质．

其次，比方說有个上好了发条而且走得很准的表．假如現在它的时針和分針在表面上某一位置，那末过了一定的时間以后，这些針又会指向一种确定的位置．表針的位置就相当于变换中的元素．作一次变换就相当于經历过一段单位时間；这种变换的形式

显然是 $n'=n+k$.

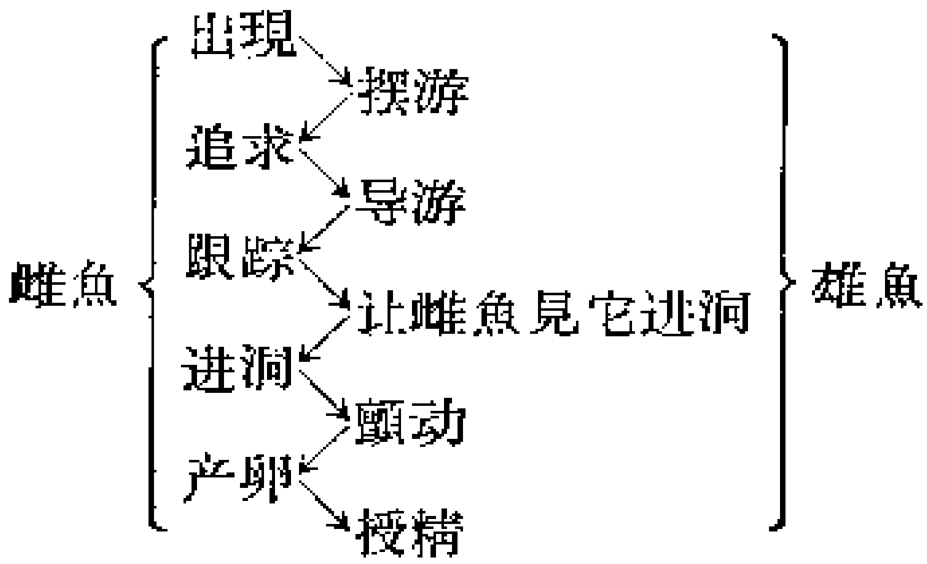
在这一情形下，起变换作用的算子从本质上說是无法规定的，因为究竟哪些是起作用的因素，并沒有明显或是自然的界限. 这里的算子包括了使钟表开动的一切因素：主发条（或重力），齿輪材料黃銅的剛性，軸承間的滑潤油，发条鋼的性质，鉄原子間的作用．如我們在 2-3 节中所說过的，算子"本身"究竟是什么，常是說不太清楚的，是有些可以随便說的，是个科学价值很少的概念．而变换則是十分确定的，因为它只跟变化的事实有关，而不涉及那多少带些假設性的原因.

在生物界中，象钟表那样作有規則的一系列变动的例子是不容易找到的．但有些疾病的有規則的发展过程也有和这类似的地方．例如在发明磺胺药物以前，肺部在感染大叶肺炎后經历如下这一系列典型的变化：感染→实化→紅色样化→灰色样化→消散→健康．这一系列状态就相当于一个明确规定的变换，尽管这不是对于数的变换.

再来看一块加热的鉄錠，設它的各部分具有各不相同的然而是确定的温度．如果鉄錠周圍的环境是不变的，那末随着时間的推移，温度就会按一定的規律变化．这鉄錠在任一刻的状态是一組温度数值（即一矢量，见 3-5 节）．每次从一个状态变到下一状态的过程 $S_0 \to S_1 \to S_2 \to \cdots$ 就相当于一变换的作用，把原象 S_0 依次轉化为 $T(S_0)=S_1$, $T^2(S_0)=S_2$, $T^3(S_0)=S_3$, $\cdots$，等等.

再举一个比較复杂的例子，以着重指出，要使变换能明确規定，不必一定是关于数值的变换，这个例子就是动物反射行为的某种形式．例如雌雄三鰭棘魚与它的一部分环境形成一种确定性机器．丁伯根（Tinbergen）在其"論本能"一书中把这系統的各相继状态描述如次："雄魚或雌魚的每一反应是由其对偶的前一反应傳給的．图中每一箭头表示一因果关系，而这因果关系經过用一假魚和眞魚做試驗后証明确是存在的．雄魚的第一个反应'摆游'是由于見到雌魚体上某种特征而激起的，例如，'鼓起的肚子'和某些特殊的活动．雌魚見到雄魚体上的紅色和'摆游'后，就游向雄魚．

这就使雄魚掉轉头迅速游向魚洞. 这又引起雌魚跟踪游去，从而引起雄魚把头竄进洞口. 它的这一动作又引起雌魚的下一反应：雌魚也进入洞口……. 这又引起雄魚的顫动，引起产卵. 穴內有了卵，就使雄魚能授精". 丁伯根把这一系列状态总結如下：



这样他就描出了一典型的变迹.

别的例子不必再举了，因为凡可应用控制論的各門学科都可举出許多这样的例子来，每一讀者都可依照他的专业举出相应的例子來.

把机器和变换联系起来之后，我們就开始研究这一把現实具体系統的动作联系到符号式子的性质上去的学科. 整个"数学物理"所研究的就是这学科的一部分. 但本书中所用方法的应用范圍比这还要寬广些，因为数学物理所研究的系統主要偏重于連續的和綫性的系統(見 3-7 节). 这一限制就使数学物理的方法很难用到生物学問題上，因为生物学中的系統几乎都是非綫性的，常是不連續的，甚至在許多情形下还是不可度量的，即不能用数表示的. 以下(見 3-4 节)各习題按先后依次表明：本书中所用极一般的方法，与数学物理中常用的方法間，有哪些程度上的差别. 这些习題之所以重要，还因为它們說明了变換与現实系統間的对应关系.

总結：每一机器或能动系統都有許多可分辨的状态. 如果机器是确定性的，則在环境不变时，它現时的状态就会定出下一阶段的状态，或者說，使下一阶段只能呈現独一无二的状态. 状态的这

些轉移相当于变换作用于原象而产生的轉移，每一状态相应于一特定的原象。机器在下一阶段所轉移的每一状态则相当于原象的映象。变换的各次乘冪，在机器中相应于記录次一阶段状态时所經过的单位时間的整倍数。而机器既不能一下子变到两种不同的状态，所以相应的变换必須是单值的。

題：从下列各项作业中取出能动系統，以时間为算子，指出彼此間有原象与映象关系的两种状态：

(a) 烹調；(b) 失火；(c) 柴油机器；(d) 胚胎的生长发育；(e) 气象学；(f) 内分泌学；(g) 經济学；(h) 动物习性；(i) 宇宙学(不需要說得十分精确)。

3-2. 封閉性 現在可以看出封閉之所以重要的另一个原因了。典型的机器总可以让它自己开动一个时期，做試驗者唯一要做的事就是不去管它！这就是說，变换可以取随便多少次乘冪，沒有什么限制。一般說，只有封閉变换可以这样取任意次乘冪。例如变换 T

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \\ e & b & m & f & g & c & f \end{matrix}$$

不是封閉的。$T^4(a)$ 是 c，$T^5(a)$ 是 m。但 $T(m)$ 沒有規定，因此 $T^6(a)$ 就沒有規定。若以 a 为初态，那末做五步变换后，这变换乘冪就沒有規定了。因此，代表机器的变换必須是封閉的。这一事实的全部意义将在 10-4 节再讲。

3-3. 离散式机器 到这里，讀者也許会责問：大多数的机器，不管是人造的或天生的，它們的动作都是連續进行的，而上面所讲过的那些变换却都是一步步跳着变的，或者說是离散式的。但是用这些一步步跳着变的变换来开始讲解这一門学科却是最好的办法。其最大的好处是完全不会出現奥妙难懂或含糊的东西，因为它們的每一性质，或是有或是沒有，毫无模棱两可的余地。这样把道理变得簡单容易讲，就可以使我們能放心一步步推論下去，而要使往下推出的結果可靠，这一种保証是必須要有的。这一問題是我們在 2-1 节中已經讲过了的。

在任何情形下，一步步跳着变和連續变的差別实际并不重要。

只要把每一步弄得足够小，我們就可以使一步步跳(离散式)的变化任意近似于連續变化．而且还要提起的是，观察自然現象时，我們几乎总是分成一段段的时間来观察的；自然現象的"連續性"只是观察者在想象中賦予那个現象的，而不是由无穷多个瞬时实际观察得来的結果．因此，眞实的情况是：自然体系是逐点观察来的，而我們的变換也是逐点来代表它們的．所以两者間沒有什么不适合的地方．

3-4. 机器与变換　如果我們把机器中一个状态接着一个状态的行为，跟动态图(見 2-17 节)中箭头从一个元素連到另一元素的情形比較一下，那末机器与变換的相似之处就变得十分明显了．要是某机器与某一变換完全相应，那末可以发現：

(1) 机器所能有的某一状态唯一地对应了动态图中某一元素，反之也一样．这对应是一一的．

(2) 机器由其內在能动性质而經历的每一批相继而变的状态，有图上連接各相应元素的不中断的一批箭头与之对应．

(3) 如果机器变到某一状态之后就保持着那一状态(一种平衡状态，見 5-3 节)，那么图上相应于該状态的元素就不会有从它出发的箭头(也沒有第二个箭头連向它，見 2-17 节)．

(4) 如果机器最后在一串状态內定期作循环变化，那末图上就有一圈箭头連接相应各元素．

(5) 开机器的人把机器关了，或从任意选定的一个新的状态开始发动机器，則在图上相应于示象点从一处移动到另一处，但这种移动是由数学家任意决定的，而不是由箭头所定的．

当一现实机器和一变換之間有这种关系时，則說变換是机器的标准表达式，并說机器是变換的具体化．

題 1：培养液里注入一千个細菌，它們的数目每隔半小时增加一倍．試写出相应变換．

題 2(續上)：求第一步，第二步，第三步…，第六步之后的 n．

題 3(續上)：(i)用直角坐标作普通函数图形，表明細菌数目随时間而变化的情形．(ii)作动态图，表明系統状态的变化情形．

題 4：液內含 10^9 个細菌及杀菌药，使每分钟能杀灭剂内所存菌的 20%．試将余存菌

数的变化情形用一变换来表示。

題5(續上)： (i)求1, 2, 3, 4, 5分钟后殘余的菌数． (ii)若时間无限延长下去，这个数目的极限是什么?

題6： 設一变换的n'是$\log_{10}(n+70)$在四位对数表里最右的一个数碼(經舍入后)，試作这变换的动态图，問相应机器的行为是怎样的?

題7(續上題，但其中的70%换为90%)．

題8(續上題，但70%换为10%)： 問这图綫中有多少洼?

題9： 設一国的居民每十年减少10%，但同时期内增加一百万居民．試用变换来表示每十年的变化，假定其中的变化是以有限步发生的．

題10(續上)：若該国于某时有二千万人口，問其后三个十年間的人口是多少?

題11(續上)：問人口到达一个什么数目后会保持不变? 試用隨便那种方法找出答案来．(提示：当人口保持不变时，試問那十年之初的人数与十年末的人数之間有什么关系?——原象与映象之間有什么关系?)

題12： 蝌蚪每天体长增加1.2毫米．試用变换表示这一变化．

題13： 細菌在培养液内生長，假定这就是由于食料变成了細菌的緣故；因此若有足够供10^8个細菌的食料，而現时的細菌数是n，那末所含的食料与10^8-n成比例．如果质量作用定律成立，則每隔一定时間后，細菌增多的数目将与下一乘积成比例：(細菌数)×(余剩食料)．在这一培养液内，細菌每小时增加$10^{-8}n(10^8-n)$．試用一变换来表示每小时的变化．

題14(續上)： 若現时培养液内有10,000,000个細菌，求1, 2, …, 5小时后的細菌数．

題15(續上)： 作一普通直角坐标系内的图綫，表示細菌数随时間变化的情况．

矢　　量

3-5. 在以上各节中，我們把一机器的“状态”看作是一种整个都已为我們所知道的东西，不必再細加規定的．这一类状态在生物系統中特别常見，因为在这种系統中，示性的形态，表情或型式都可以有把握地察知，不必分析它們的細节．例如3-1节中丁伯根所描述的就是这一类状态．又如气候学家观察到的云的类型也是这样的．讀者念完本章前几节后就可明白，**对这类未經分析的状态，也可以有严密的理論．**

然而要規定有些系統的状态常需要(不管是出于什么理由)作进一步的分析．例如无綫电广播里有个新聞节目，报道馬拉松賽跑过程中某一小时的“状态”；报告中就要报道每个运动員在那一

小时在路上什么地方(位置). 运动員的这一批位置,就定出了賽跑的"状态". 因此,整个賽跑的"状态",就由各个运动員在同一时刻所处的各种状态(位置)給了出来. 象这一类"复合"的状态是很普通的,本书今后要研究的多半就是这种状态. 我們要指出,現在我們开始接触到整体与部分間的关系了,这是在机器中最为重要的一种关系. 因此,整体在某一时刻的状态,常可由其每个部分在該时刻所取的一批状态来給定.

象这样的量叫做矢量,它是一种复合量,有一定数目的分量. 矢量可簡記为 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,表明其第一分量有值 a_1,第二分量有值 a_2,等等.

矢量本质上是一种变量,但比初等数学里取平常数值的那种变量复杂些. 这是"变量"一概念的自然推广,是极为重要的,特别对本书所要讲的內容来說更是如此. 我們希望讀者尽可能熟悉这一概念,在日常生活里随时应用它,直到你感到这概念已象变量那样平常而且有了很好的理解. 如果我說,讀者对矢量这一概念的理解程度如何,可以决定他往下閱讀本书的收获多少,那末这样說是一点也不过分的.

現在举几个大家都熟悉的例子.

(1) 船只在任何时刻的位置都不能用单独一个数来确定;为此必須要用两个数:它所在的緯度与經度. 因此,"位置"是一矢量,含有两个分量. 例如,一只船的位置可用矢量(58°N, 17°W)来給定,这位置在24小时內可能作如下的变迁:(58°N, 17°W)→(59°N, 20°W).

(2) "某处的天气"不能用单独一个数来規定,而可取足够多的分量来把它規定到任意完备的程度. 天气的一种近似表达法是用矢量(气压表高度,溫度,云量,湿度),于是天气的一种特定状态可能是(998 mbars, 56.2°F, 8, 72%). 如果气象預报員預报的未来天气状态能与实际相符,那末他的报导是准确的.

(3) 我們平常填写的大多数"登記"表,实际上就在于要确定一个矢量. 例如一張如下的汽車登記表:

車齡：……………………
馬力：……………………
車身顏色：……………

无非就是依上下次序写出的一个矢量.

两个矢量，只有当它們的每个相应分量都分别相等时，才算做是相等的. 例如若有矢量(w, x, y, z)的每一分量都是数，而且有两个这样的矢量$(4, 3, 8, 2)$及$(4, 3, 8, 1)$，那末这两个矢量是不相等的；因为它們的第四分量 2 与 1 是不相等的. [如果两矢量的分量，从性质或个数上說都不相同，如$(4, 3, 8, 2)$与(H, T)，那末它們根本就不能互相比較.]

当这样的一个矢量受变换的作用时，那末这作用也跟任何别的变换一样，只要記住原象即是整个矢量，而不是个别的分量(分量的如何变化当然也是变换定义中的重要部分). 例如，設“系統”由两枚硬币組成，每枚硬币有正反二面(例如有国徽一面算正). 这一系統可有四种状态，即

(正，正)(正，反)(反，正)及(反，反)

現在假如我的小外甥女不喜欢看見两个正面朝上，而总是把(正，正)翻成(反，正)，而且对别的摆法也要改一改. 那末她也許会作出如下的变换：

$$N:\ \downarrow\ \begin{array}{cccc}(\text{正},\text{正}) & (\text{正},\text{反}) & (\text{反},\text{正}) & (\text{反},\text{反})\\ (\text{反},\text{正}) & (\text{反},\text{反}) & (\text{反},\text{正}) & (\text{正},\text{正})\end{array}$$

作为对四个元素的变换来看，N 这一变换与以前各节所讲过的变换并无两样.

当然，对一批矢量的变换完全可以是任意的，但在自然科学里的变换常有些簡单性质. 其中各分量变化的情形，常常可用某种簡单的法則来描述. 例如，若 M 是

$$M:\ \downarrow\ \begin{array}{cccc}(\text{正},\text{正}) & (\text{正},\text{反}) & (\text{反},\text{正}) & (\text{反},\text{反})\\ (\text{反},\text{正}) & (\text{反},\text{反}) & (\text{正},\text{正}) & (\text{正},\text{反})\end{array}$$

那末我們可用这样的話来描述这一变换：第一个分量总是变的，而

第二个分量总是不变的.

最后，从以上所讲的一切，还沒有排除这样的一种可能性：矢量中的某几个或全部分量本身也可能是矢量！（如 6-3 节）但我們以后要尽可能避免討論这种太复杂的情形.

題 1：設以 ABC 为原象，算子为"把左边的字母移到右边"（例如 $ABC \to BCA$）. 試求多次施用这一算子所产生的变换.

題 2（續上）：用动态表示这一变换.

題 3：以 $(1, -1)$ 为第一原象，以"調换两数，并用 -1 乘左边的数"为算子，試求重复施用这一算子所产生的以后各元素.

題 4（續上）：用动态图表示这一变换.

題 5：第一个原象 x 是矢量 $(0, 1, 1)$；算子 F 規定为：

(i) 映象的左方分量等于原象的中間分量；

(ii) 映象的中間分量等于原象的右方分量；

(iii) 映象的右方分量等于原象的中間分量与右方分量之和.

例如，$F(x)$ 是 $(1, 1, 2)$，$F^2(x) = (1, 2, 3)$. 試求 $F^3(x)$，$F^4(x)$，$F^5(x)$. （提示：請与題 2-14-9 比較一下）

3-6. 記号　由上面最后这一习題，可見如果总要用話来規定变换，那就会显得多么費事. F 这个变换实际上是由三个同时施行的子变换組成的. 例如有一子变换作用在左方的数上，把它依次变为 $0 \to 1 \to 1 \to 2 \to 3 \to 5$，等等. 如果我們把三个分量称为 a，b 和 c，則作用在矢量 (a, b, c) 上的变换 F 就相当于各自作用在一分量上的三个子变换的同时作用：

$$F: \begin{cases} a' = b \\ b' = c \\ c' = b + c \end{cases}$$

这样，$a' = b$ 說明变换的左方数，即 a 的新值，是跟原象的中間数一样的；其它两式也可以有类似的解釋. 現在試举几个例来說明这种新方法；这里沒有用到新的概念，只是記号的一种新的用法.（希望讀者把习題都做一遍，因其中有些重要的地方是他处不会再提到的.）

題 1：若原象是 (a, b) 这种形式的，其中一个原象是 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$，今若对此原象重复作变换 T：

$$T:\begin{cases}a'=b\\ b'=-a\end{cases}$$

求由此所产生的各矢量(提示:求 $T\left(\frac{1}{2},2\right)$, $T^2\left(\frac{1}{2},2\right)$等等)。

題 2: 若原象是(v, w, x, y, z)型的矢量,U 是

$$U:\begin{cases}v'=w\\ w'=v\\ x'=x\\ y'=z\\ z'=y\end{cases}$$

試求 $U(a)$,这里 $a=(2, 1, 0, 2, 2)$.

題 3(續上): 作 U 的动态图,如果原象只限于 a, $U(a)$, $U^2(a)$等等。

題 4(續上): 如果再增加別的原象,动态图会有怎样的变动?

題 5: 設原象的一般形式是(g, h, j),变换 A 是

$$A:\begin{cases}g'=2g-h\\ h'=h-j\\ j'=g+h\end{cases}$$

求 A 作用在$(3, -2, 1)$上后所得的映象。

題 6: 甲乙两人約定用下法做賭錢游戏。每人把他所有的錢分成两半。賭博开始后,各人把自己所有的一半錢与对方的交换。然后再把各人所有的新錢数分为两半再照上法交换,这样不断做下去。若甲原有的錢数是 8,乙原有的錢数是 4.用矢量(8, 4)表示原象。試用你所知道的任何方法求出往后的各映象。

題 7(續上): 試仿照題 5 那样用方程来表示这一变换。

題 8(續上): 設丙丁两人也做同样的游戏,不过每人交給对方的是对方所有錢数的一半。若开始时丙有 30,丁有 34,問后来这一矢量会变得怎样?

題 9(續上): 試照題 5 那样用方程来表示这一变换。

題 10: 若題 8 开始时是另一种錢数,問誰总能贏錢?

題 11: 設水池內有两种微动物,一是作为食餌的,另一是捕吃这食餌的。捕食者每天要吃掉一食餌,同时自身分成两个。若水池中今天有 m 个食餌和 n 个捕食者,試用一变换来表示它們数目的变动情形。

題 12(續上): 这一变换的原象是什么?

題 13(續上): 若原来的状态是(150, 10),問头四天里它变成什么状态?

題 14: 設有某种摆按变换 T: $x'=\frac{1}{2}(x-y)$, $y'=\frac{1}{2}(x+y)$ 摆动,其中 x 是摆偏离鉛垂綫的角度,y 是它的角速度;x' 及 y' 各是两者在一秒鈡后的新値。若起始的状态是(10, 10);試求头 8 秒內偏离角的变化。(提示:求出 x', x'', x''' 等等,这些値是不是可以不用 y', y'' 等来算出?)

題 15(續上): 作一普通图綫(以 x 及 t 为直角坐标軸)表示 x 值随时間变化的情形。問这摆是不是有阻力的?

题 16: 在某一經济系統內，有新法律規定每年調整工資时工資增加的先令数（英国一种貨币輔助单位，每英鎊等于 20 先令）等于物价指数超出 100 的点数. 而工資对物价指数的影响是：每年終的物价指数要等于年初的工資率，試用变换来表示一年内工資水平与物价指数变化的情形.

题 17(續上): 若从本年开始工資是 110 而物价指数是 110, 試求以后十年内的工資与物价指数值.

题 18(續上): 作一普通图綫表示物价与工資变动的情况. 問这种法律好不好?

题 19(續上): 这一經济系統經过改变后，变换变为 $x'=\frac{1}{2}(x+y)$, $y'=\frac{1}{2}(x+y)+100$. 設开始时的工資与物价都是 110. 計算以后十年内的变化情形.

题 20(續上): 作一普通图綫表明物价与工資的变化情形.

题 21: 試比較題 18 与題 20 的图綫. 試用經济学中的术语来說明两者的区别.

题 22: 若題 19 中所設的經济系統突然遭到剧变，使工資跌到 80 而物价漲到 120，但以后随即保持如常，試求以后十年内的变化情形（提示：用 (80, 120) 作为原象）.

题 23(續上): 作一普通图綫表明剧变后工資与物价的变动情形.

题 24: 設有变换 T: $x_1'=2x_1+x_2$, $x_2'=x_1+x_2$; 間矢量 (x_1, x_2) 与矢量 (x_1', x_2') 間的这一变换 T 是不是一一变换?

[提示：若給定了 (x_1, x_2)，問 (x_1', x_2') 是不是唯一确定的? 反过来又怎样呢?]

题 25*: 設有 9 态系統，其分量为余数

$$\left.\begin{aligned} x' &= x+y \\ y' &= y+2 \end{aligned}\right\} (\text{Mod } 3)$$

試作它的动态图，并問其中有几个坑?

3-7. （本节初讀时先跳过去） 上节所讲是十分重要的，因为这是用数学物理方法来研究能动系統的入門. 我們十分希望讀者把所有习題全都做一遍，因为只有这样才能掌握其中的原理. 如果讀者这样做过了，那末他就更容易理解本节的意义，因为本节所讲的是上述方法的总結.

物理学家的第一步工作是举出变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 然后变换的基本方程可用以下的基本方法获得:

(1) 取第一变量 x_1，然后考察它会变到什么状态. 如果它是逐步变的，那末下一状态就是 x_1'，如果是連續变的，那末下一状态是 x_1+dx_1（在这情形下，他同样也可以考察 $\frac{dx_1}{dt}$ 的值）.

(2) 根据所知关于这系統的知識，并根据物理定律，用

$x_1, \cdots, x_n$(或其它必要因素)现时的值，来表示x_1'或$\frac{dx_1}{dt}$(即x_1将来)的值．这样，就得到如同

$$x_1' = 2ax_1 - x_3 \quad 或 \quad \frac{dx_1}{dt} = 4k\sin x_3$$

之类的方程．

(3) 对每一变量按上法做一次，直到写出整个变换为止．

这样得出的一组方程叫做所研究系統的标准表达式，它把系統中每个变量的未来值，表示为各变量的現值及任何别的必要因素的函数．对确定性能动系統的一切描述，都可归結为这一标准形式．

如果标准表达式中的函数都是綫性的(一次的)，那末它所描述的系統就叫綫性系統．

給定了一个初始状态，只要照着 3-9 节那样，求出变换的各次乘幂，就可以算出变迹或行为綫来了．

题 1*：試把(写成标准形式的)下列变换：

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = z$$

$$\frac{dz}{dt} = z + 2xy - x^2$$

化成一个变量x的三阶微分方程(提示：消去y，z以及它們的导数)．

题 2*：簡諧振蕩的运动方程常写为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = 0$$

試把它化为两个变量的标准形式(提示：把题 1 中的做法倒过来就行)．

题 3*：試把方程

$$x\frac{d^2x}{dt^2} - (1-x^2)\frac{dx}{dt} + \frac{2}{1+x^2} = 0$$

化为两个变量的标准形式．

3-8． 討論以上这些微分方程表示的变换之后，熟悉这种工具的讀者也将会覺得这才是表示时間作用(变换)的"正当"方法，而 2-3 节里那种沒有什么规则的离散的表格形式，初看起来似乎

有点不太恰当．但是应該知道，用代数式子来表示是一种有局限性的方法，只有在現象具有連續性时才可用(見 7-20 节)．而表格形式却是总能用的；因为表格形式包括了代数形式．这对于生物学家是相当重要的，因为他要研究的，是不能自然适于用代数形式表示的現象．如果遇到不能用代数形式表示时，他就应該記住，用表格形式来处理也能具有他所需要的一般性和严密性．本书中以后就要用各种方式来說明，生物系統可以怎样旣自然而又簡易地用表格形式来表示．

3-9． “不可解”的方程　从 3-6 节里的习題，可以肯定地看出：如果給定了一个封閉的单值变換，再加上初始状态，那末从該状态起的变迹就已确定(即是单值的)并且可以計算出来．因若初态是 x，变換是 T，則 x 的相继各值(即变迹)形成如下的序列：

$$xT(x),\ T^2(x),\ T^3(x),\ T^4(x),\ \text{等等}.$$

从給定的变換及初态推算出变迹这一步驟，在数学上叫做对变換的“积分”(当变換是象 3-7 节中的微分方程組时，这个术語特別最常用；这一步驟于是也叫做“解”方程)．

如果讀者做过了 3-6 节里所有的习題，他也許已經覺得：只要給他一个变換和一个初态，他就总能得出变迹来．但如果我在这里告訴他說有些微分方程是“积不出来”或“解不出来的”，那也希望他不要就此泄气．所謂“积不来”或“解不出来”，其意义純粹是技术性的，它只不过說：如果我們只限于用某些規定的数学运算，那末变迹就求不出来．特斯汀(Tustin)在他所著的“經济系統的机构”一书中，說明經济学家就需要研究那种所謂“不可解的”方程；而他告訴經济学家怎样实际从那种方程推求所需要的解[1]．

3-10． 相空間　当矢量的各分量是些取数值的变量时，变換可用几何形式来表示；比起以前所讲过的各种代数形式来，几何形式有时可把变換的某些性质表現得更加淸楚和明显．

---

[1] Arnold Tustin (生于 1899 年)是英国电机方面和自动控制方面的学者．在其所著 Mechanism of Economics System 一书中，利用电机工程上研究如何稳定电力系統的經驗与方法，来研究如何稳定經济系統的問題——譯者注．

举个例子，我們来看题 3-6-7 的变换

$$x'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$$

$$y'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$$

如果取 x 軸及 y 軸，則可把(8, 4)这样的每一矢量，用 x 坐标为 8 而 y 坐标为 4 的一点来代表。于是系統的初态可用图 3-10-1(I) 中的点 P 来代表。

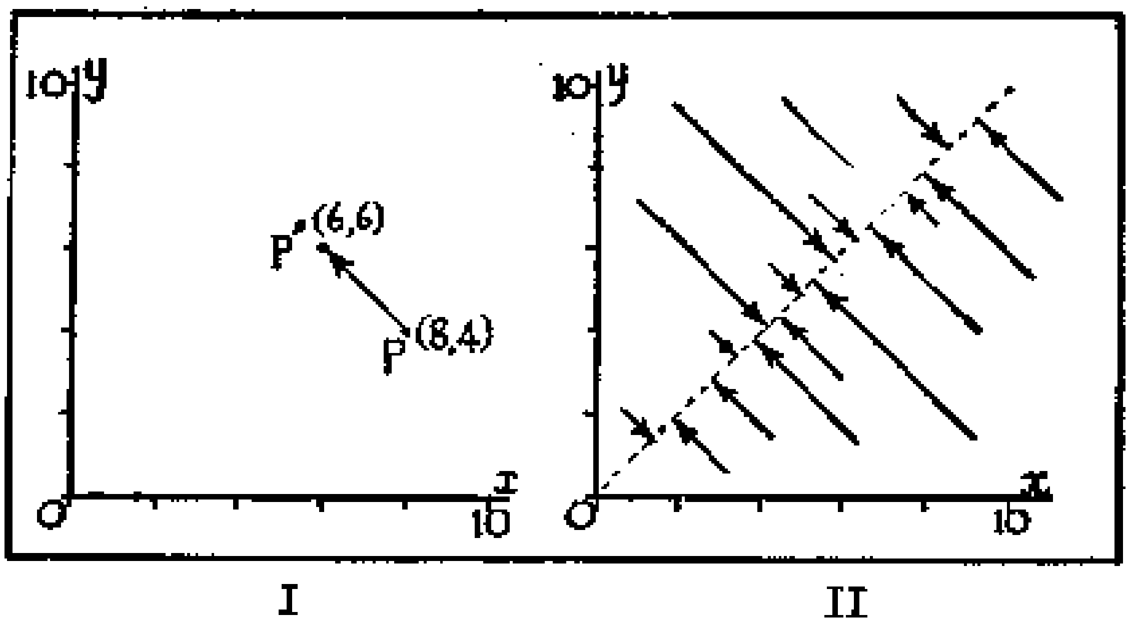


图 3-10-1

变换将矢量变为(6, 6)，从而把系統的状态变到 P'。当然这一变动无非就是 2-17 节动态图中所画出的变动，不过現时画在有直角坐标的平面上罢了。这个二維空間，它的点可用来代表原象与映象的，叫做所表示系統的相空間(但不能再象 2-17 节中那样可以把动态图看作"扣綫絡"那样随便拉动了)。

在同一图的 II 中，我們画出了足够多的箭头，表明任何一点变动时所起的变化。图中的这些箭头表示，如果拿别的一些箭头作为原象，那末它們会怎样变动的。这里很容易看出，而且也可用几何方法証明，图中的所有箭头可用一个法則来規定：若給定任一点作为原象，那末箭头就取 45° 角指向左上方(或右下方)，直到它跟直綫 $y=x$ 所表示的对角綫相交为止。

現在可以看出相空間(II)的用处来了，因为系統中各变迹的整个行程都可以在此一目了然，好比是凝成单独一个画面似的。

这样就可能非常容易地显出某一性质或証明某一定理，而在代数形式中则不是那么明显的.

在平面中的这种表示法，只有当矢量有两个分量时才可能.当它有三个分量时，用三維模型或用一透視图来表示也常是有用的.当分量个数超过三时，实际表示就不可能，但原理还是一样的，有时用草图表示这种多維結构也仍是非常有用的，特别是当我們所重视的是总的拓扑性质而不是細的性质时.

(“相空間”有时指未画箭头的空白空間，即可用来画上任何一組箭头的空間，或者指象II那样的一个图，含有相应于所說变换的一批箭头的. 至于究竟指的是哪一种，在提到时往往可从上下文的意义明显分辨出来.)

題： 就3-4及3-6节中的一些系統，用草图作出它們的相空間，只要能表明大致的情况就够了.

3-11. 什么叫“系統”？ 在3-1节中曾說过，任何现实的确定性机器或能动系統都对应一封閉的单值变换；在这以后的各节中，将有許多例子来表明这一論点. 但这样并不能說这种对应总是很明显的；正相反，若要普遍采用这一論点，常会遇到一些困难，这是我們現在所要考察的問題.

假如我們要考察一特定的現实能动系統——一个摆动着的摆，或是一瓶細菌培养液，或是一具自动駕駛仪，或是一个原始部族村落，或是心肺制备(heart-lung preparation)，而要找出相应的变换来. 比方說这是一个40厘米长的单摆吧. 把摆向一边拉开到30°，放开手，然后每隔四分之一秒，用一个合适的記录仪器記下它的位置. 設摆的偏角依次为30°(初态)，10°及−24°(在另一边). 因此，在这条件下，我們第一步估算出来的变换是

$$\downarrow\begin{array}{cc} 30^\circ & 10^\circ \\ 10^\circ & -24^\circ \end{array}$$

其次，象一个勤于追求真理的科学家那样做，我們再来查驗一下从10°起的变动情形：把摆拉到10°，放开手，在四分之一秒后发現它的位置在+3°！很明显，从10°起发生的变动不是单值的——系

統本身否定它是单值的．怎么办呢？

在科学研究中，这类困难是有代表性的而且是根本的：我們希望变換是单值的，但結果却偏不是这样．我們不能放弃对单值性的要求，因为那就等于放弃了作单值預測的希望．幸而經驗老早告訴我們怎样对付这种情况：这系統必須重新加以規定．

这里必須讲明怎样才算定义一个"系統"．我們也許会情不自禁地指指摆說："系統就是这个东西"．但这种方法有个根本的缺点：任何实物总含有不亚于无穷多的变量，因而也包括无穷多种可能的系統．例如就具体的摆說，它不仅有长度与位置，它还有质量、温度、电导率、晶体結构、化学杂质、某些放射性、速度、反射度、抗拉强度、表面潮潤层、挾带細菌数、光学吸收性质、彈性、外形、比重等等．不管誰說要研究"所有"的因素，都是不現实的，事实上也从来沒有人打算这样做过．所应做的是选取跟主要兴趣有关的那些事实并且来研究它們．

实际的情况是，在我們周圍的世界中，只有某些批事实才能使我們得出封閉而又单值的变換来．要找出这一批事实，有时容易，有时难．在科学史上，甚至在某一項个別的研究上，都有很多这种例子．要想发現这样的一批事实，往往在于用另一种方法来規定系統，来列出所要考察的一批变量．因此我們現在所讲的系統，并不指一件东西，而是指举出来的一批变量．这批变量可以更改，而实驗者最起碼的工作也就在于改动这一批变量（"把別的一些变量考虑进去"）直到他找到一批能給出单值性的变量为止．例如以上我們先把摆看作是只含"距鉛垂綫的偏角"这一变量的系統；但我們发現这样規定的系統得不出单值变換．如果我們要研究下去，就該試用另一种办法来規定这系統，例如，用下列矢量：

（偏角，摆质量）

但結果会发現这还是不行．于是我們再試用矢量：

（偏角，角速度）

然后可以发現，照这样規定的这些状态，可以使我們得到所需要的单值性（参閱 3-6-14 节）．

在有些情形下，找出所需变量是具很重要科学意义的事，例如牛頓的发現动量和 G. 霍布金斯 (Gowland Hopkins) 的发現維生素（只有确定了維生素的存在后，食物对豚鼠的影响才变成单值的）．有时所发現的变量从科学上讲是沒有多大意义的，例如得出单值結果的原因只在于除去了水中的某一杂质，或擰紧了机器中某顆松脫的螺絲釘；但单值性总归是至为重要的．

［有时，需要的是某些概率的单值性．这个比較微妙的要求将在 7-4 及 9-2 节中讲到．这跟以上所讲的不一样，它的意义只是：重要的变量只是概率本身，而不是給出概率的变量．例如，要是我們用科学态度来研究輪盘賭里的輪盘，我可能关心“下次轉到紅的概率”这一（数值在 0 与 1 之間的）变量，而不会关心“下次轉到什么顏色”这一（只有“紅”与“黑”二值的）变量．如果一系統包括后一变量，那末这一系統差不多肯定是不能預測的，然而包括前一变量（概率）的系統却是滿可以預測的，因为这概率有个定值，約等于 1/2．］

著者在“大脑設計”(Design for a Brain) 一书中所讲和所用的“絕对系統”，正是这样的一批变量．

現在可以懂得，为什么我們可以說每个确定性能动系統对应一单值变換（尽管我們不敢断然妄言現实世界含有什么东西，因为現实世界是充滿奇迹的）．我們之所以能作这种断言，乃是因为別种类型的系統不能用科学方法来研究，例如上述那种只含一个变量的摆即是一例，因而在科学上把这种系統置之不顾，当作是“杂乱的”或“无意义”的系統．但怎样的系統可以算作“象机器”的系統，怎样的系統不該研究，归根到底还得由我們自己来决定（这事在 6-3 节中还要再讲）．

第四章　有輸入的机器

4-1. 前一章中我們研究了变换与机器的关系，只把后者当作一个单元来看待．現在再要研究一下，在所有的变换之中，能找出什么样的事实，可以跟普通机器之受各种不同情况的作用而会改变其性能(如同起重机受人的操纵和肌肉受神經的控制)的事实相对应．为研究这一事实，必須先对所謂"参数"的意义有一正确理解．

在这以前，每个变换都是仅就它的本身来研究的；現在必須扩充我們的眼界，来考察一个变换与另一变换間的关系．經驗告訴我們，以前用过的同一方法(如2-3节中讲过的)，在这里正好也是够用的；因为从变换 A 变到变换 B 无非就是 $A\to B$ 这一变换(2-3节中說过，变换的元素可以是任何东西，只要它能被我們明确規定；因此，元素本身就是变换也并无不可)．例如，若 T_1，T_2，T_3 是三个变换，那末我們也可以規定变换 U 如下：

$$U:\ \downarrow\begin{matrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ T_2 & T_2 & T_1 \end{matrix}$$

所要避免的，只是不要把变换 T_1 所作的变换与变换 U 所作的变换混淆起来；不管在特定情形下用什么方法合适，我們在概念上必須把这两組变换区别清楚．

举一个象 U 这种变换的具体例子．比方說孩子有个玩具机器 T_1，零件是可以拆卸改装的．如果他把 T_1 拆为零件，再装成一架新的玩具机器 T_2 [这时，T_1 从其一个状态到另一状态(即 T_1 这机器开动时)所发生的变化，显然跟 T_1 到 T_2 所发生的变化有所区别]．

从变换变到变换，一般說可以是完全任意的．但我們比較更

关心这样的一种特殊情形：即有好些变换作用在同一組原象上的情形．例如，有四个公共原象 a, b, c, d，而变换則可能有三个：R_1, R_2, R_3：

$$R_1:\ \downarrow\begin{matrix} a & b & c & d \\ c & d & d & b \end{matrix} \qquad R_2:\ \downarrow\begin{matrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{matrix} \qquad R_3:\ \downarrow\begin{matrix} a & b & c & d \\ d & c & d & b \end{matrix}$$

这些变换可以写成較紧湊的形式如下：

$\downarrow$	a	b	c	d
R_1	c	d	d	b
R_2	b	a	d	c
R_3	d	c	d	b

这种写法以后将作为标准形式（本章中我們討論的仍然只限于封閉的与单值的变换）．

一个变换相应于一架具有特定性能的机器（3-1 节）；所以含有 R_1, R_2, R_3 三个变换的这一組变换，如果体現在同一件事物中，該事物就相应于具有三种性能的机器．現在問一架机器能否有三种不同的性能？

回答是能够的，因为机器的工作条件可以改变．許多机器上装有旋鈕或撥杆，只要把旋鈕撥到三种位置中的一个位置上，就可决定使机器有哪一种性能．例如，若 a 等等規定机器的状态，R_1 相应于旋鈕轉到 1 的位置，R_2 相应于旋鈕在 2 的位置，于是 R 的下标从 1 变到 2，正好相应于旋鈕从位置 1 变到位置 2；这也相应于机器从一种性能变到另一种性能．

从以上所讲，可見对这样的机器来說，“变化”这个詞可以指很不相同的两件事情．有从一种状态到另一种状态的变化，如同从 a 变到 b，这是机器的性能，是由机器内力的推动而产生的；还有从变换到变换的变化，比方說是从 R_1 变到 R_2，这是一种性能的变化，是由机器操纵者的意旨或其他外界因素而引起的变化．这两种变化的区别是带根本性的，千万不可忽視．

R 的下标（或者任何这一类記号，只要它的值能决定施行于原

象上的是哪一种变换)叫做参数．如果参数是些数，则必須把它跟那些規定原象(当原象是矢量时)的数严加区别．

一架现实机器，如果它的性能可以用这样一組封閉单值变换来表示的，那末它就叫有輸入的机器或叫变换器．它的标准表达式是一組变换．能变动的参数乃是它的輸入．

題1：若 S 是 $\downarrow\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$，試問对同样这两个原象可以作出几个封閉而又单値的变换?

題2：作出上題变换 R_1, R_2, R_3 的三个动态图綫．如果参数値改变，动态图会不会随之改变?

題3：如上題中的 R 在 R_1 处，代表原象的点从 c 处开始让它移动两步(移到 $R_1^2(c)$)；等代表原象的点到达这一新状态时，把变换变为 R_2，让点再移动两步，問它这时移到什么地方?

題4：求出作下列各变动的 R：(i) 把原象点从 d 变到 a 的；(ii) 把原象点从 c 变到 a 的．

題5：变换中的什么变动相当于一架具有一个固定变量的机器? 若系統

$$x' = -x + 2y$$
$$y' = x - y$$

中的变量 x 有恒定値 4，結果会得出什么变换?

題6：列出带一个参数的一批变换表，以說明虽可有一参数，但实际可以不起作用．

4-2．現在可以讲讲怎样用代数方法来表示带輸入的机器．三个变换

$$R_1:\ n' = n + 1 \qquad R_2:\ n' = n + 2 \qquad R_3:\ n' = n + 3$$

显然可以写成

$$R_a:\ n' = n + a$$

这种更紧凑的形式，并且这也告訴我們怎样进一步去做．在这个式子里，必須注意到，n 和 a 对于变换器的关系是很不相同的，而且它們之間的差別是无論如何不能忽視的．n 是原象，受变换的作用而改变；n 之为原象这一事实可由出现 n' 这一事实說明．a 是参数，它决定施加于 n 的是哪一个变换．因此，要使 n 变，必須先規定 a 的値．

当标准表达式变得較为复杂时，变量(原象)与参数可以这样来区别：只要記住，代表原象的記号总会以某种形式出现在等号

的左方，例如，若原象是 x，则左边有 x' 或 $\frac{dx}{dt}$ 等；因为凡变换总得告訴我們原象要变成的是什么．于是右边所有的量(但不是左边的)必須都是参数．下例可以說明这些事实．

題 1：若給 T_a 中的参数 a 以值 -1, 0, $+1$，則可得怎样的三个变换：

$$T_a:\begin{cases} g'=(1-a)g+(a-1)h \\ h'=\quad 2g+\quad 2ah \end{cases}$$

題 2：若 S 中的参数 α 取值 0 或 1，則可得出怎样两个变換：

$$S:\begin{cases} h'=(1-\alpha)j+\log(1+\alpha+\sin\alpha h) \\ j'=(1+\sin\alpha j)e^{(\alpha-1)h} \end{cases}$$

題 3：設在含参数变換(变換器) $n'=n+a^2$ 中 a 及 n 只能取正整数值，且在 $n=10$ 时开始作用．(i)若要使接連施行变換的結果 n 始終是 10，a 应取何值？(ii)若要使 n 每次增加 4 (即 10, 14, 18, …)，a 应取何值？(iii)若要使每次变換后 n 的值相継取 10, 11, 15, 16, 20, 21, 25, 26, …，(即，每次变換后的相差交互为 1 及 4)，a 每次应取何值？(iv)取哪些 a 值，能使 n 每次增加 1 增到 100，而后又一下子增到 200？

題 4：若 a 含参数变換有 n 个原象，并有一个能取 n 值的参数，又若(1)对給定参数值說，变換是一一的，(2)对一給定的原象說，参数值与映象的对应是一一的，那末这一組变換就使原象，映象与参数值三者之間成立三一的对应关系．这样的一組变換是

$\downarrow$	a	b	c	d
R_1	c	d	a	b
R_2	b	a	c	d
R_3	d	c	b	a
R_4	a	b	d	c

試証其中的映象必形成一拉丁方陣［即每行(列)必含所有映象中的一个，且每个映象只含一次］．

題 5：有一組含一个变量 V 的变換

$$V'=\frac{1}{10}\left(V+\frac{90}{P}\right)$$

其中 P 是参数．取 P 为某值 P_1，比方說是 10，然后接連多次施行这变換，求对 V 作无穷多次变換后所得出的极限，并把这极限叫做 V_1．再取 P 为另一值 P_2，比方說是 3，求出相应的极限 V_2．求出了几对这样的值(P 及 V 的极限值)之后，考察一下这各对数值之間有沒有什么規律．这里的 V 是不是有点象气体体积在压力 P 作用下那样改变？

題 6：什么样的含参数变換(以 a 为参数)，能使 n 取下列三組数值？

$$a=1:\ 0, \to 1, \to 2, \to 3, \to 4, \cdots$$
$$a=2:\ 0, \to 4, \to 8, \to 12, \to 16, \cdots$$

$$a=3:\ 0,\ \to 9,\ \to 18,\ \to 27,\ \to 36,\ \cdots$$

（提示：可用 $n'=n+a$，$n'=a^2n$ 等类看起来很象的式子試做。）

題7： 若 $n'=n+3a$，則 a 所取的値能否决定 n 每次变动的大小？

4-3. 当含参数变換式（变換器的表达式）中所含参数多于一个时，則不同的变换个数，可跟各参数所能取到的数値組合数一样多（因参数数值的每一組合都可定出一不同的变換），但决不会超过此数.

題1： 若变换器 U_{ab} 中的 a 能取値 0, 1, 或 2, 而 b 能取値 0 或 1, 求 U_{ab} 中所含的一切变换：

$$U_{ab}:\ \begin{cases} s'=(1-a)s+abt \\ t'=(1+b)t+(b-1)a \end{cases}$$

問这一組变换中含几个变换？

題2（續上）：若矢量 (a, b) 只能取値 $(0, 1)$, $(1, 1)$ 及 $(2, 0)$, 間上述变换器中可含多少变换？

題3： 在变换器 T_{ab} 中以 p 及 q 为原象（自变量）：

$$T_{ab}:\ \begin{cases} p'=ap+bq \\ q'=bp+aq \end{cases}$$

今設这变换对 $(3, 5)$ 开始作用．今若要使 $(3, 5)$ 这个 (p, q) 值一下子变到

的．但在生物系統中，参数的个数往往很多，而且整个一批参数也決不是很明显的．事实上，其中参数之多可以跟那些“直接影响生理組織”的变量一样．因此，参数中包含了生物体的所有生存条件．所以，在以下各章中，讀者应把所謂“輸入”理解为簡单机构中的少数几个参数，或理解为自由生存在复杂环境中的生物体的許多个参数（参数个数增多，并不一定意味着所述理論就不严格了，因有关各量都可以测定，其测定的精确度只要有足够的时間与資金可以毫无限制）．

題 1：一架电机有两个輸入接头可以接上电压，現在用一根导綫把两个接头永远連起来．如果这机器象題 4-3-3 中那样用 T_{ab} 表示，則机器的这样一种改变相应于 T_{ab} 的什么改变？

題 2：“生物体对环境起反应时，其肌肉是环境的輸入，其感覚器官是环境的輸出．”你同意这种說法嗎？

4-5． 暂态　电机工程师与生物学家試驗所研究的系統时，是采取不同方法的．工程师研究某一未知系統时，常是在輸入处不断地加上有規則变化的变量，而观察輸出的状态．例如在做富氏分析时，他用具一定頻率的規則正弦电位来不断激励系統，并观察輸出处的某些特征量；然后他再用另一頻率来試，并照样做下去；結果他从輸入頻率与相应輸出特征量間的关系，推导出系統的某些性质．在做这一試驗时，机器不断受到外力干扰．

生物学家所常用的方法，是在起初确定了条件或环境之后，不再用任何外力来干扰所研究的系統．例如，他在蟻群旁放一块肉之后，可能就不再作什么变动，而让系統的条件——参数——保持不变，观察这以后随之而发生的形式錯綜复杂的性态——个体的与集体的性态．

同生物系統中所观察到的情形相反，机械系統和电机系統的性能，在輸入端的变化停止以后，就相当快地进入一种相当稳恒的状态．机器在受到一些干扰力之后，若輸入随即保持不变，則机器对干扰的反应状态，叫做暂态．值得指出的是，象上述在蟻巢中所发生的一系列复杂事件，从工程师的观点来說是一种暂态．也可以用意义更广泛的詞句来定义暂态这个概念，即把它当作是恒定

条件下的变换器所产生的一系列状态(尚未开始重复出现的).

讲到暂态,作为是与以后重复出现的状态有所区别的状态,最好能明确指出它的終点在何处. 如果变换是离散的,那末可用下法严格定出它的长度:让所发生的一系列状态继續出現,直到重复現象已很明显,例如

ABCDCDCDCDC⋯ 或 HEFGGGGGGG⋯

然后从右边数起,数到第一个沒有循环的地方,記上"1",例如

AB¹CDCDCDCDC⋯ 或 HEF¹GGGGGGG⋯

其次,从"1"往右包含一整个循环的地方記上"2",例如

AB¹CD²CDCDCDC⋯ 或 HEF¹G²GGGGGG⋯

于是所謂**暂态**便是从初态起到标有2处的那一系列状态,就上例来說,暂态是:ABCD 或 HEFG.

以前我們有一种直覚的印象:在恒定条件下,复杂的系統会产生比簡单系統更加复杂的性能. 現在我們可以把这种直覚的想法叙述成严密的形式了. 只要作 N 个状态的动态图,立刻就可以认識到下一事实:若对 N 个原象不断施行一封閉的单值变换,那末**暂态的长度不会多于 N 个状态**.

题 1: 如要使重复出现的状态尽可能出现得晚些,那末动态图应該有怎么样的性质?

题 2: 就題 3-6-6 中的系統說,若初态是(8, 5),它的暂态是什么?

耦 合 系 統

4-6. 凡机器有一个基本性质,即它們都可以互相耦合. 两部或更多部完整的机器可以耦合构成一个机器;并且任何一架机器都可以看做是由其部件耦合而成的,而这些部件本身也都可以看作是些小的低級的机器. 在科学上,耦合是极端重要的一件事,因为当研究工作者做一項試驗时,他就把自身暂时跟他所研究的系統耦合起来了. 将机器与机器或部件与部件連在一起的这一步驟,在变换的記号形式中有什么相应的表示呢?"耦合"这一**运算**究竟包含什么东西呢?

在着手解答这一問題之前，先得指出：解答可以有好多种．机器的一种耦合方式是硬把它們連在一起，好比汽車出事后用鏈子把两辆汽車鎖在一起一样．但我們对这一类耦合的形式不感兴趣，因这种耦合的过程把汽車变得太厉害了．我們所需要的耦合，是不妨害每架机器內部工作的那种耦合，使耦合之后每架机器还是象以前那样的一架机器．

为要得到这种結果，就必須这样来安排耦合，使每架机器对其它机器的影响从原理上讲只限于改变后者的工作条件，或者說改变它的輸入．这样，如要使耦合成整架机器后的各个机器仍保持它們各自的性能，則必須在（給定的）輸入与輸出处耦合，其它的部件則保持如前，尽管这些部件是很容易装拆的．

4-7. 現在我們来細述耦合这一运算．設有一架机器（变換器）P 要跟另一架机器 R 連起来．为簡单起見，假定 P 对 R 有影响而 R 对 P 无影响，好比把微音器（話筒）接到放大器上，或是象运动神經的生成胚胎肌肉．这就必須把 P 的輸出处耦合到 R 的輸入处．于是 R 的性能，或者更明确地說是描述 R 各种状态的那个变換，就将依賴于 P 的状态并且随着后者的改变而改变．由此可知 R 必須有参数或輸入，而这些参数在每一瞬时的值必是 P 的状态的某一函数．为确定起見，設 R 这一机器或变換器包含 4-1 节中的那三个变換，即：

$\downarrow$	a	b	c	d
R_1	c	d	d	b
R_2	b	a	d	c
R_3	d	c	d	b

而 P 含有对 i, j, k 三个状态的下列变換：

$$P:\ \downarrow\begin{matrix} i & j & k \\ k & i & i \end{matrix}$$

現在我們这样来連接 P 与 R，即規定 P 在其某一状态时，R 的参数 α 应取何值．假如我們規定这样的关系 Z（也是个变換，是单值

的但非封閉的)：

$$Z:\begin{cases} P\text{ 的状态}: & \downarrow \begin{matrix} i & j & k \end{matrix} \\ \alpha\text{ 的值}: & \begin{matrix} 2 & 3 & 2 \end{matrix} \end{cases}$$

(P 与 α 的关系故意弄得不太規則，为的是要强調指出过程中的細节是一点沒有限制，完全可以由作耦合的人随意安排的.) 然后再假設——这一假設对正常耦合是基本的——P 及 R 这两架机器是按一共同时程运行的，因而它們的改变是同步的.

現在这两架机器构成具有完全确定性能的一架新机器. 例如，設整个机器的初态是 R 在 a 处而 P 在 i 处. 由于 P 在 i 处，R-变换是 R_2 (由 Z 規定). 这 R_2 就使 a 变为 b；然后 P 的 i 变到 k；因而 a 及 i 这两状态就确定不移地变到 b 及 k. 現在再重复这样讲一遍. P 在 k 处，R-变换将还是(由 Z 規定) R_2；于是 b 将(被 R_2)变到 a，而 k 将(被 P)变到 i. 这剛好使整个系統回复到初态 (a, i)，因而整个系統就将終于依这个循环不断运轉.

如果我們用 3-5 节中的方法，并且认識到整个机器的状态无非就是含两分量的矢量 (x, y)，其中 x 取 a, b, c, d 中的一值，而 y 取 i, j, k 中的一值，那末整个机器的性能就显得更加清楚了. 这样整个机器就有 12 种状态，而由上述可知 (a, i) 这一状态就經历下列各变化：

$$(a, i)\to(b, k)\to(a, i)\to\text{等等}$$

題 1：若整个机器包含 12 种状态 (x, y) 的变换是 Q，試把 Q 完全作出。

題 2：作出 Q 的动态图. 其中有多少个洼?

題 3：用以下的变换 Y 来連接 P 及 R：

$$Y:\begin{cases} P\text{ 的状态}: & \downarrow \begin{matrix} i & j & k \end{matrix} \\ \alpha\text{ 的值}: & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \end{cases}$$

若机器的初态是 (a, i)，問其相継各状态是怎样的?

題 4：若用两机器耦合成一整个机器，問整个机器的性能是否依賴于耦合的方式? (提示：应用上題結果)

題 5：若两架机器(各有 n_1 及 n_2 个状态)耦合，則其整体的暂态可能有多长的最大长度?

題 6：若机器 M 的暂态的最大长度是 n 个状态，則当三个 M 連成一架机器时，后者暂态的最大长度含几个状态?

题 7：取許多部件($A, B, C, \cdots$)，每一部件的变換是

$\downarrow$	0	1	2
α	0	2	0
β	1	1	1
γ	2	2	2

然后把它們連成一长串

$$\text{輸入} \rightarrow \boxed{A} \rightarrow \boxed{B} \rightarrow \boxed{C} \rightarrow \text{等等,}$$

使 A 能影响 B，B 能影响 C，等等，而这一影响則由 Z 規定：

$$Z: \downarrow \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{array}$$

若 A 的輸入保持在 α 处，那末这一长串中的是哪些状态？

題 8(續上題)：若輸入变了一步变到 β，然后又变回到 α 并保持在那里，那末一长串的状态是什么？

4-8. 有反饋的耦合　上节中 P 与 R 是这样耦合的，即 P 的变化会影响(或依某种方式确定) R 所发生的变化，而 P 的变化并不依賴于 R 所处的状态．但两个机器也可以这样耦合，使每一机器都会影响另一机器．

要使这样的耦合成为可能，每一机器必須具有輸入，即必須都有参数．上节中的 P 沒有参数，所以对上节中的机器不能直接做这种双重耦合．現在假定我們要把 R (同上节) 跟以下給出的 S 耦合：

$\downarrow$	a	b	c	d
R_1	c	d	d	b
R_2	b	a	d	c
R_3	d	c	d	b

$\downarrow$	e	f
S_1	f	f
S_2	e	f
S_3	f	f
S_4	f	e

S 跟 R 耦合时对 R 的影响由 Y 規定(若 R 的参数是 α)：

$$Y: \begin{cases} S\text{ 的状态：} \\ \alpha\text{ 的　値：} \end{cases} \downarrow \begin{array}{cc} e & f \\ 3 & 1 \end{array}$$

而 R 对 S 的影响由 X 規定(若 S 的参数是 β)：

$$X: \begin{cases} R\text{ 的状态:} \\ \beta\text{ 的值:} \end{cases} \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

要找出这新的整个机器(称它为 T) 所变化的各个状态，假定它的初态是矢量(a, e). 由 Y 及 X，知第一步用的变换是 R_3 及 S_3. 这两个变换分别作用在 a 及 e 上給出 d 及 f; 因而整个机器变到新状态(d, f). 下一步用的两个变换是 R_1 及 S_2，而下一个状态是(b, f)，这样继續下去.

题 1: 試作 T 的动态图.

题 2: 試用另一方式将 S 与 R 耦合.

题 3: 将 S 与 R 耦合，使 S 影响 R 而 R 不影响 S (提示: 取所有的 β 值为同一值，考察对 X 的影响).

4-9. 代数耦合　以前各节中，对每一状态及参数的变化个别处理，这一步驟把"耦合"中的关系表示得十分清楚和一般化. 我們可以作出各种修改，而使关系依旧十分清楚.

例如，設仍照样用矢量(它的分量是数)来規定机器; 那末耦合的規則仍不变: 每个机器必須有一个或更多个参数，而把它們耦合的意思就是把这些参数規定为另一机器的变量的某一函数. 例如机器 M 及 N,

$$M: \begin{cases} a' = a^2 + pb \\ b' = -qa \end{cases} \qquad N: \begin{cases} c' = rsc + ud^2 \\ d' = 2tue \\ e' = uce \end{cases}$$

可用以下的变换 U 及 V 連起来:

$$U: \begin{cases} p = 2c \\ q = de^2 \end{cases} \qquad V: \begin{cases} r = a + b \\ s = a - b \\ t = -a \\ u = b^2 \end{cases}$$

U 是从一整批 (c, d, e) 值轉变到一整批 (p, q) 值的縮写，即是下列这一变换的縮写:

$$U: \downarrow \begin{matrix} (0, 0, 0) & (0, 0, 1) & (1, 3, 5) & (2, 2, 4) \\ (0, 0) & (0, 0) & (2, 75) & (4, 32) \end{matrix}$$

同样，V 是 (a, b) 到 (r, s, t, u) 的变换，其中包括如同 $(5, 7) \to (12, -2, -5, 49)$ 这样的一个变换（并請与 6-9 节中 P 比較）。

耦合后的結果得出含五个变量的系統，其表示式是

$$
\begin{aligned}
a' &= a^2 + 2bc \\
b' &= -ade^2 \\
c' &= (a^2 - b^2)c + b^2d^2 \\
d' &= -2ab^2e \\
e' &= b^2ce
\end{aligned}
$$

[对微分方程的同一类步驟，在作者的“大脑設計”（Design for a Brain）一书 21-6 节中可找出例子来]。

題 1：哪些是 M 中的参数？哪些是 N 中的参数？

題 2：用如下的 W 及 X 把 M 与 N 連起来，并求出 (a, b, c, d, e) 的一值 $(1, 0, 0, 1, 0)$ 将被变为何值，其中

$$
W:\begin{cases} p = d \\ q = c \end{cases} \qquad X:\begin{cases} r = a \\ s = ab \\ t = a \\ u = a \end{cases}
$$

4-10. 題 4-7-4 已告訴我們，同样的一些部件，一般可用不同的方式来連成整体。**規定了部件并沒有确定耦合的方式。**

由此可得一重要的輔助定理。如果只規定一架机器应由具确定性质的部件来构成，这还不足以确定整个机器的性质：只有再加上耦合的細节，整个机器才变得确定。

反 饋

4-11. 在 4-7 节中，P 与 R 連起来时，P 对 R 有影响而 R 对 P 无影响。这时我們說 P **主制** R，并（預先提到 4-12 节中的概念）可把部件間的这一关系表示为

$$
\boxed{P} \to \boxed{R}
$$

（这里的箭头不要跟 2-2 节表示变换轉移关系的箭头相混，因后者总表示两种状态間的关系，而这里的箭头则表示連接两个部件間

的关系．在以下的插图中，代表部件的字母外边总有一方格．）

但控制論中特別要加以研究的是 4-8 节中的那种情形，这时每一部件对另一部件都有影响，而这种关系可表为

$$\boxed{P} \leftrightarrows \boxed{R}$$

当一能动系統各部件間的作用有这种循环关系时，我們便說这系統有反饋．

剛才所讲反饋的定义是最适合于本书的，因为本书的精神主要在于說明原理．

但也可能作别的定义，而且关于哪个定义最好的問題还是有些爭論的；因此再加几句解釋可能是有用的．这里我們需要考察两种主要观点．

一方面是采取本书这种观点的，他們的目的只在于理解各式各样特种机构中所含的原理．对这类人說，只要两个部件彼此互有影响，它們之間就有“反饋”，例如在

$$x'=2xy$$
$$y'=x-y^2$$

中就有反饋；因为 y 值会影响 x 值的变化，而 x 値也影响 y．反之，在

$$x'=2x$$
$$y'=x-y^2$$

中就沒有反饋，因 y 值并不影响 x 的变化；这时 x 主制 y，于是作用只是单方面的．

持另一种观点的是实驗工作者与制造工作者，他們认为只有当 P 对 R 的影响毫无疑問，而由 R 到 P 的影响由一种在物质上或現象上是显然的东西来傳递时，才叫做有反饋．他們反对数学家对反饋的定义，认为如果用数学家的反饋定义，那就会迫使他們說普通摆（見題 3-6-14）的位置与动量間也有反饋，而这种反饋从实际观点看来未免有点神秘了．但数学家可以这样反駁：如果认为只有在确实存在导綫或神經时才有反饋，那末反饋的理論就会

变得杂乱无章而充满一些不相干的东西。

事实上这种争辯是不必要的，因对"反饋"的精确定义并不重要。"反饋"这一概念在某些初等情形下固然显得这样簡单和自然，但在部件間的关系变得更加复杂时，这概念就变得不自然而且沒有什么用处了。当連起来彼此互有影响的只有两个部件时，我們可从反饋的性质，得知整个机器的重要而有用的性质。但部件只要增多到4这个小的数目时，则若每一部件对其余部件都有影响，那末它們之間就可以找出20个循环关系；并且即使知道了这20个循环关系的性质，我們也还沒有完全知道整个机器的性质。象这一类复杂的机器不能当作是些多少有点独立的循环关系交織而成的，我們必須把它当作整体来看待。

所以要了解能动系統的一般原理，光靠反饋这一概念还是不够的。重要的一点是：內部具有諸多錯綜連系的复杂系統具有复杂的性态，而且这种性态可以是有目的性的。

题 1: 在图 4-11-1 中画出 20 个回路来：

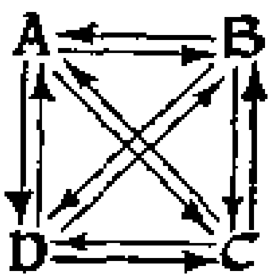


图 4-11-1

题 2: 有輸入 α 的机器，它的变換是

$$T:\begin{cases}x'=y-\alpha z\\ y'=2z\\ z'=x+\alpha\end{cases}$$

如果它的輸入 α 与輸出 z 之間有耦合 $\alpha=-z$，那就会产生出什么样的机器(变換)?

题 3(續): 若第一个机器的 α 永远保持在 -1，那末这第二个机器是否会跟第一个机器有不同的性质?

题 4: 一机器的輸入中带一光电池；在它的輸出中有一可改变亮度的灯。在条件1下，灯和光电池間无任何电的或光的联系。在条件2下，有一返光鏡能使灯的亮度的改变引起光电池中电位的改变(即是說，机器能"看見自己")。你想在情形1与情形2下的性态是否应該不同?(提示：跟题3比較一下)

整体內部的独立性

4-12. 在前面几节中，一个机器(或零件，变量)“对另一机器(或零件，变量)有影响”这一概念已經反复用过多次．現在应把它明确一下，因这是很重要的一个概念．从一个机器的实际作用来讲，这究竟表示什么意思？这个过程是象下面这样的．

假設我們要测試零件(或变量)i对零件(或变量)j有沒有直接的影响．粗略說来，我們可以让系統(机器)表現它的性态，然后观察零件i的值改变时零件j的性态是否改变．如果不管i取什么值，零件j的性态总是一样，那末我們平常就說i对j沒有影响．

更明确一点，我們可先选定(整个系統的)某一状态S．給i定在某一值，看看j(忽略其它变量)发生什么变化．然后再就S以外的别的状态S_1, S_2,等等(它們只在第i个零件的值上与S不同)．看看j发生什么变化，再把这些变化互相比較．若S_1, S_2,等等使j发生的变化跟S使j发生的变化一样，我們就說i对j无直接影响，倒过来說也对(所以称做“直接”影响，乃是因为我們只在一步变化的时間考察j的值)．

其次我們来考察这一概念在变换中的意义．設变换的元素是含四个分量(u, x, y, z)的矢量，而其第三个标准方程是

$$y' = 2uy - z.$$

这个方程告訴我們：若現时y有某一值，那末它在下一步所取的值要依賴于u和z的值，而不依賴于x的值．我們就說变量u和z对y有直接影响．

应該注意，如果一直要保持推理严格，那末(比方說)u对y有沒有直接影响，主要只能就两个給定状态来說；这两个状态在x, y, z各分量的值都相同，而只在u分量的值不同．如果在两个状态間有直接影响，那一般并不会限制在别的一对状态間也存在直接影响．例如，上面讲过的变换給出以下的各步轉移：

$$(0, 0, 0, 0) \to (\ , \ , 0, \ )$$
$$(1, 0, 0, 0) \to (\ , \ , 0, \ )$$
$$(0, 0, 1, 0) \to (\ , \ , 0, \ )$$
$$(1, 0, 1, 0) \to (\ , \ , 2, \ )$$

(不相干的值已略去不計). 头两个轉移告訴我們,在空間的一个域内,u 对 y 沒有直接影响,次两个轉移则告訴我們在另一域内有直接影响. 在簡单的系統内,往往在整个相空間内有同一的結果;如果是这样的話,那末我們就可以无条件地說明 u 对 y 是否有直接影响. 例如在上例中,u 在除了少数特殊点处之外对 y 有直接影响.

关于 u 对 y 是否有直接影响的这种測試法,无非就是把实驗者在測試一变量对另一变量有无直接影响时所用的方法,写成符号形式罢了:他把除了这一对变量之外的其余变量都固定下来,然后拿一个变量在另一变量为 u_1 值时的情况跟它在另一变量为 u_2 时的情况加以比較.

这方法实际上也是我們日常生活中常用的. 例如,我們到了一間陌生的屋子里,想把电灯开亮. 我們看到墙上有三个开关,就得通过試驗来决定哪个开关对电灯的情况有影响而哪个沒有影响. 我們先撥动其中一个开关,然后观察灯的情况是否随之发生变动. 这样,我們就可以发现灯光要由哪个开关来控制.

这种測試法符合常情,而且它的好处是:即使我們不知道实际起作用的物理因素或其它因素是什么,我們还是可以应用这一測試法. 并且要注意这种測試法不需要我們知道外界因素:測試的結果可以从观察到的系統的情况直接获得,只依賴于系統发生了什么情况,而不依賴于系統为什么发生这种情况.

从上面已經可以看到,变换器在整个相空間内的直接影响的分布可以有各种任意的程度. 但这分布常有一种連續性,因而在某一域内变量 u (比方說)对 y 有直接影响而在同一域内 x 对 y 沒有直接影响. 有这种情况时,常可作一图示明这种关系在一域内(有时可能是整个相空間)成立. 当且只当 u 对 y 有直接影响时,

我們才从 u 到 y 画一箭头．这样的图叫做**直接影响图**．

这种图現在已經很普通了．它們常常用在生理学中来示明一組有关变量(如血压，脉搏跳动次数，腎上腺素的分泌，頸动脉竇的活动)間的关系．在設計計算机与伺服机构时，这种图叫做“控制流向图”．这种图也用在大企业里，来表明各部門之間的控制与信息傳遞关系．

当然，在这种图里所用的箭头跟表示轉移时所用的箭头(見2-2节)意义大为不同．在后一种情形下，箭头只表明从一个状态变到另一状态；但直接影响图里的箭头意义比这要复杂得多．在直接影响图里，箭头說明：如果 A 在一連串的測試过程中有各种不同的值(其时 B 和其他一切状态始終都从同样的值出发)，那末在这一連串測試中 B 所变成的值也有各种不同的結果．以后我們可以看到(8-11节)，这无非說明从 A 到 B 有**信息通道**．

当以代数形式或某种物质形式給定了一个变换器以后，我們就可以考察一下这系統內部的直接影响，得出一些关于其內部組織与結构的結論．但在作这一研究时，必須仔細区别“直接”影响与“最終”影响．在以上的測試中，x 对 y 的影响是只就单独一步的过程中来考察的，而且这一限制在基本理論中是必須的．如果发現 x 对 y 无直接影响，然而 x 可能对 u 有直接影响，而 u 則对 y 有直接影响；那末 x 就对 y 有些影响，只是需要再經过一步之后才显現出来．象这类影响，以及那些甚至要通过更长的一串变量和影响推迟得更久的，就都叫“**最終**”影响．在**最終影响图**里，倘且仅当 A 对 B 有最終影响时，A 到 B 才可作一箭头．这两种图之間有簡单的关系，因为如果在直接影响图里，每当有三个以上的变量連成一串时，就直接在头一个变量和末一个变量之間，象下面

从
$$\begin{tikzcd} & \boxed{u} \arrow[dr] & \\ \boxed{x} \arrow[ur] & & \boxed{y} \end{tikzcd}$$
到
$$\begin{tikzcd} & \boxed{u} \arrow[dr] & \\ \boxed{x} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \boxed{y} \end{tikzcd}$$

那样添一个箭头，而且继續这样添，一直弄到不能再添加箭头为

止，那就会得出最終影响图．

若一变量（或部件）对另一变量（或部件）无直接影响，则說第二个变量与第一个变量无关，或者說它对第一个变量是独立的．

从以后的例子中可以看出，这两种图都具有一些特色，与其所代表系統的重要特色相对应．

題 1： 画出下列各絕对系統的直接影响图来；并指明其特点何在：

(i) $x'=xy$, $y'=2y$

(ii) $x'=y$, $y'=z+3$, $z'=x^2$

(iii) $u'=2+ux$, $v'=v-y$, $x'=u+x$, $y'=y+v^2$

(iv) $u'=4u-1$, $x'=ux$, $y'=xy+1$, $z'=yz$

(v) $u'=u+y$, $x'=1-y$, $y'=\log y$, $z'=z+yz$

(vi) $u'=\sin 2u$, $x'=x^2$, $y'=y+1$, $z'=xy+u$

題 2： 若 $y'=2uy-z$，問在什么条件下 u 对 y 无直接影响？

題 3： 举出一些实际机器的例子来，使其各部件之間有如題 1 中各直接影响图所示的那种关系．

題 4（續上）：再举出社会系統与經济系統的这类例子来！

題 5： 列出一表，說明动态图与直接影响图在所有各方面的差別．

4-13． 在上节的討論中，系統是用代数式子給出的；用这种形式描述系統时，推出直接影响图是容易的．但我們应該知道，即使变换本身只用一組轉移的形式給出，我們也可直接从变换得出直接影响图来．

例如，設系統含二变量 x 与 y，每一变量各能取值 0，1 或 2，而它的 (x, y) 状态的变化情形如下（括号略去）：

$$\downarrow\ \begin{matrix} 00 & 01 & 02 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 22 \\ 01 & 00 & 11 & 11 & 00 & 21 & 11 & 20 & 11 \end{matrix}$$

如果要問 y 是怎样轉移的，那就可以拿 x 当参数，把这状态重新分类，例如用“00→01”来表示“当 $x=0$，y 从 0 变到 1”．这就得出下表：

		y		
	↓	0	1	2
x	0	1	0	1
	1	1	0	1
	2	1	0	1

这就立刻可以看出 y 的轉移并不依賴于 x 的值. 因此, x 对 y 无直接影响.

現在我們照样来給 x 的轉移分类. 我們有

$$\begin{array}{cc|ccc} & & & x & \\ & \downarrow & 0 & 1 & 2 \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 & 0 & 2 \\ & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

从这可以看出: x 的轉移要依賴于 y 的值, 因此 y 对 x 有直接影响.

这样,从有关原始轉移情况的說明,可得出直接影响图来,这就是

$$\boxed{y} \rightarrow \boxed{x}$$

于是証明了 y 对 x 有直接影响.

題: 一系統有三变量 x, y, z, 每个变量只能取值 0 或 1. 若变换为

$$\downarrow\begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ 110 & 111 & 100 & 101 & 110 & 011 & 100 & 001 \end{array}$$

試求其直接影响图!(提示: 先找出 z 的轉移是怎样依賴于其他两个变量的)

4-14. 可約性 在 4-11 节中我們已看到整个系統可能由两部系統构成,其中每部对另一部都有直接影响:

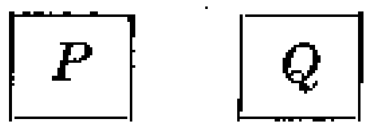
$$\boxed{P} \rightleftarrows \boxed{Q}$$

我們又看到过作用可能是单方面的, 这时只有一部对另一部有直接影响:

$$\boxed{P} \rightarrow \boxed{Q}$$

在这情形下,这整个系統的内部連系就少些,因为其中短少了一个作用或通道.

这作用或通道还可继續减少. 直接影响图可能只是



因而整个系統实际上是由两个具独立作用的系統构成的．在这情形下我們說整个系統是**可約的**．这一概念的重要性我們以后还要讲到（見 13-21 节）．

題：在題 4-12-1 的各个系統中，哪些是可約的？

4-15． **物质性**　学到这里，讀者可能愿意試用本章的方法来解决下列信件中所提出的問題．这問題証明 1-2 节中所說“控制論不受人間物质性态的約束，也不从其中提取規律”的話是正确的．控制論中认为重要的事，是所观察的性态有何种程度的正常性和复現性．

亲爱的朋友：

不久前我买了一所旧房，不料发現这里面有两种鬼叫声[1]，一个爱瘋狂的唱歌，一个爱狂笑．結果这里簡直不能住人．但我后来发現还有一些可住人的希望，因为經过实际試驗，发覚这两个鬼的习性遵守一定的規律，原因虽然未詳，但已屡試不爽，即鬼鬧声的出現与否，总受彈琴或焚香的影响．

在每分钟內，这每一种鬼噪声总是或息或响，沒有其它中間状态．每种噪声在下一分钟的出現与否，完全要看前一分钟所出現的事态而定．

下一分钟歌声的或起或息，一般跟前一分钟的情况一样（也是或起或息），除非在沒有笑声时发出琴声，这样歌声就息，或者不唱时就会唱起来．

至于笑声呢？如果我在焚香，它就仿照着歌声做（笑声在一分钟后仿照着歌声的起息而起息）．但若不焚香，那末笑声就在歌声

[1] 作者企图在这一节里用一个“非人間”的例子，来說明控制論这一門学問的根源并不在于现实的物质世界．其实这是徒劳的．象原作者在本节里所举的这个例子，很可能就是原作者在他的工作单位——精神病院里所碰到的問題．如果讀者把写信人的口吻改成精神病院里护士的口吻，把两种鬼叫声改成两个精神病患者的两种病态，这一切就不那么神秘了——譯者注．

开始之后停止，或是在歌声停止之后开始.

在我写这信时，笑声和歌声正在齐响. 請問我該怎样彈琴焚香才能使屋內安靜.

寄自"雹穸"里

奈何巷

(提示：比較題 4-1-4)

題 2(續上)：歌声对笑声有沒有直接影响?

題 3(續上)：焚香对歌声有沒有直接影响?

題 4(續上)：对这带輸入(带两个参数和两个变量)的机器，画出它的直接影响图来!

特大系統

4-16. 到这里为止，我們所討論的系統看来都相当簡单，而且我們总假定对这些系統的一切情况都是完全了解的. 但控制論是要来处理非常复杂的系統的，如电子計算机，神經系統，社会等. 所以我們現在要看看这以前所讲的方法对特大系統怎样应用，用起来要作些什么改变?

4-17. 所謂"大"需要給予明确意义. 因为我們所說的并不仅仅指体积之大. 在我們看来，太阳和地球只形成一个"小"系統，因为它們的自由度只有 12. 因此所謂大是指复杂的程度而言的. 但复杂程度又指的是什么呢? 比方說，我們所考察的系統是个原始部落的五口之家，那末我們把这系統看作是由 5 部分构成的一个簡单系統呢? 还是把它看作是由 10^{25} 个原子构成的非常复杂的系統呢?

在控制論中，一个系統之"大"必須对其可能作出的区分数目来說：大必須指可能有的不同状态的数目，或者指(如果状态能用一矢量来确定的話)矢量中分量的个数(即是指其变量的数目或自由度的数目). 这两种标准是相关的，因为如果其他的条件都一样，那末多加一个变量就可能多产生一种不同的状态. 我們也可从作用(或机能)的观点把一个系統看得大些，例如，虽然变量的数目是恒定的，但可把每个变量量得更精确些，使它能区分出更多不

同的状态．不过我們并不打算用什么定义来給出度量大小程度的准确单位；但我們要提到系統与某一打算研究或控制这系統的确定的人．在本书内，我們說到“特大”时，是对某一个确定的观察者来說的，是对他所具有的特定工具与技能来說，系統的某些方面显得太复杂，以致他无能为力去对付的，这才算“特大”；因而他不能作全面观察，作完全的控制，或作完善的预测計算．換言之，如果观察者說一个系統“特大”，那就是說这系統的复杂与丰富多采使他无法应付．

象这类系統是太普通了．十九世紀的理論物理学家想用牛頓力学去計算气体性态时就是这种情形的一个古典例子．在普通容器里所含的气体分子是这样的多，以致不能有任何实际可行的观察能把这系統的状态記录下来，也沒有任何实际方法能測算它的未来状态．象这样的系統对十九世紀的物理学家来說的确是“特大”了．

搞育种工作的人在試驗培养新品种的时候也要对付一个“特大”的系統，各种因素的数目以及因素之間相互作用的复杂性，使得他不可能在实际上对这些因素作完全的控制．

就我們現有的观測和控制工具来說，这种特大的系統在生物界以及經济学和社会学的范圍內是很普通的．在大脑中，这种特大系統肯定是通有的，虽然好久以来人們不大肯承认它的复杂性．但現在大家已认識到我們不能再忽视这一复杂性了．拉西萊(Lashley)說：“即使是最簡单的行动，也需要上百万个神經細胞的統一行动……我甚至相信，每一个动作都会激动大脑皮质的所有神經細胞……保持記忆痕迹并参与勾起回忆的那些神經細胞，在千百万种其他的記忆和动作中，也以不同的組合形式参与在內”．又如馮·諾意曼(von Neumann)說：“中樞神經系統的神經細胞为数达 10^{10} 之多．从过去的經驗說，我們絕对沒有处理过复杂到这种程度的系統．人造自动机构所含的部件数，据任何类似的粗略估計約在 10^3 到 10^6 之間．”(Cerebral Mechanisms in Behavior)．

4-18. 但是应該知道，大和复杂本身并不能使前面几章所讲的一些原則理論与命題失效．虽然所举过的例子只限于仅有少数几个状态或变量的系統，但这样做仅仅是为了作者和讀者的方便；若对系統的状态和变量的个数不加限制，这些理論仍然是正确的．用状态来讲比用变量来讲有一种特別的好处，因为那就用不到明确提到系統所含部件的个数；定理一經証明成立，那它就对任何样大小的系統都成立（只要系統合乎所說的条件）．

还保持正确的，当然只是：对于有数学定义的那些事物所作的数学推論．当系統变得很大时，不同之处可能只是这些定理对具体系統是不是仍然能实际应用．但要討論能否实际应用，也只能就具体个別情形来說．在这里，我們只要記住，以前所讲的那些理論并不会因系統变得大了就不适用．

4-19. 随机耦合　設观察者要跟一件对他說来是"特大"的系統打交道．那时他該怎么办？那时会发生很多問題，多到不能一一細談，因而我只能提出几項来，作为其余的榜样（参看 6-19 节与第十三章）．首先，应該怎样来規定这系統？

根据"特大"的意义，观察者对这系統只能作不完善的規定．这就等于說他只能"統計"地規定这一系統，因統計学是当整体所包含的事实太多而不能直接利用时，对整体的某部分或某方面作出判断的技巧和学問．如果系統的部件太多不能一一加以規定，那就必須用一批为数不太大的法則来規定，使其中每一法則对許多部件都适用．为一个法則所确定的部件用不着都是一样的；我們只要假定每个法則統計地規定了一批部件就可以保持一般性．这就是說，法則規定了部件的分布状态和怎样从它們之中抽取样本的方法．因此个別結果的种种細节并非由观察者决定，而是要由抽样的过程来决定（如两人用擲錢币的方法来决定一件事）．

規定耦合时也必須用这同一方法．如果对耦合的規定不完善，那就必須用某种方式加以补充，因归根到底部件与部件之間必定会确实出現某种个別的与单独的耦合．因此耦合必含"随机"因素．那末什么叫做随机因素呢？

为使討論明确起見，設观察者有許許多多同祥的电气匣子，每个匣子都有三个輸入接头和三个輸出接头．如果他想作一个很大的电路网，随便耦合起来的，然后要試試它有些什么性质．他拿起一些接綫来，这时才发觉把那些匣子“随便耦合”这話还不足以說明耦合的方式；“随便連”可能有各种各样的方式．例如，要是有 n 个匣子的話，他可以拿有标号 1 到 $6n$ 的 $6n$ 張紙牌，再把各个接头也从 1 到 $6n$ 給标上号，然后把牌洗一下，抽出两張来，从那两張的号碼来决定哪两个接头該先連．再抽出两張紙牌，决定下一步連哪两个接头，这样一直下去．此外还得决定一下在第二次洗牌和抽牌以前，要不要把抽出来的两張牌再放进去．这一决定是很关重要的，因若把抽出来的牌再放进去，那就可能使某些接头沒有接上綫，而某些接头却接上好几根綫；如果抽出来的牌不放进去，那就一定要使每个接头都有而且只有一根接綫．牌抽出后放不放进去，这一区别可能对电路网的性质大有影响，因此必須加以規定．还有，剛才所規定的这种耦合法，允許輸出接头跟輸出接头連起来．如果不希望发生这种情形，那就得規定另一种耦合法，如：“把輸入接头从 1 到 $3n$ 加上标号，再把輸出接头从 1 到 $3n$ 加上标号；取有标号 1 到 $3n$ 的 $3n$ 張紙牌；在輸入接头 1 連上綫，然后抽出一張紙牌，决定这綫还該連到哪个輸出接头上；这样对 2，… $3n$ 等輸入接头都如法泡制．”这时，要是抽出来的紙牌还放进去，那就意味着一个輸出接头可以跟好几个輸入接头連起来，或者不跟任何一个輸入接头連起来；如果抽出来的紙牌不再放进去，那末每个輸入接头只跟一个輸出接头相連．

确切規定取样方式的重要性現在大概无需再多讲了．但有时候，例如当做試驗的人要取氧的样本来研究气体作用定律，他就无需規定这样本是怎样取来的，因为几乎所有的样本都会有同样的性质（但即使在这种情形下，如有可能确切規定抽样方式也許仍是重要的，例如賴利（Rayleigh）和拉姆賽（Ramsay）曾发現从某些氮的样本得出的原子量，始終跟从其他样本得出的不同）．

用这种“統計”方法来規定系統——以抽样方式来規定分布状

态——不应該看作是跟用其他方法有什么特别的不同．这也包括那种确切規定了的系統，因为确切的規定乃是分布縮小到零的規定，是"抽样"有唯一肯定結果的規定．統計系統的不同之处仅在于它的規定可以包括好几个不同的机器．因此我們应該把統計"机器"当作是一組机器，而不应該把它当作是一个机器．但在本章里我們不討論这方面的事(这要在第七章里作全面討論)．

因此我們現在看到了，观察者对于一个太大而无法規定的系統，現在也可以作某种意义的規定了！从原理上讲，这方法是簡单的：他必須采取多样化的規定方式，定出一种一般方法，使他能用身外之物来确定其后的詳細步驟．在上面所举的各例中，作最后决定的是一批紙牌．这样，只要他的規定有所补充，就可最終得出唯一的系統(这一問題还要在13-18节中再彻底处理)．

題1： 規定一种方法(用骰子，紙牌，随便一些数等等)，把封閉单值变换 T：

$$T:\downarrow\begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{matrix}$$

变为一种特殊形式，使那个最后的特殊形式由所用的方法定出而不由讀者定出．

題2(續上)：确定一种使变換为一一变換的方法，但对变換的其他性质并无限制．

題3(續上)：确定一种方法，使偶数号状态变为奇数号状态．

題4(續上)：确定一种方法，使所有状态只能变到它邻近的状态．

題5： 若电路网的各部件按下列法則接連：在二維域内，各部件排成朝各方向无限延伸的方格网：

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

每一部件对其上一部件有无直接影响的概率相等，对其下面的与左右各部件的有无直接影响也如此．試規定一种方法来連这电路网，并把它画出来．

4-20． 連系多少的程度　有同样多部件的系統中，最簡单的是所有部件都是完全一样的那种系統，而且部件与部件之間只有零度耦合(如題4-1-6)．这种部件实际是彼此独立的，它們之所謂"形成一个系統"仅仅是一种名义，因为它是完全可約的．但这一类型的系統仍須加以认真研究，因为它給予我們一种重要的基本形式，可以从它变出許多别的系統来．这一类系統的近似例子

是：原子間很少碰撞的气体，麻醉状态下大脑皮质的神經細胞（如果能假定把它們彼此都看作是近似一样的話），或者一类分布极稀的动物，以致它們彼此間很少有碰在一起或爭食的机会．在大多数情形下都可相当容易地推出这类基本系統的性质．

从这种系統变出来的第一种系統是部件間可有少量耦合的，因而使整个系統多少带有些团結性．設在系統的直接影响图里加上一些作用（箭头），但只加到使这批部件有团結性．例如若有 n 个部件，箭头就至少得有 $n-1$ 个；而这只給出了长串形的直接影响图．如果箭头数目比这多一些，但不足 n^2-n（那时每一部件对所有其它部件都有直接影响），这就有了少量的耦合．

相互作用数之所以小，乃是由于直接影响的数目小．还有另一种因其常見而显得重要的情形，这就是一部件（或变量）对另一部件只在一定条件下有影响，从而在大部分时間內只是名义上有直接影响的情形．如果变量因什么原因而在大部分的时間不变（所謂部分函数 part-function），那就会有这种暫时的和条件性的耦合．产生这种情况的一种普遍原因是存在一种閥（或門檻，或叫做临界点），使变量所受干扰未超过一确定值时变量不发生变动．例如在电压不超过一定数值时电弧两极不会放电，一个公民所受損失不达一定数目时不会想到起訴．在神經系統中，閥的存在更是屡見不鮮的事．

閥的存在就好比暫时把整个系統分成了好些个孤立的子系統似的；因依 4-12 节，一个变量在它保持不变时，不能对其它变量产生直接影响，也不能受其它变量的影响．在直接影响图里，它会失去从它所发出的以及通往它的箭头．这种作用表示在图 4-20-1 中．

左边的方块是基本网絡，它是用題 4-19-5 的方法作出的直接影响图．中間一块表示有 30% 变量（因傳来的干扰低于閥值）保持不变时剩下的那些箭头；右边的一块表示高达 50% 的变量不变时剩下的箭头．从左到右的这种变迁，可由提高閥值来产生．我們可以看到，起相互作用的那些子系統是愈来愈小了，提高閥值有

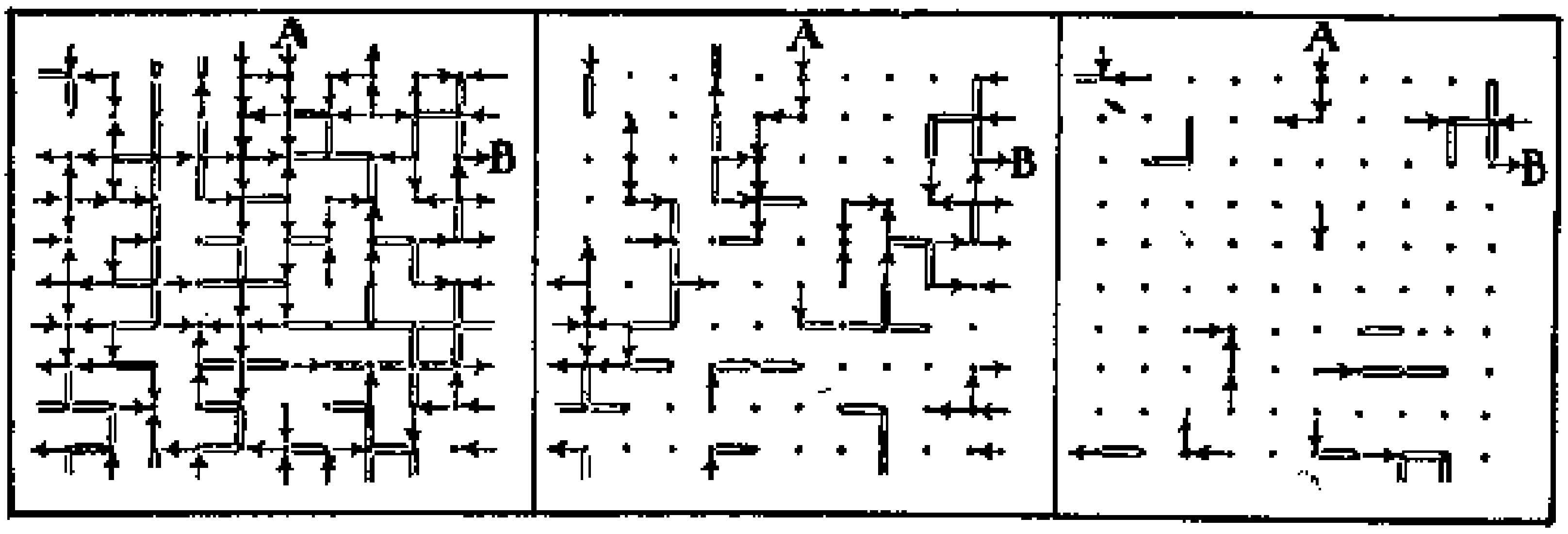


图 4-20-1

把整个网絡分割成愈来愈小部分的那种作用。

因此系統中含有“閾限”与“常量比例数”之类的因素，我們可以調整这些因素，使一个大系統能在两个极端状态之間連續变动，其一是每一变量对所有其它变量都有直接影响的状态，另一极端是每一变量各自独立的那种完全不相連的状态．这样系統可以多少显出一点整体性．因此大小程度可用統計方式来規定，尽管因系統太大我們无法詳尽地作个别規定．

题：在图 4-20-1 左边的系統內，A 处的扰动能影响到 B 嗎？在其它两系統內又怎样？

4-21． 局部性质 有許多相同部件、但只有少量直接影响与輕微耦合的大系統，常以局部化的形式表現出某种性质来，因而只限于少数变量具有这种性质，而且这些变量之有无这种性质，并不能决定其它由少数变量組成的各子系統是否会具有这种性质．这种可局部化的性质在这类系統内是很重要的．本章往下就只讲这类性质．底下是几个例子．

在化学中，以硝酸銀溶液与氯化鈉溶液的作用为例，所含部件（分子）数达 10^{22} 之多，形成一个非常大的系統．各部件（原子、离子等等）絕大部分是相同的，因为它們仅有一打左右的不同类型．此外每一部件也只对所有部件中的极小极小一部分有直接影响，因而一个銀离子和一个氯离子結合与否对其他絕大多数的各对离子无影响．結果“結合成 AgCl”这一性质可以看出在整个系統内处处存在．把这一可处处重复出現的性质跟一耦合得很好的系統——如温度調节器——中的情况对比一下．在温度調节器中，象

这样的局部化性质很难存在，而且决不可能在系統中他处独立地重复出现．因在一处出現任何性质就会对其它各处所要出現的性质起决定性的影响．

試管溶液中的化学变化跟原生质的化学变化之間，彼此不同的情形恐怕也正是如此．原生质是个化学能动系統，其各部分之間的联系太紧密，不能让什么性质单独地限于局部地区．

另一例是生物世界本身，如果把它看成是由許許多多部分組成的一个系統的話．这一系統归根到底是由地面上的原子組成的，是由大多数彼此相同的部分組成的，因为就其基层說各碳原子的化学性质是一样的，而就其上层說属于同一种的所有个体生物也是多少相似的．在这一系統中，許多存在于一处的性质也能在他处存在．因此生物世界的基本性质属于以下所要描述的那些类型．

4-22. 自閉性　如果一个系統往后的状态如何，要看它能不能产生这样一种性质，使一旦有了这一性质之后，它就不能再接受“抹掉”这一性质的各种因素，那末我們就把这类系統的共同性质叫自閉性．例如有一批牡蠣，每一牡蠣都能随时接收危險信号，并在收到这种信号之后能把壳閉起来，但是閉了之后就不能再接受安全信号使它張口．如果起作用的唯有这些因素，那就可以断定，过了一个时期之后，所有的牡蠣都会閉起壳来——这自然是那一批牡蠣的生命史上的一件大事．

在許多别的系統里可以更加认真地考查出同样的工作原理来，而这在差不多所有的系統中都是重要的．例如有能互起化学反应而形成不同化合物分子的溶液，这些化合物中有的还能继續起反应，而其中有一种化合物則是不能溶解的，因而那种分子形式就不能再起反应．“成不可溶化合物”这一性质可以先后为溶液中各部分所具有，但在不可溶性使物质脫离溶液之后，这一性质是不可逆的．这一性质的存在对整个系統的发展史有决定性的影响，这是在化学上大家都知道而且有很多应用的一件事实．

对于大脑皮质（cerebral cortex）的动力作用情况，我們知道得

太少，不能对那里所发生的事讲出多少材料来．但若神經細胞只有很少几种类型，而且各神經細胞之間的直接影响稀少，那就几乎可以肯定：如果其中存在这一类的“自閉”性，这一性质将是很重要的，对于决定大脑皮质的性态将会起重大的作用，特别是在这种性质继續存在了相当长的时期之后．例如，若各神經細胞能有机会形成一振蕩得太厉害的閉路，以致不能用抑制作用把振蕩平息下去时，就会产生这种情形．其他各种可能的情形当然也值得研究，但这里我們只能略略提一提．

在一个經济系統中，如果有一种工作条件不好的工业部門，其中的工人不时遭受失业，而在他們失业的时候发現能找到工作条件更好的职业．他們就会从条件不好的工业轉到条件較好的工业中去，而且不再返回本行，这一事实对于原来那項工业的前途当然是件极重要的事．

所以自閉的变化对一个系統往后的状态常有极重要的影响．

4-23． 会繁殖的性质　讀者应注意到，上节我們所举的每个例子中都考慮到两个不同的系統．因为虽然每一例子只是以一个实体的东西为基础的，但我們是用这实体来提出两組变量的，而据3-11节所讲，这两組变量就形成了两个系統．第一个系統很明显，那就是由数目很大的各个个体所組成的；第二个系統是带一个变量——“具有所說性质的个体的数目”——的系統．在上面举的这些例子中，这一变量是不会随着时間而减小的．換言之，它具有下述变換所規定的性质（若这一数目是 n）：

$$n' \geqslant n$$

就第二个系統（具所說性质的部件的数目）的变化来說，这一变換是可能有的許多变換之一．一个系統中某处具有某性质，常会影响一段时期后在另一处具有該項性质的概率．例如装上一条12英寸长的火药綫，如果在第4英寸处具有“点着了火”这一性质，那末一会儿之后，在第三吋和第五吋处就很可能也会有这一性质．又若有一辆外表很好看的車，如果它已卖給一家人家使用，那末把这种車卖給邻居家的可能性也随之增加．又若有一种生物缺

少食料，則其中一个生物体的存活，便减小了另一同种生物体以后继續生存的机会。

这些作用和影响有时是极复杂的；但有时，“具有所說性质的个体数目”这一变量的变化，滿可以用一个簡单的变换式 $n'=kn$ 来表示，其中 k 是不依賴于 n 的正数。

如果是这样的話，系統的前途就要大大取决于 k 的値，特別是要取决于 k 和 $+1$ 的关系。若 t 表示从 $t=0$ 起的时間的分段数，n_0 是初値，这方程的解是

$$n=n_0e^{(k-1)t}$$

这里可分三种情形来討論。

(1) $k<1$。这时，具所說性质的个体数目逐漸减小，有这种性质的个体的密度也减小。例如，在一块瀝靑土里的鐳原子数就是这样的。又如将要絕种的一种生物，其个体的数目也是这样变化的。

(2) $k=1$。这时个体数目趋于穩定常数。例如当分子分解数目的百分率在当时的条件下处于平衡値时，分解的分子数就是这样(因 k 与 1 稍有差异就会使系統变到其他两种情形之一，而这幷不重要)。

(3) $k>1$。这一情形很値得研究而且极端重要。这时，性质的存在增加了它在另一处出現的可能性。这性质是能“繁殖”的，具有这种性质的系統具有潜在爆炸性，它可以象原子彈那样地发生突然爆炸，也可以象流行的瘟疫那样逐漸蔓延。如自催化是个大家都知道的例子。如醋酸乙酯(ethyl acetate)与水混和，則某一醋酸乙酯分子在下一时刻变为水与醋酸的机会，要看已經有了多少醋酸乙酯分子变成了酸。其余的例子普通是：燃燒，时装的风行一时，雪崩，豚鼠的繁殖。

到这里，达尔文进化論中所說生命的浩大发展过程就可以跟本书所讲能动系統的理論联系起来。如在 4-21 节中所指出的，生物世界是具有本章中所說那种均匀性的而且彼此間直接影响很少的系統。在世界上有生物的初期，存在許多不同的性质，具有不同

的 k. 有些性质的 k 小于 1 而漸漸消失,有的 k 等于 1 得以保存下来. 有些性质的 k 大于 1, 它們就象雪崩时从山上滾下来的雪块那样越滚越大, 彼此发生傾軋, 开始引起所謂"竞爭"这种相互作用,产生了并继續进行着影响世界其他一切事件的一种过程.

k 大于 1 的这类性质有沒有或能不能存在于大脑皮质中, 至今我們还不知道. 但可以确信, 要是有这种性质存在的話, 那它們将是很重要的,必然会給皮质的性态添上一些异乎寻常的特点. 必須指出的是, 这一推测并不需要提到哺乳动物脑子里所产生过程的具体細节,因为这推测对所有这一类系統都是成立的.

4-24. 前面几节中所讲的一些話,只能最簡短地說明特大系統的主要性质. 但所讲的这些話, 已經足以表明特大系統跟前几章所讲过的那些系統并不是完全不同的, 也足以表明目前之所以尚未建立一般系統的确实可靠的理論,只是时間問題和人力問題,并不是因为它难得了不起.

特大系統的問題我們在 6-14 节中还要再讲.

第五章 稳 定 性

5-1. 討論机器时总不免常要談到"稳定性"，但这个字眼常常用得并不确切. 培尔曼說到"稳定性这一为人所濫用的字眼具有不稳定的定义". 但这个字眼所包含的意义既然具有很大的实际重要性，我們就要比較仔細地考察这一問題，对各类定义加以区别.

現今对稳定性的說法很难令人满意而且很混乱；我也不打算提出一个更好的說法. 我倒不如让讀者注意各种不同的字眼所表示的实际事实，使讀者体会事实而不去咬文嚼字. 至于叙述中所用的字眼，我只是不違背慣例，而且在书中保持前后一致. 所用的每个字眼要予以愼重的定义，而以后就一直照定义中所規定的意思来使用这些字眼.

5-2. 不变量 稳定性这个字眼所表示各种意义中，都含有"不变量"这一基本概念：尽管系統經过許多变化，但終归有些地方是不变的；因而变化虽不絕，但仍可对变化过程作出永远成立不变的断語. 例如，拿一块放在桌面上的方木头，把它放歪 5° 然后释手，那末以后方块的位置就会經过一系列的改变. 說"方块的傾斜度是 1°"这句話可能在某一时刻是对的，但在下一时刻就不对了. 但若說"方块的傾斜度不会超过 6°"，这句話在这个过程中就永远是对的. 又若有一仅在頂点支住的錐体，也象方块那样把它放歪 5° 然后释手. 这时，說"它的傾斜度不超过 6°"就会馬上出錯，而且即使限定更大的范圍也会这样. 如果我們不能給系統沿某一軌道的状态定出一个范圍，这就相当于"不稳定状态".

这些就是基本观念. 为了使它們的意义不致含糊，我們必須从最淺近的原理讲起.

5-3. 平衡状态 最簡单的一种情形，是状态与变换之間有这样的关系，即变换并不使状态发生改变．从代数上讲，这就是 $T(x)=x$ 时的情形．例如，設 T 是

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ d & b & h & a & e & f & b & e \end{matrix}$$

则因 $T(b)=b$，故状态 b 在 T 之下是平衡的．e 与 f 这两状态也是如此．

若用矢量来定状态，则要矢量不变，它的每一分量也必須是不变的(据 3-5 节)．例如，設状态是矢量 (x, y)，变换是

$$U: \begin{cases} x'=2x-y+2 \\ y'=\ \ x+y+3 \end{cases}$$

则在平衡状态时 (x', y') 須等于 (x, y)，于是 x 与 y 的值必須满足如下方程：

$$\begin{cases} x=2x-y+2 \\ y=\ \ x+y+3 \end{cases} \qquad \text{也就是} \qquad \begin{cases} x-y=-2 \\ x\qquad=-3 \end{cases}$$

所以这一系統只有一个平衡状态，在 $(-3, -1)$ 处．如果方程不是一次的，平衡状态可能要多些．

如果我們利用在平衡状态时每一分量的变化必等于零这一事实，給出 $x'-x=0$ 与 $y'-y=0$，那就会引出和上面一样的方程，也正好得出这同一个状态．

若方程是微分形式的，那末說 x 不随时間而变就等于說 $\frac{dx}{dt}$ 必为零(或为其他常数)．故在系統

$$\frac{dx}{dt}=2x-y^2$$

$$\frac{dy}{dt}=xy-\frac{1}{2}$$

中，$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 是个平衡状态，因当 x 与 y 各取这两值时，两个导数就都等于零，即是說系統停止变动了．

题 1：驗証 U 把 $(-3, -1)$ 变为 $(-3, -1)$.

题 2：上述最后一段所讲的系統，除了 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 之外还有什么别的平衡状态沒有？

题 3：求 $x' = e^{-y}\sin x$, $y' = x^2$ 的所有平衡状态.

题 4：求变换 $\frac{dx}{dt} = e^{-y}\sin x$, $\frac{dy}{dt} = x^2$ 的所有平衡状态.

题 5：若 $x' = 2x - y + j$, $y' = x + y + k$, 求 j 与 k 之值，使 $(1, 1)$ 是这一系統的平衡状态（提示：先改变方程，使它表示平衡状态）.

题 6：若 $T(b) = b$, 則 $T^2(b)$, $T^3(b)$ 等是否也必定要等于 b?

题 7：一个絕对系統的平衡状态个数能不能多于其洼的个数？

题 8：若一变换的所有状态都是平衡的，它的动态图有什么特殊形式？

题 9（續上）：这种变换在前一章中有什么特别名称？

题 10：若变换換了（那組原象仍是一样），平衡状态会不会变？

题 11：若一机器的輸入改变了，它的平衡状态会不会改变？（提示：参看题 5）

5-4. 循环圈　跟平衡状态有关的是循环圈的状态，这是这样的一系列状态，使接連施行变换的結果，代表状态的点就一次又一次地沿着这一系列状态循环轉圈．例如，設 T 是

$$T: \downarrow \begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & h \\ c & h & b & h & a & c & c & g \end{array}$$

則从 a 起，T 生出如下的变迹：

$$a\ c\ b\ h\ g\ c\ b\ h\ g\ c\ b \cdots$$

这时代表状态的点一次又一次地繞着下面的圈子轉：

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r] & b \arrow[d] \\ g \arrow[u] & h \arrow[l] \end{tikzcd}$$

题 1：写出一个变换，使它含有两个不同的循环圈和三个平衡状态.

题 2（續上）：画出它的动态图來.

题 3：一个平衡状态能否出現在循环圈里？

题 4：一个絕对系統的循环圈数会不会比它洼区的数目多？

题 5：一个洼里能否含两个循环圈？

*题 6：系統 $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -x$ 有沒有一个循环圈？

*题 7：若一变換只有有限个状态，并且它又是封閉的和单值的，那变迹除了以平衡状态与循环圈为終点外是否还有別的可能？

5-5. 稳定域　若 a 是个平衡状态，則如 5-3 节中所讲，

$T(a)$ 就是 a. 这时 T 作用于 a 并沒有产生新的状态.

对一批状态說也会有这种現象. 例如,設 T 是(不閉的)变換:

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ p & g & b & f & a & a & b & m \end{matrix}$$

它沒有平衡状态;但对 b 和 g 所組成的一批状态說,有这样特别的变換:

$$T: \downarrow \begin{matrix} b & g \\ g & b \end{matrix}$$

卽是說,T 作用在这一批状态上并沒有产生出新的状态. 这样的一批状态对 T 来說是稳定的.

一批状态和一个变換之間的这一关系,当然是和以前(2-4节)讲过的所謂"封閉性"是一样的(从那个地方起本来就可以开始使用"稳定組"这个詞了,但在"稳定性"这一概念尙未搞清楚以前这些詞可能引起混乱;而要把稳定性这个概念搞清楚,首先必須說明一些其他事項).

若变換是連續的,則起变化的一組状态可能位在一个連通的区域內. 如图 5-5-1 中,边界 A 以內的区域是稳定的;但在 B 以內的就不然了,因为域內有象 P 那样的点,它是要变到域外去的.

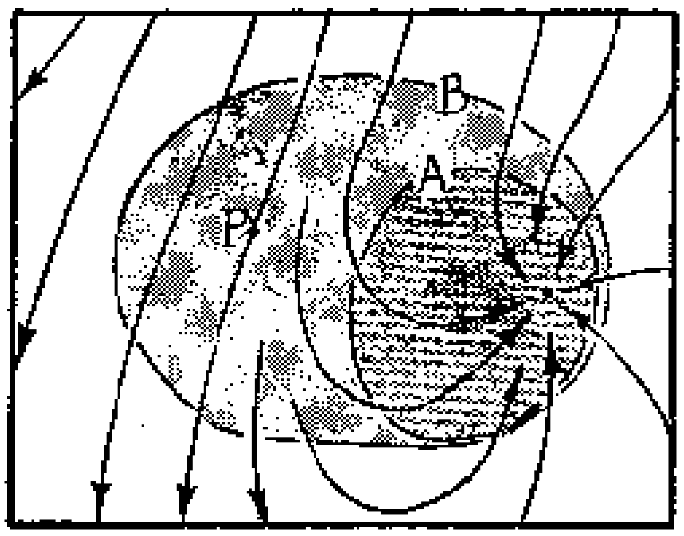


图 5-5-1

在我們的研究中,封閉性的概念、稳定状态組的概念,都是根本重要的. 在 3-2 节中我們已讲过一些理由,指出只有当状态是一組稳定状态时,变換才能毫无限制地取高次冪.

另外一点理由还要在10-4节中更詳細地加以討論，在那里我們要指出：这种稳定性跟某种东西經某种作用后保持不变的思想有密切关系.

題1: 还有什么別組的状态是对T稳定的?

題2: 一个洼里的那組状态是否总是稳定的?

題3: 一循环圈里的那組状态是否总是稳定的?

題4: 若有一組状态对T稳定也对U稳定，它是不是必然也对UT稳定?

干 扰

5-6. 在这以前所讲的一些情形中，平衡或稳定只是就特定的一个或一組状态来考察的．对于邻近状态的行为，我們幷沒有談到或提到.

平衡的初等例子是：一面貼地放着的方块，桌上的彈子球，平衡支在頂点的一个錐体.这些例子都說明处于一种平衡的状态.但錐体的平衡显然和方块的平衡大为不同．只要两种系統受干扰，离开它們的平衡位置而移到邻近位置时，这差异就立刻显出来了．这一位移及其結果，一般該怎样表示呢?

所謂“干扰”，无非是把一个系統从一种状态移动到另一种状态的作用．所以，如果要作确切定义，它就可用一变换来表示，以系統的状态为其原象．现在假定我們的能动系統有变换T，a是对T的稳定状态，D是給定的位移算子．用普通的話来說就是：“让这系統离开它的平衡状态，然后让系統依照它自己的規律动作一个时期，看它会不会回复到原来的状态”．用代数形式来表达：从平衡状态a开始，把系統移动到状态$D(a)$，然后求出$TD(a)$，$T^2D(a)$，$T^3D(a)$等等；然后注意这一連串的状态到末了会不会变成a，a，a，$\cdots$．說得更簡捷些：在一个有变换T的系統中，平衡状态a在位移算子D的作用之下是稳定的，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} T^nD(a)=a$$

我們用上面三个典型例子来試試这个定义对不对．对立方块說，a就是傾度$=0°$的那个状态．D把这一状态移动到$5°$（比方

說)；而T則終于把它变回到0°．对錐說(它有变换，比方說是U)，D可以是同一个位移，但$U^nD(a)$的极限不管怎样总不会是傾角0°；这时的平衡是不稳定的．对在a处的彈子球說，在位移后据动力学定律它是不会回复到原位置的，因此根据上述定义它是不稳定的．但它有个特点，即极限是$D(a)$；就是說，它使位移保持不变，既不把位移消掉，也不会超过位移．这是随处平衡的情形．

(应該注意，对系統在偏离a以后的情形，只有在a是平衡状态时，才值得作这种研究．)

題1：若变换T和位移D給定如下：

$$
\begin{array}{cccccc}
T:\downarrow & a & b & c & d & e \\
 & c & d & c & a & e \\
D & b & a & d & c & d
\end{array}
$$

試問在D之下平衡状态c对T是不是稳定的?

題2(續)：对平衡状态e說又是怎么样?

題3：由b，c与d三者所組成的一組状态对U是稳定的：

$$
\begin{array}{ccccccc}
U:\downarrow & a & b & c & d & e & f \\
 & d & c & b & b & c & a \\
E & b & e & f & f & f & d
\end{array}
$$

若在位移D之后連續加上作用U，則它将起什么变化？(提示：考察所有可能的三种情形)

5-7．当能动系統可以連續变动时，实际上它常是时刻受微小干扰的作用的．电子系統常受热干扰，机械系統受震动，生物系統則受很多微小干扰的影响．因此在这种系統中，能够长期存在的平衡状态唯有象上节中所說的那种稳定状态．在連續系統中，不稳定的平衡状态实际上是无关紧要的(虽然在只能作离散跳跃变动的系統中，这种状态可能是重要的)．

但不稳定平衡这一概念在理論上有一定的重要意义．因若我們研究某种机构的理論，則用代数运算(5-3节)可得出所有的平衡状态——稳定的，随处的，不稳定的——但若要把这一組状态归結到能确实长期存在的那組状态，那就必須做許多消去法的运算．

題：作出一变换，使a与b是它的两个平衡状态，a对位移D稳定但对E不稳定，而b則对E稳定而对D不稳定。

5-8. 一般說，对一个状态接連施行同一个变换，所得的結果如何，要看該状态是什么样的状态而定．因此，求出来的

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x)$$

的結果是什么，一般要看 x 是什么样的状态而定．例如，若有两种位移 D 与 E，設 D 把 a 移到 b，而 E 把 a 移到 c（a, b 与 c 之間并不表示一定的次序），則 $T^nD(a)$ 与 $T^nE(a)$ 的結果可能不同．

因此，如照 5-6 节那样来测試稳定性，則得出的結果可能因位移 D 与 E 而有所不同．这种不同在具体意义上也是讲得通的．例如，就平衡放在正截面上的鉛笔說，若 D 是偏离鉛垂綫 1° 的位移，而 E 是偏离 5° 的位移，那末鉛笔的这种平衡状态可能对 D 是稳定的，而对 E 是不稳定的．

这样，5-6 节中的說法是跟平常的做法一致的．只有在定出了足够明确的一組位移 D 之后，一个系統才能談得上是稳定平衡的．如規定得十分明确，D 就完全定义了．但 D 往往不是明确給定而是不言而喻的；例如，說到一个无綫电电路是"稳定"时，我們认定 D 是平常的电压变动，而常把雷击这种干扰的情形除外．說到一个系統是稳定的，我們常常是对某一范圍內的干扰来說的．但重要的一点是，在特殊情形下，例如在生物系統中，若要使討論有准确意义，常需要明确規定干扰 D 以及所說平衡状态 a．

5-9. 連續系統　上述各节中所考察的状态一般是任意的．但現实系統常有些連續性，因此各状态之間常有一种天然的联系（这跟由于状态之属于一变换器（系統）而施加于状态上的任何变换完全无关），即两个状态可以离得"很近"或"很远"．

对这种系統及其一个平衡状态 a 来說，D 常規定为从 a 到"接近" a 的一个位移．若状态用含有数值分量的矢量来定义，就是說，若状态是用度量的結果来定义的，那末 D 的作用就是对各分量加上微小数量 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$，使矢量 $(x_1, \cdots, x_n)$ 变为矢量 $(x_1+\delta_1, \cdots, x_n+\delta_n)$．

在这种形式之下，就可用更特殊的方法来测試稳定性。这方面的入門知識在作者的另一本书"大脑設計"中已有涉及。但这一問題的数学气味一讲就很重；这里只要指出，这些問題至少在原理上总是可以回答的，这只要把系統依次从状态 $D(a)$ 变到 $TD(a)$，$T^2D(a)$ 等等的过程实际描出来就是了(比較 3-9 节)。这是个簡单、基本而又可靠的方法，唯一的缺点是在复杂的情形下做起来太費事了。但在更专門化的方法不能应用的場合下，我們还可以用这种方法得出解答。对生物体来說，本章所讲的方法比那些更专門化的方法还要有用些；因那些更专門化的方法只在系統是連續而又綫性的情形下可用，而本章所讲的方法則在任何情形下都可用。

有一种特别簡单而又是大家都熟悉的情形，就是当系統的組成部分之間有反饋作用的情形，而且反饋的形式极簡单，形成单独一个环路。測驗稳定性(当然是从平衡状态开始的)的一个簡单的方法，是考察在微小位移之后沿着环路所发生的一系列变化。若位移最后回到它的出发点时，其大小与正負号，使它跟原位移(代数)相加后会得使原位移减小，則說該系統在那一平衡状态附近(一般說)是稳定的。这时的反饋可以說是"負"的(因它最后使原位移减小)。

这种測驗法很簡便，常可用心算的方法做；但在情形稍稍复杂一些时，如果照着上述那种簡单的方式做起来就不可靠了。下节举出一个例子，說明如果用得太随便，这个法則就会垮台的。

題 1: 請指出題 3-6-17 中的 a, D 与 T。試問这系統对这一位移是否稳定?

題 2(續): 試与題 3-6-19 相比較。

題 3: 指出題 2-14-11 中的 T。若 D 是从 a 起的任一位置，它是不是稳定的?

題 4: 設有儿童列車(在地板上行走的，不是在鉄軌上的)，把它的各节列車弄得稍稍歪扭。設 M 表示各处偏离直綫不超过 5° 的那种状态，而 T 代表火車头拉动各节車厢的动作。問 M 在 T 之下是不是稳定的?

題 5(續): 設 U 表示火車头后推列車的动作，那末 M 在 U 作用之下是不是稳定的?

題 6: 为什么列車的火車头要挂在前面?

題 7: 公共汽車公司的各輛汽車在开始服务时成等距离分布在公路上。若有一車在一站上迟到了一些时候，那末該站上就会有特别多的旅客等在那里，車到站时

就得容納比往常多的旅客．而在它后面的車則会跟它相隔比平常近些，到該站时上車的旅客也少些，在以后各站上停車的时間也比往常短些．象这种車隔的不規則的現象是不是能自动消除的，还是会变得愈来愈厉害的？

題8：若血液中二氧化碳含量增加的結果使呼吸中樞的作用更迟緩，那就会出什么事故？

題9：問系統 $x'=\frac{1}{2}y$，$y'=\frac{1}{2}x$ 在(0, 0)附近是不是稳定的？

5-10． 正反饋　上节最后一題中的系統值得密切注意．

它从(10, 10)变到(5, 5)

从(10, 12)变到(6, 5)；

这样，y 的增加(从10到12)引起 x 的增加(从5到6)(試与4/13相比較)．同样，

它从(10, 10)变到(5, 5)

从(12, 10)变到(5, 6)，

这样，x 的增加(从10到12)引起 y 的增加(从5到6)．于是每一变量对另一变量有正的影响，所以如果用平常的話来討論这一系統，那末这些事实就可能用来“証明”这系統是不稳定的，而且似乎起着一种恶性循环作用．

但这系統收斂到(0, 0)这一事实，无可爭辯地說明它在这一平衡状态附近是稳定的．这說明抄短路的推理——比方說仅仅指出反饋是正的这一事实——可能是靠不住的(这一例子說明正反饋可能仍使系統是稳定的；这个例子又說明正反饋概念用在其特定的适用范圍之外时是多么不合适)．

5-11． 不足取的稳定性　稳定性一般想起来总是好的，因为有了稳定性，就能使系統在运轉上的某种灵活性与活动性跟某种程度的持久性結合起来．趋向一定目标的行为是一种稳定于平衡状态附近的行为．但稳定性不一定总是好的，因为一个系統可能不断要回复到我們认为不好的那种状态上去．汽油一旦着火燃燒，就会保持燃燒的状态，而用外界的干扰把它弄到半燃的状态之后，它还是要回复到燃着的状态，这种稳定性对一个消防队員来說是非常要不得的．

另一例是：要是社会上智力較高的人不能象智力較低的那样

随意生育，那末整个社会的智力系数[1]就会降低. 当然这系数不会降得太低，因为智力差的总比白痴的生育能力强些. 所以如果这些是影响智力系数的唯一因素，那末智力系数就将稳定在 90 这个数上. 而大多数人都将认为稳定在这样的一个数目上是不好的.

稳定性的一个有趣的例子是所謂灼痛的一种病状，患者在业已半分裂的神經中出現一种不知起因的剧痛. 瑞典生理学家格兰尼特 (Granit) 指出，这几乎肯定是由于发自运动(外出)神經的脉冲在患处傳到感受(内傳)神經，通过脊髓中的反射中樞，形成了再生式振蕩电路的結果. 这种电路有两个都是稳定的平衡状态：傳递很少脉冲的状态和傳递脉冲极大値的状态. 这好比蹺蹺板，只能稳住在两个极端位置，而不能稳住在中間位置. 患者很知道"稳定状态"不是好就是坏，因为在两个稳定状态下，一个是舒服的，另一个是极端痛苦的.

部分平衡和全平衡

5-12. 現在我們可以来指出耦合与平衡的一个关系，这在以后(12-14, 13-19 节)需要，因为它有重要的应用.

設有一完整系統，由两个互相耦合的部分 A 与 B 构成，

$$\boxed{A} \rightleftarrows \boxed{B}$$

并設整个系統处于平衡状态.

这表示整个系統不随时間改变. 但整个系統的状态是含两个分量——A 的状态与 B 的状态——的矢量. 因此，作为一个子系統来說，A 是不变的，同样 B 也是不变的.

不仅是 A 的状态不变，而且 A 的輸入值也是不变的；因这輸

[1] 智力系数或智力商数，是这样得出来的：拟定一批智力测驗的題目，对同等年龄的人进行测驗，以同等的标准評分. 再把一般认为是中等智力水平的得分数作为除数，来除某人测驗所得的分数，相除后求出的商就叫某人的智力系数或智力商数. 智力系数的值一般在 0.4 到 1.5 之间. 为了避免用小数点，一般常取这个商数的 100 倍作为智力系数. 这样，如果一个人的智力系数小于 100，那就表示他的智力在中等水平以下；智力系数大于 100 的，表示智力在中等水平以上. 但这最多只能作为衡量智力的一种参考，并不值得过于重视——譯者注.

入值要取决于 B 的状态(4-7 节)，而 B 的状态则是不变的．于是在由 B 所定的条件下 A 处于平衡状态(参看题 5-3-11)．同样 B 也有这一属性．所以，若整个系統处于平衡状态，則每一部分在为另一部分所定的条件下也处于平衡状态．

这一論点也可以倒过来說．設 A 与 B 都处于平衡状态，而每一子系統的状态給另一子系統定出了輸入值，使后者处于平衡状态．这样两者都不能变，整个系統也就不能变；于是整个系統必处于平衡状态．

这样，两种論断可以相互推得．这在形式邏輯上的說法是：整个系統是处于平衡状态的，当且仅当每一部分在另一部分所定的条件下都处于平衡状态(若系統由好些部分組成，則上述論断中的“另一部分”应改成“另外的那些部分”)．

5-13． 否决权　上述論断还可以說得更生动些，使讀者能得

可用简单方法来考察内稳定器并了解它的工作情况．这内稳定器可以看作是由部分 A 与部分 B 耦合而成的(图 5-14-1)．

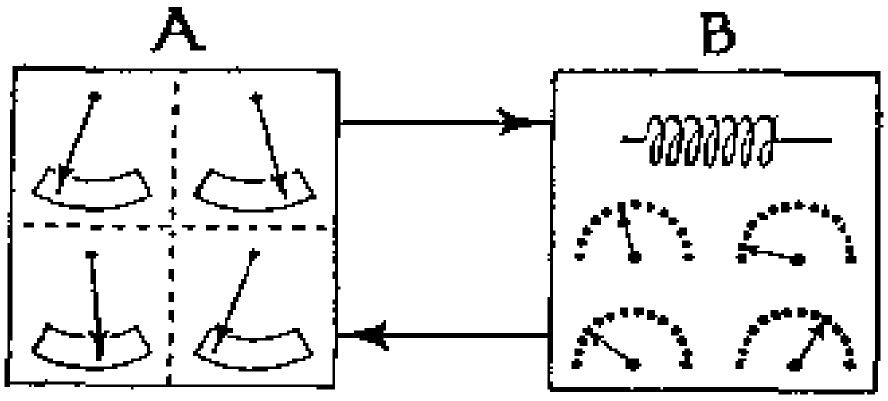


图 5-14-1

部分 A 主要由四个指針組成(此外还有輔助綫圈，电位器等)，它們彼此互有影响，形成一个含四变量的系統，而以 B 的值为其輸入．A 的状态由四根指針的位置确定．随着条件和輸入的不同，A 可以在指針处于中央位置或极大偏角时有平衡状态．

B 主要是个继电器，它可以通电也可以不通电，此外还有四个选擇开关，每个可选 25 种位置(一刀二十五擲开关)(图中并未准确画出)．每一位置上接有一定数值的电阻．这样 B 就有 $25\times25\times25\times25\times2=781250$ 种状态．而 B 这个系統又以 A 为其輸入．如果把 B 造得这样，使在继电器通电时 B 的任何状态都不是平衡的(即选擇开关老在移动)，而在继电器不通电时，所有的状态都是平衡的(即所有开关都保持不动)．

最后，把 B 耦合到 A 上，使得仅当 A 的指針在中間位置的稳定状态时继电器才是不通电的．

如果放进一个問題(即改变 A 的一些輸入值，这在图中并未正式画出)，A 就会有各种可能的平衡状态，有的針在中間位置，而有的針則偏向极端，整个系統就轉到某一平衡状态．而依上节所讲的原理，整个系統的平衡就意味着 B 也应处于平衡状态．但 B 是只有在继电器不通电时才处于平衡状态的．而且 B 又跟 A 这样耦合，使继电器只有当 A 的指針都在或接近中間位置时才是不通电的．于是接上了 B 之后，就否决了 A 的所有平衡状态，只有各指針都在中間位置的那个平衡状态是例外．

現在可以知道，作者在“大腦設計”一书中的所有插图都可概括描述为：“一个系統奔向平衡状态的路綫”. 內稳定器的工作在一定意义上讲也无非是在奔向一平衡状态. “大腦設計”一书中只不过告訴我們这句簡单的話概括了許多复杂而有趣的行为，其中好些在生理学和心理学上都极有意义.

(“稳定性”这一問題以后还要反复提到，特别是在 9-6, 10-4, 12-11 节中；內稳定器問題在 12-15 节中还要再讲.)

5-15. “稳定性”一詞所包含的种种思想可綜述如下：

首先它表示一种平衡状态——不受变换改变的状态. 其次它表示好些个状态所組成的一組稳定状态，如循环圈与洼都是.

如果給定了这样的一个或一組状态和某一特定的干扰，我們可以問：在經受一干扰之后，系統会不会回复到原来的区域. 如果系統是連續的，我們可以問：对于某一数值范圍內的所有干扰来說，系統是不是稳定的.

稳定性这一概念显然是本质上复杂的概念. 只有当它的每一方面都規定之后，我們才能毫不含糊地把它用在一特定的情形上. 但是如果用这一概念需要費那么多的事，那又何必用这个概念呢？它的好处是：在合适的情形下，它可把許多复杂微妙的情形說得簡賅些. 当現象的繁簡合适时，用“平衡”和“稳定性”之类的术語作为一种縮称法是大有价值而又极为方便的. 但必須时刻記住这些只不过是縮称，而現象則往往不象这些縮称所指的那样簡单. 用这些詞的人必須随时准备抹去这些詞而改用这些詞义中所含的状态、变换、变迹等等术語来說明具体事实.

这里值得把以后要在 6-19 节里讲的事先提出来談一談. 用有关稳定性的話来說明系統的重要性质，乃是用所謂“拓扑方法”来描述大系統的一个例子. 比方說对一个經济系統，若有人問“这系統会变成什么样子”，可能就需要对其未来动态的每一細节作全面的描述，但也可以用簡单得多的一种說法“‘它会回复到平日状态的’(或者‘它要跟旧日的情形愈来愈不一样’)来恰当地回答这一問題. 本章中所用的方法就是在处理特大系統时所需要的那种方法.

第六章 黑　　箱

6-1. 前几章所讲的方法现在可用来研究黑箱問題；同时这一研究也給出了这些方法的极妙的应用例子.

黑箱問題是在电机工程中出現的．給电机师一个密封箱，上面有些輸入接头，可以随意通上多少电压，电击或任何别的干扰；此外有些輸出接头，可以借此作他所能作的观察.

有时出現的問題实实在在是个黑箱問題，比方說有个保密的密封投彈瞄准器出了毛病，那就得在不准开箱的情形下，决定这瞄准器值不值得拿回去修理或把它砸了报廢．有时产生的是个实际問題，比方說象电話工程师在一大批运轉着的机器中間，考察所作的測試和所得結果之間的关系，在沒有找出充分的理由来拆卸机器时，就得应用黑箱理論.

这問題虽是以純粹电机工程的形式产生的，但它的应用范圍却比这大得多．門診医生在診察患脑震伤或失語症的病人时，就是靠診察、化驗和考察病人的问答而推断机体的病情的．心理学家在研究迷陣中的耗子时，可对耗子加上各种刺激，观察耗子的各种反应；然后把各种事实綜合起来，設法推断出他所观察不到的神經机构的情形．象这类例子簡直是随处可見(6-17节)，我也不必再多举了.

但黑箱理論的用处比这种专业研究上所用的还要大．小孩子要开門，在門把手(輸入)上左右轉动，看看門閂开不开(輸出)；借此他可学会用門把来控制門閂的动作，而不必把門鎖卸下来了解其中的构造．在我們的日常生活中，处处都会碰到这样的一些机器(系統)，它們的內部机构是不能完全让我們細察的，而只能用处理黑箱的办法去对付.

对黑箱理論不发生兴趣的人，常常把包住机器的外壳看作是种討厌的东西，因为这会耽誤他回答下列問題："这箱子里有什么东西?"但是我們却要来考察这一类比較大的問題，如：

"拿到一只黑箱怎么办?"

"箱子內部的哪些性质是可以探出的，哪些是根本探不出来的?"

"如果要有效地研究这一黑箱，应該用什么方法?"

要对这些問題加以适当的注意，就必須(至少是暫时地)承认有这么一个箱子，并且照着所說的来做．只有这样才能获得科学的认識．

6-2. 先对箱子的性质和內容不作任何假定，它比方說可以是剛从"飞盘"上掉下来的．但我們假定处理它的人有一些对付它的东西(比方說用杆去敲敲它，用手电去照照它)，还有一些观察它的手段(比方說用照相机把它照下来，用温度計量它的温度)．这样对箱子进行工作，让箱子对他和他的記录仪器作出反应，人就跟箱子耦合起来，两者形成一个有反饋的机器：

$$\boxed{箱子} \rightleftarrows \boxed{人}$$

为使耦合是以确定而又可重現的方式形成的，就必須規定箱子的"輸入"，那怕是任意的或暫时的也行．每个現实系統都有无穷多可能的輸入——即試驗者用以影响箱子的可能有的方法．同样，它也有无穷多可能的輸出——即箱子影响試驗者的方式(也許是通过記录仪器的)．如果要作有系統的考察，那末必須决定(至少是暫时的)所用的一組輸入与所要观測的輸出是什么．現在我們假設这些都已經决定了．

为使我們(作者和讀者)所考察的問題弄得更明确起見，不妨作两个无关大体的規定．假設不管輸入的实际性质如何，我們用一組拉杆和指針来代替或代表它們(好比是收音机中的旋鈕等等)．这样，輸入"在某一状态"这話的意思就很清楚，这只要把旋鈕和度盘的位置照下来就可以看出是什么状态．此外再假設輸出

是箱上的一組度盘，受箱内机构的影响，各度盘指針在某一刻的位置，就説明輸出的状态.

現在可以設想試驗黑箱的人就象輪船上的机师，他坐在一組拉杆和遙測仪表的前面，用这些东西来控制发动机，并且通过一排度盘来观察所产生的效果. 这种說法虽未免有些不自然，但实际却可代表大多数的自然系統，甚至是生物系統或經济系統.

6-3. 研究方式 一个人不可能两次下到同一条河里去(因河水常在流动，即使你第二次在同一条河的同一地点下水，但你身边的水已經不是第一次下河时的水了.——譯者注)，也不可能两次重复做同样的試驗. 他要做的第二次試驗总是跟第一次試驗有些差别的.

在考察一个黑箱时，情形也是这样. 記录黑箱情况的基本数据表常取下列形式:

时　　　　間	輸入及輸出的状态
↓ …	… …
…	… …

这表内把黑箱各部（輸入及輸出）在一串时間内的状态記了下来. 例如，若有一个黑箱从飞盘上掉了下来，我們可以給黑箱做这样一个登記表(我們把这种形式的这样一串記录叫做登記表).

时　　間	状　　　　态
上午 11:18	我不触动箱子，箱子发出固定频率为 240 赫芝/秒的嗡嗡声.
上午 11:19	我轉动标有記号 K 的旋鈕，音調提高到 480 赫芝/秒，仍是稳定的.
上午 11:20	我不慎按了一下标有“!”記号的按鈕，黑箱温度升高了 20°C.
…	等等.

每个系統基本上都是用这种长篇登記表，記下輸入和輸出的一系列状态，来作研究的. 例如，若一系統所能有的輸入状态是 α 和 β，所能有的輸出状态是 f, g, h 与 j，那末它的典型的登記表可能是(另外还有一个变换!)

时刻： 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
状态： αg αj αf αf αf βf βh βh αh αj βf αh βj βf αh βj αf

（为簡便起見，括号略去）.

这个表虽然看起来是人为做的，显得不自然，实际它是典型的且又是一般的. 它可以代表任何研究結果，从用正弦电压测試电路而观察輸出起，一直到探問精神病人，提出問題 α, β 而获得回答 g, f, h, j 的情形为止.

所以，对黑箱作任何研究的原始数据，总是一串含两个分量（輸入，輸出）的矢量值.

[当然，每个分量本身也可能是矢量(見 3-5 节).]

題：把从 αg 开始的系統中所观察到的各次轉变列成表. 从中找出有什么規律?

6-4. 应該指出，上面还絲毫沒有談到試驗黑箱的人在处理輸入时需要有什么技巧. 这是故意不談的，因为这里不需要技巧！要記得，我們是假定对黑箱一无所知的，在这种情况下，依随便哪一种方式(比方說由投擲骰子决定)来变动輸入旋鈕，就象依任何別的方式一样有道理；因为我們还沒有发現任何事实，可以使我們相信选擇某一种特殊方式是最恰当的. 对現实世界中的机器——工业的，生物的，神經的——来說，試驗者过去对同类黑箱是有些經驗的. 在这种情况下，他就可以采用某种方法，使他能比別的一些方法更有效地探索箱中的未知事項(探索部分已知系統这类事情，会引出更高深得多的問題，現在暫时还不能討論；这問題在 73-5 节及以后略有提到).

6-5. 絕对性 如果有了很长的登記表，試驗者就可从中找規律，找性态有无重复出現的情况(7-19 节). 比方在題 6-3-1 中，他可以发現在 αj 之后总是跟着 αf 或 βf，可以发現：虽然 α 的轉移不是单值的，但 j 的轉移却是单值的.

他就照着这样来考察登記表. 他首先关心的事是想知道：給定了輸入状态之后，黑箱是不是絕对的. 为此他就把：

(i) 状态 α 之后的所有轉移都集在一起，再从中分出 g 变成什么，h 变成什么，照着这样把所有的輸出状态都分一下；

(ii) 对状态 β 也如法泡制；

(iii) 对所有能观察到的輸入状态都如法泡制.

换句話說，他所做的，就是象 4-1 节那样填写一組变换，然后从所填写的考察一下这些变换是不是单值的.

这样，如果他考察所填的登記表，而且 16 个映象个个都已填上了，那就有

↓	f	g	h	j
α	fff	j	jjj	ff
β	hhh	$\cdot$	hh	ff

(輸入在 β 处时，沒有看到 g 轉移成什么). 同一格內的字母都是一样的，因此这表可以簡化为

↓	f	g	h	j
α	f	j	j	f
β	h	$\cdot$	h	f

并可断言在登記表中所观察到的是这个封閉的单值变换.

这样，在重填登記表之后，試驗者可以示明这黑箱的性态是象机器的，就可以推出它的**标准表达式** (canonical representation).

应該看到，他是从直接观察黑箱的实际性态推出来的. 他并不依靠什么"外来的"知識. 不管他所希望得出的是什么，也不管他对所希望得出的东西有多大的信心，最后推得的結果，只取决于实际发生的事. 这样，当他或别人所希望的結果与实际得出的事实不符时，只有靠实驗結果才能最后說明黑箱的性质.

如果系統不是确定性的，即是說，如果变换不是单值的，他就可以选擇下列两种方法之一来做.

第一种方法是改变原用的一組輸入与輸出——多考慮一些变量——然后看看新系統(相当于一个新黑箱，3-11 节)是不是确定性的. 例如，化学家在考察一个系統时起初可能发現它是不确定的，但当他估計到有微量氯存在时，系統就变成确定的了. 許多研究工作就在于找出这样一組合适的变量.

第二种方法是干脆就不打算再去找严格的确定性而另外去找統計确定性——如平均确定性等.只要有大量的記录,試驗者就可以从一大段数据中去研究，如果不能在細节上預測如何从一步轉移到下一步，那就去考察能否在平均上(或类似的統計性质上)預測从一段轉移到下一段的情形.他可能发現:所記录的数据具有象馬尔可夫鏈序列的統計确定性(但这要到第九章再討論,因在那以前我們还一直只討論从一步到下一步的轉移都有确定性的机器).

总結:有了登記表之后,就可考察系統是不是确定的,并(在发現它有确定性时)推出它的标准表达式.

題1: 从6-3节那个系統的登記表,推出輸入为α时的动态图来。

題2(續上): 推出輸入为β的动态图.

題3: 只有一个輸入状态的系統,給出下列一串輸出状态:

$$D\quad G\quad A\quad H\quad C\quad L\quad H\quad C\quad L\quad H\quad C\quad F\quad C\quad \cdots$$

問它是不是絕对的?

題4: 一系統中的二变量x与y各能取0,1或2的值. 輸入能取α与β二值. 登記表为:

时　間:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
輸　入:	α	α	α	α	α	β	α	α	α	α	α	α	α
x:	1	0	0	0	0	0	1	2	2	1	0	0	0
y:	1	0	1	0	1	0	2	1	0	1	0	1	0

时　間:	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
輸　入:	β	α	α	β	β	β	α	β	β	β	α	β
x:	0	0	1	0	1	1	1	1	1	2	2	1
y:	1	2	1	0	2	1	0	1	0	0	2	1

問这是不是个有輸入的机器?

題5(續上): 若輸入保持为α,它的变換是怎样的?

題6: 若一机器有m个輸入状态和n个輸出状态,那末为要对它作充分的研究,至少必須对它觀察几步?

題7: 二黑箱的外表相同,它們各有一个单独的輸入α与单独的輸出x,且两者都是数值变量. 用I与II来記这二箱,并得出它們的标准表达式是:

$$\text{I}:\ x'=x+1-\alpha$$

$$\text{II}:\ x'=(1+\alpha)x-2+\alpha.$$

但不幸后来这I与II的标簽揭掉了,因而不能再分辨哪个箱子是哪个. 請您想出一个簡单的办法再把I和II辨认出来.

6-6. 莫即状态　考察以下变换

$\downarrow$	f	g	h	j
α	f	j	j	f
β	h	f	h	f

就可以看出，这里的状态 g，在登記表里出現一次之后，不管你怎样调动輸入，都不能让它再出現．因此，从 g 开始的轉移就不能再往下探索，也不能一再地重复試驗．黑箱的某些状态不能随意回复原状这一事实，在实踐上是很常見的．这种状态叫做莫即状态．

这类状态的最突出例子是：在测試敌方的新型地雷时引起爆炸的状态．这件事可以更抽象地描述为：系統从一个状态起发生变迁之后，随你怎样撥动輸入，这系統是永远不能再恢复原状的了．当人們对一个懂得学习的有机体做試驗时，所发生的情况基本上也是如此；因为随着时間的推移，它就改变了起初的“天真”状态，而后就不能用簡单的手段使它回复到这一状态．但在这类試驗中，心理学家試驗的对象往往不是特定的个体而是特定的族类，因此他只要簡单地拿一个新的个体来作試驗，就能重新得到初态．

所以，如果是个确定性系統，試驗者就只能限于考察一組既封閉而又可以任意重現的状态，象所举例中的 f, h, j 这些状态，或者他就得在他的輸入里多加上一些状态，以便能有更多的变换，从而或許能得出变到 g 的那种轉移．

6-7. 推导联系　現在可以明确看到，我們是可用推导方法得出黑箱的内部的一些联系来的．因为从直接撥弄輸入和进行观察，可以得出登記表，而这（如果系統是确定性的）又給出标准表达式，标准表达式又給出直接影响图（每个輸入状态各有一个）（見4-13节）．但我們必須小心推导．

必須指出，在現实系統中，“内部联系图”不是唯一的．拿无綫电机来說吧，如果从电气方面来看得出一張内部联系图，如果从机械方面来看又可得出另一張联系图．事实上，象絕緣体就是这样

的元件，它能产生牢固的机械联系而不产生电气联系．得到的是什么样的联系图，就要看用的是哪一組輸入和輸出．

甚至在直接影响图是唯一的情况下，这也不足以說明箱內的联系格式是唯一的．例如設一黑箱有两个度盘 x 与 y 作为輸出；并設 x 主制 y．这样，直接影响图是

$$\boxed{x} \to \boxed{y}$$

(这里两个方格是整个箱子的部件)．給出这一关系的有无穷多可能的內部机构．一个特殊的例子是，用继电器来撥动开关以給出特定联系的网絡．申农曾証明任何指定的性态可由无穷多个可能的网絡产生．例如，設 x 表示在继电器 X 接上电能时閉合的接触点，$\bar{x}$ 表示开启的接触点．同样設另一继电器 Y 有类似的接触点 y 及 $\bar{y}$．假定只有当 X 与 Y 都接上电能时网絡中的 p 到 q 才能通电．在图 6-7-1 中，将 x 与 y 串联的网絡 A 就有这一性态．B 与 C 以及无数多的其他网絡都是这样．

所以性态不能唯一地决定联系．

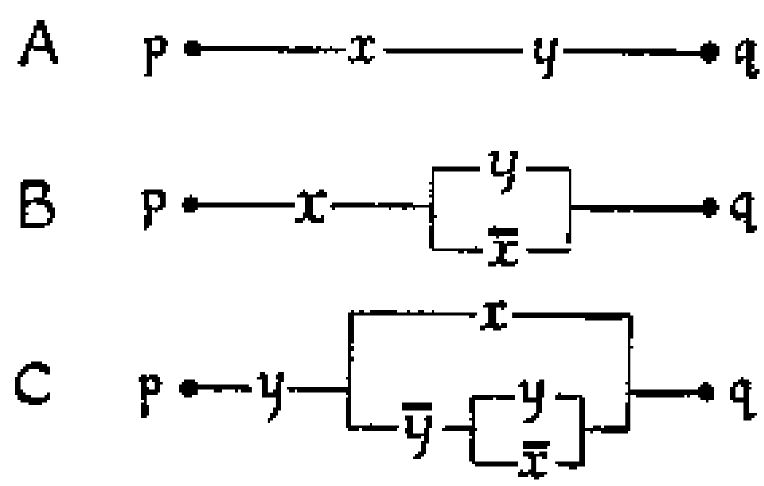


图 6-7-1

題(續題 6-5-4)：若輸入固定在 α 处，推出直接影响图来(提示：見 4-13 节)．

同构型机器

6-8. 所以研究黑箱可以使人获得一定数量的信息；而且在輸入和輸出給定后，不可能获得更多的．至于有多少信息，要在 13-15 节中再討論(特别是在最后一題中)．这里只要指出，标准

表达式可以规定或鉴别一个机构,"准确到同构的范圍内".

粗略地說,同构是指"格局相同". 这是一个范围极广泛的概念,它对那些要准确研究有关"格局"事項的人是极端重要的. 我們先举几个例子,这只是为了說明基本思想.

就图景的格局而論,照相底板和洗印出来的相片是同构的。底板上的方格在相片上也是方格;圓仍是圓;平行綫仍是平行綫.这样,底板上各部分之間的某些关系在相片上还是那些关系,尽管二者的明暗不同(实际正相反). 所以从底片晒出相片这一变换,仍使这些关系保持不变(比較5-2节).

地图和它所代表的地面是同构的(如果图画得准确!).地面上的关系,好比 A, B 及 C 这三个城市成一等边三角形这一事实,在地图上还保持不变,代表城市的 A, B 及 C 三点仍形成等边三角形.

所謂格局还不必限于可以目睹的. 若以每秒50米的初速把一石块鉛直上拋,那末,石块在空中經历过的一系列点,表成在 t 时位于高度 h 处的,将和适合方程

$$y=50x-16x^2$$

的图綫上的点形成同构.

空气(以次音速)流过机翼的流綫所形成的格局,跟电流在导电液体中流过机翼形的絕緣体时所形成的格局一样. 这两种格局是一样的,虽然它們的物理基础不同.

还有一种同构值得加以詳細研究. 图6-8-1表示两个能动系統,各有一輸入与輸出. 在上图中左方的軸 I 是輸入,它可以轉到度盘 u 上所指示的任何位置. 这軸通过彈簧 S 跟一个重輪盘 M 相連, M 则又跟輸出軸 O 相連. O 的轉动度数在度盘 v 上表示出来,这是輸出. 輪盘浸在盛有液体 F 的槽里,槽里液体对 M 有一种摩擦力,跟輪盘 M 的轉速成正比. 現在假若从某給定状态开始,让輸入 u 取得一串数值,那末輸出 v 也相继取得确定的一串数值,至于究竟取怎么样的一串特定值,那就要看 v 的初值是什么, v 的那一刻的变化率以及輸入 u 所取的那一串数值是什么.

下面是个电气系統. 它的輸入是个电位器或别的什么器件

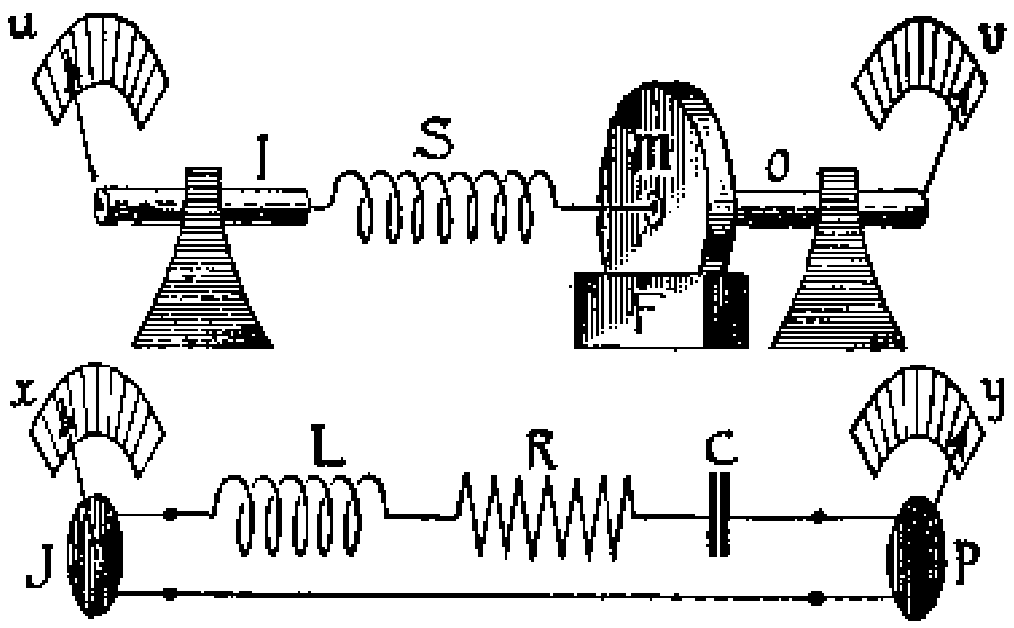


图 6-8-1

J，它所产生的电压表示在度盘 x 上．电路中有感应圈 L，电阻 R 与电容 C 相串联．P 是电流表(如家用电表)，記录所通过的电流总和．这电流总和表示在度盘 y 上，这是輸出．

今若調整 L, R 与 C 的值使其相应于弹簧的刚度，輪盘的惯量及 F 处的摩擦力(虽然不能各各相应)，那末这两个系統在作用上就有极为相似之处．让两者从静态起开始运动．在 u 处施加一系列輸入值，可以尽量长，也可以任意选取，则可在 v 处得到同样长的一系列輸出值：如果在 x 处施加同样的一系列值，则 y 的整个一系列輸出值也就跟 v 的一样．如果再在 u 处施加另外一系列輸入值并記录 v 处的一系列值；然后在 x 处施加同样的輸入值，那末在 y 处的輸出值又重抄一遍 v 处的值．如果把机构的中間部分遮起来，那末不管你試多少次，也不能分出两者的区别来．这样，两部机器虽然从别的观点来說是完全不同的，但它們的性态却表現得极为相似．

还不仅仅是这样．数学家都熟悉象

$$a\frac{d^2z}{dt^2}+b\frac{dz}{dt}+cz=w$$

这种类型的方程．从这方程，若給出了 w 随时間(t)而变的图綫，就容易求得 z 是怎样变的．这样，我們可以把 w 看作这方程的“輸入”而把 z 看作是“輸出”．現在如果适当配合 L, R, S 而取定 a, b 及 c 的值，使 w 跟 z 的关系相同于 u 跟 v 的关系，也相同于

x 跟 y 的关系．所有这三个系統就都是同构的．

同构的巨大实用价値現在看来是很明显的了．現在假如要問：机械系統在某些情况下的性态如何？那就是給定輸入 u 而要求性态 v．这时，实际的机械系統可能不宜于直接測試：它可能太笨重，或者不能馬上运到，或者甚至还沒有造出来！但是如果有个数学家，那末他就能很容易又很快地从輸入 w 求出微分方程的輸出 z 来．用通常的話来說，这就是解决了一个数学物理問題．应該指出的是，这一过程基本上就是使用地图的过程，是使用一个同构的表示来代替不方便的实物．

也可能当时找不到数学家而能找到一个电工．这时仍可采用同样的原理．可以装一个电气系統，在 x 处施加輸入，在 y 处讀出答数．这件事通常說是“做一个电气模型”．

很明显，三个系統哪个也不能說是最合用的；每个都可以用来代替其他两个．比方象工程师要解微分方程时，他可能认为造一个电气系統，在 y 处讀出答数能把問題解决得更快．这时我們一般說他是造了一个“模拟計算机”．机械系統在别的場合下可能是更方便的計算机．通用电子数字計算机之所以特别有用，則是因为可以通过程序設計使它跟任何样的能动系統成为同构．

因此同构系統的用处是經常而又重要的．它之所以重要，乃是因为大多数系統都有其方便与不便之处．当测試某一系統时遇到它的不便之处而能找到同构系統，那末可能会发現同构系統的相应之处是易于理解或易于控制或是易于研究的．經驗告訴我們，有能力把問題化为同构系統的問題，虽然还不足以給出絕对可靠的結果（因同构可能只在一定的范圍内有效），但毕竟还是对研究工作者最有用而又最实际的一种帮助．在科学上处处都要用到同构的概念．

6-9. 現在必須說明，同构这一概念用处虽广，但还可以有准确而客观的定义．蒲巴基（Bourbaki）的数学原理这一套书中[1]曾

[1] Bourbaki 是法文“数学原理”（Éléments de mathématique）这一套书作者的集体笔名——譯者注．

对此給出最基本的定义；我們这里則只要給出适用于能动系統的定义就行了．只要两个机器都已化成它們的标准表达式，就可以直接应用这定义．

比方說我們来考察两个簡单的机器 M 及 N，它們的标准表达式是

$$M:\ \begin{array}{c|cccc} \downarrow & a & b & c & d \\ \hline \alpha & a & c & d & c \\ \beta & b & a & d & c \end{array} \qquad N:\ \begin{array}{c|cccc} \downarrow & g & h & j & k \\ \hline \delta & k & j & h & g \\ \varepsilon & k & h & g & g \end{array}$$

这两者沒有显著的关系．但是如果画出动态图綫来如图 6-9-1 所示．細察之下可以发現两者有极为相似之处．事实上，只要把 N 里的点重排一下，而不必打乱箭头(2-17 节)，就可得出如图 6-9-2 所示的样子．这些图綫除了标記的字母不同之外就跟 M 的图綫完全一样了．

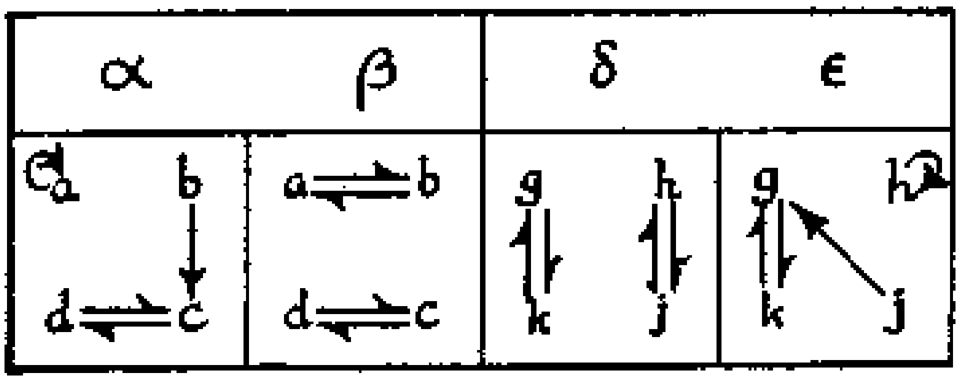


图 6-9-1

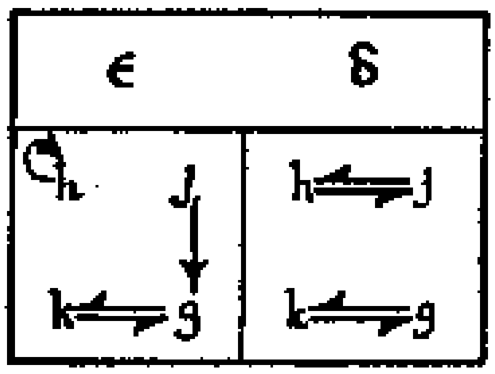


图 6-9-2

說得更明确些：两个机器的标准表达式，如果有个一一变换，能将一个机器的状态(輸入与輸出)变为另一机器的状态，而同时把一种表示式轉变为另一种表示式的，則說它們是**同构的**．

比方就所举的例子来說，把一一变换 P

$$P:\downarrow\begin{matrix}\delta & \varepsilon & g & h & j & k\\ \beta & \alpha & c & a & b & d\end{matrix}.$$

施之于表 N（对表内和表边都作变换），結果得

$$\begin{array}{c|cccc}\downarrow & c & a & b & d\\ \hline \beta & d & b & a & c\\ \alpha & d & a & c & c\end{array}$$

这就基本上跟 M 相同了．例如在边上的 c 与 β 都給出了 d，于是这同构就符合于定义（同构还可以看得更清楚，只要先交换行，变成

$$\begin{array}{c|cccc}\downarrow & c & a & b & d\\ \hline \alpha & d & a & c & c\\ \beta & d & b & a & c\end{array}$$

然后再交换列，变成

$$\begin{array}{c|cccc}\downarrow & a & b & c & d\\ \hline \alpha & a & c & d & c\\ \beta & b & a & d & c\end{array}$$

但这样重排一下，不过是为了使讀者看起来方便）．

若用矢量来规定状态，做法基本上还是一样．設 R 与 S 是两个絕对系統：

$$R:\begin{cases}x'=x+y\\ y'=x-y\end{cases}\qquad S:\begin{cases}u'=-u-v\\ v'=-u+v\end{cases}$$

則变换 P：

$$P:\downarrow\begin{matrix}u & v\\ y & -x\end{matrix}$$

不过是表明 S 与 R 的状态間的一一变换的一个簡写．这个变换詳細写出来就是

S 中的	$(2, 3)$	对应 R 中的 $(-3, 2)$
S 中的	$(1, 0)$	对应 R 中的 $(0, 1)$
S 中的	$(4, 5)$	对应 R 中的 $(-5, 4)$
S 中的	$(-3, 0)$	对应 R 中的 $(0, -3)$
这就是說 S 中的	(u, v)	对应 R 中的 $(-v, u)$

(比較 4-9 节中的 U). 对 S 中的所有状态施行 P;結果得

$$\begin{cases} y' = -y + x \\ -x' = -y - x \end{cases}$$

从代数上讲这跟 R 是一样的. 所以 R 与 S 是同构的.

題 1: 用什么一一变换能証明下列二絕对系統是同构的?

$$Y: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e \\ c & c & d & d & b \end{matrix} \qquad Z: \downarrow \begin{matrix} p & q & r & s & t \\ r & q & q & p & r \end{matrix}$$

(提示: 試就中找出某一特点,例如找出一平衡状态.)

題 2: 用以証明下列二絕对系統为同构的一一变换有多少?

$$A: \downarrow \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \end{matrix} \qquad B: \downarrow \begin{matrix} p & q & r \\ r & p & q \end{matrix}$$

***題 3:** 写出图 6-8-1 中二系統的标准方程并証明它們是同构的. (提示: 若該系統是带輸入的机器,必須要有多少变量?)

題 4: 怎样給变量另立記号,以便証明絕对系統 A 与 B 是同构的.

$$A: \begin{cases} x' = -x^2 + y \\ y' = -x^2 - y \\ z' = y^2 + z \end{cases} \qquad B: \begin{cases} u' = w^2 + u \\ v' = -v^2 + w \\ w' = -v^2 - w \end{cases}$$

(提示: A 的右边每一变量只出現一次; B 的情形也是这样. 还有, 在 A 中只有一个变量是依賴于其自身的平方的, 即具有 $a' = \pm a^2 \cdots$ 这种形式的; 对 B 也一样.)

6-10. 上节所讲說明: 在两个机器中, 若将其中一个机器的变量改换名称之后, 便能使两者相同, 则两机器是同构的. 但"改换名称"这件事有簡有繁,底下就要讲到.

仅用状态来規定的系統 (犹如上节所讲的), 是不直接提到部件或变量的. 在这种情形下, "改换名称" 只不过 "把状态改换名称"而巳. 然而有部件或变量的系統也可将其变量改换名称, 只不

过这完全不是同一回事罢了. 对变量改换名称实际是对状态改换名称，只是須加相当的限制 (7-8 节)，而对状态則可随意改换名称. 故改换状态的名称比改换变量还要一般些.

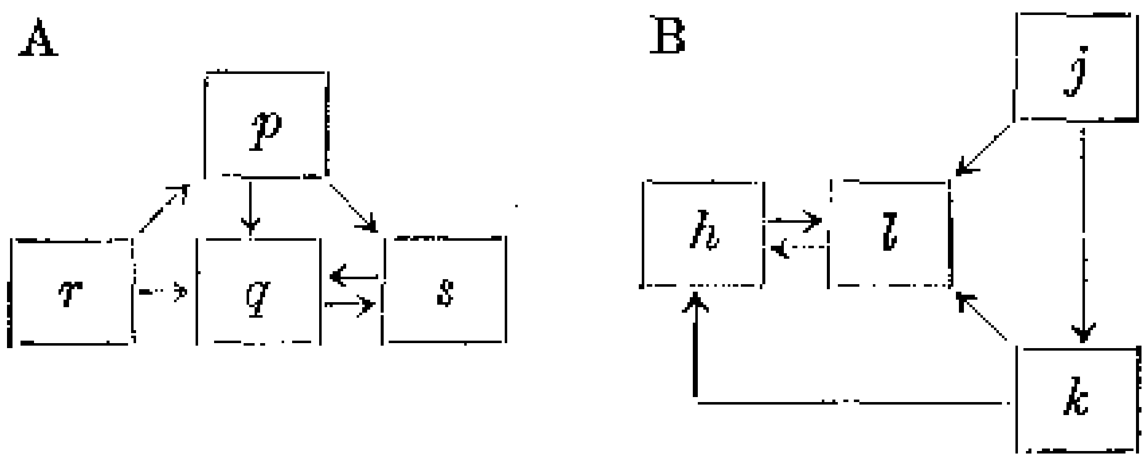
例如設一系統有九个状态；把其中八个状态改换名称之后，并不会限制第九个状态的名称. 但若設系統有二变量 x 及 y，而每一变量各能取三个值 x_1, x_2, x_3 及 y_1, y_2, y_3. 这时就可能得出九种状态，而 (x_2, y_3) 及 (x_3, y_1) 是其中的两个状态. 設将系統的变量改换名称如下：

$$\downarrow \begin{matrix} x & y \\ \xi & \eta \end{matrix}$$

今若 (x_2, y_3) 变到某状态 (α, β)，而 (x_3, y_1) 变到 (γ, δ)，則为求前后一致起見，状态 (x_2, y_1) 必須变成 (α, δ) (画出相空間图，并定出 ξ 軸与 η 軸上的值). 这样，九个状态就不能随意而又独立地变. 所以改换变量的名称不象改换状态的名称那样有較大的伸縮余地.

結果是，因改换状态的名称而消失的一些性质，在改换变量的名称后仍可保存下来. 如直接影响图便是其中之一.

用状态描述的系統当然沒有这种图，因它实际只有一个变量. 但具变量的系統則有直接影响图. 这时相空間有几个軸，而且稍試几下就可知道，作一个一一变换来改换变量的名称后，直接影响图只是象"扣綫絡"那样变了一下，如同下图的 A 变到 B 那样：



題 1 (續題 6-9-4)：試比较 A 与 B 二直接影响图.

題 2：一絕对系統的下列性质，在改换状态的名称后是否改变：(i) 相空間中的差数；(ii) 它是否可約；(iii) 平衡状态的个数；(iv) 是否有反饋；(v) 相空間中的循环圈数.

题 3(續上)：改换变量名称后会对它們产生什么影响?

6–11. 同构这一問題的范圍很广，本书只能讲这問題的入門知識．但在結束这問題以前应該指出，比改换变量名称更为复杂的变换，可以改变直接影响图．例如系統

$$A:\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)+xy+y\\[2ex] y'=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)+xy+x\end{cases}\qquad B:\begin{cases}u'=-u\\ v'=v+v^2\end{cases}$$

在一一变换

$$P:\begin{cases}u=x-y\\ v=x+y\end{cases}$$

之下是同构的．但 A 的直接影响图是

$$\boxed{x}\ \rightleftarrows\ \boxed{y}$$

而 B 的直接影响图則是

$$\boxed{u}\qquad\boxed{v}$$

它是两个不相联系的变量．

数学物理中广泛采用的"标准坐标法"也正是用这样的一个变换，不直接研究系統的原来形式，而研究使各变量互相独立的同构形式．經过这一变换后，直接影响图就大为改观；所保留的只是一組标准方式(normal modes)，即其行为的特征方式．

象上例这种形成变量(即 $x-y$)的某一函数的变换(如 P)，对試驗黑箱的人說来，就不仅仅是把 $x-y$ 的輸出度盘改换名称．这一变换的意义，相当于使黑箱的輸出 x 与 y 通过一种以 x 及 y 为輸入的器械，而产生以 $x-y$ 及 $x+y$ 作为新的輸出．这一結合过程所表示的运算就比 6–10 节中所讲的要复杂了．

题：試証 A 与 B 是同构的．[提示：$(x-y)'=x'-y'$，何故?]

同 态 机 器

6–12. 同构的定义规定了最严格意义下的"等价性"．只有

当两个机器(或黑箱)是这样的类似,以至万一两者混在一起后,至少单从测試性态这一点来讲不能把他們区别开来,他們才算是同构的.

但也有程度較差的类似性. 例如,一秒摆动一次的和半秒摆动一次的两个钟摆,看起来显然是类似的,但它們在严格的意义下并不是同构的. 然而如果以不同的时間单位来量,使其中一摆的計时单位是另一摆的一半,那末它們就变成同构的了.

两个机器之間也可以有"同态"的关系. 这是对較复杂的机器施行多一变换的結果,把它变成一种新的形式同构于較簡单的机器. 例如 M 及 N 二机器

M:

↓	a	b	c	d	e
i	b	a	b	c	a
j	a	b	c	b	c
k	a	b	b	e	d
l	b	c	a	e	e

N:

↓	g	h
α	g	h
β	h	h

乍看起来很少相似之处. 然而它們之間有一种深刻的类似性.(讀者如果能自己看出相似之处——那怕是很不明确的也好——然后再往下念,就可得到不少好处;注意表 N 有这样一个特点:三个元素相同,只有一个不同. 从表 M 中你能不能找出这一类情形——比方說把表 M 分成方块看究竟是如何?)

用以下的多一变换 T 来变换 M:

$$T:\ \downarrow\ \begin{matrix} a & b & c & d & e & i & j & k & l \\ h & h & h & g & g & \beta & \beta & \alpha & \alpha \end{matrix}$$

(这是单值的,但不象 6-9 节那样是一一的),便得

↓	h	h	h	g	g
β	h	h	h	h	h
β	h	h	h	h	h
α	h	h	h	g	g
α	h	h	h	g	g

可以看出，重复之处并不互相矛盾，所以这表不妨可重作

↓	h	g
β	h	h
α	h	g

它就跟 N 同构了。

細細考察 M，就可看出它究竟在什么地方跟 N 相似。在 M 内的各步轉移是分成方块来看的；如 a, b 及 c 总是变为 a, b 或 c 之一。这样 M 中方块的轉移就跟 N 中状态的轉移一样了。于是 N 就跟簡化后的 M 等价。

这关系也可用别的方式来說明。先設有一人能分辨 M 的所有五种状态而让他来观察这两个机器；他肯定会說 M 与 N 不同（即非同构）而且 M 是比較复杂的。然后再設有一个人分辨力較差，不能区分 a, b 和 c 三种状态，把它們一起都看作是 A；又把 d 和 e 一起都看作是 B，把 i 与 j 看作是 Γ，把 k 及 l 都看作是 Δ。这位新观察者，見了这簡化的 M，就会說它是与 N 同构的。因此，如果两部机器中，只要有一部簡化之后——即只要对其中的一部分辨得不那么完全仔細，就变成相似的，那末它們就是同态的。

从形式上讲，如果两机器間有这么一种关系，在我們找到一种合适的多一变换，对其中一机器施行該变换后，便能使它变成与另一机器同构的，则那另一机器（較簡单的）便是第一个机器的同态象。

題 1： 同构是不是同态的一种极端情形？

題 2： 机器与机器間还有什么别种类型的同态关系？

6-13. 若要把本书所讲的方法用到生物系統上，那末不仅方法本身要足够复杂以适应生物系統的复杂性，而且生物系統还必须大为簡化，才能使研究工作切实可行。至今还沒有任何一种生物系統是按照它本来的复杂面貌来研究的，而且在很长的一段时期内似乎也不会如此。生物学家在开始他的研究工作以前，照例总是作了許多許多簡化步驟：如果他观察鳥筑巢，他决不会想到鳥

脑中复杂神經活动的細节；如果他研究蜥蜴如何从敌手逃脫，他不会想到去观察蜥蜴肌肉中某特定分子或离子的变化．因此生物学者常常只研究他所考察系統中的一小部分状态．他所作的任何結論都只是部分眞理，是簡化后的事实．但一个系統可以合理地簡化到什么程度？一个科学家能不能适当运用部分眞理？

当然，一个从事实际工作的人对这一点是不会怀疑的．現在我們設法把这个問題讲清楚、讲明确．

有些知識可能是片面的，但就其本身来說却可能又是完整的．最清楚的例子也許就是关于普通乘法的問題．所有乘法的范圍是很广泛的，它包括任何二数相乘之积的知識，比方說它包括这样一个事实：

$$14792 \times 4,183584 = 61883,574528$$

但是关于乘法的这一切事实中，有极小的一部分事实如

偶数×偶数＝偶数

偶数×奇数＝偶数

奇数×偶数＝偶数

奇数×奇数＝奇数

这里重要的一点是：虽然这部分事实是全部事实中的极小极小部分，然而这部分事实本身却是完整的．（事实上这是数学中考察得最早的一种同态关系）只要把上述奇偶数相乘这一知識的完全性，跟

$$2 \times 2 = 4$$
$$2 \times 4 = 8$$
$$4 \times 2 = 8$$
$$4 \times 4 = 16$$

这一組事实的不完全性对比一下（因为它沒有告訴我們 4×8 是多少等等）．由此可見，虽然有些知識在对較大的体系而言是部分的，但就其本身来說却完全可能是完整的．

因此我們知道两个不同的机器之間可能存在着同态关系．这关系也可能存在于同一机器的內部：存在于該机器的可能有的各

种不同的、但仍保持其机器特征的(3-1 节)各种篇型之間．例如，設机器是 A:

$$A:\downarrow\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ e & b & a & b & e \end{matrix}$$

設甲所看到的机器就是这个样子的．今設有另一人乙不能分辨 a 与 d 二种状态，也不能分辨 b 与 e．为明确起見，今把他所不能分辨的状态改換名称如下：

$$\downarrow\quad \underbrace{a\quad d}_{K}\quad \underbrace{c}_{L}\quad \underbrace{b\quad e}_{M}$$

只能看到 K, L, M 三种状态的乙，就会认为这机器的性态是确定性的．因状态 K(实际是 a 或 d)总会变到 M(实际是 b 或 e)等等．他将說这机器的性态有如闭合变換

$$\downarrow\begin{matrix} K & L & M \\ M & K & M \end{matrix}$$

并且认为这是单值的，确定性的．

所以这无非是把旧系統中彼此不同的一些状态合并起来，就形成了新系統，但我們并不能倒过来說，随便把一些状态合并起来，就会得出同态机器来．例如設有第三个观察者丙，只能辨别出两种状态：

$$\downarrow\quad \underbrace{a\quad b\quad c}_{P}\quad \underbrace{d\quad e}_{Q}$$

那他就会发現：P 有时变成 Q(实际 P 是在状态 a) 有时变成 P(实际 P 是在状态 b 或 c)．这样 P 經过变換后得出的結果不是唯一的(不是单值的)，因而丙就要說这机器(只有 P 与 Q 两种状态的)不是确定性的．他对只能辨别出 P 与 Q 两种状态的测量过程会感到不滿意，他就会想法去辨别得更細致些，把不能預测的变成能預测的．

这样，如果把一机器的各种状态适当地合并起来，它就可以**簡**

化成新的形式．用科学方法来研究复杂的系統，并不要求把每一种可能分辨的状态都分辨清楚．

题 1：奇数和偶数用加法結合时，形成什么同态系統？

题 2：求下列四态系統

$$\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ b & b & d & c \end{matrix}$$

的一切可能的簡化，使簡化后仍是确定性系統（机器）．

题 3：对下列系統

$$x' = -y$$

$$y' = x^2 + y$$

可能作什么簡化，使簡化后仍是个确定性机器？

6-14. 在研究生物方面的系統时，我們就有理由，而且也不得不，存心不把所有可能分辨的状态都分辨清楚，而且存心把一个能动系統換成它的同态系統而只研究后者．

在以前各章中，我們常假定研究者知道系統每时每刻究竟处于什么状态．換言之，我們假定他在每时每刻对系統的状态是完全掌握了的．但若研究的系統愈来愈大，那末总会大到这么一个阶段，以致仅仅由于系統状态的数量过多这一点，就使他不可能接收关于系統状态的所有情况．或者是傳送通道不能傳遞所有的信息，或者是研究者接到了所有这些信息后弄得手足无措．如果发生这种情形，他該怎么办？回答是清楚的，他必須把要掌握整个系統的雄心打消．他的目的必須限于得到一种部分的了解，这一部分的知識虽不能包括整个系統，但其本身是完整的，而且足够用来达到他最后所需要的实用目的．

这些事实着重指出了研究极大系統时的一个重要原則問題．在研究这样的一个系統时，研究者說到这"系統"时必須审慎，因这話的意义可能相当含糊，甚至可能非常含糊．所謂"这系統"可能就指該系統本身而不管研究者是怎样去认識它的，也可能指的是某某研究者所关心的一組变量（状态）．虽然从哲学上讲系統本身似乎更重要，但对实际工作者說来，第二种观点却无疑更加重要．但如果沒有指定研究者是誰，这第二种观点本身的意义也可能

是含糊的，因所指的一組变量可能是原有整个一組变量的任何同态象，是原系統的任一同态子系統．为什么必須把这些不同的意义辨别清楚呢？因不同的（同态）子系統（机器）具有不同的性质；从而虽然两个（同态）子系統都是从同一实物抽象而来的，但对其中一个（同态）子系統所作的断語，可能不适用于另一（同态）子系統．

因此，离开了一个确定的观察者，对于特大系統来說，談不上有什么唯一的性态．因为，同是一个实在系統有多少观察者，就很可能有同样多的（同态）子系統，从而有同样多的性态．而且这些性态又可能确不相同，以致若它們出現在同一系統內时会变得彼此不相容．例如，动态图为

$$h \rightleftarrows k \qquad m \rightarrow l \rightleftarrows j$$

的五态系統有两个洼，并且总都以循环圈告終．但由变换

$$\downarrow \quad \underbrace{h \quad j \quad k \quad l}_{r} \quad \underbrace{m}_{s}$$

給出的同态子系統（只有状态 r 与 s），它的动态图綫 $r \rightarrow s$，就只有洼而沒有循环圈，但这两种断言都是一样眞确的而且也是相容的，因它們是对不同的系統（如 3-11 节所规定）来說的．

这里所采取的观点是：科学（就观察者所发現的事实而言）最直接关心的并不在于要去发現系統“确实”是什么，而在于綜合不同观察者的发現，因每一个这种发現只不过是整个事实的一部分或一方面．

工程师在建筑桥梁时，如果要考虑到每一个原子，那末由于数量过大，他就会发現这件工作不可能进行．因此，虽然他所处理的桁架等等本身原是由原子組成的复合体，但他得忽略这一事实而把它們看作是单位．事实也正是这样，桁架的性质允許我們对它作这样的簡化，从而工程师的工作就变得切实可行了．由此可見，研究大型系統时，慎选其某些方面而只限于研究該方面，这种方法无非就是实踐上常用的方法．本书中我們要更严格和更自覚地按照这一方式来做．

6-15. 格 同一机器的各种不同簡化，彼此間有确當的关系．例如，題 6-13-2 中那个系統的六种簡化形式是：

(1) $a,\ b,\ c,\ d$

(2) $a+b,\ c,\ d$

(3) $a,\ b,\ c+d$

(4) $a+b,\ c+d$

(5) $a,\ b+c+d$

(6) $a+b+c+d$

这里，象“$a+b$”就表示 a 与 b 不再有区别．現在，把 a 与 b 混在一起就可从(3)得出(4)． 但要从(4)得出(5)，仅仅靠把几种状态混在一起就不行了；因(5)中 a 与 b 有区别而这在(4)中已不复区别．这样立即可以看出簡化的情形是：

从(1)：可以簡化到所有别的五种系統，

从(2)：可以簡化为(4)与(6)，

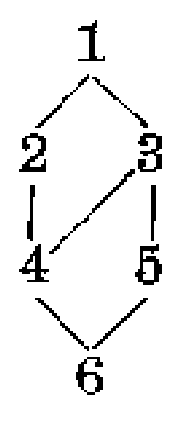
从(3)：可以簡化为(4)，(5)及(6)，

从(4)：可以簡化为(6)，

从(5)：可以簡化为(6)，

从(6)：不能再簡化．

所以各种不同簡化系統的关系可图示于下，图中每根綫的上端表示原系統，其下端則表示簡化后的系統．



这个图属于所謂“格”这种类型，这是近世数学中很注重研究的一种构造．本书之所以要讲格，只是因为这样的一种排列法可以把許多关于系統的观念弄明确，而前此我們只能对这些观念作直观的叙述．

每个格有单独一个元素在顶点（如 1）还有单独一个元素在下端（如 6）． 当格表示一机器的各种可能的簡化系統时，位于顶点的元素相当于各个状态都分辨清楚的机器；也相当于試驗者能分辨一切状态时对系統所具有的知識．在下端的元素相应于各态都混同的机器；若把这混同态記为 Z，那么机器所能作的变换只是

$$\downarrow \begin{matrix} Z \\ Z \end{matrix}$$

这一变换是閉合的，所以总**有些东西在那里不变**（見 10-4 节），只能分辨到这一步的观察者，对这机器只能說："它在那里"．但不能再說出别的来．当然"在那里"这一性质是一个机器的最起碼的性质，借以使它有别于那些仅仅只是曇花一現的事物． 前几章所强調指出的"閉合"的重要性，現在可以看出来了．这相当于說（直观想法）：一件东西要成为机器，至少它必須存在．

在这两种极端情況之間有着各种各样的簡化，它們之間都有自然而且准确的次序． 在接近頂点的那些簡化，代表与眞实情况相差甚微的系統．接近下端的，则代表那些最粗糙的簡化．例如，經历經济周期的整个經济系統，虽然包含許多彼此有相互作用的部分，經过这种簡化后，可以归結为含两个状态的簡单形式：

$$\begin{tikzcd} \text{繁荣} \arrow[r, bend left] & \text{衰退} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

所以，**一能动系統的各种簡化可以排成一定次序彼此联系起来**．

6-16． **模型** 現在我們对"模型"的意义可以了解得更明确了．这一問題在 6-8 节中已經談到过．那里我們发現有三个同构系統，从而它們可以彼此互相作为代表． 这問題对研究生物系統的人是比較重要的，在許多情形下用模型是有帮助的，它可以帮助研究者对研究对象进行思考，或者供他作为一种模拟計算机．

模型与生物系統很少是**同构**的：平常它不过是生物系統的**同态象**． 但对模型本身也很少考虑到它的一切实际細节：我們常常

只把模型的某些方面跟生物系統联系起来；例如，錫做的老鼠可作为活老鼠的好模型，如果我們不計較模型是錫做的而活老鼠是由蛋白质构成的这一事实. 所以情形常常是这样的：就生物和其模型两个系統来說，它們的关系是：其中一个的同态象跟另一个的同态象是同构的（这一关系是对称的，因此，随便哪一个系統都可以看作是另一个系統的“模型”）. 若同态象在格上的位置愈高，那末作为模型的同态象就愈逼眞.

本书对同态問題只能讲到这里. 从所說的已足够了解这一問題的基础和看出其进一步深入研究的主要綫索. 但深入研究是以后的事

題 1: 若两个格中的两个最高元素同构，那是什么样的一种情形？

題 2: 若以直布罗陀要塞的巨石作为人脑的模型，其相似程度如何？

題 3: 若以下列机器

$$\downarrow \begin{matrix} p & q & r \\ q & r & r \end{matrix}$$

作为題 6-13-2 那一系統的模型，其相似程度如何？

特 大 黑 箱

6-17. 从上面几节所讲，可以看出黑箱也具有机器所常具有的性质. 事实上我們日常生活中和黑箱打交道的机会很多，并不象我們所設想的那样希罕. 例如，我們可能起初会設想自行車不是个黑箱，因为連成它的每个部件我們都能看出来. 事实上我們只是自以为知. 踏板与輪子的最終联系在于把金属原子聚在一起的那些原子力；而这些原子力我們一点也沒有看見. 而学騎車的孩子，只要知道蹬踏板能使車輪轉动就够了.

为使讀者进一步体会到黑箱几乎是日常生活中的平常事物，我們指出：如有人研究一組黑箱，他就可以把这些黑箱耦合（装配）起来造成一架他所設計的机器. 方法很简单：研究每一黑箱的結果得出它的标准表达式（6-5 节），所以它們可以耦合起来，把一个黑箱的輸入接到另一黑箱的輸出上，完全照 4-8 节中所讲那样形成新的系統.

这里所要告訴讀者的，并不是說黑箱的性质有点象实物，而是說所有实物实际上都是黑箱，并且我們从小到老一辈子都在跟黑箱打交道．若密切注意人和物的关系，注意从实物得出什么信息，这信息又是怎样获得的問題，那末黑箱的理論只不过是关于实物或实有系統的理論．因此，若我們特别注意信息的交流，就可知道黑箱理論无非是研究观察者与其环境之間的关系的理論，“这样，对現实世界的研究就变成了对变換器的研究”（見 Goldman 著信息論）．

6-18． 在继續往下讲以前，先来讲明什么是“突現”性质．

先說明一件事实．若有一些黑箱，每个黑箱起初是单独分开来研究的，一直到作出它的标准表达式为止，然后用已知的联系按已知的格局把它們耦合起来，于是（4-8 节）整个体系的性质就变得确定的，可以預測的了．所以在这种場合下，一組黑箱就不会有“突現”性质；就是說，不会有从部件性质和其耦合状况所推不出来的性质．

“突現”这一概念从来沒有人明确下定义过，但底下的例子也許可以作为討論的基础：

（1） 氨是气体，氯化氢也是气体．这两种气体混合在一起，結果便得固体——这是两种反应物质原来都沒有的性质．

（2） 碳、氢、氧几乎都是无味的，但它們的一种特定化合物“糖”却具有一种“甜”味，是三者都沒有的．

（3） 細菌体內二十种左右的氨基酸都沒有能“繁殖”的性质，但它們合在一起（再加上一些别的物质）之后却具有这种性质．

如果把这些例子跟我們对黑箱的研究和耦合过程細加比較，就可看到，这些例子要求我們对部件的已有知識比研究黑箱組时要求我們对黑箱的已有知識少得多．例如，关于氨与氯化氢混合后有什么情况的推測，对每种物质只要知道它是气体就行了．同样，对二十种氨基酸来說，所要問的只是它們“能否繁殖”？如果把每种氨基酸当作黑箱看待，考察起来就一定会深入得多．加到一个分子上的輸入，是能影响它的那組电能和机械能的一切分布和組合；

而其輸出則是所有它可能产生的一組电学和力学状态．如果能得到这种完备的知識，那末4-8节中的方法就可以告訴我們怎样来預測許多耦合氨基酸的性质；而在所預測的性质中包括其整体是否能繁殖这一性质．

但我們可以看到，整体的性质可根据关于部件的完备知識或不完备知識来預測．如果对部件的知識是完备的，那末这就是当我們已知黑箱的标准表达式的情形，它的輸入或环境即是与它耦合的那些别的黑箱的所有标准表达式．当我們对部件的知識完备到这种程度，使我們所預測的性质也是完备的，那就不会有額外的突現性质．

但（不管由于什么原因）我們对部件的知識往往是不完备的．于是我們只能根据不完备的知識来作預測，从而預測的結果也可能是錯誤的．有时，我們对部件只知道它們每一个都具有某种特别的性质．在这种情况下我們沒有更好的办法来作預測，而只好用簡单的外推法——預測整体也具有每一部件所具有的性质．有时这样做是合理的；例如，若整体由三个部件組成，每一部件都是純銅制的，那末如果我們預測整体是純銅制的，这种預測就是正确的．但这样的預測法往往不灵，而結果会——如果我們愿意这样說——“突現”新的性质．

事实上，当系統变得很大，当部件和整体的大小相差非常悬殊整体的性质往往就会跟部件的性质大不相同．因此生物系統与生物系統之間特别容易显出差别来．所以我們必須打破这样的想法，以为整体的性质总是部件性质的重复，或以为部件会具有整体所具有的性质．

上述氯化氨和糖的例子不过是簡单的例子，但是还有更复杂的情形．比方我們来考察一系統內某种功能的“局部性”概念．从細节上考察事物所得的看法，很可能跟从全局上考察事物所得的看法大不相同．比方說要問英国的釀造业是不是有地域性的．就专卖事业的稅务官来說，因他对轄区內每所房子在是否营釀造业这一点上知道得很清楚，一定会回答說这是“有地域性”的．但是

繪制英国地图的人，因他不能标出究竟哪个地方是专酿酒的，就会說这是“沒有地域性”的．当然他們都是对的．之所以允許有相反的結論，乃是因为在体系的大小相距过甚时，对极小体系是正确的性质，对极大体系就可能是不正确的．

我們再另外举一个普通彈性橡皮的例子，来說明局部和整体可以具有相反的性质．多年来，物理化学家在研究为什么橡皮的分子能够伸縮．直到最近，他們才发現他們正好犯了这一节告誡讀者所应避免的錯誤．現在我們知道，橡皮分子本身并沒有伸縮性：你把一个橡皮分子拉出去放开，什么事情也沒有！那末为什么橡皮能伸縮？問題在于“伸縮橡皮”不等于“伸縮一个分子……”；当有許多分子时，他們彼此挤在一起，使大部分分子的长度比应有的最大长度小．这好比在拥挤的海滩上，把一根五十米长的绳子拉直；但几分钟之后，人一挤，绳子两头的距离就不到50米了！

别的例子不用再多举了，因为这些例子所要說明的，都是否定这样一个思想，即就特大系統而論，不能“先驗”地推测整体的性质必然是部件性质的簡单翻版（7-3节中还要添上一些例子）．

6-19 系統愈大，研究它的基本方法（6-3节）用起来愈費事．到末了，为研究它所必須化費的功夫变得太大使基本方法行不通．那末观察者該怎么办呢？不管在生物科学中，还是动物学或社会学，这一問題都是非常重要的，因为这系統的規模和复杂性确乎是很大的．

在别的科学中也会出現同样的問題．例如，虽然从原則上讲牛頓的理論可解决一切关于引力的問題，但要把它应用到三体問題上就很复杂，而应用到六体問題上就簡直复杂到不可能．但天体物理学家却要探討含20,000个以上星球的星团！那末怎么办？

經驗告訴我們，在每种情形下，科学家必須小心規定他所要問的是什么．他必須只問他眞正想要知道的，而不是他以为他所要知道的．例如，一个新手会說他要知道整个星团的性质，就是說，他需要知道各个星球的运动軌道．但是如果供給他这些知識，那就

需要有充滿数字表格的好几卷书，那时他会认識到他实在并不需要所有那些数字．事实上，所要問的常常是些簡单的事，如同“星团会不会縮成一球，或者会不会散成一片圓盘?”

从邦加来(Poincaré)領先做起，現在物理学家有种很好的方法来处理这类問題，即是用拓扑方法．用拓扑方法可以对簡单的問題給出明确的答案，使观察者不致遇到使他茫无所措的繁杂情形．

在微分方程的全部解案非常复杂时，类似的方法应用在复杂的微分方程上，可以使我們推出解的主要性质来，这就是所謂微分方程的“稳定性”理論．

我們这里只要知道有这种方法就行了．这方法提示我們，当一个黑箱(如大脑)的变量太多，不可能实际一一加以研究时，那末懂得控制論方法的心理学家就得想出一种“拓扑”方法来研究，使他能得到他实际(而不是他自以为)所需要的知識，而不致于陷于太多的无用細节而茫无所措．来文(Lewin)曾打算創立这种心理学，不过在三十年代拓扑学还沒有发展到可以作为一項有用的工具．但在五十年代这門学問已发展得好得多了，特别是法国学派以集体笔名N．瀋巴基出版的那套书中那种讲法．我們将来終于有可能得到这样的一种心理学，它既是严格的，又是实用的．

部分可察黑箱

6-20． 在这以前，我們讲黑箱时都假定观察者具备为观察黑箱一切状态所必需的手段，就象輪船上的机师那样(6-2节)，有一組完整的仪表可以观測机器的一切状况．但实际的情形常常不是这样的，有些仪表是藏盖着的或是短缺的，而黑箱理論的一个重要部分就在于闡明：当观察者只能观察整个状态的某一部分时，会出現什么特别的情形．

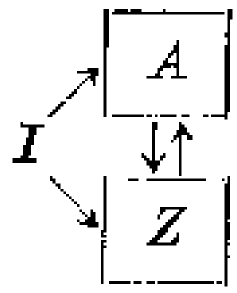
这方面理論的发展前途很大，迄今还很少人探究过．这对心理学一定是很重要的；因为对心理学家来說，个别的对象，不管是精神病人或是迷陣中的老鼠，都可算作是个不能全部被观察到的

大系統；因对象头脑中所发生的事件是診所或实驗室里所不能直接观察到的.

应該指出，当系統的一些变量不能被观察时，那由其余变量所代表的“系統”就会出現值得注意的甚至神奇的性质. 幻术就是个普通的例子，它之所以能出現近乎奇迹的事，只是因为并不是所有的重要变量都是能观察到的.

6-21. 当机构的一部分变得不能被直接观察到时，观察者对該机构的看法会有很大的不同，下面就是这方面的一个例子.

設观察者研究一个黑箱，这是由两个互相作用的部件 A 与 Z 构成的，而两者又受同一輸入 I 的影响（注意，A 的輸入是 I 与 Z）.



假設主要的問題是在探討 A 是否具有某一性质 B（如是否沿变迹 B 变化）. 設只有在下列两事件同时发生：

(1) I 的状态是 α

及 (2) Z 的状态是 y.

A 才具有这一性质（沿这一变迹变化）. 再假設只有在 I 具有特殊值 μ 之后 Z 的状态才会是 y.

我們（作者和讀者）对这一系統是无所不知的. 現在假定有甲乙两个具有不同观察能力的人，我們就以完全知道内幕的旁观者的身份，来看他們对这一系統会具有如何不同的看法.

假定甲也象我們一样（除了能看到 I 之外）能同时看到 A 和 Z 的值. 他要研究在哪些情况下 A 会呈現性质 B，他就說每当整个系統在 Z 的状态是 y 而輸入取 α 值时，B 就出現了. 于是，若已知輸入在 α 处，他就把性质 B 之是否出現，取决于 Z 出現时的状态是否为 y.

乙的观察能力要差一些，他只能看到 I 与 A，而不能看到 Z.

他就会发現，单知道 A 的状态和 I 的状态，还不足以使他来可靠地預测 B 是否会出現(因有时 Z 的状态是 y 而有时又是别的状态)．但若乙进一步注意到 I 的前期状态，他就会发現他能准确地預知 B 是否会出現了．因为如果 I 相继取得 μ 值与 α 值，那末性质 B 就会出現，而不会有别的現象．因此，若已知輸入 I 取 α 值，他就可断定 B 之是否会出現要取决于 I 前此的值是不是 μ.

这样，乙虽不能直接观察到 Z，但只要他对所能观察到的变量的現值之外，再考虑到該变量的前值，那他就仍然能使整个系統成为可以預知的．这原因在于存在以下的对应关系：

$$I\ \text{在以前取}\ \mu\ \text{值} \leftrightarrow Z\ \text{現在取}\ y\ \text{值}$$

$$I\ \text{以前不取}\ \mu\ \text{值} \leftrightarrow Z\ \text{現在不取}\ y\ \text{值}$$

由于这是个一一对应关系，所以要是知道 I 在前一步的状态，这就相当于知道 Z 在現时的状态，而这两种知識是可互代的；因为如果你具备了其中的一种知識，就必然会得到另一种知識．

如果甲乙二人都各执己見自以为是，他們就会爭起来．甲坚持說这系統是沒有"記忆"性的，就是說，要断定它的性态，用不到追溯已往的状态，因为性质 B 的出現与否，可以由該系統的現时状态(I, A, 及 Z 的状态)完全确定．而乙可以否定此說，指出由 I 与 A 組成的系統，只有顾到 I 的前值时(也就是只有在求助于某种形式的記忆性质时)，这一系統才是确定性的．

很明显，我們不必說誰对誰不对．因甲乙两人是对着不同的系統(指 $I+A+Z$ 及 $I+A$)来說的，所以他們的說法不同也就不足为怪了．这里我們应該注意的是：乙求助于"記忆"，来弥补他不能观察到 Z 的缺陷．

于是我們得到如下的一般法则：若一确定性系統只能部分地被观察到，从而(对观察者来說)变得不可預测，那末观察者只要考虑到該系統的过去历史，即假定該系統內部存在一种"記忆"性质，他就能使該系統又成为可預测的．

这个說法显然是带有一般性的，不管那特定的前值(μ)是在前一步还是在前好几步取的都沒有关系．例如在一般情形下，若

前些阶段的事件 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ 各留下痕迹 $T_1, T_2, \cdots, T_k$ 而且这些痕迹都能分别保存下来；再設系統的其余部分相应于 T 的值会产生性质 $B_1, B_2, \cdots, B_k$，則各种不同的性质可跟

(1) T 的現值(这时就不必求助于什么"記忆"了)，或

(2) E 的往值(这时观察者就不得不假定系統中有某种形式的記忆)

联系起来，或用它們来解釋. 所以，有无"記忆"，这并非純粹是系統的客观性质——这是一个系統和观察者之間的一种关系，要随着两者間信息通道的改变而改变的.

所以解釋一个系統的行为时若要訴諸"記忆"，那就等于說我們不能完全观察到这一系統. 关于"記忆"的性质并不是属于簡单"事物"的性质而是属于更微妙的"編碼"的性质.

*題 1：証明下列命題：在一絕对系統中，可以不必引用其中一些变量，而用其他量的导数来代替它們(見大脑設計 19-22 节).

*題 2：对有限差分方程証明这同一命題.

*題 3：若一系統有 n 个自由度，則为預測其以后的状态，一般至少必須作 n 次下述形式的观察："在 t_i 时变量 x_i 取 X_i 值".

6-22. 机器之存在"記忆"与其一部件之能否被观察到，其間的关系可用有磁帶的电子数字計算器来举例說明. 为簡单起見，設在某时刻，根据磁帶上某点处的磁化为+或-，計算机分别算出1或2；如果磁化作用比方說是在十分钟以前发生的，而磁帶上該点处磁化为+或-，則由施用計算机的人是否閉合一个电鈕而定. 于是有以下的对应关系：

$$\text{电鈕閉合} \leftrightarrow + \leftrightarrow 1$$

$$\text{电 鈕 开} \leftrightarrow - \leftrightarrow 2$$

如果有一个人能看出磁帶磁化的情况，他就会說，要判断計算机算出1还是算出2，一点也用不着去查过去的情况，而只要看磁帶的現时情况就行了，因为如果知道磁帶上現时是+，那就可以預測計算机下一步会算出1来.

另一方面，对一个不能看出磁帶情况的人来說，如果他要預測計算机算出什么数字，就只能追溯十分钟前的电鈕状态. 他就会

坚持說机器是有"記忆"的.

实际上这两个观察者并沒有矛盾，因为我們知道他們俩說的并不是同一个"机器". 对第一个观察者来說,"机器"意味着"計算机＋磁带＋电鈕";对第二个观察者来說,机器意味着"計算机＋电鈕". 因此他們說的是不同的系統（必須再强調指出，在复杂系統的情形下,只指出物质对象常不足以完善地定义所要討論的系統）（比較 6-14 节，12-9 节）.

在牵涉到更多生物的系統中也会出現本质上相同的差别. 比方說我在一个朋友的屋子里,外面开过一辆車,这时他的狗就跑到屋角畏縮起来. 在我看来,狗的这一行为显得莫明其妙,无从解釋. 后来朋友对我說："这狗在六个月以前被車压倒过". 于是狗的这一行为就可用六个月以前的一件事来解釋了. 如果我們說狗有"記忆力",那我們說的仍是这一事实,狗的行为不能用它現时的状况来解釋,而要用它六个月以前的状况来解釋. 如果不經心地說到狗"有"記忆力,然后想到狗似乎有什么东西,犹如它之有一撮黑毛或白毛似的. 那末他就会想去找找这究竟是什么东西；从而会发現这件"东西"具有很奇特的性质.

很明显,"記忆"并不是系統可以具有或不具有的一种客观的东西；这是观察者在未能观察到系統的某部分时用以补足这一缺陷的一种設想. 如果可观察到的变量愈少，观察者就不得不愈来愈多地設想过去的事件会对系統的現况有所影响. 因此大脑中的"記忆"只有部分的客观性. 因此自然难免有时会发現它的性质是异乎寻常的甚至是自相矛盾的. 很明显，这个問題需要从基本原理开头来探討.

第二篇　变　异　度

现在那个士兵才知道这是个多么美妙的打火匣。只要他把它敲一下，那只狗儿就来了，坐在盛有銅錢的箱子上．要是他敲两下，那只有銀子的狗儿就来了．要是他敲三下，那只有金子的狗儿就出現了．　　（"打火匣"）

第七章　变异度的数量

7-1．第一篇里讲机器的各种主要性质时，总假定我們有这样一个确实的东西，对它現时現地在做什么，我們是能作出一些肯定断語的．但要进一步学习控制論，光是研究这样的对象还不够，得扩大研究对象的范圍．因若要想回答关于調节与控制方面的基本問題，只有在我們考察了机器或系統可能做的一切，并且对这里"可能"二字的意义給予确切規定之后，才可以做到．

所以，在整个第二篇里，我們总要考虑到一系列的，或組成一个集合的种种可能性．研究本篇的内容，我們就要接触到信息与通信的問題，接触到关于信息通过机构时是怎样編碼的問題．要想彻底理解調节和控制方面的問題，研究这些内容是不可少的．我們这里要尽可能从最基本最初等的事实讲起．

7-2．我們之所以要考察一批可能有的事实或情况，还有第二个原因．这是因为，那种只有在单独一天或单独一次試驗中成立的事实，在科学上是沒有什么探討价值的；科学总要找出对一批实驗都成立的普遍規律，尽管这些实驗是在各式各样的实驗室里，在各式各样的情况下来做的．伽利略所发現关于摆的規律，如果只在他发現的那个下午，只对他所观察的那个摆才成立的話，那末这一发現也就沒有什么价值了．这个規律之所以重要，正是因为

它从空間上，从时間上，以及从所用的材料上讲，在极大的范圍內都是正确的．因此科学上要探討的，总是那些不断重复出現的規律(7-15节)．

7-3．科学所探討的总是一批事物或一批現象，这一事实在平常說話的口气上常常沒有表达出来．例如在化学課堂上，当教师讲到"氯离子怎么怎么样"时，实际的意思显然是說"所有的氯离子都怎么怎么样"．此外，如果我們說到人或物时，虽然形式上說的是单数，实际上却是指所有这一类事物的集合．

有时，一个命题无論对一組事物或单个事物讲都是成立的．比方說："象用鼻子拿东西吃"就是这样的一个命題．这种两可的命題虽然很普遍，但我們也不能忽視有些命題是只对一組（或单个）事物才能成立的，而如果要把那些命題应用到单个（或一組）事物，那就会发生誤解或引起混淆．例如，一克热的碘化氢气体，在某一时刻可能确有37％是离子化了的；但这个說法不能用到单个分子上去，因为单个分子只能是完全离子化的或完全沒有离子化的；对集体成立的事，对个体就不成立了．又如說"保守派在国会中占多数"，这个說法用到单独一个国会議員上便毫无意义．又如汽車車輪外带就整体說是以每小时50公里的速度向西进行的；但与路面接触的那部分外带，在其接触路面的那个瞬时是不动的，而車带上端则以每小时100公里的速度向西行走，并且事实上車带上沒有一个质点的行动是同整个車带一样的．

又如，我們說两千万个妇女有三千万个儿童，平均每个妇女有一个半儿童；但是若說每名妇女有一个半儿童，那就非常荒謬了．平常这类說法之所以不致引起誤会，只是因为办登記手續或办学校的人，已經知道这里所謂半个儿童并不是痴人的妄談，而是指一批（百万）儿童来說的．

现在我們应該記住这样一件基本事实：适用于一个集合的断言，若用之于該集合的元素，则断言可能成立，也可能不成立（或毫无意义）．

題：下述各命題可适用于猫科或只适用于邻家的那只猫．試考察每一命題对(i)猫科

以及(ii)个别的猫是否适用。

1. 它已存在百万年之久。

2. 它是公的。

3. 现今世界上各地都有它。

4. 它是兄弟自相残杀的。

5. 它約有一半是母的。

6. 它跟熊科(Ursidae)是近亲属。

7-4. 概率 上面的題目說明:适用于集体(或个体)的断言,如果不恰当地用于个体(或集体)上,就会造成多大混乱,变得多么沒有意义.特别在整个集合中某一部分元素具有一种特别性质时,这种情况就显得最为突出.例如,假定某村每100个男人中有82个是已婚的.于是,分数0.82对全村男人所組成的集合来說显然是有意义的,但对个人来說就毫无意义了;因为每个人的婚姻状态只有两种:或是已婚的,或是未婚的.不管你怎么考查每个人,你不会从他身上什么地方看得出有0.82是已婚的;而且,要是他搬到别的村子里去,这个分数可能改变很大,尽管他本人毫无改变.显然,0.82表示那个村子的一种性质,而不能表示单个人的性质。

不过,有时为方便起见也可假定分数对个人仍有意义,从而可說某人已婚的"概率"是0.82.只要我們記住,这种說法虽在形式上指个人,实际上却是对整个村子来說的,那末这样說也未始不可以.但要是忘了这一点,那就会引起許多"悖謬",引起象教育"半个"儿童之类的既无意义而又愚蠢的說法.今后(第九章)我要把概率这一概念用于机器上;讀者应时时記住这一概念的来源和实际性质.

7-5. 通信 集合这一概念还在另外一个重要問題——"通信"問題中起着重要的作用,特别是在申农(Shannon)和維納(Wiener)所发展的理論中占重要地位.乍一想,当我們說接到一封信或一个电报时,我們只注意收到的是"一个"电报或"一封"信这样的单个事件.不过,"通信"这件事是跟一組(即比一个要多)可能有的事件分不开的,下面几个例子就可說明这一点.

比方說,有个囚犯的妻子要上监獄去探望他,而獄中规定探望

囚犯时不許带給他任何最簡单的信件.不过,獄吏怀疑囚犯在被捕前可能已跟他的妻子約好用簡单的暗号来通消息. 如果在探监时犯人的妻子要求送給犯人一杯咖啡,而这又是規定所許可的,那末獄吏該怎样办,才能保証不让她用暗号把消息送給犯人? 比方說,獄吏知道犯人的妻子很急于想把同謀犯是否也被捕的消息告訴犯人.

獄吏就会照着下面这样来設想:"她可能用加糖的或不加糖的咖啡,来让犯人知道他的朋友有沒有被捕,那末我可以在咖啡里加上很多的糖,并且告訴他說这是我給加的,以防他从中得到消息.她也許会在咖啡杯里放一只匙来做暗号,那就只要把匙拿走,并明告犯人說带匙是獄中一律禁止的. 她也許用送茶或送咖啡的办法来做暗号,那也只要規定只許送咖啡不許送茶,以免送进消息".象这一类的設想还很多. 值得注意的是,在这些設想中,为防止傳入信息,獄吏总是本能地把可能发生的事件种数都减少到一:总是加糖的,一律不准带匙,只許送咖啡,等等. 当所有方面的可能性都减到一时,信息的傳送就堵塞住了,送咖啡这件事就起不了什么傳送信息的作用了. 所以,存在可能事件的一个集合,对于信息的傳送(与儲藏)是至为必要的. 从上述例子可以看出这話是合理的;事实上現代通信理論的一切研究工作也都証实这一点,都說明可能事件集合这一概念是多么重要,多么有用.

所以,通信必須要有一个消息的集合作为它的基础. 不仅是这样,而且每个特定消息所含信息量,还依賴于这个消息是从哪个消息集合中取来的. 因此,消息所含的信息量,不是个別消息本身所能决定的. 这从下面的例子可以看出来:

假定有两个士兵分别被甲乙两敌国所俘;他們两人的妻子以后各接到同样的一封信:"我在此平安". 但若甲国按規定許可被俘者从下列三种字样:

我在此平安

我近来身体不好

我患重病

中挑选一种，而乙国只許被俘者寄出

我在此平安

以說明他"尚未陣亡"(当然也还存在"不寄信"这一可能)．那末，即使两人的妻子接到了内容一样的信，她們还是会明白：所收到的关于她們亲人情况的信息是是不一样的．

从以上所讲这几点可以看出，在本书中，我們必須放弃那种从个人的角度来看待"这个消息"的习惯．我們必須成为科学家，把自己放在一边，而着眼于"接收各种可能的消息的人們"．这就是說，我們要注意的，将不是个别的消息，而是所有可能发出的消息的集合．

变 异 度

7-6. 本篇中有許多地方要考虑这样一个問題：給定一个集合，要知道其中含有多少个不同的元素？例如，由 12 个元素組成的集合

$$c,\ b,\ c,\ a,\ c,\ c,\ a,\ b,\ c,\ b,\ b,\ a,$$

若不計各元素在先后次序上的差别，只含三个不同的元素 a, b, c. 我們就說这样一个集合的变异度是 3 (下节还要另加說明)．

象这样数数集合里有几个不同的元素，看起来可能是件簡单的事，做起来却要当心．例如，用两臂打旗語时，每只手上所执的旗可举到八个不同的位置；这样，两手所执的旗，合起来可以有 64 种不同的举法．可是从远方看来，你很难分辨打旗語的人是面朝着你的还是背朝着你的，因此左臂在上右臂在下的举法，同右臂在上左臂在下的举法是分不清的，所以从远方看来，就只能分辨出 36 种不同的旗語，不能分出 64 种了．从这可以看出，一个集合里所含不同元素的个数，并不是集合本身的内在属性：如要好好确定一集合里所含不同元素的个数，必須先規定观察者是什么人，他有什么样的辨别能力．

题 1： 从 26 个拼音字母中选取三个来給汽車編号，一共能做出多少編号？

题 2： 某农民能辨出 8 种不同的小鸡，但他不能认出小鸡是公的还是母的；他的妻子

能认出小鸡是公的还是母的，但分不出什么鸡种．他俩一起能认出多少类不同的小鸡？

題3： 一个特务在海濱弄了一所房子，在朝海的那一面墻上，楼上楼下共有四扇上下左右对齐的窗戶．夜間，他就利用各間窗戶里有沒有灯光的情况来发送消息．但在黑夜里，如果只有单独一两間窗戶发出灯光，可能就辨不出这灯光是从哪扇窗戶里发出来的．这样，还可能有几种不同的发出灯光的方式？

題4： 不同种类的細菌对各种不同物质的分解能力不同．如大腸杆菌能分解乳糖而伤寒杆菌不能．若細菌学家有10种物质可用来識別菌种，对于某一种細菌，其中每种物质要么被其分解，要么不能被其分解．問他最多能識別多少菌种？

題5[1]**：** 有一种紙牌戏法，玩的人摆出21張牌，让另一人暗中选定一張，然后把牌分成三行，让另一人說出他所选定的那張牌在哪一行．玩牌的人把牌收起再摊开分成三行，让另一人再告訴他所选定的牌在哪一行；这样让人告訴他三次之后，他就能知道对方所选定的是哪張牌．現問：(i)三次說出牌在哪一行，共有几种不同的說法，(ii)玩戏法的人要鉴别几張不同的牌？

題6(續)： 上述这种紙牌戏法里，所用的牌可以比21張多．問最多能有几張牌？

題7(續)： 如果变紙牌戏法的人要从全付54張牌中，檢出别人所认定的一張牌，那末把牌每次摊成三行，让别人告訴他所认定的牌在哪一行，要这样做几次，才能檢出別人所认定的那一張？

題8： 若孩子的血型是O型，母亲的血型也是O型，那末父亲的血型可能有几种？

7-7. 从上面的习題中，可以看出求答案时总要計算乘积和高次乘方．在做这类計算时，用对数是比較方便的．我們假定讀者都已懂得对数，但这里要給出一个公式作为参考．如果对数表里只能查到一数N的以a为底的对数，而我們却要求N的以b为底的对数，那就可以用公式

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

特别是，$\log_2 N = 3.322 \log_{10} N$．

对于一組有区别的元素，說到这一組元素的变异度时，我們是指：(i)不同元素的个数，或(ii)这个数字(不同元素的个数)的以2为底的对数；至于所說的变异度究竟是指哪一个数，这是可以从上下文来判定的．当一批元素(以后叫做集合)的变异度用对数来表示时，我們把它的单位叫做比特(bit)，这是英文“BInary digiT”(二进位数字)二字的縮写．如就人的性别而論，其变异度是1比

[1] 这是原书的題6．原书題5的現实意义不清楚故从略．

特；就 52 張紙牌所組成的集合說，其变异度是 5.7 比特（因 $\log_2 52 = 3.322 \log_{10} 52 = 3.322 \times 1.7160 \doteq 5.7$）．用对数計算变异度有一个主要的好处，就是可以把关于变异度的乘法运算化成簡单的加法运算．例如題 7-6-2 中，某农民能认出 3 比特的鸡，他的妻子能认出 1 比特，两人合起来就能认出 $3+1=4$ 比特．翻譯成普通的說法就是：某农民能分出 $2^3=8$ 种不同的小鸡，他的妻子能分出 $2^1=2$ 种不同的小鸡，两人合起来就能认出 $2^4=16$（或即 $2^3 \times 2^1 = 16$）种不同的小鸡．

当一集合只含同一类元素时，我們就說这集合是"沒有"差异（变异）的，这种說法事实上意味着集合的变异度是 0，也就等于用对数单位来表示集合中元素的差异程度；因为 1 的对数是 0．

題 1：題 7-6-4 中的每一物质能用来分辨多少单位的比特的細菌类（对数表示）？

題 2[1]：26 个拼音字母含多少单位的比特？

題 3（續）：每次取 5 个字母构成字組（不一定要拼成一个有意义的文字），能得出多少比特？先求出可能形成的不同字組有多少，然后求出用对数表示的比特数来核驗答案．

題 4：若对某一問題只能回答是或否；求（i）答案的变异度是多少？（ii）20 个这种独立地作出的答案的变异度是多少？

題 5（續）：象这样用 20 个問題，每个問題只能回答是或否，能辨别出多少不同的对象来．

題 6：設对 6 个状态施行一单值封閉变换

$$\downarrow \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{array}$$

这里写問号的地方可填上一个字母，作为对每一个問号的回答．若是你能用 6 个字母中的任何一个字母来代問号，把这样得出的全体变换做成一集合，那末这集合含多少比特（即是以对数表示的变异度）？

題 7（續）：若封閉变换有 n 个状态，則所得集合的变异度是多少？

題 8：設每个詞汇的变异度是 10 比特，做报告时每分钟能讲 120 詞，在录有 10 分钟报告的一張唱片里能含多少比特？

題 9（續）：这張唱片中的变异度含量跟一面报紙的比較起来哪个多？

題 10（續）：若一小册子要用 10 分钟讀完，它的变异度含量比一張唱片的多还是少？

題 11：上題是就什么样的一个集合来說的？

題 12：如果只有单独一个否定事件（灯沒亮，神經元未受刺激，电报未来），这能用来增加变异度嗎？

---

[1] 这是原书的題 3，原书題 2 从略——譯者注．

約 束

7-8. 以后我們还要用到一个非常重要的概念：約束．約束这一概念表明两个集合之間的一种关系．若集合在某一条件下的变异度比它在另一条件下的变异度小，这时集合里就有約束．例如，就人的性別而論，变异度是1比特，但若某校只收男生，那末該校学生性别的变异度就是零；由于0比1小，所以这里面就存在約束．

另外一个例子是交通灯．交通灯有紅、黄、綠三种顏色，它依下面的一系列次序来指揮交通（用＋表示灯亮，0表示灯火）：

	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	…
紅：	+	0	0	0	+	…
黄：	0	+	0	+	0	…
綠：	0	+	+	0	0	…

所以指揮交通的信号只用了四种組合．我們看到，在指揮交通的各个阶段里，紅灯有时亮有时灭；黄灯和綠灯也一样．如果每种顏色的灯可以随意让它或亮或灭而不受他种顏色灯光的限制（如实际操作上綠灯亮的时候紅灯就不許再亮，这就是一种限制），那末一共可組成八种不同的交通信号．但实际上只用了其中四种交通信号．因4小于8，故对交通信号的組合方式也存在着約束．

7-9. 約束的程度有輕重之分．例如要让一班士兵站成一横行．如果說每个士兵的站法都是"独立"的話，那就表示他們可以按任意次序站．对他們站队的次序可以加上各种限制或約束，而这各种約束的限制程度是可以有輕重之分的．如果下令說生日相同的人不准站在一起，那末这一約束的限制程度是輕微的，因为在可能有的一切站队法之中，只有很少几种站法是不許可的．如果下令說矮的必須站在高的右边，这一約束的限制程度就很重；因为这实际上使站队法只許可有一种（除非有两个人是恰好一样高的）．所以，从加上約束之后可能出現的事件減到多少，可以看出約束的輕重程度．

7-10. 看来約束是不能用任何简单方法来分类的，因为不管由于什么原因，只要一个集合的变异度变得比它可能有的小，这一切情形就都算是約束．这里，我們只能討論特别常見而又特别重要的几类約束，讀者如果对这格外有兴趣的話，可以自己去多想出几类約束来．

7-11. 矢量中的約束　有时一集合中的元素是些矢量，而每一矢量又是由其各分量所組成的．如 7-8 节中所提到的交通信号就是含三个分量的矢量，而每个分量可取二值．若在某一规定条件下实际出现的矢量，比沒有該条件时可能出现的(即当每一分量能任取其变化范圍內的一切数值，而不管其他分量取什么值)所有矢量少，这就是很平常而又很重要的一种約束的情形．例如，由紅、黄、綠灯組成的交通信号中，当綠灯与黄灯都亮着的时候，紅灯只能是灭的；三种顏色的灯都亮着的这一种矢量是不許出现的．

应該指出，一个矢量集合（或者說一批矢量）可以有好几个变异度，为免引起混淆，必須对各个变异度一一分清．例如，拿 3-5 节中表示汽車状态的那种矢量

(車龄，馬力，車身顏色)

来說，第一个分量有它的变异度，第二个和第三个分量也各有它們的变异度，而这三个变异度的数目是未必相等的．但就整个矢量集合来說，变异度的数目又可以跟三者各不相同．

不过矢量集合的变异度数目跟各分量的变异度数目之間，却有一种确定的关系：矢量集合的变异度数目不能大于其各分量的变异度数目之和(这是就以对数表示的变异度数目来說的，因为这里用对数比較方便)．例如，在一批汽車中，不同的車龄有 10 种，不同的馬力数有 8 种，不同的車身顏色有 12 种，那末这批汽車車型的变异度就不能超过 3.3+3.0+3.6=9.9 比特．

7-12. 若一矢量集合的(对数)变异度等于其各个分量的(对数)变异度之和，就說矢量的各个分量是独立的．比方說，若在上述这批車中可以分出 960 种不同的車，那末在这批車中的三个分量是“独立”的，或者說是“独立变化的”．

应該注意的是，这种說法主要是表明从集合中看到的一种情况，并不牵涉到什么独立变化(或約束)的原因.

題1: 若某人在考虑他是否該結婚时这样想："老茹沒結过婚，今年才結婚；老齐沒結过婚，今年也不結婚；老蒲結过婚，但現在沒有爱人了；老屈过去跟另一个人結过婚，現在又結了婚". 問这矢量集合中有沒有約束?

題2: 若四个矢量(G, G, G)，(F, F, G)，(G, F, F)，(F, G, F)組成一集合，其中每一分量可取值G或F(如硬币以正面朝上或以反面朝上)，則对各分量可独立取值的矢量集来說，所給这矢量集有沒有約束?

7-13. 自由度　当一矢量集所显示出来的变异度，比它的各分量使它可能有的变异度(見7-11节)小时，那末如果能指出，只需要几个分量独立，就能使該矢量集具有同样的变异度，这有时就可以用来表示該矢量集的現有变异度. 这所需分量的个数就叫所說矢量集的自由度. 例如交通信号灯的变异度是4(見7-8节). 如果每一分量仍能各取二值(各有"亮"与"灭"两种状态)，那末只要有两个独立的分量，就能使矢量集有同样的变异度(4). 所以对加在交通信号灯上的約束，可用这样的話来說明：含三个分量的矢量集，在三个分量有約束的情况下，同含两个独立分量的矢量集比較，变异度是一样的；或者說，組成交通信号的3个灯的自由度是2.

若各种可能組成的矢量都能出现于矢量集中，那末矢量的自由度就等于其分量的个数. 若只能出現一种組合形式，自由度是0.

但也应該认識到，用自由度来表示对集合加上約束后所留下的变异度，只有在某些适当的場合才可以这样做. 例如，当交通信号灯只出现三种或五种組合方式时，这种自由度就不能用简单的整数来表示了. 自由度这一概念，主要用在分量能連續变化(因而能取无穷多值)的情形下. 那时，虽然一切可能有的状态是不能一一数的，但自由度仍可計算.

題1: 若卖旧汽車的商店宣傳說，他們所存的旧汽車有10种不同的車齡，8种不同的馬力数，10种不同的車身顏色，并且各种不同的車齡、馬力数和車身顏色可以随意組合. 問这批存貨的自由度是多少? 至少有几輛車?

题 2: 設所考察的矢量含有二分量，分别用手表上分針和时針的位置来表示. 如果手表是沒有毛病的，那末在手表运轉 12 小时內，所观察到的矢量集是不是有約束的?

题 3(續): 这組矢量的自由度是多少?(提示:如果不用分針有沒有什么大关系?)

题 4: 当視綫向各方向轉动而头不动时，两眼珠也会随之发生偏轉，它們的位置定出含四个分量(左右两眼的上、下偏轉度与左右偏轉度)的矢量. 人看物时，两眼是配合一起偏轉的;但蜥蜴的两眼是能独立偏轉的. 問蜥蜴眼偏轉的自由度是几? 人眼的是几?

题 5: 平面上定长有向綫段(矢)的位置有 3 个自由度(因用两个坐标可决定其中心的位置，用一个角度数可决定其方向). 如果再限制它必须指向固定的一点 P,則它的位置有多少自由度?

题 6: T 是給定的单值封閉变换, a 是任一原象. 考察含三个分量的如下矢量集

$$(a, T(a), T^2(a))$$

其中 a 取一切可能的値. 問这矢量集的自由度是几?

题 7: 平常画在直角坐标系 oxy 中的图綫对平面上的点作了什么約束?

题 8: 一通常物体(如桌椅之类)在三維空間中位置的自由度是几?

約束的重要性

7-14. 約束是控制論中极为重要的概念，本书以后就要突出說明这一点，因为每当有約束存在，我們就可以想法利用它，来达到某种控制目的.

本书第九章将討論申农的理論，在那个理論里，讀者可以清楚体会到这一說法是正确的. 这个理論的大部分內容是为了: 估計在有完全独立性时的变异度; 說明总存在約束 (在那里叫做多余度); 說明約束的存在，怎样使我們有可能更有效地来利用信息通道.

从以下几节所讲的材料，讀者可以对这一概念的用途之广与意义之重要有所体会.

7-15. 自然規律 首先要注意，若一組現象中存在任何不变量，那就表明存在約束，因若有不变量，那就說明可能有的变化状态并沒有全部出現. 因此，关于不变量的一般理論，只不过是約束理論中的一部分.

其次，由于每一自然規律总意味着有不变量存在，所以每一自

然規律就是一种約束,事实上,"規律"只是"約束"二字的同义語.如牛頓定律告訴我們:用以表明行星位置与速度的可能有的(例如随便写在紙上的)矢量(这是个較大的集合),在天体运动中实际出現的只有一小批;牛頓定律就定出了这小批矢量中各元素所取的值.从控制論的观点来說,重要的只是:牛頓定律排除了出現許多位置与許多速度的可能性,預測只能出現某些位置与某些速度,而永远不会出現別的位置与別的速度.

科学总是要寻找規律的,因而也是很注重寻求約束的(因在对象的性态处于无約束而混乱的情况下,一切可能有的状态就組成一个較大的集合,而实际出現的状态則組成較小的集合).

这观点与1-5节中所說是符合的.控制論着眼于总体,着眼于一切可能有的丰富多变的状态,然后研究为什么实际出現的状态只限于所有可能出現的某一部分.

題1: 化学中的(簡单)定比定律是怎么样的一种約束?

題2: 能量守恒定律是怎么样的一种約束?

7-16. 事物体現約束　在我們所生活的周圍世界中,約束是最最常見的現象,我們的許多基本概念也都跟約束有重要关系.例如,我們日常生活中离不开的关于"东西"或"事物"这种基本概念就是跟約束有关的.椅子之所以是一件东西,因为它是結合成整体的.我們可以把它放在桌子的这一边或那一边,可以把它带走,也可以坐在它上面.而桌子也是其部件的集合.

对三維空間內的任一自由物体来說,它运动的自由度是6.所以若椅子的各部件是不連在一起的,那末每个部件都有6个自由度;事实上,当椅子的各部件沒有在木器厂里装配好以前,它們就都有这些自由度.例如,当椅子的四只脚各自分开时,它們全体的自由度就有24.但当它們装在椅子上連成一体时,它們全体就只有单独一件物体的6个自由度了.这里存在約束是很明显的事,只要想一想:装配好的椅子,如果已知它的三只脚的位置,那就必能定出第四只脚的位置——第四只脚的位置是沒有自由度可言的.

这样，从彼此分开的、可以自由移动的四只椅脚变到装好的椅子这一事实，恰恰相应于由四只椅脚組成的这一集合的自由度从24变到6. 这样，椅子之所以成为一件“东西”，成为“件”而不仅是一批独立部件的集合，就相应于其各部件間有了約束.

7-17. 从这一观点說，我們所生活的世界中实在是充滿了很多很多約束的. 我們已經是这样地习惯于并适应于这些約束，以致我們把大多数約束当作是不言而喻的，甚至常常不觉得存在約束. 如果世界除去了这些普通的約束，要想象那时的世界会变成什么样子，那只有从神話故事或神怪电影中去找，甚至在这些东西里所描述的世界，也还是只去掉了很小很小一部分約束之后的世界.

沒有約束的世界是混乱到极点的世界. 尼亚格拉大瀑布下汹涌乱濺的水流可能有点象它（但物理学家仍能找出其中的約束来）. 在适于生物生活的地球上，离这种混乱的景况是很远很远的. 以后（13-5节中）可以看到，有机体之所以能适应，也恰恰是由于現实世界是有約束的，而且也只能适应生活于有約束的世界中.

题：讀完上节之后，你数数周圍存在的約束有多少？

7-18. 預測与約束　如果我們說什么事件是可以“預測”的，那就說明存在約束. 比方說，要是从这一时刻到下一时刻，飞机的位置能从空中任一点移到任一别的点，那末，即使有最好的高射炮預測也是不中用的. 高射炮預測工作之所以有用，只是由于飞机不能这样完全任意地移动，而必須在許多約束下移动. 比方說，飞机的移动要受連續性这一約束——飞机不能一下子从一个位置跳到别一个位置，也不能一下子从一种速度突变到另一速度. 此外还受特定飞机設計类型所限的約束，比方說A-10型飞机只能照A-10型飞机的設計性能来飞，Z-20型飞机只能照Z-20型飞机的設計性能来飞. 此外还受到飞行員个性的約束等等. 因此，一架飞机的未来位置总是有些約束的，也只有在存在約束的条件下，預測器才是有用的.

7-19. 机器是約束的体現者　讀者現在可以体会到，从登記

表(6-5节)得出的对"机器"的概念，是在登記表的一串数中认識了有約束的一种特殊形式之后而来的．如果登記表沒有約束，观察者就会說这是杂乱无章的或不可預測的，就象輪盘賭中的輪盘一样．

若登記表中出現約束的特有形式，观察者就有可能利用这一事实．他可以把登記表重新編碼，把它化成更紧凑的形式，使其中只含：

(i)对变换的說明

以及(ii)对确实有的輸入的說明．

这以后他就不必再对冗长的登記表来进行討論，而只要对簡短的变换来进行討論了；在第一篇中我們就是这样做的．

这样，对一个系統加上这样一种限制：要它的行为"象机器"，就可以用变换来研究它，这也是我們如何利用約束的一个例子．

题：若一登記表具有机器所特有的約束，則所說約束除掉了什么东西？

7-20． 对于由一切确定性机器所組成的集合，我們还可以加上别的約束．例如，可把这集合約束成只以某一組状态为原象的机器集合，或者約束为只有一个洼的机器集合．

連續性是最平常的也是最有力量的一种約束．它之所以成为約束，乃是因为任意函数固然可作任何变动，但連續函数的每一步变动只能变到邻近值．从下面的题4，讀者可以看出加上类似連續性的約束之后，一个集合就会变小到什么程度，但这还远远不能体現連續性这种約束的严重程度．

题1：作用于 a, b, c 三个状态的所有单值封閉变换(絕对系統)共有27个(比較题7-7-7)．如果对这絕对系統加上約束，不許它有平衡状态，那末还剩几个变换？

题2(續)：若上题中的約束是：变换的动态图必須有一个洼，則还有几个約束？

题3(續)：若約束是：不許有 $a\to b$ 与 $b\to c$ 这种轉移，还有几个变换？

题4：若矢量含10个分量，每个分量可取1，2，3，4四值之一．今設(i)各分量能随意独立取值(見7-12节)；(ii)各分量取值时受下列条件限制：相邻二分量所取的值，其差不能大于1．試問在这两种情形下，矢量集的变异度各是多少？

7-21． 学习与約束 对心理学家說，从"学习"中也可以看出有約束的一个重要例子．如巴甫洛夫在一次試驗中，用触觉刺激、

热刺激及添加肉粉三项因素，配成下列几种組合：

	热	触	肉粉
1	+	+	+
2	+	−	−
3	−	+	+
4	−	−	−

（第四种組合形式当然出现于两次試驗的間隔中）．这里可能有的組合形式总共有八种，但是巴甫洛夫只用了四种．实驗的要点也正在于沒有全都用上八种組合形式，否則被試驗的动物就沒有什么东西可学了．試驗里的一个重要的特色就在于利用了約束．

从利用联想来学习这件事，也可更簡单地看出这一原理．比方說，若要被試驗的对象看到一个字母后，依照下列规定答出一数：

示以 A：	回答 2
示以 B：	回答 5
示以 C：	回答 3

于是便可用一系列文字和数字的組合如：A2, B5, C3, B5, C3, A2, A2, C3 等等，来訓练被試驗的对象．

就这一系列文字和数字的組合来說，我們可以把它們看作是有两个分量的矢量，而其中分量的取值是有約束的．如果要使对象学到什么，就必須要有約束；因为如果沒有約束，如果 A 之后可以出现 2 或 3 或 5；对象也就无从获得什么特殊的联想．因此，**只有在一系列先后出现的事件之間有約束时，学习才有可能．**

学习破迷陣的情形也是这样，要能破迷陣，必須在学习期間使迷陣的格式每天都保持不变．要是迷陣一点也沒有限制，被試驗的动物就无从养成特定的（而又适合的）行为方式．因此，**只有在环境有約束时，才值得学习**（13–7 节中还要談到这一点）．

机器中的变异度

7–22． 现在我們来考察机器的动作对变异度有什么影响，以便进而了解信息被机器处理后所发生的情况．首先让我們指出单

値变换在关于变异度方面的一个基本特点.

比方我們来看一个单値变换

$$Z:\downarrow\begin{array}{ccc} A & B & C \\ B & C & C \end{array}$$

并把它作用于某一批原象上,比方說作用于

$$B\ B\ A\ C\ C\ C\ A\ A\ B\ A$$

上,結果得

$$C\ C\ B\ C\ C\ C\ B\ B\ C\ B$$

这里,重要的一点是变异度已經从 3 减少到 2. 再作一次变换 Z,結果就全变成 C,那时变异度只有 1.

讀者不难相信,象这样一批元素,受单値变换作用之后,变异度是决不会增加的,而往往只会减少. 变异度之所以减少,其原因是立刻可以找出来的. 在变换的动态图中,我們只会看到合起来的箭头如 $\genfrac{}{}{0pt}{}{\searrow}{\nearrow}$,但决不会看到分散开去的箭头如 $\genfrac{}{}{0pt}{}{\nearrow}{\searrow}$. 每当变换把两个不同的状态(或元素)变为一个时,变异度就减少了;而沒有相逆的过程来补偿这一损失.

变换不一定需要是封閉的. 例如上述这一批元素受变换 Y 作用时:

$$Y:\downarrow\begin{array}{ccc} A & B & C \\ p & q & p \end{array}$$

得出 $q\,q\,p\,p\,p\,p\,p\,p\,q\,p$,变异度也减少了. 不难看出,只有当变换是一一变换时,被变换的那批元素的变异度才不会减少;而一一变换是一种很特殊的变换.

題 1: 把拼音字母从 A 到 Z 写成一横行;然后在这一行字母下面对应地写上某一句常用語的头 26 个拼音字母. 这样,从上面一行字母变到下面一行字母的变换就規定了一个单値变换 (u). 再把你的姓名用拼音文字写出来,找出所有这些字母的变异度,用(u)来变换(編碼)这些字母,然后看变出来的一組字母的变异度是几,看这变异度变了沒有? 把 u 一次次地反复作用下去;作一个图看看每一步变换后变异度是怎样变化的?

題 2: 某一屬寄生虫中,每一种只寄食一种寄主. 如果寄生虫种的变异度和寄主种的变异度不一样,哪个的变异度大些?

题 3: "许多不同型的遗傳素质可以有相同的外观属性". 若从每一遗傳类型变到相应外观类型的变换是 V, 問 V 对变异度有何影响?

题 4: 品茶专家尝一杯茶时, 可以把茶的样品看作是被映元素(原象), 而他在品茶过程中是在对茶作一变换 Y, 把各种各样的茶映成他对茶的"品評". 如果他是个十足优秀的品茶家, Y 就作出一一变换. 但若 Y 是多一变换, 那他又是怎样的一个品茶家?

题 5: 若室温和浴池温度的精密讀数是:

室内温度: 65, 62, 68, 63, 62, 59, 61.

浴池温度: 97, 97, 98, 97, 97, 97, 97.

問 (i) 室温的变异度是多少? (ii) 浴池温度的变异度是多少? 若 (ii) 的变异度大于 (i), 你对浴池温度有何意見?

*题 6: 若对一組状态作一变换, 使每一状态能变到从其中任意选出的一个状态(每一状态都可独立选取, 而且被选中的概率都相同), 試証: 若状态的数目很多, 則經过第一次变换之后, 变异度的比例数就减到 1 与 $1-1/e$ 之比, 即大約减到 2/3. [提示: 这一問題(作一次变换)相当于下一問題: 有 n 个猎人一齐瞄枪打 n 只鹿. 如果每个猎人是任意选定一只鹿瞄准打枪的, 同时每粒子彈必能射死且只能射死一只鹿, 那末平均能射死多少只鹿? 若 $n\to\infty$, 这平均数又趋于什么?]

7-23. 集合与机器 怎样把一組状态和一部机器联系起来, 这一点現在大家总可以都明白了, 因为任何現实机器都不能在同一时間有一个以上的状态. 但我們可以有好些理由来考察一組状态.

我們所考察的可能并不是一部机器, 而实际是同一类型或同一牌号的一批机器, 例如我們說:"鉄牛牌拖拉机", "前角細胞"或"白鼠", 我們指的是一批同一类型的东西. 在这情形下, 我們就可以同时考察一批机器, 其中一个在一种状态, 另一个在另一种状态; 这样我們就有一批状态, 来对它們施行一个变换.

但即使只有一部机器也可得出一組状态. 因为我們不仅要考察它会在某一时刻从某一状态变到什么状态, 并且可能也还要考察它在另一时刻会从另一状态变到什么状态. 因此, 机器在一批时刻所能呈現的不同行为, 自然就和那作为原象的一批状态联系起来.

最后, 所謂一批状态也可能是理論家想出来的. 当理論家不知道某一机器处于什么状态时, 他就要查出一切可能有的状态. 这

时的一批状态并不是实际存在的一批状态，而是可能存在(对那个理論家来説)的一批状态．这是典型的控制論式的方法，因为在用这种方法时，我們是把实际的状态同一切可能的或可以想象得到的更大的一批状态联系起来考虑的(見 1-3 节)．

7-24． 变异度的衰减　根据上述的任何一个理由，我們是可以有一批状态的．今若有一批状态和一个单值变换，那就可用 7-22 节的結果断言：随着时間的推移，这一批状态的变异度不能增加，而常常只会减少．

我們可以从好几方面来看这一事实．

第一，上述断言用一种精确的語言表达了如下的思想：我們常說，任何系統，如果不去管它，随它要怎么样就让它怎么样，自然总会达到平衡状态．这种思想的通常說法往往是凭經驗得来的，但并不完善，因为其中并未恰当地規定条件．有时我們用热力学第二定律来作为依据，但这往往和所討論的系統不相干(1-2 节)．新的說法则恰好道出了其中的要点．

第二，它說明这么一件事实：如果有一絕对系統，观察者知道它的变换，但观察不到(不管是由于什么原因)它的状态，那末，随着时間的推移，他对系統状态不确知的程度只会愈来愈小．因此，虽然系統在起初可处于任何状态，但随着时間的推移，它可能取得的状态数目就随之减少．这样，在系統只有一个坑和一个平衡状态的极端情况下，如果他开头对系統的状态是不确知的，他最后可以确知系統的状态，而不必进一步作什么观察．

不确知的程度在减少这一事实还可以从另一观点来讲．如果可能有的状态的变异度是跟信息有联系的，即系統之处于某一状态傳給我們一个特定的消息，那末随着时間的推移，系統所儲存的信息量就只能减少．例如从給囚犯送咖啡这一件事里，可以按照送去的咖啡是热的、温的还是冷的，送給他三个消息里面的一个消息．但用这种方法来送消息，只有在发信与收信相隔时間很短才有效，因为稍經一段时間之后，咖啡的状态就只能是“温”的或“冷”的，而在經过长时間以后，就只剩下“冷”这一种状态了．所

以，若发信与收信之間相隔的时間愈长，系統傳送信息的能力就愈小——如果信息是靠系統之处于什么状态来傳送的話．

題 1：有三个标有不同顏色的凹洞，有一个球能放在任何一个洞里，問这系統能儲存多少变异度？

題 2(續)：如果另外还能把一个顏色不同的球放进洞里去，变异度有多少？

題 3：施行一一变换后变异度不会减少，这个性质常可用来变戏法．例如，让一个听众脑子里想好两个数碼字，然后叫他用 5 乘其中一个数碼字，之后加上 7，把所得結果取两倍，然后再加上另一个数碼字．当这位听众把最后結果告訴变戏法的人之后，变戏法的人馬上就能說出这位听众心里所想的两个数碼字．証明这一变换保存了原有的变异度（提示：从最后的結果减去 14）．

題 4(續)：要計算变异度的头一个集合是什么？

題 5：（另外一个戏法）：让台下一个听众写下一个两位数，并且要求两个数碼字的差至少是 2．让他把所写两位数的数碼字顚倒得出第二个两位数，然后求出这两个两位数之差．再把所得的这个差又和它的倒碼数相加．問有多少变异度在这变换后仍保存下来？

題 6：若神經元組成的回路靠它的是否有振动来存儲記忆，那末这一回路能存多少变异度？有变异度的集合是什么？

題 7：十部构造一样的机器都已通过了它們的暫态，現在它們的变异度保持为零而不变．問它們是否一定就处于平衡状态？

7-25． 經驗一致律　上节說明一部机器里的变异度（假定已給一組状态而且这件事开头就都认可的）决不会增加而往往只会减少．那里还假定机器是与外界隔絕的，从而其状态的改变只能由其內部的作用引起；現在我們来考察，当所說系統是个带有輸入的机器，那时对变异度有什么影响．

先考察最簡单的情形，即考察只有一个参数 P 的机器，而且 P 只有在相隔很长的一段时間之后才变．为明白起見，再設机器有許多复制品，其变换都一样，只是每部机器所处的状态不同；現在我們是在观察这一批机器在每一时刻所处的一批状态．让所有机器都有同一 P 值，并在这些机器一步一步变的时候 P 值保持不变．这里的条件同上节中的一样，于是我們若就这一批机器的状态来計算变异度，并观察这变异度是怎样随着时間变化的，就可发現这一变异度会降到某一极小值．当变异度在这輸入值 (P_1) 下达到其极小值时，让 P 的值变到某一新值 (P_2)，而这一改变对整批机

器是同时一致发生的．参数 P 值的改变会把机器的动态图变成另一种样子(如果机器有状态 $A, B, \cdots, F$)，例如

$$
\text{从}\quad
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
A \arrow[d] & B \arrow[dl] & C \arrow[d] \\
D & E & F \arrow[l]
\end{tikzcd}
\quad\text{变到}\quad
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
A \arrow[r] & B & C \\
D \arrow[r] & E \arrow[u] & F \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$(P_1) \qquad\qquad\qquad (P_2)$$

在 P_1 值时，所有从 A, B 或 D 开始的状态都会变到 D，而从 C, E 或 F 开始的都会变到 E．故在参数取 P_1 值后的若干时刻，变异度会减少到只有两个状态．当 P_1 值变到 P_2 值时，处于状态 D 的所有那些机器，在变了第一步之后就会变到 E(因变换是单值的)，而所有处于状态 E 的会变到 B．所以不难看出，假如对所有机器都作同样的改变，改变整批机器的参数值不会改变那批机器的变异度．而且不管 D 与 E 是不是平衡状态，这話都是对的．现在让系統仍取 P_2 值．从状态 D 及 E 开始的两群机器現在都会变到 B，到这里，所有机器都处于同一状态，变异度降到零．因此，改变参数值，可能使变异度变到一个新的更小的数目．

要使 $P_1 \rightarrow P_2$ 这一改变能降低变异度，其条件显然是 P_1 的两个或更多个平衡状态必須在 P_2 的同一个坑里．这既然是常常发生的情形，我們可以用一种比較不精确但更为生动的説法来表示它：让一批变換器一致变化，总会降低变异度．

变异度降低了，那批机器也变了，每个机器在每一时刻都趋向于同一状态．換言之，改变一个变換器的輸入，将使該系統(变換器)(在某时刻)的状态更少地取决于其初始状态，而更多地取决于作为輸入的一系列特定参数值．

这一事实还可以从另一个角度来看．在上面的討論中，为了容易明白起見，我們所說的"一批状态"是指一批构造相同的机器(或者說一个变換器的一批复制品)在同时进行工作时的一批状态．但对一部机器在不同的一系列时刻所处的一系列状态来說，这个定理也同样是可以应用的，只要使各个不同的开始时刻有适当的对应关系就可以．如果我們研究一部很复杂的机器，每天对

它进行新的試驗，那末采取后一观点是更加合适的．若这机器含有許許多多不太容易接触到或探索到的部件，那末要使它在每天早晨都回复到一种标准状态以进行新的試驗是有困难的．上面所讲的定理告訴我們，如果在每天早晨让机器的参数通过某一系列标准值，或者說在每天早晨进行試驗以前先让机器作一系列标准的試車运轉，那末这一系列值愈长，就愈有把握使机器处于某种标准状态，以便試驗者对它进行工作．做試驗的（或管理机器的）人可能說不出这是什么样的一个标准状态，但他可以肯定知道这一状态在經过一定步驟后是会重新出現的．

还应該指出的是，在使参数通过某一系列标准值时，仅仅让一批机器在每一步具有相同的参数值还是不够的；如果要使标准試車运轉的效果不只是虛有其名（等于零）的，参数的值就必須有确实的改变[1]．

这个定理的准确性并不因所研究系統的大小而有所增减．特大系統也和小系統一样服从这定理中所說的規律，并且（由于其"大"所致的統計效应）往往可以指望能得到更平稳更正常的效果．因此这定理对大脑以及社会系統和經济系統的研究有用．

符合这一过程的事例是很普遍的．比方說，一群个性显著不同的儿童，在同一个学校里受过教育之后，他們的习惯和作风就比較显得具有某一学校的特色，而相形之下各人在个性方面的特色反而不怎么显著了；这可能也有上述定理之类的規律在起作用．变换器的这一性质对行为一致化的趋势所起的作用大到什么程度，那是必須由进一步的研究才能知道的．

这个現象以后还要提到，为了便于以后的利用，我們必須給它一个名称．我想把它称作"經驗一致律"．这个定律可以换成下列更生动的說法：用改变参数的办法来輸入信息，将会抹掉或换掉关于系統初始状态的信息．

[1] 也就是說参数所通过的一系列标准值不能是同一个值如 $P_1, P_1, P_1, \cdots$——譯者注．

第八章　变异度的傳輸

8-1. 上章介紹了"变异度"这一概念，这是和"信息"概念分不开的一个概念，并且我們已知道，在某些問題中，认識到所要处理的是一批可能事件这一点是何等的重要．

本章要研究一組可能事件是怎样通过一个机器来傳輸的，也就是要研究輸入处的一組可能事件与輸出处的一組（往往是以經过某种編碼后的形式出現）可能事件間的关系．我們会发現，只要机器是确定性的，这一傳輸过程是完全有規律的而且可以严格处理的．我們的目的在于获得一个足够好的理解，以便用它作为基础，来研究大脑中所进行的极端复杂的編碼工作．

8-2. 到处都有編碼工作　为使讀者对有机体与其环境間在日常相互作用下所进行的大量編碼工作，有一个大致的认識，我們举"广播大风警报"这一系列事件为例来說明．这事可以看作是从气象学家脑細胞里的一番模式过程(patterned process)开始的，而当他写大风警报的报告时，他的脑細胞的模式过程就变成了肌肉活动的模式，从而又变成紙上的墨水記号所形成的模式．这一模式在播音員的网膜里又变成明暗交替的模式，然后变(編碼)成网膜反应的模式，然后变成視覺神經中神經脉冲(电流)的模式，然后这一模式又經过諸如此类的轉变通过播音員的神經系統．最后当这一信息从播音員口里念出来的时候，神經脉冲的模式又变成唇舌运动的模式，然后又变成空气中声波的模式而傳送出去．声波的模式到达話筒之后变成电压变动的模式，再經过放大、調制和用发射机广播发射，这模式又經过一系列的变化，这之后就变成空間电磁波的模式，变成收音机中天綫电源变动的模式．再变回到空气中声波的模式之后，它又变成振动模式，相继通过收听者的鼓

膜，听小骨，耳蝸，然后变成听覺神經中的神經脉冲模式．到这里我們可以不必再往下說了，只要注意：在这短短的說明中至少包含了 16 次大演变（变换），而經过这 16 次大演变之后仍有一些基本东西保持不变，尽管从它的外貌說已經不再能辨认出原状了．

8-3． 編碼工作的复杂性　在考察这种一再进行編碼的过程时，讀者很可能会把这里面所引起的复杂性估計过高．事实上，这里面所引起的复杂性往往不象起初所設想的那样大．

举一个簡单的例子，就可說明复杂的編碼实际上并不太复杂．比方对一个信件施行一次字母换字母的編碼之后，再对第一次編碼后的形式进行編碼，然后对第二次編碼后的形式再进行編碼，这样一直下去，編好多次碼．可能讀者以为最終的編碼形式一定极端复杂，而要把它还原也必須倒过来同样譯好几次；但事实上我們可以証明，这最終的編碼形式跟原消息的差別，也象单独一次編碼后的形式同原消息的差别一样，因此最終形式的編碼消息，只要譯一次，就能恢复成原来的消息．

題：把一付扑克牌按次序排好．然后一再地洗，一直洗到你认为原来的次序都已完全洗乱为止，你再拿起这一付牌，看看次序究竟洗乱到什么程度？

8-4． 譯碼　要对編碼問題作一般研究，最好先从軍用密碼的某些特点談起．

首先不要把"編碼"的意义理解得太狭窄．起初我們可能以为編碼只是将消息中的每一个字换成另一个字的一种方法，但这种方法范圍太窄了，因为我們还有許多別的方法．如"普来佛尔"(Playfair)編碼法便是就一对一对的字母进行編碼的，把每一对字母(有两个分量的矢量)变成另一对字母．有些編碼法把字排成另一种新的次序，再有些是完全任意的，如将"即有两师兵开到"編成密碼"泰山"．从这些可以看出，若承认編碼是一种变换，那末原象(被映元素)是整个消息，不一定是个别文字，所以变换的形式基本上是

$$U:\downarrow\begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 & \cdots \\ C_1 & C_2 & C_3 & \cdots \end{matrix}$$

这里 $M_1, M_2, \cdots$ 是各种消息，$C_1, C_2, \cdots$ 是編碼后的消息．所以編碼方法由变換来确定．

編碼法中常采用一个"关鍵語"或其他因素，可以将一种編碼方式換成另一种編碼方式．这一因素当然就相当于一参数，这因素有多少值，就能給出多少个不同的編碼方式(或变換) $U_1, U_2, \cdots$．

所謂"譯碼"，是指对映象 C_i 施行这样的变換，使其变回到原消息 M_i：

$$V: \downarrow \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots \\ M_1 & M_2 & M_3 & \cdots \end{matrix}$$

这一变換 V 叫做 U 的逆变換；故它可写为 U^{-1}．一般說，只有一一变換才有单值的逆变換．

若編碼形式的消息 C_i 能譯回成原消息 M_i，而不管 i 是什么值，那末 U 与 U^{-1} 都必須是一一变換；因若 M_i 与 M_j 都变成同一形式 C_k，那末接到 C_k 的人就不能确定原来发出的是哪个 M，于是 C_k 就不能肯定地譯成原消息．

再設有一組消息，变异度是 v，用一一变換 U 以編碼形式发出．在发出的一組編碼消息中，变异度也是 v．所以用一一变換編碼后，变异度不变．

因此若有变异度为 v 的一組消息經多次編碼后傳送出去，并要唯一地譯回成原有形式，那末每一步編碼过程，必須使該組消息的变异度保持不变．

題 1: 对正数施行的变換 $x'=\log_{10}x$ 是否一一变換？这里所謂"譯碼"平常是怎么說的？

題 2: 对正数施行的变換 $x'=\sin x$ 是否一一变換？

題 3: 先作一一变換，继再作其逆变換，所得結果是什么变換？

題 4: $n'=n+7$ 的逆变換是什么变換？

題 5: $x'=2x+y, y'=x+y$ 的逆变換是什么？

題 6: 若編碼形式包括三个拼音字母如 JNB，問可能有的編碼形式的变异度是多少(用对数单位)？

題 7(續): 用这样的編碼方式，一次能傳輸多少不同的消息？

題 8: 八匹馬賽跑，要把哪匹馬領先，哪匹馬跑第二的情况，用电报告訴 A 先生，問可能发出的电报有多少变异度？

题 9(續)：这一批电报能否用单独一个字母以編碼形式傳輸(字母可用大小写的)？

题 10：某动物血液中性內分泌素濃度的"高"或"低"决定它是否会发动春情．若性內分泌素的化学結构很复杂，春情的含义也复杂，且若我們把"行为"这一变量看作是"濃度"这一变量的編碼形式，問这一組消息的变异度是多少？

8-5． 用机器編碼　现在我們来看消息因通过机器而編成密碼时出现什么情况．

这类問題对研究大脑的重要性是不必多說的．除此以外还可用在仪器探测学上，这是对人日所不能及或难及的場所或变量——如炼鉄炉的內部或活人的心脏——用仪器探測来获取情报資料的科学．从这里面傳输出来的情报，总是經过中間的編碼阶段的，而編碼方式必須加以合适的选擇．还在不久以前，每一个这样的仪器都是单純按照某一門科学所特有的原理来設計的．但自申农和維納在这方面作了初創研究之后，已經知道对所有这些仪器都有一般規律，底下就讲这些一般規律是什么．

如 3-4 节中所定义的，所謂一部"机器"是指任何一組状态，它随着时間的改变相应于施行一封閉的单值变换所引起的改变．这一定义可用于完全孤立(处于恒定状态)的机器，它跟"大脑設計"一书中定义的絕对系統是一样的．在 4-1 节中把带輸入的机器定义为这样的一个系統，它对一組参数的每一个可能取的值，都有一封閉的单值变换．这跟申农說的变換器完全相同，而后者是指这样的一种系統，它的下一状态是取决于目前的状态和参数的現值的(申农又假定变换器要有有限的內部記忆，但这一点我們暂且不管，到 9-8 节再来讲)．

今設有一变换器 M，它能处于 $S_1, S_2, \cdots, S_n$(这里将假定它們是有限个)中的某一状态．这变换器又有一个或几个参数，它們在每一刻能取得一組数值 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 中的某一值．这参数的每一值就将規定 S 这些状态的一个变换．我們发現，这样的一个系統可以接受一个消息，把它編碼，并把編碼形式的消息傳輸出去．这里所謂"消息"只是指一些状态的某种序列，这一序列耦合在两个系統之間时，同时既是一个系統的輸出而又是另一系統的

輸入. 这状态往往是一矢量. 这里我們不提消息可能带有什么"意义",而只研究在这些确定性系統里会发生什么情况.

为举例簡单起見,設 M 能取四种状态 A, B, C, 与 D 中的一种;而参数可有三个状态 Q, R 及 S. 对机器的这些假設可列成一表,表示出"变换器"的主要性质(如 4-1 节那样):

↓	A	B	C	D
Q	C	C	A	B
R	A	C	B	B
S	B	D	C	D

給定了系統的初态及参数所取的一串值之后,它的輸出就容易找出,如同 4-1 节中那样. 比方說假定它从 B 开始,輸入在 R 处;它就会变到 C. 如果輸入以后变到 Q,它就将从 C 变到 A. 以上这些結果可列表如下:

輸入状态:	R	Q	
变换器的状态:	B	C	A

現在不难驗証: 若初态是 R,輸入的一串值是 $RQRSSQRRQSR$,那末輸出的一串值将是 $B\,C\,A\,A\,B\,D\,B\,C\,B\,C\,C\,B$.

所以,給定了变换器、它的初态和一串輸入值,就不难推出它的变迹. 这一例子看来虽不自然,因其中参数和状态的值可以随便跳,但事实上它是很有代表性的,只要多加些状态,容或再取极限把它化成連續情形,就可使它变得自然. 但在本例的形式下,各种数量性质就变得很明显,很容易算,而在連續状态的形式下,就必須运用測度論中的艰深数学工具了.

題 1: 从状态 A 起,把同一消息($R\,Q\,R\,S\,S\,Q\,R\,R\,Q\,S\,R$)通过同一变换器.

題 2: 从 a 开始,把消息"R_1, R_2, R_3, R_1, R_2, R_3"通过 4-1 节中的变换器.

題 3(續): 从 b 开始,把同一消息通过同一变换器.

題 4(續): 一个变换器的輸出(在輸入給定后)是否要取决于它的初态?

題 5: 若变换器是 $n'=n-a$ 而 a 是参数,今若从 $n=10$ 开始,令輸入取一串值 2, 1, −3, −1, 2, 1, 求它的变迹?

題 6: 把消息"314159…"(π 的各位数字)通过变换器 $n'=n+a-5$,取变换器的初态为 $n=10$.

题 7: 若 a 及 b 为参数，从而矢量 (a, b) 定一参数状态。今若变换器的状态由矢量 (x, y) 确定而变换为

$$\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=x+(a-b)y \end{cases}$$

請把表中的变迹填完:

(a, b)	$(1, -1)$	$(-2, 1)$	$(0, 1)$	$(-1, 0)$	$(2, 1)$	$(5, -2)$	$(-2, 0)$
(x, y)	$(2, 1)$	$(1, 4)$	$(2, -11)$	?	?	?	?

题 8: 一变换器的参数为 u,变换为 $dx/dt=-(u+4)x$; 今从初态 $x=1$ 开始，給它輸入 $u=\cos t$; 求 x 的輸出值。

*题 9: 若 a 是下列变换器

$$\frac{dx}{dt}=y, \quad \frac{dy}{dt}=-x-2y+a$$

的輸入,而这一变换器的直接影响图是

$$a \rightarrow y \rightleftarrows x$$

若从初态(0, 0)开始,給予輸入 $a=\sin t$, 求 x 的輸出值。(提示：用拉氏变换)

*题 10: 若 a 是輸入,变换器是

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)$$

若 k 是正的且数值愈来愈大,問 x 能显什么特性?

密碼消息的还原

8-6. 在 8-4 节中曾强調指出,要密碼能携带信息,必須能把它还原才行. 現在把 8-5 节中的变换器看作編碼机，来考察它能否把密碼还原.

以前用的变换有两种，必須严格区别. 其一相当于 8-4 节中的 U, 原象是个别消息;另一种是变换器所作的变换. 設一消息含两个字母,其中每一字母可以是 Q, R, S 中的一个,則可能有九种不同的消息:

$$QQ, QR, QS, RQ, RR, RS, SQ, SR, SS,$$

而这些消息就相当于 U 的 M_1, M_2, $\cdots$, M_9. 現在我們把一个"消息"送到变换器上去,并且假設变换器总是从 A 开始的;不难核驗,相应的九个輸出将是(如果不管始終不变的初态 A):

$$CA, CB, CC, AC, AA, AB, BC, BC, BB.$$

这些就是 U 的 $C_1, C_2, \cdots, C_9$. 这里变换器所作的編碼不是一一对应的,这里变异度有所损失, 因为现在只有八个不同的元素, 其中 BC 是重复出现的. 这个变换器編出来的密碼不可能完全地准确地譯成原碼;因若收到 BC, 就不能知道原消息是 SQ 还是 SR.

这里必須认識清楚的是,譯回成原碼之所以不可能,可以出于两种很不相同的原因. 一种原因是虽存在譯密碼的手段, 但眼前沒有, 所以譯不出来. 例如, 当一封軍用密碼电报送到譯电員手里, 而譯电員沒有密碼本; 或者当一个人有一張留声机唱片(声音編成密碼后的形式)但沒有放唱片的留声机,情形就是如此. 但当两个不同的消息編碼后形成同一个輸出, 好比从上述变换器得出輸出 BC 那样, 那末因此而不能譯成原碼的情况就跟前面的情况大不相同了. 如果收到变换器里出来的 BC, 那它所能告訴我們的只不过是: 原消息可能是 SQ 或 SR, 而有能力区别这两个消息的譯碼者并不存在.

不难看出, 如果表的每一列中, 每个状态都不相同,那末每一步轉移就会告訴我們唯一的参数值; 从而变换器所发出的任何一系列状态就都譯得出来. 倒过来說这也是对的; 因若任何一系列状态都能譯得出来,每一步轉移就必确定唯一参数值,从而一系列中的各状态必定都是不同的. 这样我們就知道要使变换器成为完善的編碼机, 它必須有什么特性.

題 1: 一变换器中有 100 个状态, 参数能取 108 組值; 問它的輸出是否总能譯回成原碼? (提示: 試就簡单的例子来研究这一問題,設其中变换数超过状态数)

題 2: (为强調指出两种变换之不同) 若一变换器的輸入有 5 个状态, 輸出有 7 个状态,而消息包括由 12 个状态組成的某一序列, 問 (i) 此变换器的变换有多少原象及 (ii) 作編碼的变换 U 有多少?

題 3: 若一机器的状态是連續变的, 那末从实际用仪器操作管理的术語来說, 在这机器里"观察一步轉移"相当于什么?

*題 4: 若变换器的变换是 $dx/dt = ax$, 其中 a 是輸入, 問它的輸出是否都能譯回原碼? (提示: 解出 a 来)

8-7. 設計一种譯碼机 上节說明, 若变换器在把輸入傳送到輸出的过程中不减低变异度, 那末輸出的密碼消息总是可以还

原的,这一节里要說明这一过程是可以自动完成的,即:只要有一架不損失变异度的机器,就总能造出另一架这样的机器,使它把第一架机器的輸出接受过来作为輸入之后,就能在輸出处发出原消息.

这里我們采取不同于上节的观点,在那里我們关心的是消息能否还原,至于誰来把它还原并不注意.現在来討論怎样由我們来造一架机器,使它的机构能自动地把密碼消息还原.因此我們所要的,并不是还了原的消息,而是能把密碼消息还原的机器.那末这种机器怎样做呢?当然,我們还是照常用一組变换(4-1节)来規定这种机器.

这里要用的一种可能的办法,无非是利用这样一件事实:从变换中的每一步轉移,都能获得关于发生那一步轉移时的参数值的信息.因此我們要做这样一架机器,它能接收一步轉移作为輸入,而能在輸出处給出原参数值.但要知道出現了哪一步轉移(也就是要知道"$X_i \to X_j$"中的 i 值与 j 值),就相当于要知道矢量 (i, j) 的值;因为一步轉移也可以看作是有两个分量的矢量,所以如果譯碼机的輸入有两个参数,一个来接受先一状态的值,另一个来接受下一状态的值,那末我們就可把各步轉移饋入(輸入)到这譯碼机里去了.

現在只留下一个难題:每一步轉移包含两个不在同一时刻出現(存在)的状态,因而譯碼机的一个参数在現时的性态必須符合变换器在过去的輸出.但这个难題可用一种簡单的办法来解决.我們来看下面的变换器:

↓	q	r	s
Q	q	q	q
R	r	r	r
S	s	s	s

假設这机器从状态 r 开始工作,并給它輸入 $Q\,S\,S\,R\,Q\,S\,R\,R\,Q$;那末它的輸出是 $r\,q\,s\,s\,r\,q\,s\,r\,r\,q$,换言之,在第一个字母之后,表示輸出的字母就只是重复了表示輸入的字母(只是大小写不同,而

且晚出現一步）．如果把两个这样的变换器串接起来，那末它們就可在晚两步之后重复給出原消息，这样一直可以設計出使原消息晚出現任何步的机器来，所以从原理上說，要使消息延迟出現显然是并不难的．

設第一个变换器，卽編碼机，是

↓	A	B	C	D
Q	D	A	D	B
R	B	B	B	C
S	A	C	A	D

現在我們需要設計这样一架机器，比方說它能在：

給以輸入 A, A 之后发出 S

給以輸入 A, B 之后发出 R

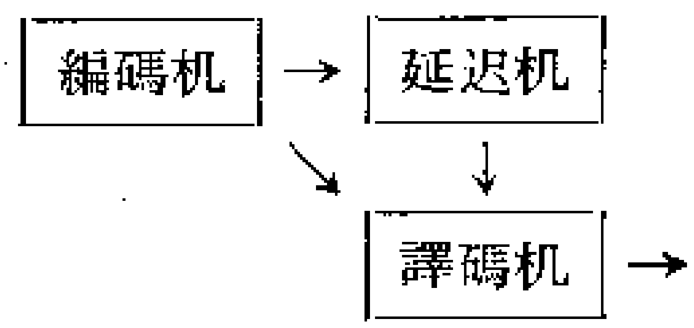
給以輸入 A, D 之后发出 Q

給以輸入 B, A 之后发出 Q

等等．

（A, C 这个輸入事实上是决不会加上去的，因为編碼机里发不出这样的一步轉移来．）

現在把三架机器照着下面那样耦合起来：



延迟机的形式很簡单：

↓	a	b	c	d
A	a	a	a	a
B	b	b	b	b
C	c	c	c	c
D	d	d	d	d

譯碼机的形式是

↓	Q	R	S
(a, A)	S	S	S
(a, B)	R	R	R
(a, C)	（不会有）		
(a, D)	Q	Q	Q
(b, A)	Q	Q	Q
等等	等等		

給予它的輸入是矢量(延迟机的状态，編碼机的状态).

現在編碼机就会发出那輸送到編碼机里的一串消息来了．例如，設輸入 Q，使編碼机中发生轉移 $A \to D$．这說明譯碼机在这一步里从編碼机直接得到輸入 D(因这时編碼机的輸出是 D)，而从延迟机接收 a (因編碼机前一步的輸出是 A)．譯碼机在輸入为 (a, D)时的輸出是状态 Q，这是設計时假定的，对其他可能輸入的状态，工作情况也是一样的.

所以，只要所給定的变换器不減低变异度，那末总可以造出一个自动譯碼机来．这一段論証的重要之处，在于它并不涉及变换器本身实际是什么，不管它是机械的、电子的、神經的、水力的，变回成原信号的可能性总是存在的．必要的条件是編碼机的作用必須是确定性的，而且变异度須保持不变.

题 1：为什么不能用 8-5 节的編碼机作为例子?

题 2：把剛才所讲那个譯碼机的工作情况完全写出来.

题 3：用表格形式写出一个能推迟两步的延迟机来.

8-8．（本节初讀时可以跳过去）在上面以最一般的形式討論了譯碼机的做法之后，就可以对那种不那么一般抽象，而比較象日常生活中所見的那种机器形式的变换器来談譯碼机的造法了．下一步要来考察一下，当变换器和譯碼机所作的变换不用表格給出，而用数字公式給出时，譯碼机的构造是怎样的.

第一步，設有变换器的輸入是 a，变量是 n，变换是 $n'=n+a$.

一种合适的延迟机构是这样的一种机器，它以 n 为参数，p 为变量，而变换是 $p'=n$. 現在容易証明，設給定輸入 a，則 n（若自 3 开始）与 p（若自 1 开始）将照着以下方式变化：

a:	4	-2	-1	0	2	-1	-1	3
n:	3	7	5	4	4	6	5	4
p:	1	3	7	5	4	4	6	5

現在道理很明显，如果以 m 为变量的譯碼机，要在接收输入 n 与 p（即矢量 (n, p)）之后，在输出处重新发出 a，那末 M 这一变换必須包括下列这些轉移：

$$M:\ \downarrow \begin{array}{ccccc} (7,\ 3) & (5,\ 7) & (4,\ 5) & (4,\ 4) & \cdots \\ 4 & -2 & -1 & 0 & \cdots \end{array}$$

把这各步轉移細細考察一下，看看映象与原象是怎样对应着的，就可以知道在所有这些轉移下都有

$$m'=n-p$$

不难証明，整个系統在此刻发出的値，正是原输入在两步以前的値.

[讀者可能想这样說：因 $n'=n+a$，所以 $a=n'-n$，密碼就能出来了. 这样說是对的，但不合我們的要求，因我們是要造一架机器（見 8-7 节的第 2 段），它能使我們把密碼解出来，但并沒有定出一架机器. 要造出或定出一架机器，就需要象上文那样繞弯子，最后得出 $m'=n-p$，这就定出了带输入的一架机器.]

現在一般法則也很明显了. 先从机器的方程 $n'=n+a$ 开始，解出参数来：$a=n'-n$，延迟机构的变换是 $p'=n$. 要得出譯碼机的变换，可对方程 $a=n'-n$ 施用以下法則：

1：把 a 换成新机器的記号 m'；

2：把 n' 换成参数 c；

3：把 n 换成参数 d.

于是，若置 $d=n$ 而把这譯碼机接到原变换器上去，又置 $c=p$ 把它接到延迟机上，它就具有所需要的性质.

若原变换器有一个以上的变量，这手續也只要适当扩充就能

做．举一个例子，不必解释，就可使讀者明白．設原变换器有参数 a_1 与 a_2，变量 x_1 与 x_2，变换为

$$x_1'=2x_1+a_1x_2$$
$$x_2'=2x_2+a_1a_2$$

解出参数，有

$$a_1=(x_1'-2x_1)/x_2$$
$$a_2=x_2(x_2'-2x_2)/(x_1'-2x_1)$$

x_1 的延迟机是 $p_1'=x_1$，x_2 的是 $p_2'=x_2$．建立譯碼机的方程时，可对 a_1 及 a_2 的方程应用下列法則

1：把每个 a_i 换成一新記号：$a_1=m_1'$，$a_2=m_2'$；

2：把每个 x_i' 换成一参数 c_i：$x_1'=c_1$，$x_2'=c_2$；

3：把每个 x_i 换成一参数 d_i：$x_1=d_1$，$x_2=d_2$；

結果就得出变换器：

$$m_1'=(c_1-2d_1)/d_2$$
$$m_2'=d_2(c_2-2d_2)/(c_1-2d_1)$$

今若取 $d_1=x_1$，$d_2=x_2$ 而把这变换器接到原变换器上，令 $c_1=p_1$，$c_2=p_2$ 而把它接到延迟器上，则 m_1 与 m_2 就各給出 a_1 与 a_2 在两步前的值．

題 1：造出变换器 $n'=an$ 的譯碼机．

題 2：造出 $n'=n-2a+4$ 的譯碼机来．

題 3：造出 $x'=ax-by$，$y'=ax+by$ 的譯碼机．

題 4：試作变换器 $n'=n+a+b$ 的譯碼机；为什么不能作？

*題 5：作变换器

$$\frac{dx_1}{dt}=a_1x_1x_2+a_2$$
$$\frac{dx_2}{dt}=(a_1-1)x_1+a_2x_2$$

的譯碼机．

題 6：为什么本节中的 M 要把 (7, 3) 变换成 4 而不是象前几行那个表里所示的样子把(7, 3)变成 -2？

8-9． 譯碼机的大小　根据上面几节的材料，现在可以来估計一下，要把一已給变换器里輸出的信息变回去，必需要有多少机构．从 8-7 中可以明白看出，若要使原来的那个变换器不損失变

异度，輸出值的数目至少应和不同的輸入値的个数一样．譯碼机的情形也是这样，輸出值的数目至少要有一样多，但不一定要更多．延迟器的不同輸出值則只要很少几个就可以了，因为延迟器是比較簡单的．故若譯碼机与变換器是由类似的一些部件构成的，那末，不管原变換器的复杂程度和大小如何，譯碼机的复杂程度和大小也要与之相埒．

这一点說明之所以重要，乃是因为我們在想到象大脑皮质或生态系統的复杂程度时，有时可能会覺得通过系統而后的任何效应一定要馬上变得很紊乱，以致完全不可能辨认出它的原状．事实显然不是这样的．由一个变換器所增添的复杂性，往往是另一个同样大小变換器的譯碼能力所能应付的．

信息从一个系統到另一个系統的傳輸

8-10．变异度的"傳輸" 到这里，不妨把过去常有人搞不清楚的一件事說說清楚．虽然我們很容易这样想，以为变异度（或信息）可以通过一个变換器，或者可以从一个变換器傳給另一变換器，但这种說法是非常容易引起誤会的．一个信封里尽管可以装一个消息，但单独一个消息，由于它是唯一的，不可能含有变异度；因此，只有一批信封才能包含变异度．同样，一个变換器里（在任一指定的时刻）不可能存在变异度，因为一个特定的变換器在一特定的时刻只能处于一种状态．所以，一个变換器也不能包含变异度．而好几个变換器（可能都有相同結构）在某一給定时刻所处的状态則可显出变异度；同样，一个变換器在各种不同場合下所处的状态也可显出变异度．

（这里所讲的，重复了7-5节中所讲过的一些东西，但这一点很重要，再强調說明一下决不是多余的．）

讀者必須时刻記住，本节中所讲"变异度"这一概念，或即信息論中所讲"信息"这一概念，总牵涉到一批对象，决不能单独指某一种东西．如果想把变异度或信息看作是能存在于另一事物中的一件东西或性质，那就很可能搞出实际上从来不会有的难"题"来．

8-11. **单步傳輸的情况** 讲过了单独一个变换器里变异度改变的情形之后，現在可以来考察一下它是怎样从一个系統傳輸到另一个系統去的，比方說是怎样从 T 傳到 U 的，这里 T 是絕对系統，U 是变换器.

$$\boxed{T} \to \boxed{U}$$

如刚才所說，我們假定可以有許多結构相同(即变换相同)的一些 T 和 U，但其中各个 T 或 U 可以独立地处于不同的状态. 如果在某一时刻，所有的 T 具有某一变异度，我們要想知道多久之后这些变异度能傳輸到所有的 U. 假定在所說时刻所有的 T 处于 n_T 个不同的状态，而所有的 U 则处于 n_U 个不同的状态(如果讀者自己作出 T 和 U 的具体簡单例子，对着这具体例子来一步步檢驗底下所讲的論証，那就更容易理解底下所讲的一切).

T 的作用好比是 U 的参数，T 每有一种状态，U 必有一种状态图与之相应. 故 T 有多少值，这一組 U 就有多少状态图，而在本例的情形下应有 n_T 个状态图. 这說明每个 U 态可以(从 n_T 个不同的状态图而来)含有多达 n_T 个不同的轉移，即是說，代表状态的点从 U 态起可通向 n_T 个以內的不同的 U 态. 因此，若一組 U 的状态点都在同一状态，则在 T 的变异度的影响下，这一組 U 就变到另一組，其状态点分散到 n_T 个不同的状态以內. 現在这样的 U 共有 n_U 組，每組都能分散到 n_T 个状态以內，所以变了单独一步之后，所分散出来的状态总数不能超过 $n_T n_U$ 个. 若变异度是依对数計算的，则变了一步之后，U 的变异度不能超过 U 与 T 原有的变异度之和. 換言之，**单独变了一步之后，U 的变异度可能增加，但所增加的量不能超过 T 原有的变异度.**

这是变异度从一个系統傳送到另一系統时所必須遵循的基本定律. 本书以后将要不断应用这一定律.

題 1： 某系統有状态 (t, u)，而变换为 $t'=2t$, $u'=u+t$，从而 t 主制 u. 今有八个这样的系統，各从状态 $(0,9)$, $(2,5)$, $(0,5)$, $(1,9)$, $(1,5)$, $(2,5)$, $(0,9)$, $(1,9)$ 开始. 問 t 与 u 的变异度各是多少？

題 2(續)： 求下步的状态个数. 这时 T 有多少变异度？請給 u 的变异度預測一个上

限．这时 u 的变异度是多少？

题 3： 在另一系統中，T 有两个变量 t_1 与 t_2，U 有两个变量 u_1 与 u_2．整个系統具有状态 (t_1, t_2, u_1, u_2) 与变换 $t_1'=t_1t_2$，$t_2'=t_1$，$u_1'=u_1+t_2u_2$，$u_2'=t_1u_2$，从而 T 主制 U．今有三个这样的系統，各有初态 $(0,0,0,1)$，$(0,0,1,1)$ 与 $(1,0,0,1)$．求 T 与 U 的变异度各是多少？

题 4（續）： 求一步以后的三个状态．那时 U 的变异度是多少？

8-12． 第二步傳輸的情况　剛才我們看到，傳輸第一步之后，U 的变异度可以增多，但至多增加了 T 所原有的变异度；那末傳到第二步的情形又怎样呢？T 还会有某一变异度，这变异度会不会又傳輸給 U，使 U 的变异度継續增加呢？

不妨用个簡单的例子来讲．假定对所考察的这批 T 与 U 来說，每个样品可处于 (T_i, U_k)，(T_i, U_l)，(T_i, U_m)，(T_j, U_k)，(T_j, U_l)，(T_j, U_m) 六种状态之一，从而所有的 T 可处于 T_i 或 T_j 两种状态之一，所有的 U 可处于 U_k，U_l 或 U_m 三种状态之一．但就整个系統来說这是絕对系統；因此所有处于 (T_i, U_k) 状态的（比方說）系統，虽可从一个状态变到另一状态，但它們必須一样地变，必須一起变到各种不同的状态．对于分别处于其他五种状态的所有样品来說，也有这种情况．因此，这一批机器（样品）所处状态的变异度不能超过六，不管机器个数有多少，也不管 T 和 U 可能有多少状态，也不管变化的过程継續了多久．由此可知，U 的状态的变异度不会超过六．所以，一旦在 U 的变异度上增加了 T 的原有变异度，这变异度以后就不再增加．若 U 在一步之后（如上例那样）就获得了它可能增加的所有变异度，那在第二步里它的变异度就不再增加了，尽管 T 那时还有某一变异度．

讀者請看，上述論証中 T 的状态与 U 的状态的配对是多么重要，这里所謂配对，是指同一机器出現哪个 T 值和哪个 U 值．如果只知道所有这一批 T 和 U 中的变异度，显然还不足以預測它們会怎样变．

8-13． 信息通过通道傳輸的情形　現在来讲变异度或信息通过一个小的中間变换器——“通道”——而傳輸的情形，这里所謂“小”，是指那变换器可能有的状态个数小．假定有两个大的变

换器 Q 和 S，由一个小的变换器 R 把它們連接起来，这样 Q 就主制 R，而 R 則主制 S.

$$\boxed{Q} \to \boxed{R} \to \boxed{S}$$

跟以前一样，仍假定我們有不少这样的三元系統. 設 R 可能有的状态数是 r. 令 $\log_2 r=\rho$. 又假定在一开始，所有这些 Q 的变异度比 r 这状态个数大得多，而所有 R 与 S 的变异度則为簡单起見假定都是 0. 要是它們有某一变异度，則如 8-11 节所讲，它們从得来的新的变异度（按对数計算）只能跟 R 与 S 的原有变异度相加）.

把 8-11 节中的結論用于 R 与 S，那末可以看到，在第一步之后，S 的变异度一点也不会增加. 所以如果原有的三个变异度（按对数計算）各是 N, 0 和 0，那末在第一步之后，它們可能增大到 N, ρ 和 0，但不能增到比这还大.

在第二步，R 的变异度不能再增大了（根据 8-12），但 S 的变异度可以从 R 那里得到增加（只要考察一下象題 2 那样的实际例子，这是容易驗証的）. 所以在第二步之后，各个变异度可以达到 N, ρ 和 ρ 这样的数字. 同样，在第三步之后可达 N, ρ 和 2ρ，等等. 这样，随着时間的推移，S 的变异度可以按照数列 0, ρ, 2ρ, 3ρ, … 的速度增加，但不能增加得比这还快. 于是显然就得到这样的一个法則：若变换器所取的状态数不超过 r，它在每一步所能傳輸的变异度就不能超过 $\log_2 r$. 所謂不同的变换器具有不同的傳輸"能力"，說的主要就是这个意思.

倒过来，由于 S 的变异度在逐步增加，我們就可以看到：一个变换器（如同 R）所能傳輸的信息量或变异度（按对数計算），正比于其傳輸能力（取对数，以比特为单位）与傳輸步数的乘积. 由此可得一个重要的推論：只要时間足够长，任何变换器都可用来傳輸任何多的信息量，这个推論我們在以后还会不断用到.

这一定理的重要特色是它的普遍性. 不管用什么机器来当作中間变换器——当作通道，都沒有关系，它可以是只有"开"与"关"

两种状态的电鍵，也可以是能取許多值的电位器，还可以是整个神經节，或是报紙，对这一切上述定理都适用. 当信息通过一个小的中間变换器来傳輸时，例如当从視网膜傳到大脑視覺皮质的信息要通过外側膝状体（lateral geniculate body）时的情形，或羊群只靠一只猎犬来傳輸猛兽动态的情报时，我們会感到在这种情况下信息傳輸的速度会受到限制. 有了这一定理，这一直观认識就有了定量的准确意义.

題 1: 含三个部件 Q, R, S 的一个絕对系統，具有状态 (q, r, s) 及变换

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
q: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\downarrow & & & & & & & & & \\
q': & 4 & 6 & 6 & 5 & 6 & 5 & 8 & 8 & 8
\end{array}
$$

$$r'=\begin{cases}0 \text{（当 } q+r \text{ 为偶数），}\\ 1 \text{（当 } q+r \text{ 为奇数）.}\end{cases} \qquad s'=2s-r.$$

于是 Q 主制 R，R 主制 S. 問 R 这个通道的傳輸能力是多少?

題 2（續）: 有九个上述系統，各具初态 $(1, 0, 0)$，$(2, 0, 0)$，…，$(9, 0, 0)$，从而 Q 可具有任意的初始变异度，(i) 在变了头五步之后，Q 的变异度是多少? (ii) R 的? (iii) S 的?

題 3（續）: 若題 2 (iii) 的答案是"S: 1, 1, 4, 5, 5"，則若不算出实际变迹，为什么就是显然錯誤的?

8-14. 从刚才的习題可以看出，当 Q, R 及 S 形成一串时，S 可以从 R 逐步取得新增的变异度，而 R 則在第一步之后不能再增加变异度. 原因是：一步步变的过程中，若把 R 的輸出看成一个序列，这序列就形成一矢量（9-9 节），而矢量的变异度可超过其一个分量的变异度. 今若矢量的分量可以无限增加，則矢量的变异度也可无限增大，即使其每一分量的变异度始終保持是有限的. 例如若一序列包含十次投擲硬币的結果，这一序列的变异度可以大到 1024，虽然其每一分量的变异度只限于 2. 同样，在題中 R 的值虽限于 2，但它可以給出变异度大于 2 的序列. 当傳輸过程不断进行下去，S 受整个序列——整个矢量的影响（从而它的变异度增加），这样就可通过 R 傳輸比 2 大得多的变异度. 因此，即使通道的傳輸能力縮小了，只要增加序列的长度，就可加以补偿（使所傳輸的总变异度保持一定）. 这一事实上节中已經指出过，以后还要不断用到.

题 1：一絕对系統 T 主制一串变换器 $A_1, A_2, A_3, A_4, \cdots$：

$$\boxed{T} \to \boxed{A_1} \to \boxed{A_2} \to \boxed{A_3} \to \boxed{A_4} \to \cdots$$

設有一批象这样的系統，它們开始工作之初只是 T 有变异度，而 A_1, A_2 等等无变异度. 試証 k 步后，$A_1, A_2, \cdots, A_k$ 的变异度可能异于零，而 $A_{k+1}, A_{k+2}, \cdots$ 的变异度仍必为零(即 T 的变异度"不能傳到比 A_k 还远").

题 2：有 27 个硬币，外表一样，但知道其中有一个是伪币，重量較輕. 现在要用一个天平称几次把它找出来，但要設法尽量少称几次. 在未想出方法以前——把天平看做是从硬币傳輸信息給观察者的一个变换器——先找出至少必須称多少次.（提示：若称的結果只可能有三种：两盘相等，左盘較重，右盘較重，則单独称一次的变异度是多少？）

8-15. 延迟作用 8-13 节中所讲系統的排列图

$$\boxed{Q} \to \boxed{R} \to \boxed{S}$$

也可以看成是

$$\boxed{T} \to \boxed{S}$$

这里已把 Q 与 R 看成单独一个系統 T，而且这 T 当然是絕对系統. 如果变异度从 T 傳輸到 S 的情形实际上就象 8-13 节中那样，而有人来研究变异度从 T 傳到 S 的情形，他会看到变异度是每步一点点傳輸的，不能象 8-11 节中那样一步就傳輸完.

傳輸情形之所以这样不同，只是因为在 8-11 节中整个主制系統(T)对被制系統(U)有直接影响，而 8-13 节的 T 中有部件 Q 是对接受器 S 无直接影响的. Q 的影响要通过 R 来傳达，因此受到延迟作用.

在实际系統里，通常都是这种需时較多的延迟傳輸，这只是因为大多数实际系統都是由若干部件构成的，而并不是所有部件对接收系統都能有直接影响的. 比方象大脑皮质这样一个接收器，受环境的影响（环境对大脑皮质无直接影响），这一影响的起作用要通过一連串的系統：感覚器官，感覚神經，感覚神經核，等等；因此就必須有一些延迟現象. 甚至在每一这种部件的內部，有的傳輸还得从一个接触点到下一个接触点依次进行，因而使它傳輸給下一部件的信息受到延迟作用.

反之，若檢驗的結果，发现有象 T 那样的一个系統，要直到几步之后才能把它的变异度傳給另一系統，那末可以預料到，經詳細檢查之后，必可发现 T 是由次級系統耦合而成的，从而不能使 T 的所有变量对 S 都有直接影响．

題 1： 若 T 含次級系統 $A, \cdots, F$，它們彼此之間以及与 S 之間的耦合情形如下列直接影响图所示：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{A} \arrow[d] & \boxed{B} \arrow[l] \arrow[r, shift left] & \boxed{C} \arrow[l, shift left] \arrow[ddl] \arrow[dr] & \\
 & & & \boxed{S} \\
\boxed{D} \arrow[r] & \boxed{E} \arrow[uu] \arrow[r] & \boxed{F} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

要把 T 的所有变异度都傳到 S，需經多少步？

題 2(續)： 要得到从 T 到 S 的唯一“消息”——即关于 T 的状态，須待多少步？

題 3： 若具变量 w, x, y, z 的 J 以变换 $w'=w-y$, $x'=w+xz$, $y'=2wy-z$, $z'=yz^2$, $k'=x-3k$ 主制 K，而 K 具有变量 k．若要把 J 的所有变异度都傳到 K，須經多少步？

題 4(續)： 在同一系統中，要把一个 w 处的消息帶到 z，須經多少步？

8-16． 为进一步了解这些事情，再来看看相互間有反饋的两个系統：

$$\boxed{T} \rightleftarrows \boxed{U}$$

在 8-11 节中已說明 T 会把变异度傳給 U；那末，U 有了这变异度，会不会再把它傳給 T，使 T 的变异度再增加呢？

如果我們考察的是这样一批結构相同的系統，那末回答起来仍旧很簡单．設开始时只有那些 T 有变异度，而所有 U 的状态都是一样的．把这整批系統分成一些子集，每一子集由那些 T 处于某一特定状态的系統組成，这样，比方說 i 这一子集就由那些 T 处于 T_i 状态的系統組成．对每一这样的子集来說，它們所含系統的状态沒有变异度，也就生不出变异度来，因整个 (T, U) 系統是絕对系統．故 T 的原有变异度，不管是在第一步还是在以后各步，都不会增加．因此，在一确定性系統內，即使有反饋，也不致使变异度引起再生式的增加．

在論証 U 对 T 的反饋作用时，重要的一点是：U 所反饋給 T

的跟 T 所原有的变异度，两者之間是紧密相关的，因每个 U 反饋給某一特定 T 的，只能是 T 在前此一步所接受的，不能再有别的．因此，上述論証要求对各个 T 与 U 之間的对应关系作一準确处理．

从前面几节的論証可以看出，虽然在簡单情形下（如我們所考察的几个例子）信息的傳輸問題可以用語言来叙述分析，但对复杂的情形，要想用語言形式来处理，就容易使人摸不着头緒了．这就需要一种符号工具，需要一种代数，能够使我們用多少帶些机械性的运算程序来处理这些关系，使符号运算法則能适应复杂的情况．看来集合論——特别是象蒲巴基（Bourbaki）与李涅（Riguet）学派的集合論，能提供給我們这些工具．但这些問題还有待进一步探索．

8-17． 干扰　若让酸碱同时通过一根管子，它們就中和——彼此的特性都消灭了；那末，要是两个消息通过同一通道，会产生什么情况呢？它們会不会彼此干扰，彼此扼杀呢？

用簡单的例子就足以說明有这种事实，即同一个具体通道可傳輸一个以上的消息，不致引起干扰，使每一消息傳过通道，不受另一消息影响，好象另一消息并不存在似的．例如，发信人可設法每天通过报紙的人事消息栏，把 26 个不同事件中发生了那一事件的消息告訴給受信人，并且假定他們已約定各用一个拼音字母来作事件的暗号．这同一个信息通道——一个“印刷体字母”，还可同时用来傳輸变异度为 2 的其他消息，只要把那个字母分成排大小写两种情形就可以．这样就可傳輸两个消息，彼此互不干扰，好象它們是在不同的两版上分开傳輸时的情形一样．于是，若接連发出十个消息如同 $N\,K\,e\,S\,z\,t\,y\,Z\,w\,m$，这十个消息就完全傳輸了 $n\,k\,e\,s\,z\,t\,y\,z\,w\,m$ 与 1101000100．这样，就可以让两个消息用同一具体事物来傳輸，不致对其中任何一方发生不利影响．

再举另一个不同类型的例子．我們来看 2-14-11 題把 A'''（比方这样說）的位置看作 A 位置的暗号（同样把 B''' 看作是 B 的暗号）．这样，可能在 A 处埋藏了珍宝，在 B 处埋藏了武器，而記号

则放在 A''' 与 B''' 处. 現在, B 的位置要是变了, A''' 的位置也要随之而变, 故所取的值对 A 之用暗号 A''' 来表示(密碼为 A''') 大有影响(而倒过来 A 对 B''' 也一样); 所以这样两个消息就要互相影响. 但是这种相互間的影响对于宝藏与武器埋藏地点的信息却沒有破坏作用, 因为給出了 A''' 与 B''' 的位置, A 与 B 的位置总可找出来, 即是說, 消息仍旧可以准确无誤地譯出来.

要找出在什么条件下, 方能使两个消息互相影响而不致彼此相抵消, 可考虑一下編碼过程的基本事实——一組消息变成一組映象, 并利用这一事实: 任何两个不同型的消息可并放在一起, 看作是"矢量"消息的两个分量, 正如同任何两个变量可以看作是一个矢量的分量那样. 比如象上面所讲用印刷体字母傳輸消息的例子中, 若用 x 表示"26 个消息中的哪个消息" 这一变量, 用 η 表示"两个消息中的哪个消息", 那末印刷符号就是单独一个消息 (x, y) 的暗号或密碼.

現在假定已經知道两个消息 x 与 y 虽有影响但并不相抵消, 这就是說, 从所接到的消息形式可以找出 x 和 y 的原值来. 由此可知, 若两个原消息不同, 那末它們的暗号 (密碼) 形式也不相同 (否則密碼就不可能还原成唯一确定的形式). 由此又可知, 若要使消息之間的影响不致互起破坏作用, 所接受消息的变异度不应小于原消息的变异度. 在用印刷字母傳輸消息的例子里, 这一条件是滿足的, 因原消息和印刷字体的变异度都是 26×2.

两个消息出現在同一通道里而不致引起混乱, 这一事实对神經生理学特别是对大脑生理学有重大意义, 在这种系統里, 接头之多是如此可观, 使好多消息混在一起的情况必然难以避免, 即使只从缺乏把它們分开的方法这一点来說, 也使消息混在一起的情况难以避免. 例如, 从听覺皮质傳来的一股脉冲(带来关于某种反应的信息), 会跟从視覺皮质傳来的一股脉冲(带来关于另一种反应的信息)相遇. 神經生理学中有个突出的問題, 就是不知道信息与信息相互之間的破坏作用与混乱情况, 究竟是用什么方式来避免的.

但是从本节的討論可以看出这問題提得很不合适．两个消息遇在一起不一定会产生混乱，即使每个消息都能影响同一組具体变量．尽管历經一切变化，只要变异度不减小，只要机构的細节作用是确定性的，两个消息可以继續并存下去，只是从一种变到另一种暗碼形式而已．如果得出原消息，只要有合适的譯碼器就行；而8-7节中已說明，合适的譯碼器总是造得出来的．

題1：（参看題2-14-11），若 A''' 在点(0，0)处，B''' 在点(0，1)处，找出 A 的位置．

題2：某变換器有二参数 α（能取值 a 或 A）与 β（能取值 b 与 B）．它的状态——W，X，Y，Z——依下表变換：

↓	W	X	Y	Z
(a, b)	W	Y	Y	Y
(a, B)	X	X	Y	Y
(A, b)	Z	W	X	X
(A, B)	Y	Z	Z	Z

假設同时傳輸两个消息，一个是一串 α 值，另一消息是一串 β 值．若接受者只需要 α 消息而不需要 β 消息，問他是否总能把消息譯出？（提示：8-6节）

題3：图8-17-1中各棍用鉸釘連接：

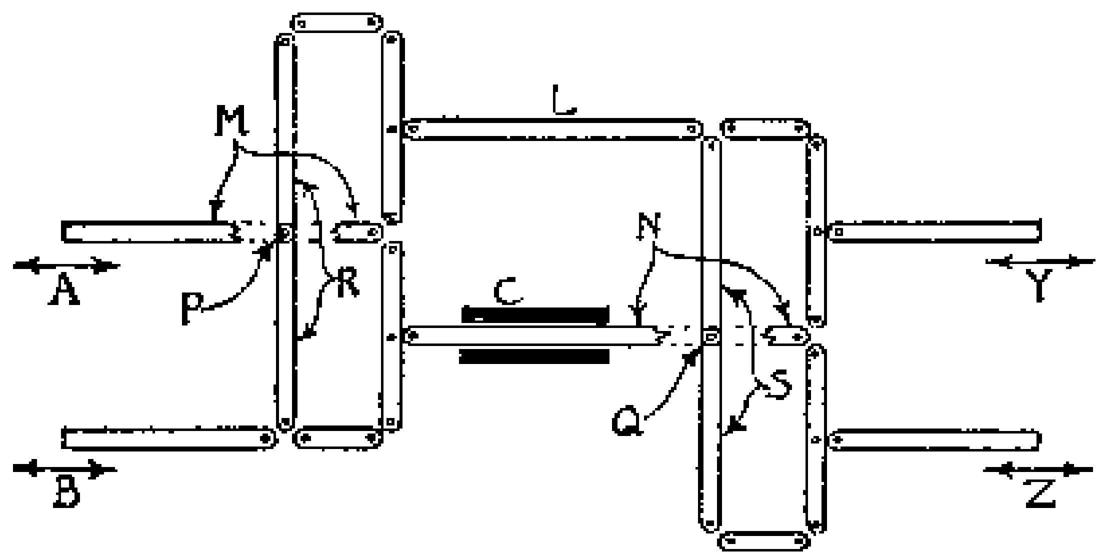


图 8-17-1

（为使讀者清楚看出結构，图中接头处是分开的）．P 是釘在一个底座上的樞軸，棍 R 可在它上面轉动；Q 与 S 的情形也类似 P 与 R．棍 M 通过 P 处但并不与 P 連接；棍 N 与 Q 的情况也一样．C 是固定的套管，把所有小弧度运动限制成只能是左右方向的（如图所示）．

A 与 B 的运动能引起 L 与 N 的运动，从而引起 Y 与 Z 的运动．所以，整个机构可以看作是用以把"A 的位置"与"B 的位置"这一消息，通过 L 与 N，送到輸出处 Y 与 Z 的一种裝置．讀者还可以看到，若把 B 固定，A 的运动会引起 L 与 N 两者的运动；同样，若 A 固定，B 的运动也会影响 L 与 N 两者．所

以，同时从 A 与 B 发出的消息都同时通过 L 与 N，并显然在那里相遇．問两个消息会不会因互相影响而彼此破坏？（提示：若只有 A 动，問 Y 怎样动？）

題 4(續)： 求 A，B，Y 与 Z 的位置間的关系式．对这个代数形式，“把暗碼譯成明碼”表示什么意义？

第九章　信息的持續傳輸

9-1. 本章継續討論前章的問題，研究变异度和它的傳輸情形，但特别要研究傳輸时間持續无限久长的一种情形，如坐骨神經与电話綫的不断傳輸消息就是这种情形，不象上章中那样，所研究的只是傳輸几步的情形.

申农特别研究过持續傳輸的情形，本章事实上主要就是介紹他的“通信的数学理論”，而特别着重介紹与本书其他問題有关的材料.

不过，本章只是为补充申农那份名著的一連串笔記，而不是本身完整的一篇叙述. 讀者应该主要先看申农的那本书，而且我假定讀者已經是有那本书的.

9-2. 若要非确定性变换能使傳輸无限持續下去，变异度必須永远不会消减，因此就不能有象 8-11 节中所研究的那种情形，T 在第一步之后就不再傳輸变异度了. 但容量有限的任何确定性系統不可能有无穷长的变迹（4-5 节）. 因此，我們必須考察机器与变换的一种更广泛的形式——非确定性系統.

在这以前，所考察的变换都是单值的，代表确定性机器. 在 2-10 节中曾提到过这种机器能加以推广，现在我們可以对有一个以上映象的原象，試作一番研究. 但为使研究对象有一定的范圍，使之服从一定規律，我們还必須附加一些限制. 用处最广的一种情形是：原象所表示的每一状态，并不变到一个特定的新状态，而只是变到可能有的某一状态，而所以会变到許多可能状态之中的这某一状态，则是根据某一方法或某一过程来决定的——根据該方法或过程，我們可以說出原象状态变到某一可能状态有一固定不变的概率. 有概率不变这一事实才得以产生規律或規則性，使

我們能依它来說出一些明确的定理.

下面就是这样的一个变换：$x'=x+a$，这里 a 的值根据这样一种法則来确定：擲一次硬币后，若正面朝上則 $a=1$，若反面朝上則 $a=0$. 这样，如果 x 的初值是 4，而接連几次擲硬币的結果是：反、反、正、正、正、反、正、反、反、正，便得变迹 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9. 若硬币的各次朝上面是正、反、正、正、反、反、反、正、反、反，变迹将是 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8，在这种情形下，单是給出变换和初值，还不足以(象 2-17 节中那样)定出唯一的变迹；它們只能定出一批变迹. 象上例的情形，要定出变迹，还得按照擲硬币的結果(比較 4-19 节)，才能得到唯一的变迹.

上例中的变换可表为(与以前所用的写法一致)：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 3 \arrow[dl, "\frac{1}{2}"'] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"] & \\
3 & & 4
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 4 \arrow[dl, "\frac{1}{2}"'] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"] & \\
4 & & 5
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 5 \arrow[dl, "\frac{1}{2}"'] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"] & \\
5 & & 6
\end{tikzcd}
\quad \text{等等.}
$$

这里，箭头旁边的 $\frac{1}{2}$ 表示：系統可以从事这一状态

以概率 $\frac{1}{2}$ 变到状态 3

又以概率 $\frac{1}{2}$ 变到状态 4

这样的一种变换，特别是它所能产生的一批变迹，称为"随机"变换与"随机"变迹，以别于单値的和确定性的变换.

但每一状态可能变成好些个状态，上面那样的表示法馬上就会行不通. 有一种更方便而且根本合用的表示法是象 2-10 节中的那样用矩陣. 这就是把所有原象写在頂上的一行里，把所有可能的映象写在左边的一列里，然后在第 i 列与第 j 行的交界处，写上系統从状态 i 变到状态 j 的概率，就得到所要的矩陣.

我們再拿剛才所讲的那个变换为例，来作它的矩陣. 若系統的状态是 4，且若硬币正面朝上的概率是 $\frac{1}{2}$，則系統变到状态 5 的概率是 $\frac{1}{2}$；同样，系統仍处于状态 4 的概率也是 $\frac{1}{2}$.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
\downarrow & \cdots & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
\hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
3 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
4 & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\
5 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\
6 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

对于所有其他的轉移，概率都是零．这样，你就可以把矩陣一格一格地填写完．

这就是轉移概率矩陣（讀者应注意，在文献上用得更普遍的是这一矩陣的轉置形式，即将这矩陣的行与列对調后所得的形式；但我們这里所写的矩陣形式有很多实际好处，例如从題 12-8-4 可以看出这一点，而且这还跟本书中各处所用的記号前后一致）．

到这里，我們对"概率"的意义应該完全清楚了解（再参看 7-4 节）．而且不仅是要清楚理解它的意义，还要会把这意义写成实际的可用来运算的形式（在这里把概率当作主观的"信念程度"来理解是不可以的）．例如，若某人对某事具有"固定概率"这一点的意見不同，你能采取什么檢查办法来解决这一分歧？

概率就是頻率．"一件'可能'事件就是一件頻发事件"［費歇(Fisher)語］．每年八月里在曼彻斯特下雨是"可能"的，因那时曼彻斯特是經常（頻頻）有雨的（聰明的讀者会坚定采用这一定义，而不去搞那种瞎猜一气的問題，象"火星上有生命的概率值是多少"之类的問題．因为象那类事情根本沒有頻率可言）．7-4 节中所讲的事，在这里也用得着，因为概率这一概念，从它的实用方面看，只有当多种可能事件在一批事件中的出现与否各有一定的頻率时，才有意义可言．

所以，要檢驗是否有一定概率，就得要檢驗是否有一定的頻率．檢驗者可让事件发生的过程持續一段时期，直到他能看出事件发生具有某种頻率时为止．这样，如他要研究一下八月里曼徹斯特的雨是否有个一定不变的概率（在适当規定的条件下），他就得記录八月里下雨的日子，直到他能对下雨的頻率作出一次初步估算时为止．然后在第二年八月里他再这样記录，作出第二次估算．他可以每年接着記录下去并作出第三次和第四次估算．如果每次估算都相差很大，他就会說曼徹斯特八月里的雨是沒有恒定概率的．但是如果各次估算的頻率都很接近甚或有好多次的估算相符，那末如果他愿意，就可把跟各次估算都相接近的一个分数，来作为那个恒定的概率．例如，在很长的一連串（序列）事件中，若某事件在每段长的事件序列中的出現与否，大致都有同一相对頻率，那末該事件的出現与否就有“恒定”的或“不变”的概率．

这些話可用数学术語說得更准确．但这里重要的一点是：在整个本书內，讀到有关“概率”的任何地方，这概率都具有客观的意义，都可用事实来驗証，而不取决于主观的估計．

題 1：拿五張紙牌：大爱斯，2，3，4，5．把牌洗了之后，从左到右摆成一行，代替变换 T 中有星号的地方：

$$T:\downarrow \begin{array}{ccccc} \text{大爱斯} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ * & * & * & * & * \end{array}$$

从每洗一次牌所定出的变换是不是确定性的？（提示：这变换是不是单值的？）

題 2：在上述变换的轉移概率矩陣里，对出現在每列的多个数字有什么規則可言？

題 3：对每行的数字是不是也有象題 2 那样的什么規則可言？

題 4：若本节正文中所讲的那个变换从 4 开始变了 10 步，則对这样定出的一批映象来說，会得出多少变迹？

題 5：随机变换的动态图跟确定性变换的有什么差別？

9-3． 随机变换不过是确定性（单值）变换的一种推广．所以，設一个三态系統的轉移概率矩陣是：

先是

↓	A	B	C
A	0	0.9	0.1
B	0.9	0	0
C	0.1	0.1	0.9

然后是

↓	A	B	C
A	0	1	0
B	1	0	0
C	0	0	1

从第一个矩陣到第二个矩陣，变化虽小(而且可以弄得任意小)，但都把这系統的显然是随机型的变換变到本书以前所讲的单值型变换

$$\downarrow\begin{array}{ccc} A & B & C \\ B & A & C \end{array}$$

了．所以，单值的，确定性的变换，只不过是随机变換的一个特殊的、极端的情形罢了．这是当所有概率都变成了0或1时的一种随机变換．尽管为了説起来方便，有时要説到确定性的变换，有时要説到轉移概率是分数的变换，但它們在本质上是統一的，这一点不能加以忽視．在整个第三篇里，这两种类型变换在本质上的統一性，在使各种类型的控制調整問題統一成为一个問題这一点上将起重要作用．

用“随机”一詞时可表示两种意义．它可以用来指“一切类型的变換(具恒定的轉移概率矩陣)，包括确定性变換作为其特殊情形，也可以指“除确定性变换以外的一切变换”．在两种意义下，都可用“随机”这一字眼；但因所指的意义有所不同，所以必須注意上下文，明确所指的意义．

馬尔可夫鏈

9-4．念了前面八章之后，在知道一个系統的变化相应于一个单值变换时，我們对它的变化情形应該已有所了解．但若它的变化相应于一个随机矩陣，那末这一系統的性态又是怎样？如果实际碰到这样的一个系統，那末它是什么样子的呢？

設一昆虫生活在一淺沼中和淺沼四周的土地上：有时生活在水里(水)，有时鉆在石子底下(石)，有时生活在岸上(岸)．假設在每单位时間內，昆虫生活地点的轉移都有一定的概率，如：若原先(生活)在石子下，則单位时間后它会以一定的概率跑到岸上去；对于其它可能有的轉移也都有类似的不变概率．(如有必要，可設昆虫在任一刻的实际行为由其周圍的小变化和事件決定)．于是对于它的位置有下列登記表：

水岸水岸水石水岸水岸水岸水石水岸岸水岸水石水岸水石水
岸水岸水岸岸水岸水岸水岸水石石水石水岸水岸岸岸水

为明确起見，設轉移概率是：

↓	岸	水	石
岸	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
水	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
石	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

只要观察昆虫在一段长时間内的行为，求出（比方說）岸→水的頻率，然后再求相对頻率（即概率），就可以得出这些概率．这样的一个表，本质上就是过去实际行为的总結，是从登記表上摘出来的．

象这样的一串状态，在其各个不同长度的段落内，每一轉移的概率是一样的，这种序列叫做馬尔可夫鏈，因第一个对这种鏈作广泛研究的数学家是馬尔可夫（直到最近十年左右才有人认識到这一理論的重要性．数学书上讲各种不同的馬尔可夫鏈，并加上各种不同的条件．上面所举的这种类型完全是为满足我們在本书中的需要，也不会跟别的定义矛盾，但在 9-7 节要加上一个重要的限制）．

“馬尔可夫鏈”这一名詞有时是指一系統所产生的特定变迹（如題 1 所給的变迹），有时是指那能产生許多变迹的系統（由矩陣确定的）．讀者从上下文就可以知道該处所說的馬尔可夫鏈是指哪一种意思．

題 1： 一个两态系統有下列登記表（50 次轉移）：

$A\ B\ A\ B\ B\ B\ A\ B\ A\ A\ B\ A\ B\ A\ B\ A\ B\ B\ B\ B\ A\ B\ A\ A\ B\ A$
$B\ B\ A\ A\ B\ A\ B\ B\ A\ B\ A\ A\ A\ B\ A\ B\ B\ A\ A\ B\ B\ A\ B\ B\ A$

試估算出它的轉移概率矩陣．

題 2： 用 9-2 节的方法（用擲硬币）作出几个变迹，來証实从一个矩陣可以得出許多不同的变迹．

题 3: 用随机数字編成一表，再依据下列规則作出有两态 A 与 B 的一个馬尔可夫鏈:

若		則
現态	随机数字	下一态为
A	0 或 1	A
A	2, 3, …9	B
B	0, 1, 2, 3, 4	A
B	5, 6, 7, 8, 9	B

题 4(續): 求轉移概率矩陣?

9-5. 题 9-4-1 告訴我們怎样从一个系統的行为来定出它的矩陣. 反之，从矩陣我們可以得到系統的行为有什么趋向的信息，虽然我們并不能从而給出系統的特定行为細节. 所以，設有一个科学家而不是原来那个观察者，来考察上述昆虫的轉移概率矩陣:

$$\begin{array}{c|ccc} \downarrow & 岸 & 水 & 石 \\ \hline 岸 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 水 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 石 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array}$$

他就可以从矩陣推出下列結果:若昆虫在水中，它是不会栖息在那里的，因水→水的概率是零，而通常总是要跑到岸上去的，因在水这一列里，水→岸的概率最大. 在岸上的昆虫可能跑到水里去，然后又回到岸上来. 如果昆虫在石子下面，它也可能要跑到水里. 这样昆虫大部分时間显然是要在岸上和水里来回跳动的. 昆虫栖息在石子底下的时間是不多的. 上述用随机数字編出的那个登記表就告訴我們这一性质.

所以，矩陣含有关于任一特定系統可能有的行为的信息.

题 1: 若矩陣石字那一列下最低格是 1 而其余各格是零，你能对昆虫的生活方式得出什么結論?

题 2: 一蒼蝇在室内 A, B, C, D 四处来回飞行，其轉移概率矩陣为:

↓	A	B	C	D
A	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
D	0	0	$\frac{1}{2}$	0

这里 A, B, C, D 四处中有一处是热得发烫的火炉，有一处是捕蝇紙，試問这两件东西在哪两处？

題 3：題 9-4-1 中的登記表与矩陣两者都可以看作是另一方的密碼，問把哪个看作密碼会損失信息？

9-6. 馬尔可夫鏈中的平衡 現在假設同一池沼里有好多这样的昆虫，而每个昆虫的行为都不受别的影响．如果我們离池沼远一点，就漸漸看不到个别的昆虫，而只見三群灰色的东西，一群在岸上，一群在水里，一群在石子底下．現把这三群东西看作是能随着时間改变的三个量．設在某刻这三个量各是 $d_{岸}$, $d_{水}$, $d_{石}$，那末只要考察其中各个昆虫的行为，就可以得出上述三个量在一单位时間后的值 $d'_{岸}$，等等．于是，对那些在水里的昆虫来說，其中的四分之三会跑到岸上，加到 $d_{岸}$ 这个数值上，其中的四分之一会加到 $d_{石}$ 这一数值上．所以，在这一轉移之后，在岸上那群的新值是 $d'_{岸}=\frac{1}{4}d_{岸}+\frac{3}{4}d_{水}+\frac{1}{8}d_{石}$．所以这三群昆虫通常就要依照（对有三个分量的矢量的）变换

$$
\begin{aligned}
d'_{岸} &= \frac{1}{4}d_{岸}+\frac{3}{4}d_{水}+\frac{1}{8}d_{石}\\
d'_{水} &= \frac{3}{4}d_{岸} \qquad\qquad +\frac{3}{4}d_{石}\\
d'_{石} &= \qquad\qquad \frac{1}{4}d_{水}+\frac{1}{8}d_{石}
\end{aligned}
$$

来变．

有一件至关紧要的事必須指出，即由三群昆虫組成的这一系統（如果各群中所含昆虫数目足够大，不致出現抽样上的不規則

性）是确定性的，虽則每一昆虫个体的行为只能依某一概率来确定.

为細致地研究这一过程，假設我們在实驗开始之初把 100 只昆虫赶到石子底下，再来观察以后的情况. 表示这三群昆虫的矢量 ($d_{岸}$, $d_{水}$, $d_{石}$) 具有初值 (0, 0, 100). 至于下一步的值是什么，就要依随机抽样的結果来定了；因为这 100 个昆虫都停留在石子底下不移动也并不是不可能的. 但平均来說(即是說，如果用所有这 100 个昆虫反复試好些次后得出的平均結果)，只有大約 12.5 个会留在石子底下，其余的会跑到岸上(也是12.5)和水中(75). 所以，在第一步之后，三群昆虫的数目会起这样的变化(0, 0, 100)→(12.5, 75, 12.5).

这样就可用 3-6 节的方法逐步得出三群昆虫的平均数. 于是求得下一状态为 (60.9, 18.8, 20.3)，而这(有三个自由度——不是一百)系統的变迹就如图 9-6-1 所示.

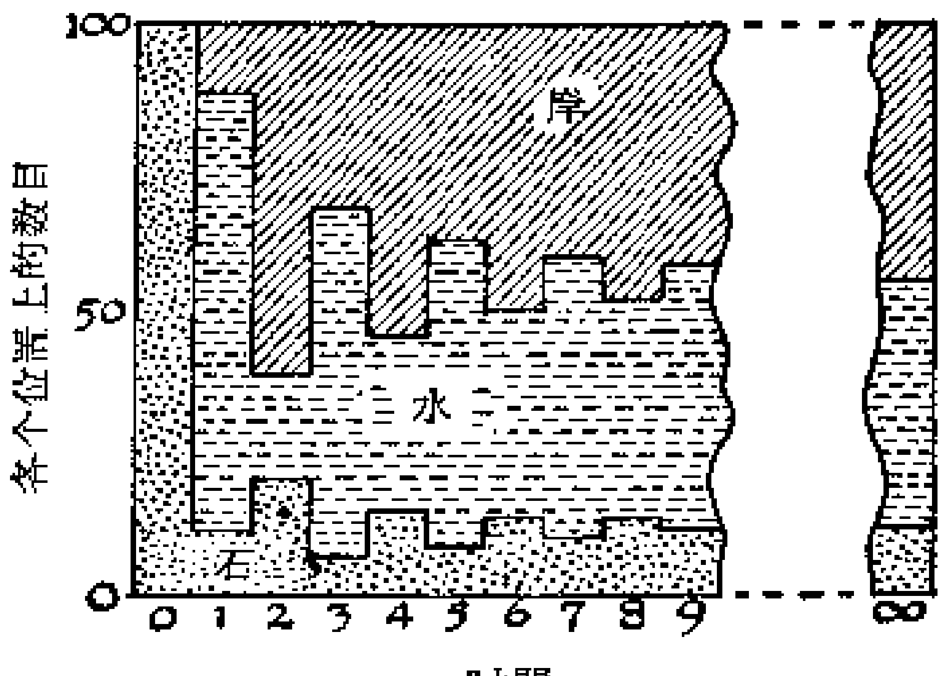


图 9-6-1

我們可以看出，这三群昆虫数目的变动是愈来愈小的，最后变到 (44.9, 42.9, 12.2) 这一状态就趋于平衡，这是系統永远会保持下去的一个状态. 这里所說的“系統”，当然是指表示三群昆虫数的三个变量.

值得注意的是，当系統的状态定了下来，每一群的昆虫数已最

后不变时，每群里昆虫数目虽不变，但各个昆虫都是在不断移动着的，这两件事必须严格区别清楚．因此对同一池沼說，“系統”这一詞可有完全不同的意义(这里所說的“平衡”相当于物理中所說的“稳恒状态”)．

一个馬尔可夫鏈中的平衡值是容易算出来的．在平衡状态下，各个变量的值就不变了，例如，$d'_{岸}$ 将等于 $d_{岸}$．所以第一个方程就变为

$$d_{岸}=\frac{1}{4}d_{岸}+\frac{3}{4}d_{水}+\frac{1}{8}d_{石}$$

或即

$$0=-\frac{3}{4}d_{岸}+\frac{3}{4}d_{水}+\frac{1}{8}d_{石}$$

另外几个方程也一样处理．但这几个方程不是彼此独立的，因在本例中三群昆虫的数目加起来必須等于100；因此有一个方程可略去而代以

$$d_{岸}+d_{水}+d_{石}=100$$

于是所得方程为

$$-\frac{3}{4}d_{岸}+\frac{3}{4}d_{水}+\frac{1}{8}d_{石}=0$$

$$d_{岸}+d_{水}+d_{石}=100$$

$$\frac{3}{4}d_{水}-\frac{7}{8}d_{石}=0$$

这可以按一般方法来解出．就这个例子說，平衡值是(44.9，42.9，12.2)；如9-5节所預計到的，任一个别昆虫是不会在石子下停留很久的．

題1：若把所有昆虫放在岸上，試以这为初态算出各群昆虫的数目．

題2：驗算所求得的平衡值．

題3：一个有六面的骰子，靠近其中一面 x 处暗填重物．把这骰子面 f 朝上放在匣子里彻底搖晃，經过多次試驗，求得它变成面 g 朝上的概率为

$$\begin{array}{c|cccccc} & & & f & & & \\ \downarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ g\quad 3 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 4 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 5 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 6 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{array}$$

問哪一面是 x?(提示：别猜錯了!)

題 4: 把一种化合物 AB 溶化在水里. 在每一小段时間里，每个分子有 1% 的可能分解，而每一被分解后的 A 又有 0.1% 的可能重新結合成分子. 求一个分子的轉移概率矩陣，它所取的两个状态是"分解"和"不分解". (提示：分解了的 B 的数目能不能忽視?)

題 5(續): 求分解百分率的平衡值?

題 6: 写出(i)个别昆虫轉移的和(ii)各群昆虫轉移的变換. 它們之間有什么关系?

題 7: 昆虫的轉移过程中有几个状态? 三群昆虫所成的系統有几个状态?

題 8: 若 D 是表示昆虫群各状态的列矢量，D' 是变了一步后的該矢量，M 是轉移概率矩陣，試証普通矩陣代数中的:

$$D'=MD, \; D''=M^2D, \text{ 及 } D^{(n)}=M^nD$$

(若把矩陣写成轉置形式，就不会有这一簡单而自然的关系. 比較題 2-16-3 与 12-8-4).

9-7. 对前值的依賴关系 9-4 节所讲馬尔可夫鏈的定义中略去了一个重要的条件：轉移概率不应依賴于原象以前所取的状态. 所以，如果昆虫的行为是馬尔可夫鏈式的，則可发現：若它在岸上，則在 75% 的場合下它会跑到水里去，而不管它在处于岸上以前是在岸上、水里或石子下的. 这一事实可用实驗来核証，只要求出在三种情形下的百分率数字，然后看看它們是不是都等于 75%.

下面这个状态登記表里的轉移概率就沒有这种独立性:

$$A\,A\,B\,B\,A\,B\,B\,A\,A\,B\,B\,A\,B\,B\,A\,B\,B\,A\,B\,B\,A\,A$$
$$B\,B\,A\,B\,B\,A\,B\,A\,B\,A$$

直接数一数，可得各个轉移的情况如下:

↓	A	B
A	3	10
B	10	8

就中可以看出 B 之后出現 A 与 B 的次数差不多相等. 如果我們把从 B 变起的 18 个轉移, 按照 B 以前是什么字母, 再重新分类, 便得:

$$\cdots AB\text{ 之后}\begin{cases}A:2\text{ 次}\\B:8\text{ 次}\end{cases}$$

$$\cdots BB\text{ 之后}\begin{cases}A:8\text{ 次}\\B:0\text{ 次}\end{cases}$$

所以, B 之后是什么状态, 显然跟 B 之前是什么状态有密切关系. 于是这一序列就不是馬尔可夫鏈. 这一現象有时可用形象化的說法来表示:說这系統的"記忆力"能追溯到比前一个状态更早的状态.

轉移概率受前此各状态影响, 这是形成語言文字的字母序列所特有的性质. 例如, 試考察在英文里 s 以后出現 t 的概率, 这就跟 s 之前是什么字母大有关系; 如 es 之后出現 t 是很平常的, 但 ds 之后有 t 就很少. 要是字母序列形成馬尔可夫鏈, 那末在两种情形下, s 后出現 t 的频率就該是一样的.

这种依賴关系在語言文字中是很多的, 是語言文字的特征. 这种依賴关系, 最簡单的如剛才所举的那种类型, 直到很长的一連串, 例如, 以"…关于康德的超絕論"为結尾語的书, 以"十八世紀的大学"作为开始第一句的可能性大, 而以"現代跑馬…"开始的可能性就要小得多.

題: 設有状态轉移登記表:

$D\,D\,C\,C\,D\,C\,C\,D\,D\,C\,C\,D\,C\,C\,D\,D\,C\,C\,D\,C\,C\,D\,D\,C\,C\,D\,D\,D\,D\,C\,C$
$D\,D\,D\,D\,C\,C\,D\,D\,D\,C\,C\,D\,C\,C\,D\,C$

試問 $C\to C$, $C\to D$, $D\to C$ 及 $D\to D$ 四种轉移的频数是怎样受其前一状态的影响的?

9-8. **重新編碼成馬尔可夫形式** 若发現一系統的变迹里,

轉移概率以一定方式依賴于每一原象的先前狀态，那末，虽然这一系統幷非馬尔可夫型的，我們却可用一种新的方法把它化成馬尔可夫型的．这一方法初看起来也許不怎么样——无非就是重新規定这一系統，但实际却很重要．

例如，假定所考察的系統是象題 9-7-1 中那样的（上节題中的系統），假定轉移的情况是：不管以前的狀态如何，在两态序列 $\cdots CC$ 之后它总变成 D，在 $\cdots DC$ 之后总变成 C，在 $\cdots CD$ 之后整个說来它也以同样的頻率变成 C 或 D，而对 $\cdots DD$ 也一样．現在我們干脆就用有两个分量的矢量来規定新的狀态，把相連两个狀态中的第一个狀态作为矢量的第一分量，把第二个狀态作为第二分量．于是，若原系統产生出以 $\cdots DC$ 为末尾的变迹，則我們說新系統处于狀态 (D, C)．若原系統再变到狀态 C，从而变迹为 $\cdots DCC$，我們就說新系統变到狀态 (C, C)．于是对新系統說，它的轉移是 $(D, C)\to(C, C)$．这些新狀态便形成馬尔可夫鏈，因它們的概率（如这里所假定的）不依賴于以前的狀态：事实上，这时的轉移概率矩陣是

$\downarrow$	(C, C)	(C, D)	(D, C)	(D, D)
(C, C)	0	0	1	0
(C, D)	1	0	0	0
(D, C)	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
(D, D)	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

[注意：不可能有 $(C, D)\to(C, D)$ 这种轉移，因末尾为 $(-, D)$ 的狀态不能变成以 $(D, -)$ 开头的狀态．在新系統中还有些别的轉移同样不可能出現．]

若在另一系統中，轉移概率要依賴于前 n 步的值，則必須以 n 步前后相連的各值作为一个矢量的分量，而以所得矢量来規定新的狀态．

重新規定一个系統，这种方法看起来可能显得不自然并且沒有什么意义．实际上这是有根本重要性的，因为这样一来，就使我們从一个不是状态确定的系統轉而考察一个状态确定的系統．新系統更容易預測，因为它的“状态”里包含了原系統的过去历史．例如，对原系統說，若已知系統处于状态 C，这只能使我們預測它以后的状态是 C 或 D． 而对第二种形式的系統来說，若知它处于状态 (D, C)，便可肯定預測它的行为，正好象在已知原系統的現在状态和前一状态之后可肯定預測它以后的状态一样．重要的是，这种方法告訴我們：“认識”一个系統的两种方法——从它現在的状态或是从它过去的历史——之間是有严格关系的．对不可能全部观察到的系統的理論(6-21 节)——黑箱理論中，基本上也以同样的方式利用了这一事实． 因此我們又得出这样一个結論，即存在于实际系統中的“記忆”并非該系統的內在性质——这不过是在我們观察能力有限时所假設的一种性质．所以，若說“看来这系統有記忆”，那就等于說“我的观察能力有限还不足以根据一次观察来作可靠的預測，但若让我作一系列的观察，我就可作出可靠的預測”．

9-9． 序列作为矢量　头几章中我們常用矢量，而且到現在为止，所讲矢量都有个数确定的有限个分量． 但一个矢量也可以有无穷多的分量． 只要用的时候小心一点，分量虽无限多也不会出毛病．

这样，一个序列便可看作一个矢量，矢量的第一分量是序列的第一项，直到第 n 个分量是序列的第 n 项．于是，若投五次硬币，把所得結果看成一个整体，便是含 5 个分量的一个矢量(正，反，反，正，反)．在概率論里这种矢量是很平常的，例如多次重复抽样，便得这样的矢量．

如果是样品放回母体的抽样，所得矢量有这样一个小小的特点：每个分量的值都是从同一集合中取的，而对更一般的矢量来說，如 3-5 节中所讲的矢量，每一分量的值可取自不同的集合．

9-10． 序列集合中的約束　序列集合也象矢量集合(7-11

节)一样，可以出現約束，即各分量的取値范圍并沒有达到它們彼此独立时可能有的取值范圍. 若序列的长度有限，如上节所讲投五次硬币的結果，就可完全照着7-11节那样定出約束并如法处理. 但若序列是无限长的(而一般序列常是这样的，它到什么地方中断是不定的而且也是无关紧要的)，我們就得用些别的方法，但不改变那些本质的东西.

要想知道用什么方法，只要先想一下一个无穷长(分量无穷多)的矢量是怎样規定的. 很明显，这样的一个矢量，无論就它的分量或所取的值来說，都不能象3-5节中的矢量那样是完全任意的，否則的話，要把它記下来就得花費无限长的时間和无限多的紙. 象这样无限长的序列通常都是用某一过程来定出的. 先是給出第一个分量的值，然后对之累次施行一特定过程(变换)以得出后面的各分量(好似3-9节中的"积分法").

現在可以推出，要这样的一批矢量中沒有約束，需要什么条件. 假設我們作出一批沒有約束的矢量，而且按一个分量接着一个分量地来做. 据7-12节，第一分量必須取得整个范圍內的值；于是这一范圍內的每一值必得与第二个分量的每一可能值結合；头两个分量的每一对值必須和第三个分量的每一可能值結合；这样一直下去. 做法是：每增添一个分量，它必須有一切可能的值.

現在可以看出，沒有約束的一組矢量，就相当于这样一个馬尔可夫鏈，它在每一状态处的所有轉移都是等可能的(当概率变成实际頻率，就得出許多鏈来，这就給出了一組序列). 所以，若每一分量可能有三个状态，則无約束序列将为下列矩陣所产生的一个集合

↓	A	B	C
A	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

题 1：指数級数(指数函数的級数展式)給定一无限长矢量，其分量为

$$\left(1, x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{2.3}, \frac{x^4}{2.3.4}, \cdots\right)$$

对靠左边的每个分量施行什么变换，能产生这一級数？(提示：把各分量命名为 t_1, t_2…等等，則 t_i' 与 t_{i+1} 相同)

题 2：用质料均匀的骰子得出的序列会有約束嗎？

题 3(續)：题 9-4-3 的級数有約束嗎？

熵

9-11. 从整个 7-5 节与第八章，可以看出，所傳輸的信息量不能超过可能有的变异度．我們还知道，約束会減少可能有的变异度．在上节我們剛学过，在一个有变异度的集合裡(变异度的源)，有如馬尔可夫鏈，当它的所有轉移都是等可能时，約束是零．由此可見，这一条件(約束为零)是信息源——如果它的行为有如馬尔可夫鏈的話——能傳出最大的信息量(在給定时間內)的条件．

申农定出一个量，用来表示馬尔可夫鏈在每一步轉移时所呈現的变异度——熵，这个量在有关持續傳輸信息的許多問題中，已表明具有根本的重要意义．这个量是照底下这样引入的．

若一集合有变异度，且若根据某一确定的抽样手續从这集合中抽取一件样品，那末各种不同的抽样結果就有不同的概率与之相应．例如，若交通信号灯的变异度是四，即有以下四种結合的状态：

1．紅
2．綠黃
3．綠
4．黃

且若每种信号呈現的时間各为 25，5，25，与 5 秒．現在如果有一輛車子在某一任意时刻突然到达这个路口，那末駕駛員可能見到上述各交通信号的频率将分別是 42%，8%，42%，8%．至于它們的概率則各是 0.42，0.08，0.42 与 0.08．于是“綠灯”这一状

态(如果以上面所讲的那种方法来抽样)有概率0.42，而其他各个状态也同样有相应概率.

倒过来說，任何一組概率——即相加之和等于1的任何一組正的分数——都可认为是有某一組具变异度的状态与之相应. 申农的計算便是从概率出发的. 若已知一組概率为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，申农由此計算

$$-p_1\log p_1-p_2\log p_2-\cdots-p_n\log p_n$$

并把这个量称做那組概率的熵，用 H 来記. 这样，若取以10为底的对数，則与交通信号灯相应的那組概率的熵是

$$-0.42\log_{10}0.42-0.08\log_{10}0.08-0.42\log_{10}0.42-0.08\log_{10}0.08$$

这个量的值是0.492.(因 $\log_{10}0.42=\bar{1}.6232=-1.0000+0.6232=-0.3768$；故第一項是 $(-0.42)(-0.3768)=+0.158$，同样可算出其他的几項). 若以2为底取对数（見7–7节）則所得結果为1.63比特.

本书中所用的"熵"这个詞完全是照申农的意义来用的，其他含义更广的概念則用"变异度"或某种别的方式来表达.

題1：有某十字路口，在我80次到达該路口时，有14次不通行. 求相应一組概率的熵?

題2：从一副洗过的紙牌里抽出一張牌来. 抽出的結果按下列三种不同的情况来区分：

E_1：抽梅花 K，

E_2：抽任何一張黑桃，

E_3：抽任何别的牌，

对这三种情况的变异度来說，熵是多少?

題3：投一次骰子(质料均匀的)，其变异度的熵是多少?

題4：若接連投两次骰子，对其所得結果(保持先后次序)的一組概率来說，变异度是多少?

題5(續)：接連投 n 次的概率是多少?

*題6：求 $\lim\limits_{p\to0}(-p\log p)=?$

9–12. 上面这样算得的熵有好些重要的性质. 第一，对給定个数 n 的 n 个概率来說，当各概率都相等时，熵 H 的值最大. 这

时熵等于 $\log n$，正好就是 7-7 节所定义的表示变异度的量.（在 9-10 节中指出过，要約束最小——也就是要变异度最大，必須每一列中的概率都相等）. 第二，从不同的各組概率算得的不同 H 值，加上适当的条件，可結合起来，給出一个平均熵值.

我們可用这样結合起来的平均熵值，来得出相应于馬尔可夫鏈的熵. 每一列（如写成轉置形式則为每一行）都有相加等于 1 的一組概率. 因此可从每一列算出一熵值. 申农把（馬尔可夫鏈的一步轉移的）熵定义为每列熵值的带权平均值，其中相应于各列的权，是相应于該列的状态在轉移序列趋于平衡时（見 9-6 节）的相对頻数. 例如，9-6 节中的各轉移概率，若再添上相应的熵与平衡比，則得下表：

↓	岸	水	石
岸	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
水	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
石	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
熵：	0.811	0.811	1.061
平衡比：	0.449	0.429	0.122

于是得平均熵值（轉移序列中每一步）为

$$0.449\times0.811+0.429\times0.811+0.122\times1.061=0.842 \text{ 比特}$$

每次投硬币后看朝上的是正面还是反面，所得結果就形成一序列，其每投一次的熵是 1 比特. 由此可見，随着时間的推移，9-6 节中所讲某一昆虫栖息位置所成的序列，就不象投硬币所成的序列那样变得厉害，因 0.842 小于 1.00. 这样，用申农所定出的这个量，我們就可以比較不同程度的变异情况.

取平均熵值之所以要带权，是因为我們先是求出三个熵值：0.811，0.811，1.601 的；然后要从这三个熵值里得出一个平均熵值来. 如果这三个熵值都相等，我們自然就可取它們的公共值作

为平均值，只可惜它們并不相等．但是，我們可以这样来想：当系統达到平衡状态时，45% 的昆虫在(岸)上(处于岸的状态)，43% 在(水)中，12% 在(石)子下．当这群昆虫按上述百分比在三种状态之間来回轉移时，我們可換用一种等价的方法来說明这种情况，即：每个昆虫把它 45% 的时間消磨在(岸)上，43% 的时間在(水)上，12% 的时間在(石)下．换言之，在它的所有轉移中，有 45% 是从(岸)开始的，43% 是从(水)开始的，12% 是从(石)子下面开始的．所以它有 45% 的轉移是具有熵——或变异度——0.811 的，还有 43% 的轉移也具有熵 0.811，而另外的 12% 有熵 1.061，因此熵为 0.811 的那种轉移就比較經常出現(因而“0.811”这个値所占的份量——“权”——要重一些)，而熵为 1.061 的那种轉移就比較少見(因此“1.061”这个值的权就应該輕些)．因此所取的平均值应該是带权的：88% 傾向于 0.811，而 12% 傾向于 1.061 即：

$$\text{带权平均值}=\frac{45\times 0.811+43\times 0.811+12\times 1.061}{45+43+12}$$

算出来的結果，就是我們前面所用的熵．

題 1：試說明何以在轉硬币得出正反面的序列中，每轉一次的熵是 1 比特．（提示：作出轉移概率矩陣）

題 2(續)：若硬币的一面比較重些，对熵有什么影响？（提示：試算改变概率对熵所起的影响）

9-13. 在进一步讲这一問題以前，我們需要說明几件事，即申农所定出的熵这个量以及应用熵的各个重要定理，都是在某些假定下来說的．这些假定或条件在电話通訊工程中一般是成立的，但在生物学的研究对象以及在本书所討論的問題中，这些条件就并不那样常常成立．因此熵这个量和有关熵的定理，用起来要加小心．申农对这个量和有关定理的主要假定是：

(1) 若将其应用于一組概率，则表示各个概率的分数之和須为 1；从一組不完整的概率是不能計算熵的．

(2) 若将其应用于一个信息源，而这信息源有好几組概率，則轉移概率矩陣必須是馬尔可夫式的；换言之，每一步轉移的概率只

应依赖于該系統当时所处的状态(原象)，而不依赖于以前的一些状态(9-7节)．所以，在必要时，应該先把信息源的状态重新規定，如在9-8节中那样，使其变为馬尔可夫式的．

(3) 表中几个列的几个熵值，是用終极平衡状态中的比数作为权来求平均值的(9-12节)．由此可見：我們的理論中假定所說的系統，不管它怎么开始，总是可以長期轉移下去，使各个状态能达到平衡密度．

所以要把申农的結果应用到生物学問題上的时候，首先应細細核驗一下是否符合应用的条件．

还有，对于那些仅仅只想在口头上随便談論申农所定的和統計力学中的两个熵的人，我們也要提出同样的劝告．用这些概念来討論問題須要深加小心，因为只要把条件或假定稍稍变一点，就能使一个严格准确的定理变成荒唐可笑的空話．在这些領域內思考問題正好比在充滿陷井的密林中走路．最懂得这些問題的人，常常是談起这些問題来时最小心的人．

題1：从下列轉移概率矩陣，用心算法算出它的熵來

↓	A	B	C
A	0.2	0	0.3
B	0.7	1.0	0.3
C	0.1	0	0.4

[提示：这不是要你显示心算能力，而是要你从默默观察中悟出其中的簡单关系来．首先，在主对角綫上的1表示什么意思(題9-5-1)？从这你能否知道这系統的最后平衡状态是什么？A列与C列的两个熵值能起什么作用？那末B列的熵是什么(題9-11-6)？]

題2(續)：“当系統处于状态A时，它的下一状态是什么这件事是不定的或是有变异度的，因而熵不能等于零”．請解釋何以有这一矛盾．

9-14．讀者有时会解不开这样一个小小的疑問：对一組概率p_1，p_2，…来說，申农所定义的“熵”这个量是$p_i \log p_i$等諸項之和再乘以-1，而維納在“控制論”一书中所定义的“信息量”也是$p_i \log p_i$等諸項之和但不变号(乘以$+1$)．(讀者应注意，$p \log p$必然是負的，故乘以“-1”就使它变成正数)．

但对这一点我們用不着多疑問，因为两者的基本思想是一致的．两者都把"信息"看作是"一种解除不确定性"的量，两者都用所解除的不确定性的程度来表示信息量的多少．还有，两者所关心的基本上都是在接到消息这一事件之后，信息量的增益数或增加数，而在获得信息之前或之后存在的信息絕对数量是次要的．

現在可以明白，当概率分布得相当匀，有如图 9-14-1 的 A 中所示那样时，不确定的程度比概率分布密集得象 B 中时来得大．所以，如果一个人接到消息之后，使得他对所要发生事件的估計，从分布状态 A 改变成分布状态 B，那末这一消息就会有正的信息量．現在若对 A 取 $\sum p\log p$($\sum$ 表示总和)比对 B 取 $\sum p\log p$ 的値还要負；卽两者都是負数，但相应于 A 的那个負数絕对値更大些．例如，比方說对 A 的这个和数可能是 -20 而对 B 的和数可能是 -3．那末，如果用 $\sum p\log p$ 乘 $+1$ 来表示相应于两种分布(卽两組概率)的信息量，那末照一般算法：

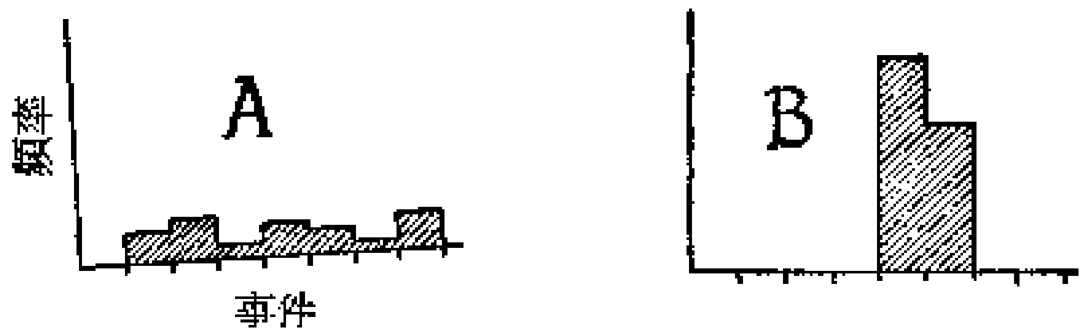


图 9-14-1

(某一量)的增益＝最后的値减去原有的値

所以，增加的信息量是

$$(-3)-(-20)$$

得出 $+17$，一个正数，这便是我們所需要的値，因此，从这个观点(卽維納的观点)讲，$\sum p\log p$ 应乘以 $+1$ (卽保持原状)，我們就能算得信息的增益量．

但申农在他书中所討論的，一直都是所得消息肯定已知道的一种特殊情形．因此所有的概率除了单独一个等于 1 外其余都等于零．对这样的一組概率說，$\sum p\log p$ 正好是零，于是信息的增益量是

$$0-(\text{原有量})$$

换言之,消息所含的信息量(等于信息的增益量),等于对原有一組概率分布算出的 $\sum p \log p$ 再乘以負 1，这就給出了申农的熵这个量.

所以这两个量的差別，比起图 9-14-2 中从 P 往右到 Q 点計算距离的两种方法来,差别并不見得更大.

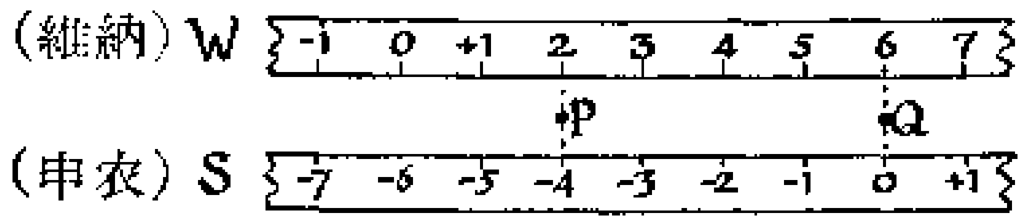


图 9-14-2

这里 P 和 Q 可以看作是表示两种不确定程度的两点,其中确定程度較大的一点在右边,而在一个人接到消息之后,他的不确定程度就从 P 点移到 Q 点.

从 P 到 Q 的距离可用两种显然是等价的方法来量. 維納的量法是把尺子放在 P 与 Q 上(图中用 W 来表示);然后由

$$(Q \text{ 的讀数}) 减去 (P \text{ 的讀数})$$

来得出从 P 往右到 Q 的距离. 申农的量法(图中用 S 表示)是把尺上的零点对准 Q，然后从

$$負(P \text{ 的讀数})$$

来得出由 P 往右到 Q 的距离. 这两种量法显然沒有实质的区別.

9-15. 通道容量 馬尔可夫鏈的"熵",即使在单位决定(用对数)之后，也必須区别两种不同的計算方法. 9-12 节中从轉移概率算出的数字，是鏈中往下单独一步轉移的熵值或变异度值. 因此，若轉一个匀质硬币已得出一串結果：反反正正反正正正正，那末对下一次結果的不确定性是 1 比特，再往后硬币是哪一面朝上的不确定性也是 1 比特；等等. 所以从整个鏈来說的不确定性或熵,是每一步等于 1 比特.

于是两步就应有 2 比特的不确定性或变异度，事实上也确是这样;因为往下的两步可以是正正,正反,反正,或反反四种情形中的任何一种，每种情形的概率各是 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ 及 $\frac{1}{4}$，由此算得

H=2 比特. 簡单一点可以說一定长度的馬尔可夫鏈的熵是正比于其长度的(假定該鏈最后总是归結于平衡状态的).

如果我們从时間上来考察一个实际物理过程产生鏈的快慢,就可以得到鏈的另一种量法. 在以前我們并沒有考虑这方面的問題,只用鏈自身的步数来作为度量快慢的尺寸. 現在要引入新的度量其实也很簡单,只需要給出新旧度量之間的一个簡单比例关系就行了. 例如(象 9-12 节中那样)若昆虫轉移一步的"单位时間"是 20 秒,則由于每 20 秒产生 0.84 比特,60 秒便将产生 (60/20)0.84 比特;因此每一昆虫在每分钟内产生的位置变异度是 2.53 比特.

用这样一种变化率来度量通道容量是最自然不过的,因这不过是輸入处在每一刻迫使通道取得一种状态,并将該状态傳給接收器的一种东西. 通道傳輸信息的速率,既要依賴于一步接着一步出現轉移的快慢,又要取决于每一步里有多少变异度.

应該注意的是,在控制論中,所謂一个"通道"完全是用两点間的某种行为关系来定义的;如果两点間有行为关系,我們就說它們之間有通道,而不管我們能不能看見两者之間有物质的連系(例如,可看題 4-15-2 及 6-7-1). 由于这一事实,所以控制論学者看到的通道,跟熟悉他种专业的科学家所看到的,可能极不相同. 在簡单的情形下通道問題是最明显不过的. 誰也不会否认磁鉄与磁鉄之間有某种作用連系,尽管直到今日还沒有人作出过实驗,能显示介于磁鉄間的任何結构.

有时通道要走不平常的路徑. 例如,当大脑发出"命令"給一器官之后,要求获得所发生情况的信息,而通常总有从器官傳到大脑的知觉神經送去"反映情况"的信息. 所以,如反映声带情况的信息可由声带到大脑的知覺神經来傳輸. 但是也可以不借助于脖子中的神經,而用空气中的声波,經过耳朵,把声带和大脑沟通起来. 对解剖学家来說,这并不是通道;对通信工程师来說;这确是通道. 这里,我們只要认識到两者从他們本身科学范圍内来讲都是对的.

这一原理还有更复杂的应用．假如我們問某人 287 乘 419 是不是 118213；他很可能回答說“我不能心算，給我紙和笔”．拿数 287 与 419 再添上“乘法”运算三者作为参数，他就会产生一种过程(照 4-5 节的說法是一种暂态过程)，定出一系列脉冲，通过手臂中的神經，在紙上写出一系列符号，这些符号又影响他的网膜而一直傳到大脑，在大脑中就和“118213”的迹象(不管它是什么)起作用；于是他就会給出最后的答案．这里必須指出的是，从大脑，經过运动皮质，手臂，笔，符号，光綫，网膜，視覚皮质再返回大脑的这

能取(+)或(−)二值，我們就要間需要多少分量才能給出四种不同的信号．很明显，有两个分量就够了：于是把信号重新加以适当的規定(編碼)之后，如規定

++＝停車

−−＝通行且可左轉弯

+−＝通行

−+＝准备停車或开車

那末用只有二分量的矢量就可給出同样多不同的信号．分量数可以減少而不致降低变异度这一事实，就可說成是：第一組矢量有多余度，这里是多余一(盞)灯．

这一約束显然可加以利用．因此，如果装电灯很费錢，那末采用新的交通信号之后，装置交通信号的費用就可減到原来的三分之二．

同样这几盞灯，如果用来产生另一組不同的矢量，就可有完全不同的多余度．假如这些灯用来报时而不用来控制交通，使它按时循环出現四种状态(照上述編号)：

$$\cdots 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

它們給出的序列(看作矢量，如 9–9 节所說)，只有下面四种矢量：

(i) (1, 2, 3, 4, 1, 2, …)

(ii) (2, 3, 4, 1, 2, 3, …)

(iii) (3, 4, 1, 2, 3, 4, …)

(iv) (4, 1, 2, 3, 4, 1, …)

如果每一步是独立的，象每次擲四面体骰子的結果那样，而且矢量有 n 个分量，那末变异度将是 4^n；而事实上只有 4．为充分說明这一事实，只要注意：只用一个分量也可得到同样多的变异度：

(i) (1)

(ii) (2)

(iii) (3)

(iv) (4)

而把第一个分量以后的所有分量都去掉了；因此后面的所有分量

都是多余的.

所以,若每一步之后出现的下一步值并不是完全独立的,所得出的序列就有多余度.(比較9–10节).若序列是一馬尔可夫鏈,則从它的熵值小于极大值这一事实,就可显出这馬尔可夫鏈有多余度.

同样一組交通信号灯,可以給出两組完全不同的矢量,这一事实又一次說明:把这些概念用到某一对象上去的时候,該多加小心,因对象本身常可提供許多不同的各組矢量,需要分别对待.所以,象"交通信号灯有沒有多余度"这类問題是提得不合适的;因問題沒有提及所考虑的是哪一組矢量;而对不同的各組矢量来說,答案可能大为不同.

在写給生物科学工作者的这样一本书里,提出这一点是特别感到需要的,因在生物学問題上,要明确規定哪一組矢量往往頗为困难,而且也許要用一些任意的人为規定才能办到(比較6–14节).因此,常常不免想图省事,用感性的和模糊的概念来认識所考察的一組对象,而沒有清楚准确的认識.讀者常常可以发現,两种爭論之間的有些糾纏不清的問題,在更准确地規定所討論的一組对象之后就可能得到解决;因为存在的問題常常在于:两种爭論的对象,实际上是針对着两組不同的行为,虽則它們都是跟同一对象或机体密切相关的.

題 1: 在一鉴别細菌发酵醣类的能力表里,有26种細菌能自14种醣产生"酸"、"酸和气"或"不起作用".因此每种菌的相应于有14个分量的矢量,其中每一分量能自三个值中取一值.問这一組矢量(細菌)有沒有約束(多余度)?这矢量的分量可以精簡到几个?

題 2: 若一馬尔可夫鏈沒有多余度,它的矩陣里有什么特别的地方,使你一看就知道?

9–17. 現在我們可以来讲一个定理,这可能是申农所提出的各定理中最基本的一个.假定我們要傳輸一个每步含 H 比特的消息,比方說我們要报导水池里一个昆虫移动的情况.这时的 H 是每步0.84比特(見9–12节),或者,从序列…石水岸水岸岸岸水石石石水岸水石水…来想,照电报发报員的說法,每字含0.84比

特．为确定起見，假設从一步变到下一步需要經过 20 秒．又因这些事件的时变率已給定，我們也可把 H 說成是每分钟 2.53 比特．这时申农的定理告訴我們說：具有这一容量的任何通道都可用来傳輸信息，而容量比这小的任何通道都不能傳輸．定理又告訴我們說：总有那么一种編碼方法，使我們能这样来利用通道．

高速通道能比低速通道傳輸更多的信息，这一点也許是够明显的；这个定理之所以重要，第一是因为它很普遍（它并不专門指定通道是什么机器，所以这定理对电报、神經纤維、語言交談都同样适用），第二是它給出严格的数量关系．因此，比方說水池子在群山环抱之中，我們就会想到能不能用烽火来报道昆虫移动的情况．假定我們能在每四分之一分钟内发出可清楚辨別停熄的一股烽烟，但不能再快了．这时每个信号的熵是 1 比特，因此通道的容量（傳輸能力）是每分钟 4 比特．因 4 大于 2.53，所以放烽烟这一办法通道能够用来傳輸有关昆虫移动情况的信息，并且可以找出一种編碼方法，用一陣陣烽烟来代表昆虫的位置，以傳輸信息．

申农本人造出了一个例子，可以很好地說明这一数量規律的准确意义．假定有一信息源，能以相对頻率 4，2，1，1 分別产生 A，B，C，D 四个字母，而且产生出来的字母不依賴于前面已經产生出来的．假定 $\cdots BAABDAAAABCABAADA\cdots$ 是所得序列中的典型的一段．在平衡状态下，A，B，C，D 的相对頻率将各是 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{8}$，而每一步（每个字母）的熵是 $1\frac{3}{4}$．

今若有一通道能在每步产生四个状态中的任何一个状态而无約束，则該通道每步的容量是 2 比特．申农的定理告訴我們說：必定存在一种編碼方法，能使上述通道（每步容量为 2 比特的）傳輸这样的一个序列$\left(\text{每步的熵为 } 1\frac{3}{4}\right)$，因而长的消息（序列），傳輸的步数可以少一些，使消息中的步数与傳輸步数之比是 2 比 $1\frac{3}{4}$ 或即 8 比 7．申农設計出能作这种傳送的編碼方法如下：先把消息照下法編碼

$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \downarrow & 0 & 10 & 110 & 111 \end{array}$$

于是前述消息就变为

$$\begin{array}{c} B\ .\ A\ A\ B\ .\ D\ .\ .\ A\ A\ A\ A\ B\ .\ C\ .\ .\ A\ B\ .\ A\ A\ D\ .\ .\ A \\ \downarrow\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

現在把底下的一行分成一对对的数字，再把它重新編碼成一組新的字母

$$\begin{array}{c|cccc} & 00 & 01 & 10 & 11 \\ \downarrow & E & F & G & H \end{array}$$

这些暗碼就把"从 A 到 D"表示的任何消息化成"从 E 到 H"的，而且也能倒过来化，不致化含糊．这里面值得注意的是：若取原来的八个字母組成一个典型組（每个字母具有典型頻率），那末它們可以用七个新的字母来傳輸：

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & A & A & A & A & B & . & B & . & C & . & . & D & . & . \\ \downarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & . & E & . & E & . & G & . & G & . & H & . & F & . & H \end{array}$$

以此确实証明原信息可加以压縮精簡，而这一精簡我們根据原消息的熵已作了数量上的預測！

題 1: 証明这种編碼方法使傳輸的和接收到的消息之間建立了一一对应（除第一个字母可能含两义外）．

題 2: 书刊上英文字每字的熵約为 10 比特．我們每分鈡約能讀 200 字．算出視覚神經通道容量的下界．

題 3: 鋼琴家每个手指能按三个鍵之中的任何一鍵，每分鈡能这样按 300 次，求上肢的神經通道的容量以什么数为下界．

題 4: 把銀行賬簿看作隨机数碼字(从 0 到 9)的无穷序列現要把它編碼儲存到 Braille 电子計算机上去．若每小时能儲存 10,000 个数碼字且施用最优編碼法，問 Braille 中的印出速度应是多少？（提示：Braille 中的"字母"共有 64 个記号）

9-18． 再举一个例子来說明申农的方法对于掌握通信工作中的实际要点，有多么惊人的独到力量．假定一系統有状态 a, b, c, d，其轉移概率为

↓	a	b	c	d
a	0	0	0.3	0.3
b	0.6	0.6	0	0
c	0.4	0.4	0	0
d	0	0	0.7	0.7

便可有一典型序列

…b b b c a b c a b b c d d a c d a b c a c d d d d d d a b b…

其平衡概率各为 6/35, 9/35, 6/35, 14/35. 由此立即可求出每个字母的熵是 0.92. 現在假定 a 与 d 的差别分不出来了，即有这样的一种編碼：

$$\downarrow\quad\begin{matrix} a & b & c & d \\ X & b & c & X \end{matrix}$$

这样总会损失一些信息吧? 好，让我們来看看究竟怎么样. 变换后現在只有三种状态 X, b, c, 这里 X 表示"或是 a, 或是 d". 这样上面这一序列的开头就成为这样一个消息…b b b c X b c X b b c X X X c…, 这里的轉移概率是

↓	X	b	c
X	0.70	0	1
b	0.18	0.6	0
c	0.12	0.4	0

(这里 $c \to X$ 的概率必然是 1, 因 c 总是变成 a 或 d 的; 从 a 起的和从 d 起的轉移概率，需要以处于 a 或处于 b 的平衡概率为权来乘). 这些新状态的平衡概率是 X, 20/35; b, 6/35; c, 6/35, 它們的熵各是 H_x, 1.173; H_b, 0.971; H_c, 0. 因此，新序列的熵是每字 0.92 比特——完全跟以前一样!

这一事实无可爭辯地說明：虽然 a 和 d 这些状态都混成了 X 了，但并沒有丧失任何信息. 所以，这一事实告訴我們：总有那么一种办法，可以把三个字母的消息变回到原来四个字母的消息，找出哪些个 X 是 a, 哪些个 X 是 d. 进一步仔細考察的結果，可以

发現这的确能办得到，輝煌地証实了那个頗为惊人的預測.

題：用什么办法把

bbbcXbcXbbcXXXcXXbcXcXXXXXXXbb

变回到原来的形式?

噪　　声

9-19. 加到变換器上去的整个輸入，也許能分成两个或更多个分量，而在某些情形下，我們也可能想要个别地考察这些分量. 如題 8-17-3 就是这样的情形，那里有两个消息同时通过一个变換器，而我們要在輸出处把它們分别恢复原形. 但有时不可能从輸出的結果把两个輸入都还原. 如果我們所关心的只是輸入中的一个分量，只以它作为信息(变异度)的来源，而把别一分量仅仅看作是不可避免的討厌的东西，那末我們普通就把这种情况說成是收到“掺杂噪声的一个消息”.

必須指出的是，噪声和任何他种形式的变异度(信息)并沒有本质的区别. 只有指定了某一受信人之后，才能指出哪一种信息是他所需要的，才能区别哪个是信息，哪个是噪声. 例如，若在电綫上通过的有某两人的电話交談，同时又带有因阴极放射作用不規則而引起的效应. 对于想听到交談內容的双方来說，阴极放射作用的变化是一种“噪声”；但对于一个通訊工程师来說，如果他要准确测量阴极放射作用的变化情形，則傳递談話的电流变化是一种“噪声”了. 因此，“噪声”純粹是相对于某一指定受信者来說的概念，他必須說出哪种信息是他想避免的，这才可以分出哪个是“噪声”.

这一点是值得强調指出来的，因为在电子系統中，分子和电子的热舞(布朗运动)，就是一种最常有的不受欢迎的信息(变异度)来源，电子学工程师已經习惯于把“噪声”这一字眼无条件地用来表示这一特殊信息源. 在他們的专业范圍內，也許他們会继續按这个意义来使用这一字眼，但其他科学部門的工作者都不必跟着学. 特别是在生理学上，“噪声”很少是专指这特种信息源的；比較通常的情形是：一个系統里的“噪声”，常是由于其不能跟另一大范

圍的系統完全隔絕而引起来的.

如果只要把輸出譯出来，就能把两个(或更多个)消息同时完全譯出来，那末噪声概念也就沒有多大用处. 它之所以需要，主要是在两个消息(一个是需要的，一个是不需要的)彼此互起抵消作用而使譯碼不能完全还源的时候. 为看出有这样情形，我們再回到基本过程. 过程的不可逆性应理解为变异度在过程中有所減少(見 8-6 节)，从而輸入处的不同元素在輸出处变成了同一个元素. 我們来看輸入是含两分量的矢量这种情形:

第一分量能取值 A, B 或 C

第二分量能取值 E, F 或 G

設輸出的是能取 1, 2, …, 9 这些值的一个变量，編碼的方式是

$$\downarrow \begin{array}{ccccccccc} AE & AF & AG & BE & BF & BG & CE & CF & CG \\ 6 & 4 & 2 & 2 & 9 & 1 & 3 & 7 & 5 \end{array}$$

今若輸入处的消息是序列 $B\ A\ C\ B\ A\ C\ A\ A\ B\ B$，而"噪声"同时給出序列 $G\ F\ F\ E\ E\ E\ G\ F\ G\ E$，于是輸出是

$$1,\ 4,\ 7,\ 2,\ 6,\ 3,\ 2,\ 4,\ 1,\ 2$$

譯出来的原碼，即第一分量，只能是近似的

$$B,\ A,\ C,\ \overline{A \text{ 或 } B},\ A,\ C,\ \overline{A \text{ 或 } B},\ \ A,\ \ B,\ \ \overline{A \text{ 或 } B}.$$

因此在这輸入处的原消息被另一輸入的"噪声"所"搞坏"了.

在这个例子中，若将第二个輸入保持在 E(比方說)处，作为抑制噪声的一种办法，那末这通道是完全能准确傳輸消息的. 因那时的編碼法是一对一的

$$\downarrow \begin{array}{ccc} A & B & C \\ 6 & 2 & 3 \end{array}$$

而且是可逆的.

我們看到，两个輸入之所以有干扰作用，是因为輸出处可用的九个状态只用了八个. 由于有这一永远去不掉的限制，通道的容量就減小了.

題 1: 若将第二个輸入[1]保持在(i) F, (ii) G，求从第一个輸入到輸出的編碼法.

[1] 原文輸出，似誤——譯者注.

题2: 一个有 P, Q, R 三态的系統，要用来傳輸两个輸入 α 及 β 处的变化情况，其中每个輸入都能取两个状态．輸入的状态和系統的状态都是逐步变的．是否可能做到无噪声的傳輸？

9-20. 畸变 应該指出，使消息失真并不一定和噪声的影响是同一回事．"若所傳輸的某一特定信号总使接收处产生同一信号，卽，若接收到的信号是所发信号的一确定函数，那末这一效应可以叫做畸变．若这函数有反函数——所发两个不同的信号不会接收成同一个信号——那末至少从原則上来說，只要对所接受的信号作反函数运算，就可矯正畸变"（申农）．

题1: 直立物体在网膜内是倒着的，这一变化是一种畸变还是一种摻变（摻介原消息以外的东西——噪声）？

题2: 使肌肉紧張的結果就产生一股稳恒的脉冲，其頻率并不正比于紧張程度．問这不成正比的性质是一种畸变还是一种摻变？

题3(續上): 若将傳輸脉冲的神經薰以足够强烈的酒精蒸汽，神經就不再傳輸任何表示紧張状态的脉冲．問这是畸变还是摻变？

9-21. 模棱度 据我所知，对于基本情形来說，还沒有弄出一个通用的量，来表示信息摻变的程度．但对通道是不断傳輸着信息的这一情形来說，申农却已給出了适当的量．

先假設原信号及收到的信号都形成 9-4 节中所定义的那种馬尔可夫鏈．这时可把消息的譯文写成这样的一种形式，使之能显出矢量（傳輸信号，接收信号）的一切可能有的結合形式出現的各种頻率（或概率）．比方說，就举申农的一个例子来說明，假定傳輸的是些 0 和 1，而所接收信号的概率（这里是相对頻率）是：

发送符号	0	0	1	1
接收符号	0	1	0	1
概　率	0.495	0.005	0.005	0.495

所傳輸的每千个符号中，在接收处有十个是錯的，誤差率为百分之一．

乍看起来，也許以为这"百分之一的錯誤"就是表达所損失信息的量，但这种說法会引出毫无意义的結果来．例如，若在傳輸同一消息时綫路确实被截断了，接收者只能依靠投硬币，从它朝上一

面的正或反来获得“消息”. 这时他所得到的信号，大約会有一半是对的，但事实上任何信息也沒有傳輸过来. 申农令人信服地說明，表示信息摻变程度的自然的量是模棱度，其算法如下：

先在一切可能有的类上算出熵来：

$$-0.495\log 0.495-0.005\log 0.005$$
$$-0.005\log 0.005-0.495\log 0.495$$

把这叫做 H_1；它的値是每个符号 1.081 比特. 然后把所接收的信号和它們的概率写在一起，得下表：

所接收符号	0	1
概　　率	0.5	0.5

求出它的熵

$$-0.5\log 0.5-0.5\log 0.5$$

把这叫做 H_2. 它的値是每符号 1.000 比特. 于是得模棱度为 $H_1-H_2=0.081$ 比特.

如果連噪声的影响算在里头，那末信息的实际傳輸速度(量)是信息源的熵减去模棱度. 这里信息源的熵是每符号 1.000 比特，因

发送符号	0	1
概　　率	0.5	0.5

故原給的信息量是每符号 1.000 比特. 这信息量中有 0.919 通过通道傳給了接收者，而 0.081 被噪声淹沒了.

題 1： 9-19 节的傳輸中，若从长远看字母的所有九种組合都以相等的概率出現，求它的模棱度？

題 2(續上)： 若第一輸入只用符号 B 与 C，因而只有 BE，BF，BG，CE，CF，CG 以相等频率出現，問这对模棱度有什么影响？

題 3： 当 p 很小或很接近于 1 时，下列法則对于計算 $-p\log_a p$ 很有用，請給予証明：

(i) 若 $p=xy$，　　$-p\log_a p=-xy(\log_a x+\log_a y)$

(ii) 若 $p=10^{-z}$，　　$-p\log_a p=\dfrac{z\times 10^{-z}}{\log_{10} a}$

(iii) 若 p 很接近于 1，令 $1-p=q$，則

$$-p\log_a p=\frac{1}{\log_e a}\left(q-\frac{q^2}{2}\cdots\right)$$

題 4： 設 p 为 0.00025，求 $-p\log_2 p$. [提示：把 p 写成 2.5×10^{-4} 并应用(i)]

題 5: 計算血球数时,驗血人員用显微鏡分别观察淋巴細胞(L)与单核白血球(M).如果他在每一百个淋巴細胞中把一个誤看作是单核白血球,而在每二百个单核白血球中把一个誤看作是淋巴細胞. 又若血液中这两种細胞的比例是 19 个淋巴細胞对一个单核白血球,求他所得結果的模棱度?(提示:利用前两題的結果)

9-22. 无誤傳輸　現在我們来讲申农关于有噪声情况下(即当有其他沒有用的輸入起作用时)傳輸信息的一个基本定理. 我們可能会这样想:如果通道以一定的概率使消息作随机变动,則通过这通道来接收肯定可靠的消息将是不可能的. 但申农却断然指出,这种想法尽管看起来很对头,事实上却是錯誤的. 通过一个不可靠的通道是可以傳輸可靠消息的. 讀者若认为这不可信,就必須去讀申农的书;这里我只讲結果.

設要傳輸的信息量是 H, 再設模棱度是 E, 从而所收到的信息量是 $H-E$(这里, 也象申农的整本书中一样, 假定讲的是持續傳輸的情形). 定理告訴我們說: 若通道容量增加一个不小于 E 的值——也許用另一通道与它并联而使之增加——那就可以这样来編碼,使仍不能免除的一部分誤差能尽量接近于零(要使誤差的成分很小, 付出的代价是延緩了信息的傳輸; 因若要使所积材料的平均值接近于全部时間的平均值, 必須积貯足够多的消息——符号).

倒过来,也可以使傳輸少延緩一些,而把通道容量增加到超过最小量 E,而使誤差任意小.

象大脑皮质这样一个联系錯綜复杂的系統, 何以能够处理那么多的消息, 不致使其因誤差与彼此的干扰而归于无用. 上述定理对于帮助我們理解这一問題的重要性是怎么說也不算过份的. 定理告訴我們說,如果通道有很大容量,那末可把誤差减少到任何程度. 而在大脑里, 特别是在大脑皮质里, 通道容量是很少限制的,因为通常只要在胚形成里生长出来,或在学习过程里使某一部分神經組織能代司新的职务,就可增多纤維数而增大通道容量.

这一定理对神經心理学会起什么影响? 其全部意义現今还无法估計. 它的功用如其说是在于能使我們解决"大脑怎么能克服

我們这一問題很少会发生，或者即使会发生的話，也不过是个小問題而不是什么大問題.

这一定理还說明了控制論对生物学的另一方面的用法. 在处理某些难的問題时控制論可能起决定性的作用，这作用并不在于直接給我們求出解答，而在于它能証明問題想得不对头，或是根据錯誤假定提出来的.

現今关于大脑和生物行为的一些大問題，都是从中世紀以及更早时期遺留下来的，那时对这些問題的基本假定和今日的大为不同，而且从今日的眼光看来常常是荒謬可笑的. 这些問題里面有些可能提的不对头，就如同中世紀医学中这样的一个問題：四种元素与四种体素究竟有什么关系？应該指出，这一問題从未得到解决，而且事实是，当化学家和病理学家对身体的情况了解得愈多时，他們发現他們必須把这一問題置之不理.

我們有关大脑的有些古典問題——也許其中有些是有关定位原因和学习等方面的——将来經研究之后会发現就属于这一类問題. 控制論給予我們的洞察力很可能使我們的鑒别能力前进一步；如果是这样的話，它将明确証明有些問題根本不該提出而該取消.

第三篇 調节与控制

整个生理学的基础必須是維持生存的生理学.

(Darlington)

第十章 生物系統中的調节

10-1. 前两篇讲过机构(及系統內的过程)与变异度(及系統与系統間的通訊过程). 这是两个基本問題,必須先研究. 現在我們要用这两篇的材料, 在第三篇里来研究控制論的中心問題——調节与控制.

本章評述調节作用在生物学中的地位, 并簡短說明为什么这是有根本重要性的. 书中說明調节作用与变异度的流通是怎样密切相关的. 下一章(十一章)要更詳細地研究这一关系, 并給出一定量的定律——即所能实現的調节量为某一通道中所能傳輸的信息量所限制. 再下一章(十二章)討論如何把十一章中所讲的原理具体化——什么样的机器能做出所需要的調节. 本章介紹一种新的机器, 馬尔可夫机器, 它推广了第一篇中所讲那种可能有的机器的范圍. 以后几章讲調节的困难增加时, 特别是由于系統变得很大而使調节的困难增加时, 怎样来起調节和控制作用.

在第三篇中, 我們起先假定調节器是已有的, 它或者是天生就有的, 或者是工厂里特别制造出来的, 或者是用什么别的方法得来的. 至于能进行这样有用工作的調节器是用什么做的, 怎样做出来的, 这問題要放到 13-10 节中来讲.

10-2. 本章主要目的是让讀者心里明白, 为什么以后几章(十一章以后)的材料在生物学中是有基本作用的. 生物学中的調节問題是这样的一个大問題, 不是单独一章所能讲得好的. 如果

单就內部的、植物性的活动来說，卡农(Cannon)所著的"人体的智慧"(Wisdom of the Body)一书已經讲得到家了，但要說明机体的一切外向控制活动——它的"高級"活动也都同样是調节作用，即都是內稳定作用，这样的书，篇幅大得多的书，还沒有人写出来．本章中我要把好些这样的問題留給讀者自已去想，因我相信他——作为一个生物学者——对这类問題也許已經足够熟悉的了．这問題在"大脑設計"一书中至少已經讲到一定的程度．

本章的主要目的是把調节、信息和維生(維持生命活动)三个概念結合起来，說明三者有如何紧密的連系，說明怎样完全可以用本书前面讲过的那些方法来处理三者，并且可以用尽量严格、客观和明确的方式来处理．

10-3． 基础 先把問題从头讲起．生物学中最基本的事实是：我們这地球已存在 20 亿年之久，而生物学家所研究的大都是生存到今日的生物．从这两件事实可推出一件众所周知的結論，現在我要用控制論的术語再把它讲一遍．

在 4-23 节中我們看到，若有一很大的能动系統，由一些部件組成，其中好些部件又是一样的，且若它一旦具有什么自催化(autocatalytic)的性质(即若該性质在系統中的一点处出現，就能使它在别处出現的可能性增加)，那末对这一性质来說，这一系統在沒有这一性质时就成为基本上是不稳定的系統．地球含碳及其他必要元素，而且事实已証明碳、氮及少数其他元素的許多化合物有自我繁殖能力．因此，虽然"无生命状态"几乎是一种平衡状态，但这是不稳定平衡状态(5-6 节)，只要一偏离这个状态，就足以肇生一变迹，使其后离"无生命"状态愈来愈远．我們今日所看到的生物界的形形色色，就是二十亿年以来在进行这些自动催化过程中，因淘汰了那些不能維持生存的生命形式而得出的結果．

我們今日所見的机体，都打上了二十亿年选擇作用这个淘汰过程的深刻烙印．任何生物形式，只要它在維持生存能力的任何一方面有缺陷的話，都已經淘汰了；現今，差不多每一种生物形式的特点，都带有保障其維持生存的标記，而不是为着什么别的．

眼，根，睫毛、壳、爪，它們生長的形状都是为使它們有最大可能来維持生存．当我們研究大脑时，我們也还是在研究一种使人維持生存的工具．

維 持 生 存

10-4． 剛才讲的一些东西大家已很熟悉．但讲了之后可以使我們把这些东西跟本书所要闡述的思想結合起来，并且准确說明其間的关系．

比方說大家想一想："維持生存"这句話一般表示什么意思．假定有只老鼠要力图避开猫，因而在这情况下老鼠之是否能維持生存成了問題．于是老鼠这个能动系統就可能处于各种各样的状态；例如它可以采取各种各样的姿态，它的头可以轉向这边也可轉向那边，它的体温可以有各种不同的値，它可以有两只也可能只剩一只耳朵．在它試图挣脱时，这各种不同的状态都会发生，那时我們还可以說老鼠仍然維持它的生存．但是如果老鼠的状态变成分开的四块，或者掉了它的头，或者变成了在猫血液里面循环的氨基酸溶液，那末老鼠的变到这些状态之一，就不能认为是合乎"維持生存"的了．

所以"維持生存"这一概念也可譯成絕对严格的語言，就象本书所用的一切語言一样．老鼠原来所处的各种状态，和它跟猫打交道之后所轉入的状态形成一序列 $M_1, M_2, \cdots, M_k, \cdots, M_n$．为实用和方便的种种理由，我們决定用"活老鼠"这个詞来表明处于（比方說）从 M_1 到 M_k 間某一状态的老鼠（我們說 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ 是集合 $M_1, M_2, \cdots, M_k, \cdots, M_n$ 的子集）．現在如果有某一作用 C（代表猫）作用于状态为 M_i 的老鼠上，而 $C(M_i)$ 的結果（比方說）

的这种說法正和系統的"稳定性"那种說法一样(5-5节). 所以"維持生存"和"稳定"这两概念可以有准确的关系; 于是, 只要这种准确的关系保持下去, 那末关于其中任一概念的事实和定理都可用到另一概念上去.

状态 M 常可用变量来表示. 所以相应于活机体的那些状态 $M_1, \cdots, M_k$, 便是某些基本变量处于指定("生理")范圍内的那些状态.

題 1: 若 n 为 10 而 k 为 5, 問作用 $C(M_7)=M_9$ 表示什么?

題 2 (續): 作用 $C(M_8)=M_4$ 表示什么?

題 3: 若猫(C)的每次襲击对老鼠(M)总是致命的, 那末"致命"这个詞怎样来定义才合适?

10-5. 世世代代下来維持了生存的究竟是什么? 不是个别的机体, 而是某种特别化合得好的基因型, 尤其是那些能生出一定新个体的基因型, 使那种新个体能把它內部的基因型保持完好无損, 而且能在它生活的那一代里自己照顾自己.

这一段話的意思是說: 如果基因型能产生出或多或少的防御机构, 以抵制外界危險侵襲, 那些基因型就特别有可能維持它們的生存(因而迄今还能存在). 因此, 龟类的基因引起壳的产生, 人的基因引起大脑的成长(不能引起这种成长的基因是早已絕灭了的).

现在我們把系統看作是由傳遞着信息的各部件組成的. 上节中(猫和老鼠)的直接影响图是

$$\boxed{C} \rightarrow \boxed{M}$$

现在我們来看影响图是

$$\boxed{D} \rightarrow \boxed{F} \rightarrow \boxed{E}$$

的这种情形, 这里 E 是一組基本变量, D 是外界干扰和危害来源(象 C 那样的), F 是基因型为保护 E 而形成的中界部件(壳、大脑等). (F 也可包括同样是为了保护 E 而采用的外界部件, 如兎子的穴, 蟹的壳, 猎人的叉, 武士(为防卫用)的劍).

为引述方便起见，在这第三篇中我們都假定基本变量 E 的状态可分成一組属于 η 的——相应于"活机体"或是"好的"状态——以及一組不属于 η 的——相应于"死机体"或是"坏的"那些状态(状态往往不能象这样簡单地来区分，但这在原理上不会发生困难；以后所要讲的一切，也不排斥可对状态作更細的分类).

为使讀者更清楚地理解这一假定的意义，底下举几个簡单的例子来說明(为簡单起見，先举无生命的調节系統).

(1) 有恒温調节器的浴池 E 是温度，所需要的(η)是(比方說)介于 36°C 与 37°C 之間的温度范圍. D 是使浴池温度越出这一范圍的一切干扰因素——搀入冷水，刮进冷风，浸入冷东西等等. F 是整套調节机械. 如果 F 发揮它的作用，就能减輕 D 对 E 的影响.

(2) 自动駕駛仪 E 是带三个分量——偏航角(yaw)，前后傾角(pitch)和左右傾角(roll)——的矢量，η 是使三者都处于某范圍内的一組位置. D 是影响这些变量的一組干扰因素，如陣风，旅客在机仓中的移动，发动机推力的不正常情况. F 是全部操纵机器——駕駛仪，襟翼，尾舵等等，这一切的动作决定了 D 对于 E 的影响.

(3) 騎自行車的人 E 主要是他跟鉛垂綫的角度. η 是容許偏离鉛垂綫的所有一批小角度. D 是使这偏离度有变大危險的所有干扰因素. F 是决定 D 对 E 的影响的整个机器——机械的、解剖的和神經的机器.

以后还要讲許多別的例子. 現在我們可以总括一句說：自然界的选擇作用(所謂自然选擇)有利于下列基因型的維持生存：如果它們能以任何方式在外界干扰因素 D 与基本变量 E 之間，获得一种調节器 F. 在其他条件都相等的情况下，調节器 F 愈完善，机体維持生存的机会愈大.

題：下列調节机构限制了什么变量的变动范圍：(i)空气調节器；(ii)爬山运动員的氧气筒；(iii)車窗扫擦器；(iv)汽車的头灯；(v)冷藏箱；(vi)趋光性植物；(vii)避日光的墨鏡；(viii)屈曲反射作用(脚踩在尖石上时使脚迅速举起的反应)；(ix)物

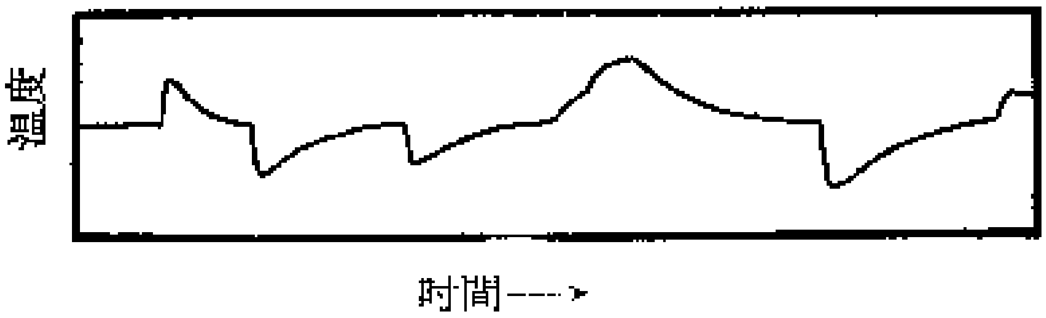
体迅速移到眼前时的眨眼；(x)高射炮的测位器．

10-6． 調节作用堵塞了变异度的流通　对一特定机构 F 来說，我們应从哪一方面来測定它的調节功能？ 如果一个恒温調节器的工作性能很完善，那末尽管有干扰因素，它总能使温度保持在所需要的水平而不生变动．一般說，这需要有两种特性：把温度保持在狹窄的范圍內不变，而且这一范圍就与所需要的范圍相适应．我們必須特別注意的是：容許有的这一組值 η，比起 E 可能取得的一切值来，具有較小的变异度；因 η 是从 E 的一切状态中选擇出来的某一子集．若 F 是个調节器，那末在 D 与 E 間插入了 F 之后，就減少了从 D 傳到 E 的变异度．所以 F 作为調节器的一个主要职能，就是它得把从干扰因素傳到基本变量的变异度堵塞住．

这一特性既然就意味着調节器的作用是堵塞信息的流通，我們不妨再細究这一論点，看它是不是合理的．

假設有两个沐浴設备，要我来决定究竟买哪一个比較合适．我把两个在相同的干扰条件下都試用了一天，然后比較所記录的温度变化曲綫；假定比較的結果如图 10-6-1 所示：

A



B

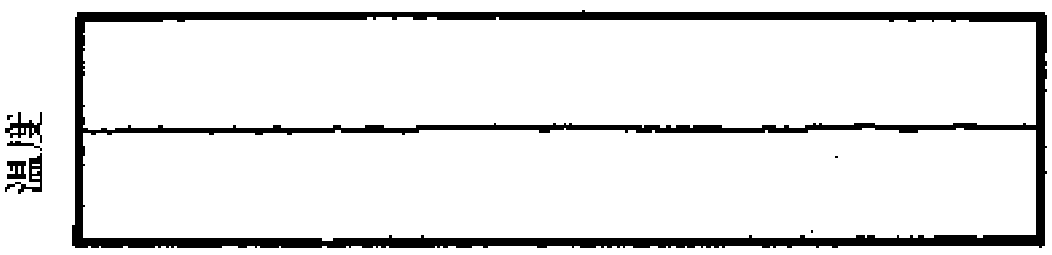


图　10-6-1

B 型設备无疑是較好的；而我之所以要选购 B 型設备，也正因为从它所記录的温度变化曲綫，看不出或得不到有关外界冷热变化的干扰信息．設备 B 中的温度計和水好象是对干扰因素 D 的任何作用看不見和沒有知觉似的．

同样的論点也适用于自动駕駛仪(哪些說法需要变一变是很

明显的). 如果这是个好的調节器,旅客在飞行途中就会感到很平稳,而不管外部空气中风力和气候变化的情形如何. 簡言之,有了这样的調节器,就不让旅客知道外界的天气是否恶劣. 因此,一个好的駕駛仪对天气情况这种信息的傳輸起了堵塞作用.

这种說法对空气調节器也适用. 如果我住在有空气調节器的屋子里,而能从屋子里感到热来获悉外間天气变热了,那末屋子里的空气調节器就失却調节的作用.如果調节器眞頂事,室內的百叶窗又都是关着的,我在室內就不可能知道外間的天气究竟怎么样. 因为有了好的調节器,关于天气情况的信息就被堵塞住,傳不进来.

一般說,好的調节器有个不可少的特点,就是它能把从干扰源傳向基本变量的变异度堵塞住.

10-7. 堵塞变异度的流通可用各种不同的方式来实现,但进一步考察之下,这些方式的基本点都是一样的. 我們来看这些方式的两种极端情形,就可說明它的范圍大小.

堵塞信息(从干扰源 D 到基本变量 E)流通的一种方式是插入一个消极地隔絕干扰的东西. 如烏龟背上的壳就是这种东西,它能使所受碰撞、打击、嚙咬等等的变异度, 在其內部敏感組織里減低到可以忽略的干扰度. 树皮、水獺皮下的脂肪层和人的顱骨都属于这一类.

跟这种靜态抵御方式相反的另一极端, 是采取巧妙对付行动的防御方式. 这种防御方式要获得干扰来临的信息, 准备它的到达,而对于这可能是复杂而不测的干扰,用同样是复杂而不測的防御方法来对付. 不穿甲冑只靠武艺来防御自己的击劍手, 在与对手作生死的决斗时, 他的防御方法就属于这一类. 神經系統进化了的高級机体,所用的防御方法也大多是这种方法,而神經系統也正是为实現这一防御方法而发展起来的.

在考察这第二种形式时, 我們应仔細注意信息和变异度在这过程中所起的作用.击劍手必須严密注視他的敌手,而且如果他要維持生存,他必須尽一切可能的手段来取得信息.为此他得生有眼

睛，为此他得学习怎样使用眼睛．然而，运用这种技巧的結果，如果获得成功的話，应表現在他的基本变量——例如他身上的血液量——保持在正常的范圍內不变，象在沒有发生过什么决斗以前的血液量一样．信息尽可以自由流通到非基本变量上，但区别“有决斗或沒有决斗”这一变异度，却不能让它傳到基本变量上去．

在本书以后各章中我們将考察这一类积极防御行为，要提出象这样的一类問題：它是依据什么原理的？什么机构能完成这一任务？当調节很困难时該怎么办？

第十一章　必需的变异度

11-1.　上一章里我們从生物学的观点来讲調节作用，把它当作是大家都有足够理解的一种作用．本章要讲調节过程本身，目的是要弄清楚这里面究竟包含些什么东西，究竟該怎样来理解．特别是我們要讲用什么方法来测定所完成的調节作用的数量或程度，并要証明这一数量有个上限．

11-2.　調节作用的应用范圍很广，它包括生理学的、社会学的、生态学的、經济学的大部分活动，以及科学和生活的几乎一切部門的許多活动．还有，現有調节器的类型之多，多得是几乎使人无从着手．处理这一問題的一种方式是逐类討論各种类型的調节器；第十二章事实上就要指出这些类型．但在本章里我們打算找出問題的核心——找出一切調节器的共同之处．

但一切調节器所共同有的东西，初看之下跟任何特定形式的調节器并不很象．因此我們在下一节里，不直接从剛讲过的那些事情出发来談問題，而要开头讲另一个問題．只有等新問題讲透了之后，才来开始考虑它跟調节作用可能有的关系．

11-3.　游戏与結局　現在我們先不去想什么調节作用，而来考察做博奕游戏的两个人 R 和 D．假定 R 能得到結果 a 就算是贏了，我們来看 R 的輸贏情况．游戏的規則是这样的．他們两人都能看到一張表（表 11-3-1）：

表　11-3-1

		R		
		α	β	γ
	1	b	a	c
D	2	a	c	b
	3	c	b	a

游戏必须由 D 开始走头一步，比方說他选一个数，这也就是选定某一行，来开始做游戏的第一步． R 看他选定了一数之后就选取一个希腊字母，这也就是选取了某一列． 行与列相交处的那个斜体字母就是游戏的結局． 如果这字母是 a，R 就赢了；如果不是，R 就輸了．

細看这一表之后，就可知道拿这个表来說，R 是总能赢的．不管 D 先选取的値是什么，R 总能选一合适的希腊字母，使結局就是他所需要的． 例如，若 D 取 1，R 可取 β；若 D 取 2，R 可取 α；等等． 事实上，若 R 照下列变换来选取希腊字母：

$$\downarrow\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \beta & \alpha & \gamma \end{matrix}$$

那末他总能使結局是 a．

就这一表来說，R 的地位是特别有利的，因 R 不仅能使結局总是 a，而且如果他需要的話，也能立即让結局总变成 b 或 c． 事实上，R 对結局有完全的控制权．

題 1： 若 R 要使結局变成 C，他应采用什么变换来选取希腊字母？

題 2： 若 R 和 D 的値都是整数，結局 E 也是个整数，由下式給定

$$E=R-2D,$$

今若所要的結局是 37，試求出用 D 表示 R 的式子．

題 3： 汽車后輪在打滑． D 代表变量“后部的移向”，它有两个值：右或左． R 是司机的动作，代表“舵輪轉向”，也有二値：右或左． 列出 2×2 表，并填出結果．

題 4： 若游戏中 R 的动作由 D 的动作而定，依据以下的变换表：

$$\downarrow\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{matrix}$$

并且他們作了許多盘游戏，問这些游戏結果中的变异度是多少？

題 5： 若表的結果是一对三的，R 能不能完全控制游戏的結局？

11-4. 上节中用的表当然是特别有利于 R 的． 但用别的表也是可能的． 例如現在假定 D 和 R 还是照同一規則做游戏，但用的是表 11-4-1，这里 D 可从五个値中选取，R 可从四个値中选取．

若得 a 能赢，R 就总能赢． 事实上，若 D 取 3，R 有好几种方式能赢． 因每行都有 a，R 总可以使結局出現 a． 但若得 b 能赢，

R 就不能老是赢. 因若 D 取 3, 则不管 R 取什么, 他都不能得出結局 b. 如若要 R 得 c 能赢, 那末 R 就毫无办法, 因結局根本沒有 c, 那时 D 总能赢.

我們看到, 若表內的排法不同, 若 D 和 R 可能取得的状态数目不同, 那末从 R 的观点来說都能产生多种不同的局势.

表 11-4-1

		R			
		α	β	γ	δ
	1	b	d	a	a
	2	a	d	a	d
D	3	d	a	a	a
	4	d	b	a	b
	5	d	a	b	d

題 1: 用表 11-4-1 时, 若 R 得 d 能赢, 他能不能老是赢?

題 2 (續): R 应該用什么变换?

題 3 (續): 若 R 要得 a, 而 D 因某种緣故决不取 5, 这时 R 能怎样簡化他的动作?

題 4: 有客人要来餐厅吃飯, 但服务員不知来的是誰. 他只知道来的可能是 A 先生, 这人是只飲橘子汽水和白酒的; 也可能是 B 先生, 这人是飲大曲和白兰地的; 或者可能是 C 先生, 这人是飲葡萄酒, 白兰地或橘子汽水的. 不管誰来, 他能不能給客人送上所需要的飲料?

11-5. 对 R 的动作方式和輸赢前途, 我們能不能作些一般性的議論呢?

如果表是完全任意的, 是什么情形都可以出現的, 那末可能有的情况是这样的多, 是这样的难以捉摸和复杂, 我們就很难作什么一般性的討論了. 但对有一类的表, 就可作出准确的同时又带有相当一般性的討論, 而值得加以陈述(这也是調节理論中的基本事实).

在可能列出的一切表之中, 那些使 R 的动作方式变得太簡单太乏味的表可以除去. 題 11-4-3 告訴我們, 如果某一列中有相同的状态, R 在做游戏时就可以不用化脑筋; 就是說, 在 D 的每次动作之后, R 可以不用随之改变他的动作方式. 因此我們只考虑那种每列都不含相同結局的表. 在用这种表时, R 必須在完全知道

表 11-5-1

		R		
		α	β	γ
	1	f	f	k
	2	k	e	f
	3	m	k	a
	4	b	b	b
D	5	c	q	c
	6	h	h	m
	7	j	d	d
	8	a	p	j
	9	l	n	h

D 的动作之后来选定他的动作;这就是說,D 的动作一有改变,R 的动作就得随之改变(这里对一列中的結局和另一列中的有什么关系,不作任何假定,因此这些方面的关系是沒有任何限制的).如 11-5-1 就是这样的一个表. 現在假定已說好 R 得某一結局能赢,而要 R 来規定在 D 每次动作之后的动作方案. 这里主要的一点是:不管他能不能赢,他在 D 所做的每一可能采取的动作之后,总得相应做一次动作,而且只能做一次动作. 他所定的方案,或者可以說是他的"策略",可能是下面这种样子的:

若 D 取 1, 我取 γ

若 D 取 2, 我取 α

若 D 取 3, 我取 β

… …

若 D 取 9, 我取 α

这样他当然就規定了一个变换(这变换必須是单值的,因 R 不能同时采取两个动作):

$$\downarrow\begin{matrix} 1 & 2 & 3\cdots 9 \\ \gamma & \alpha & \beta\cdots\alpha \end{matrix}$$

这一变换唯一規定了游戏的一批結局——如果在一盘一盘接下去玩的过程中,D 对每种可能的动作都至少做过一次,那末这

一批結局就是实际会发生的結局．因1与γ的結局是k，等等，故得下列变换：

$$\downarrow\begin{matrix}(1,\ \gamma) & (2,\ \alpha) & (3,\ \beta)\cdots(9,\ \alpha)\\ k & k & k\quad\cdots\quad l\end{matrix}$$

現在可以指出，这一批結局的变异度不能小于

$$\frac{D\text{的变异度}}{R\text{的变异度}}$$

即是說，在本例情形下的变异度至少是$\frac{9}{3}$．

这是容易証明的．假定R在每横行中暗中选取一元素，并力求使所取各元素的变异度尽可能地小(这时暫且不管什么結局这种东西)．在第一横行里他記取一个元素．在第二行里，如果他想使所記取的元素不是一个新的、不同的元素，如果他想使所取元素的变异度不增加，那他就須到新的一列中去找；因为他所記取的第一个元素所在的那一列里，我們假定所有的元素都是不同的．要使每行中所記取的元素都是同一元素，那末每行中各元素所在的列就都应該是不同的，就是說，他每換一行，就須轉到一个新的列(这是他力所能及的最好的做法；很可能每次換到新的列还并不能使所取的元素总是同一元素，但这不要紧，因为我們要求的是可能有的最小的变异度，故可假定一切都是最有利于減小变异度的)．故若R能采取n步动作(在本例的情形是三步)，并且在取第n行时所有各列都已取遍了，那末在取下一行时，其中有一列总要取第二遍，于是在这一批結局中就需添上一个新的結局．如在表11-5-1中，若在头三行中都选取k，便可使所取元素的变异度最小，即都是同一个元素，但取到第四行时，在这組結局中就不得不添上第二个元素了．

一般說：若同列中每两个元素都是不相同的，又若R在每行中各选取一元素而得一批結局，且所用表有r行c列，則所取一批結局的变异度不能小于$\frac{r}{c}$．

必需变异度律

11-6. 現在我們可以从稍微不同的观点来看这一游戏(仍限定每列中不能有相同的元素)．如果 R 的动作方式不变，这样，不管 D 采取什么动作，R 总做一样的动作，那末結局的变异度就将和 D 的动作的变异度一般大．这时可以說，D 对結局施行了完全的控制权．

其后若 R 采用或具有两种动作方式，那就可把結局的变异度减到一半(但不能再少)．如果 R 有三种动作方式，結局的变异度可以减到三分之一(但不能再少)；如此等等．所以，若要把結局的变异度减到某一数目，或减到 D 的变异度的几分之几，R 的变异度就至少必須增到一个适当的极小值．只有 R 的动作方式的变异度增加了，才能使結局的变异度减小．

11-7. 若变异度用对数表示(这差不多总是最方便的)，且若条件不变，則上述定理有一极简单的形式．設 V_D 是 D 的变异度，V_R 是 R 的变异度，V_O 是結局的变异度(三者都用对数表示)．則上节的定理証明了：V_O 的数值不能小于 V_D-V_R 的数值．于是 V_O 的极小值是 V_D-V_R．

若 V_D 給定不变，则只要相应增大 V_R 就能使 V_D-V_R 减小．所以，若以极小值来計結局的变异度，則只要相应增大 R 的变异度，就能使結局的变异度进一步减小(11-9 节中有更一般的定理)．

这就是必需变异度律．它的更形象化的說法是：只有用 R 的变异度才能压低 D 所产生的变异度；或者說，只有用变异度才能消灭变异度．

在調节的一般理論中，这是一个极为基本的論点，因此在讲它的实际应用以前，还得再继續讲些它的說明和例証．

11-8. (本节在初讀时可略去)定律必須是能普遍适用的結論，不只是上述那种从表格形式推出来的不足道的結論．为表明事实确是如此，現就下述情形来証明和上述定律基本上相同的定

律．我們現在所要考虑的情形是：变异度分布在时間上，而它的变动是持續的．这就是申农特别加以考察的一种情形(本节的記号和概念都和申农书中的一样)．

設 D, R 和 E 是三个变量，每一变量都是一个信息源，但这里所謂"源"并不一定意味着这三个变量是可以独立变的．現在不管三者之間有什么因果关系，我們总可用实驗的方法来算出或量出不同的熵値．比方說我們有 $H(D, R, E)$，这是就以三者为分量的矢量来說的熵値；还有 $H_D(E)$，这是在已知 D 的状态时对 E 的不确定度；还有 $H_{ED}(R)$，这是在已知 E 与 D 两者而对 R 的不确定度；如此等等．

11-5 节中所讲的条件(一个元素不能在同一列中出現两次)現在就相当于这样的条件：若 R 已固定或給定，則 E 的熵(相应于結局的熵)不应小于 D 的熵，卽

$$H_R(E) \geqslant H_R(D)$$

現在不管 D, R 以及 E 之間有什么因果关系或其他关系，从代数上讲，它們的熵之間必須要有下列关系：

$$H(D)+H_D(R)=H(R)+H_R(D)$$

这是因为等号两边都等于 $H(R, D)$ 的緣故．若把 $H_R(D)$ 換成 $H_R(E)$，我們就得到：

$$\begin{aligned} H(D)+H_D(R) &\leqslant H(R)+H_R(E) \\ &\leqslant H(R, E) \end{aligned}$$

但从代数上讲，我們必須恒有

$$H(R, E) \leqslant H(R)+H(E)$$

故 $$H(D)+H_D(R) \leqslant H(R)+H(E)$$

亦卽 $$H(E) \geqslant H(D)+H_D(R)-H(R)$$

所以这些 E 的熵有某一极小値．若要使 D 源与 R 源之間的某一关系能影响这一极小値，則在 $H_D(R)=0$ 时——也就是在 R 为 D 的一个确定[1]函数时，就能使这极小値变得最小．在这一情况下，$H(E)$ 的极小値就是 $H(D)-H(R)$，这就推得跟上节所述相同

[1] 这里的"确定"二字按第三章中的意义来理解——譯者注．

的結論．这定理簡单地告訴我們：要把 E 的熵值（指熵的极小值）降到比 D 的熵值小，只有把 R 的熵值（这里所說的熵值都指它的极小值）增加同一数量才可能．

11-9． 我們不难把前述各定理的說法改变一下，以得出一个有意义的推广．

我們来考察 R 不动腦筋（就是說，不管 D 做什么动作，R 总做一样的动作）而結局的变异度小于 D 的变异度这种情形．这就是表 11-4-1 中的情形．例如，若对 D 的所有动作，R 总用 α 来应付，那末結局就是 a, b 或 d, 变异度是三，比 D 的变异度五小．为使計算簡单起見，設每列內每个元素重复出現 k 次（而不是象 11-5 节中那样只出現"一次"）．照以前那样来作論証（不同的地方只是这里 kn 行只能給出一个結局），便得下述定理：

$$V_O \geqslant V_D - \log k - V_R$$

上式中的变异度都是用对数表示的．

經过这样改变的定理也一样可用熵的語言来陈述，这就是，不再象 11-8 节中那样假定

$$H_R(E) \geqslant H_R(D)$$

而假定

$$H_R(E) \geqslant H_R(D) - K$$

于是 $H(E)$ 的极小值就变成

$$H(D) - K - H(R)$$

这里的熵也都用对数表示．

11-10． 这定律告訴我們說：某些事情是不可能发生的．现在我們必須清楚知道这不可能性是从那里来的．因此，我們要問：能从哪一方面做实驗来核証这一定理？

这定理不牵涉到物质的性质．因此，如果定律的形式是这样說："沒有一种机器能……"，那末即使发明了一种什么新的器件或无綫电綫路或发现了什么新的元素，它們"能……"，这定理也不会因之就被推翻．甚至对于象第四章所讲那种一般意义下的机器，这定理跟那种机器的性质也是不相干的；因这定理是从表——比方說象 11-4 节中的表得来的；这表只告訴我們說 D-R 的某些組

合能得出某些結局，但决定結局的究竟是什么，对它完全沒有关系．实驗只能給出这样的表．

定理的内容主要是告訴我們一个长方表有些什么可能的排列法．它告訴我們說某些类型的排列是不可能做出来的．所以这定理与机器有什么特殊性质无关，正好比我們說"四个东西能摆成一个正方陣"这一"定理"，跟四个东西究竟是什么完全无关的情形一样．因此这定理絲毫不依賴于实驗．

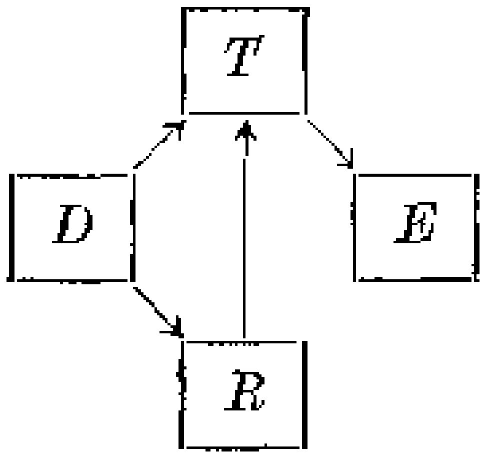
11-11． 再談調节作用　調节問題从本章一开始就暫时擱置，現在我們可以再回过来讲这一問題了．因为讲过了必需变异度律之后，我們就可以給調节作用定一个量．首先我們再回想一下，所謂"調节作用"，主要指的究竟是什么意思．

我們是先有一批干扰 D，这是从机体的外界中产生出来的，往往跟机体隔得很远，而且要是調节器 R 怠工的話，这干扰就会危及基本变量 E，使它的值越出其应有的变化范圍之外．这里所謂 E 的值就相当于以上各节中所說的"結局"．所有这些 E 值中，只有少数的值(η)是符合机体的生命状态，或是不致使机体生活感到难受的，所以如果調节器 R 要成功地执行它的任务，它就必須根据 D 所取的值来这样相应地选取它的值，使(如果可能的話)"結局"始終保持在宜有的一組值 η 中，也就是，使結局——基本变量——始終保持在生理条件所許可的范圍内．这样，調节作用就跟 11-4 节中所讲的游戏有了密切相关的联系．我們現在来更深入地追究这一关系．

先假設已給定了表 T．我們这个未来的調节器所必需接受的既成事实是：存在着无情的外部世界或内部物质．現在假設过程开始了．D 取任一值，R 取由 D 所取値而定的某一值，表給我們定出一个結局，而这結局可能在 η 内，也可能不在 η 内．这一过程往往是要反复进行的，好比沐浴設备在一天内要应付各种不同的干扰一样．其后 D 取另一值，R 相应也取另一值，出現另一結局，而这結局同样也可能在 η 内或不在 η 内．这样一直进行下去．如果 R 是个地道的好調节器——能够成功地发揮作用的調节器，那

末 R 就是 D 的这样的一个变换,使所得映象(結局)都在 η 内. 在这情形下, R 和 T 联合起着堵塞 F (10-5 节)的作用.

现在我們可以用直接影响图



来表示这些关系. 箭头表示信息的实有通道. 这是因为: D 的变异度决定了 R 的变异度; 而 T 的变异度則由 D 与 R 两者的变异度而定. 若 R 与 T 确是实有的机器,則 R 具有輸入 D,而 T 則有两个輸入.

(当 R 与 T 体现在实有的机器中时, 必須小心搞清楚所說的是什么. 若某一机器是給出 T 的基础,它就具有(据 4-1 节)一組逐步出現的状态. 这些状态和这些分步, 跟本章中 D, R 与 T 所取的一步一步状态,本质上是各不相关的. 例如, T 給出結局, 而任何特定的結局可以彼此比較, 就象单位与单位可以彼此比較一样. 但在另一場合下,每个单独的結局又可进一步作更細的分析. 例如一个渴的机体可能循变迹 1 变化而解了渴, 也可能循变迹 2 变化而渴死. 有时为某方面的目的可把这两种結局作为两个单位, 特别是在要把两者对立比較的时候. 但若我們要更深入地考察机体的行为,那就可把变迹 1 看作是由一系列状态組成的,各个状态由一段段的时間隔开,这各段时間的长短久暂,跟陆續出現的調节作用到陆續出現的干扰作用間的距离,可以是很不相同的.)

我們現在可用傳輸信息的术語来說明調节作用的一般現象. 若 R 不起作用, 就是說若它总只取一个值, 那末 D 的变异度就要通过 T 而傳到 E, 而这正跟我們的愿望相反. 也可能有 R 虽不变,但 T 也能堵塞住一些变异度的情形(如 11-9 节), 而且偶或有这样一堵就能使 E 有足够的稳定性而适于生存的可能. 但在比

較常見的情形下，傳到 E 的变异度还有待于进一步加以压縮；而这(如 11-6 节中所讲)只有在 R 进一步增加变异度时方有可能.

現在我們从直接影响图里取下一部分来，特别注意 R 作为信息傳輸器的那一部分：

$$\boxed{D} \rightarrow \boxed{R} \rightarrow \boxed{T}$$

必需变异度律告訴我們說：R 作为調节器的容量(以后簡称为 R 的調节作用量)不能超过 R 作为信息通道的容量.

剛才所說这种形式的必需变异度律，可以跟申农的定理 10 建立准确的关系. 申农的定理 10 告訴我們說：若消息中出現噪声，則改正通道(correction channel)所能濾去的噪声量，不能超过該通道所能傳輸的信息量.

因此，申农定理中的“噪声”就相当于我們这里所讲的“干扰”，他的所謂“改正通道”相当于我們这里的“調节器 R”，他的“有熵 H 的消息”就相当于我們这里熵为零的消息，因所要“傳輸”的是不变性(即是說，我們这里的目的是要把变异度擋住，这就相当于熵为零的“傳輸”了——譯者注). 因此，用調节器来达到内稳定态(homeostasis)，跟用改正通道来抑制噪声，是彼此同調的作用.

題 1：某昆虫的視覚神經中有一百个纤維，每个纤維每秒能傳輸二十比特；如果有十种不同的危險，每种危險都可能各自独立地在每秒内出現或不出現. 問这視覚神經的通道容量够不够使它能防避危險？

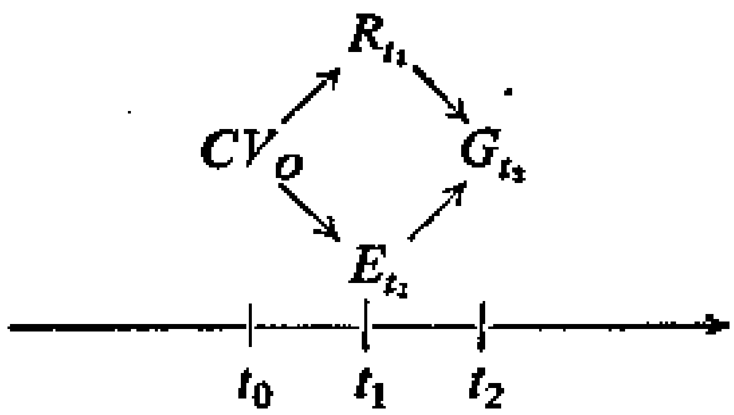
題 2：从船桥傳到机仓的电話里，能够傳告九种不同的速度，并至快能每五秒钟傳告一次(或給出一次信号)，而舵輪能定出五十种船舵的位置，至快在每秒内改变一次舵位. 根据經驗証明，在正常情形下，这样的控制方式是够用来完全調节船的速度. 請估算一下，在正常情形下，干扰因素(风暴，来往船只，淺灘等)的改变速度应保持在什么上限以内，才不致危及船的安全？

題 3：一个將軍指揮部队和敌軍的十个师作战，敌軍的每师每天可采取的作戰行动有 10^6 比特. 他的情报通过十个情报官傳送給他，每一情报官每分钟能发送 60 字，每天发送 8 小时，而所发密碼的每字含有 2 比特. 問他的这些情报通道够不够供他作充分的調节指揮？

題 4(續)：若將軍一天工作 12 小时，能以每分钟 500 比特的速率口授命令，又若他所得的情报是完全的，問他口授命令的这个通道够不够供他完成全部調节作用？

11-12. 上节給出的直接影响图，跟索謨荷夫(Sommerhoff)

在他"分析生理学"(Analytical Biology)一书中关于"指向相关作用(directive correlation)"的說法显然有关. 他的那本书里用的图是:



如果我沒有把他的意思理解錯誤的話, 那末他所用的概念和这里所讲的一些概念是彼此等价的,其等价关系如下:

共通(Coenetic)变量(CV_O)$\leftrightarrow$ 干扰(D)

反应(R_{t_1}) $\leftrightarrow$ 調节器[1](R)

环境情况(E_{t_1}) $\leftrightarrow$ 表(T)

后果(G_{t_2}) $\leftrightarrow$ 結局(E)

因此,若能讀讀他的书,讀者就可扩大本篇所讲理論知識的范圍,因他对这問題討論得很多.

11-13. 有了上述定律,我們現在就可以看出,对活机体有影响的各种变异度和信息之間,有些什么关系.

一个族类之所以能继續生存(10-4 节),主要是因它的各成員能把(干扰因素的)变异度擋住,不让这变异度流入而影响基因型(10-6节),而这种阻擋作用是該族类最基本的需要. 自然选擇(淘汰)作用的結果表明,如果把大量变异度(作为信息)部分地带入机体(只要这些变异度不致傳到基因型),然后利用这些信息,使通过 R 的信息,阻擋了信息經过环境 T 的流通,这对于机体的維持生存是有利的.

这一观点可以使我們解决那个初看起来似乎矛盾的問題: 高級机体具有敏感的皮肤,反应力很强的神經系統,而且还往往具有一种本能,使他在游戏或为好奇心所驅使的情况下,把比眼前所需

---

1) 原书为 Response(反应),似系筆誤,应为 Regulator——譯者注。

要的多得多的变异度带入系統内．如果根本就不要这些变异度，那末它們維持生存的机会不就能增大嗎？

本章所讲的表明，进入机体内的变异度（不管是信息还是干扰）有两种形式．有一种是危及基因型生存的——从 D 直接通过 T 傳到 E 的变异度．这一部分变异度必須不惜一切犧牲加以阻擋．还有的是，虽然它也可能危及基因型的生存，但可把它在通过調节器 R 时加以改造（或編成密碼），以用来阻擋其余（T 內）的变异度的作用．这一部分信息是有用的，应該（如果能提供調节器的話）愈多愈好；因为根据必需变异度律，通向基因型的干扰量，只有用同样傳向基因型的信息量来加以抑减．这一定律在生物学上的重要作用就在于此．

对那些要继續研讀本书直到末章的讀者說，这一定律也是重要的．从它的初等形式看来，这一定律在我們的感性认識上好象是很明显的，簡直不值一提．举例說，若有报館的攝影記者要摄取二十种（在曝光时間和距离上）不同的景象，那末如果要使所得底片的清晰度和明暗度一律，他的照相机鏡头显然至少应有二十种不同的撥法．只有当我們所考察的系統中这些事情不这么明显时，特别是在系統很大时，这一定律以数量关系表达出来的形式才发揮出它的作用．例如，一个独裁者能把国家控制到什么程度？据一般人說希特勒对德国的控制曾是全面的．但就他的調节作用能力（按 10-6 节中所讲的意义）来說，这一定律告訴我們說他的控制力也只达一个人力，而不会更多（这样說是不是真确还必須有待于今后事实的考驗；現在这定律的主要优点在于它是明确的而不是含糊两可的）．因此，虽然在簡单的情形下这定律好象是很明显的道理，但在那些单凭直覺无法处理的太复杂的情形下，这定律的确可以給我們引导到正确解决問題的方向．

控　　制

11-14. 本章的一些說法已經暗示着調节和控制是密切相关的．例如在 11-3 节中，有了表 11-3-1，使 R 不仅能在 D 的动作

变化多端的情况下始終得出結局 a；而且同样可以随意得出結局 b 或 c.

我們可以从另一角度来看这一局面．假定要由某一控制者 C 来决定应該以什么結局作为目标，而 R 必須听从 C．C 的决定就会影响 R 对 α, β 或 γ 的选擇；这时直接影响图是

$$\begin{tikzcd} & \boxed{D} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{T} \arrow[r] & \boxed{E} \\ \boxed{C} \arrow[r] & \boxed{R} \arrow[u, shift left] \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

因此整个图表示具有两个独立输入 C 和 D 的系統.

現假定 R 是个完善的調节者．若 C 决定以 a 为目标，則（通过 R 的調节作用）E 将取值 a，而不管 D 可能取什么值．同样，若 C 决定以 b 作为目标，則得出的結局将是 b 而不管 D 取什么值，如此类推．若 C 决定取一特殊的序列——比方說是 a, b, a, c, c, a——作为序貫的或复合的目标，則得出的結局将是这一序列，而不管 D 在相应的序列中取什么值（为簡便起見，我們假定各个分量是一步步变动的）．因此，由于 R 是个完善的調节者，这才使 C 对輸出（或結局）有完全的控制权，而不管由 D 进入的干扰作用是什么．所以，如 R 能对結局作完善的調节，C 便能对結局有完全的控制.

我們还可以再从另外一个角度来看这些事实．若 C 对 E 想作的控制

$$\boxed{C} \rightarrow \boxed{E}$$

受另一独立輸入 D 所致噪声的干扰，而有如下的連系图

$$\begin{tikzcd} \boxed{D} \arrow[dr] & \\ & \boxed{E} \\ \boxed{C} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \text{或} \qquad \begin{tikzcd} \boxed{D} \arrow[dr] & & \\ & \boxed{T} \arrow[r] & \boxed{E} \\ \boxed{C} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

則取一合适的調节器 R，自 C 与 D 两方同时获取信息，且把它放在 C 与 T 之間：

$$\begin{tikzcd} \boxed{D} \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{T} \arrow[r] & \boxed{E} \\ \boxed{C} \arrow[r] & \boxed{R} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

R 就可与 T 形成一个到 E 的复合通道，它能把来自 C 的信息全部傳輸到 E，而把来自 D 的信息一点也不傳輸到 E.

控制作用就必然要这样地依賴于調节作用．它們两者就是这样密切相关的．

題 1：試从表 11-3-1 作出一組以 C 为参数的变換，使 R 用这一变換便能让 C 完全控制結局．(提示：哪些是原象？)

題 2：若在本节最末一图中，C 要以 20 比特/秒傳到 E，而源 D 产生 5 比特/秒的噪声，T 則是这样的一个表：R 不变时 E 将有 2 比特/秒的改变．若要使 C 对 E 有完全控制，則从 D 到 R 的通道(至少)必須有多少容量？

題 3(續)：从 C 到 R 的通道(至少)必須要有多少容量？

題 4(續)：从 R 到 T 的容量呢？

11-15. 在我們讲調节作用时，重点放在說明它能减少結局中的变异度这件事上；沒有調节作用时变异度大，有了調节作用，变异度就小了．把变异度减到极限的情形，就得到使結局保持严格不变的那种調整．这一观点无疑是可靠的，但在我們的感性认識中，总觉得有生命的机体无論如何不是不变动的，那末初看起来这一观点岂不就跟我們的感性认識显然相矛盾嗎？因此，除了在 11-13 节中已讲过的以外，再讲几句話还是有用的．

应該知道“不变”与“变”的区别常常要看所指的究竟是什么而定．例如，若一探照灯能准确无誤地追踪一架飞机，我們就可看到探照灯光在好大的一个角度(跟地面所成的角度)范圍內变动，或者看到探照灯光与飞机所成的角度始終保持为零而不变．显然，这两种观点的說法都是对的；在这一例子里，“好大的范圍內变”与“不变”之間并无实际矛盾，因两者是对不同的变量来說的．

再如說一个汽車司机把車穿过弯弯曲曲的巷道，准确无誤地

从一个城鎮开到另一城鎮. 我們可以說，这期間他在把方向盘轉个不停变个不歇，但也可以說，他在整段开車的期間始終把車和路边保持着几乎是不变的距离.

生命机体的許多活动也都可从这两方面来观察. 一方面我們可以看到发生了很多实际的变和动，另一方面可以看到，所有这些活动，只要它們是有节奏的有控制的，总有不变量和不变因素貫穿在这些活动的始末之中，而这些不变量正表示了所完成的調节作用的程度.

这件事还可以換許多种不同的說法. 例如，若变量 x 总是跟变量 y 正好一样地变，那末量 $x-y$ 就保持为零而不变. 故若 y 的值由某一外界因素来給定，則作用在 x 上使 $x-y$ 保持为零而不变的任一調节器，实际上是要让 x 仿照着 y 一模一样地变. 同样，如果"叫 x 反对着 y 来变"，那也就相应于"使 $x+y$ 保持为某一不变的值". 还有如"使变量 w 这样变，让它始終等于 v 的改变率的两倍"就相应于"使量 $w-2\dfrac{dv}{dt}$ 保持不变".

在說明問題以及在讲解一般理論的过程中，把所有的"目标"都看成是"使結局保持为 a 而不变"这种形式，方便是很大的. 但讀者切不要因此便生出誤解，以为我們的理論只讲不变性；他必須养成一种习慣，能随时互換相应的概念和观点.

几种不同的說法

11-16. 在 11-4 节中，我們用簡单的长方表来說明調节作用的基本事实，把它看作是两个人 D 与 R 之間的博奕游戏. 讀者也許会覺得这样一种表示法未免太簡单，而且也有些众所周知的調节作用，是不足以用这样的长方表来表示的. 但我們的这种讲法，事实上比它从表面上看起来要普遍得多. 因此，在本章末了几节中，我們要考察各种复杂化了的情形，但这些情形在进一步深入考察之后，可以証明实际上都包括在 11-4 节的表示法中.

11-17. 复合干扰 在 11-4 节的基本表示法中只含一个干

扰源 D，因此当調节作用要应付由好些个通道同时傳来的好些个干扰时，这种在生物界中不可胜数的一切情形，初看起来似乎就不能包括在我們对調节作用的基本表示法中．例如，一个騎自行車的人，一面得应付前后两旁的行人車辆，一面还得应付由陣风引起的平衡不稳定，他的調节就得要应付好些个干扰．

但事实上这种情形是包括在基本表示法內的；因本章所讲的一切对 D 为矢量（具有随便多少个分量）的情形也完全可以适用．因此，只要用矢量 D 表示上述各种复合的干扰，就可使我們的基本表示法中也能包括这些情形．

11-18．噪声　还有一个跟这有关的情形是当 T“带噪声”的情形，这时 T 还另有一个受某种干扰作用而影响其工作的輸入．例如，若 T 是个电机，会受到电力綫上电压变动的影响，就可能属于这种情形．这种情形初看起来似乎也不能用我們的基本表示法来讲．

我們必須认識到，在 11-3 节中 D, T, E 等等是純粹按其作用的形式来规定的，或者說是规定成純粹机能形式的．例如，我們說“D”是“那起干扰作用的”．对所給定的任何一个现实系統，在决定什么相应于 D 和什么相应于 T 等等时，必須要小心对待．还有，在 D 和 T 間（以及其他因素間）暂时划定的界限，在进一步考虑之后可能需要改动．例如，若在现实系統中定出一批界限，得出一个我們认为是由 D, T 等等組成的系統，但这一系統并不跟我們在 11-4 节中的基本表示法相符．那末，如果改动所定的界限，定出新的 D, T 等等之后，就可能得出一个与基本表示法相符的系統．

若在初步定出界限之后发现这一（临时的）T 是带噪声的，那就应該重定界限，以便把 T 的噪声輸入（見 9-19 节）包括在 D 里面作为 D 的一个分量．这时 D 就是“那起干扰作用的”，T 就沒有第三个輸入了；这样就能使表示法和 11-4 节中的相符．

当然，我們在这里一点也沒有这种意思，說只要把起干扰作用的噪声另眼相看，噪声就象变戏法似地成为可以容忍的东西了．我們所要說的意思是，如果我們再从头开始，重新規定 D 和 T，那

末对 D 作某个新的变换后可能恢复調节作用．这新变换当然会比老的更复杂些，因 D 要有更多的分量．

11-19． 初态　当 T 是由其变迹来表示行为的某一机器，而結局 E 依賴于 T 的变迹的性质时，这又是一种与上述相关的情形．这时結局常依 T 的初态为何态而定．那末怎样能使 11-4 节的基本表示法里把 T 的初态也包括进去呢？

若我們能控制初态，使变迹总从某一标准状态开始，那就不会发生困难(这时可用 7-25 节中的方法)．但也可能有 T 的初态不能标准化的情况，特别是当系統很大时．那末基本表示法中能不能包括这一情形呢？

回答是可以的；因 D 旣是个矢量，我們可重新規定它，使它包括 T 的初态．那时，因 T 的初态的变异度而傳到 E 的变异度，在我們的基本表示法中就可找到它合适的位置．

11-20． 复合目标　E 的适宜状态 η 可能不只由一个而是由更多的条件而定．例如，我們可能要求一个恒温調节器

(i) 通常保持在 36°C 与 37°C 之間；

(ii) 若温度变动 ±10°C，則它能在一分鈡之内使温度回复到允許的温度范圍內．

这一难题也可用 11-17 节中的方法来解决，因为我們只要认識到 E 可以是个矢量，有一个以上的分量，而且分別規定每一分量之后就可給定适宜状态(η)．

所以，只要允許 E 是个矢量，就可使 11-4 节的基本表示法包括一切复合对象或带条件或受限制对象的情形．

11-21． 内部复杂化的种种情形　最后还举一个例子，来說明基本表示法所包括的范圍是多么广泛．我們来考察这样一种情形：大問題看起来不怎么象个調节問題，倒是象几个調节作用者的相互作用問題．例如，信号員要处理几列同时开进他工段范圍內的火車．应付其中任何单独的一列火車是很簡单的，但这里的問題在于要把它們看作整个的复合体而加以控制．

这一情形事实上也是包括在基本表示法中的．因在那个表示

法中，D、R、T 或 E 里的量或状态或元素，完全可以是由彼此相关的部件組成的．“D”虽然只用一个字母表示，但这絲毫不意味着它所表示的必須是內部簡单的或成为一体的东西．

信号員的“干扰”D 是按某种特定方式分布在空間与时間上的某一批开过来的列車．另一种布列方式就会使 D 有另一値，这 D 当然必須是个矢量．这里的結局 E 是彼此間互相移动而且开出工段的一批列車的各种不同的分布格局．适宜的一組結局 η 中当然要包括“不碰撞”这一分量，而且也許还要包括其他分量．他的反应 R 則包括信号与点号的各种动作格局．T 是由所出現情况及信号員的反应确定地引向結局的一切所給事实——地理上、力学上与信号技术上等等的基本事实．

由此可見，不管內部复杂性达到任何程度的各种情形，从原理上說都可包括在我們的基本表示法中．

第十二章　受誤差控制的調节器

12-1. 上章研究了調节的性质，并說明要做到調节，必須适合某些关系和規律. 在那里，我們假定調节功能已起作用，然后再研究为此所必需的条件. 这一观点虽也有用，但跟实踐上所采取的并不相符. 現在我們要轉到新的观点上来.

在实踐上，調节問題往往是这样提的：給定了基本变量 E，以及这些变量所必須保持的一組状态 η——否則机体就不能生存(或者工厂企业的經营就不能維持下去). 这两項是必須首先給定的. 在执行甚至討論調节作用以前，必須知道什么是重要的和什么是需要的. 生物界的任何一个种都具有它所不可或缺的需要——猫身上必須保持干燥，魚則必須保持湿潤. 伺服机构必須由其他的考虑决定它的目的——一种伺服机构用来使孵卵室保持温暖，另一种則用来使冷藏室保持寒冷. 在本书中，我們都假定外界的考虑已决定了所要达到的目的，也就是說，已經决定了一組适宜状态 η. 因此，我們在本书中所关心的問題，仅仅是怎样使基本变量保持在这一組适宜状态內变化，尽管外界有什么干扰和什么困难.

干扰 D 的害处是要把 E 赶到 η 这一組状态之外. 若 D 通过某能动系統(环境) T 而起作用，則开始时的直接影响图是

$$\boxed{D} \rightarrow \boxed{T} \rightarrow \boxed{E}$$

但机体(或是关心 E 的任何人)則有某种能力来形成另一能动系統 R(如大脑或伺服机构)，它能与 T 耦合，而且如果把它做得合适的話，可与 T 形成一个整体 F，將直接影响图变为

$$\boxed{D} \rightarrow \boxed{F} \rightarrow \boxed{E}$$

使 F 能将自 D 那方面流向 E 的变异度堵塞住，从而使 E 能保持在 η 內.

T 往往是已經給定的、在調节作用中，机体所面临的这一环境 T，我們总认为是和机体中所要調节的那些部分一起給定的．这环境我們不能取消它，但往往可以运用它．因此，一般說来調节問題就是：

給定 E, η, T 和 D，要造出机构 R，使 R 与 T 耦合之后所起的作用，能把 E 保持在 η 內.

从这里起一直到书末，我們要研究怎样用各种类型的数据 (E, η, T 和 D)，来規定带輸入的机器 (R) 該具有什么形式，使之能完成調节作用．我們需要推算出 R 的形式.

如果事情都象表 11-3-1 中那样的簡单，这个問題也就馬上可以讲完了．但事实上我們有偏离那一形式的多种不同的可能，因此就要来考虑多种不同的偏离，看它們对我們設計或規定調节器 R 时，会給我們产生什么样各种不同的困难.

現在我們可以假定，在討論某一調节作用时，对重新規定系統（見 11-16 节）的这种可能性已充分加以利用，因而問題就变成象 11-3 节中那样能給予完善的調节和控制的情形，或是象 11-4 节中那样不可能有这种完善的調节和控制的情形．本书以后所要讲的，主要是那些不可能有完善調节，而只希望把調节作用在所給条件下弄得尽可能好的情形.

12-2. 感觉与动官限制　我們可以从下面这个簡单的情形来初步体会实际困难，这就是当 R 这个把变异度从 D 傳到 T 的通道的容量不够大，不足以按必需变异度律所要求的那样，来把 E 的变异度减到 η 的范圍內．如果出現这种情形，調节作用就必然是不完善的.

这类現象的例子是多不胜数的．首先就是所有那些受感官限制的情形，如耳聾，如汽車司机因擋风窗受雨淋而看不清道路的情况．又如有的机体不能看到紫外綫，还有脊髓痨性患者不能感觉出他的脚在什么地方．这些都是从 D 到 R 的通道容量受到限制

的例子.

还有一种限制是从 R 到 T 的通道的限制,是从 R 的作用端方面来的限制. 例如丧失一臂的人,不能飞的昆虫,不能分泌的唾腺,卡住了的舵.

对 R 的容量也同样可以产生限制的一些情形是:当 R 对 T 的作用是矢性的,也就是当 R 是通过一个以上的通道或分量而作用于 T,而 R 作用所及的 T 的参数个数减少时的情形(比較 7–12 节). 例如若司机座位旁有一操纵器失灵,就会使司机把車开好的能力受到损害.

R 不能获得关于 T 的初态的全部信息(11–19 节中討論过的),这种情形实际上也包括在上面所讲的情形里. 例如鉄路信号員在有雾天气就遇到这种困难. 他对出現干扰因素"雾"这件事是消息灵通的,但他常常很难判断他所控制系統的現状,即他所管路段上各个列車的位置. 由于从 T 流到 R 的信息有这种限制,于是要維持完全的控制就常常发生困难甚至成为不可能.

12–3. 11–4 节中的基本表示法里,我們假定調节过程要依照下列次序陆續通过一些阶段:

(1) D 处要出現某一特定干扰;

(2) 这干扰作用在 R 上,由 R 把它变成一反应;

(3) D 与 R 的二值同时作用在 T 上产生 T 的輸出;

(4) 輸出是 E 的一个状态,或者說輸出影响到 E.

这样,(3) 中假定若 R 是一实有的物质系統,它的所有工作就在 T 开始动作以前完成. 換言之,我們假定調节器 R 的动作速度比 T 高一层.

R 与 T 在动作方面的这种先后次序,在許多情形下是确实会出現的. 例如当猫走近来时,耗子的反应可能是在猫的爪子扑出以前就钻进洞里去了. 我們一般就說机体对(D 处的)威胁而不对(E 处的)禍患本身起了反应,从而抵御了禍患. 所以这种說法对許多重要的調节作用确实具有代表性.

另一方面也还有許多重要的情形,不可能有这种先一步完成

調节的动作，在那里 R 的动作在(T 处)的結局还未开始决定以前是不能完成的(下节有这样一个例)．在这种情形下，11-3 节中所設想的那种調节作用就不可能有．那末我們該怎么办呢？

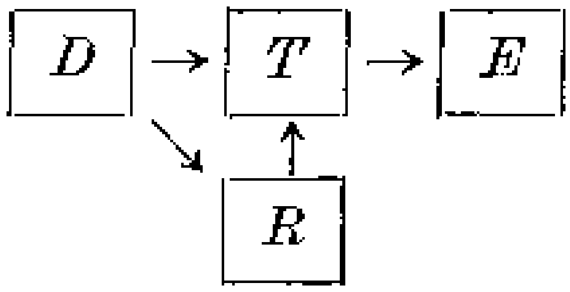
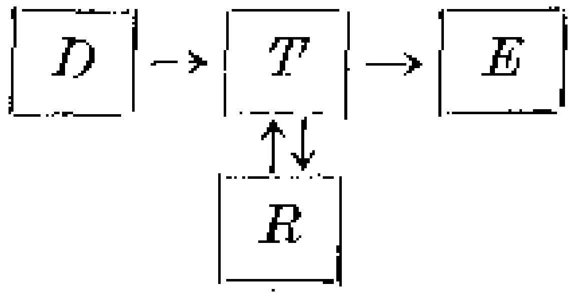
方法之一当然是使 D 到 R 的信息加速傳輸；事实上許多調节系統也有許多裝置是专門为这一目的而設的．原始神經纤維生出髓鞘，使信息能向大脑流通得快些．有些机体具有嗅覚，使其在身体直接接触到干扰作用以前就能及时准备好适当的反应．經济系統用电报通信而不差专人送信，为的是使載运鮮貨的船只抵达港口以前可以把装卸的准备工作做好．

但有时要让通过 R 的信息傳輸加快办不到或者缺乏这种加快的設备，因而不能使干扰的后果开始出現以前让 R 的反应傳給 T．在那种情形下，不完善的調节至少跟条件所允許的任何办法一样好．底下几节就讲这不完善的調节是怎样进行的．

12-4． 調节与誤差　对干扰 D 不能作直接反应的調节器中，有一种是大家都很熟悉的，即是有恒温器控制的沐浴設备．这种設备不会說："我看到有人拿了冷罐子要浸到浴盆里来了，現在我必須进行調节工作"．情形正相反，只有等到水(E)的温度确已开始下降，調节器才能接到有关干扰的消息．对于其他可能有的干扰，比方說是照射进来一片阳光，或是因浴室的門打开后未关好而吹进一陣风来，調节功能也都有这种限制．

許多重要的調节器都有这一类局限性．比方說人体中有一种使組織中供氧量保持一定的机构：如人因任何緣由而連續长期缺氧，結果就会使血液中所含的紅血球数增加．因此，患某些类型心脏疾病的人和居住在空气稀薄高原上的人們，就容易发生紅血球增加的現象．引起这种調节作用的信息并不来自心脏病的病因(D)或想住到高原去的决心，而直接来自不良后果(缺氧)．

从信息論的观点說，这新現象是容易和旧現象連系起来的．不同之处只在于：在这新現象里，从 D 傳到 R 的信息(如果調节器 R 要起什么好作用的話必須有信息傳到 R)是通过 T 而来的．如果以前是

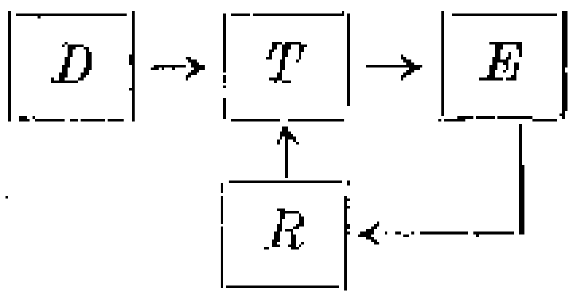
 那么现在是 

因此 R 是通过 T 而获得关于 D 的信息的：

$$\boxed{D} \to \boxed{T} \to \boxed{R} \to$$

所以为供調节之用的信息，是那些必須通过 T 經历編碼后而殘留下来的信息(8-5 节)。

有时 R 所能收到的信息还要通过更长的途徑，因而只有在 E 已确实受到影响之后 R 才受影响而起作用。这时的直接影响图是



这就是簡单"受誤差控制伺服机构"的基本形式，这种机构也叫"閉圈調节器"，其中 E 到 R 有反饋，这是大家都很熟悉的。讀者应当认識到这种形式跟以前(11-4 节)的基本表示法相似，不同之处仅在于来自 D 的信息現在是要通过更长的途徑才能到达 R 了：

$$\boxed{D} \to \boxed{T} \to \boxed{E} \to \boxed{R} \to$$

这里，R 所能收到的(信息)也只是那些通过 T 和 E 后还能保留下来的信息。

这种調节形式是极为重要而且用处最广用的形式。本书往后就专研究这种形式(另外两种調节形式比起来簡单得多，无需大加討論)。

12-5. 受誤差控制的調节器有一个基本性质，即它按 11-3 节的意义不能是完善的。

現在假如我們要用 11-3 节与 11-4 节中的方法来描述受誤差

控制的系統．取一个复式表，以 D 及 R 来定 E 的結果．每一列的变异度等于 D 的变异度．这里不同的地方是規則必須有所改变．在以前，当 D 选定了一个状态之后（为某一特定干扰），則 R，从而 E 便随之而定，而如今，則在 D 初步选定一个状态后，R 所取的值必須是結局 E 的确定函数（因 R 是受誤差控制的）．容易証明，在这些条件下，E 的变异度就要跟 D 的一般大，这就是說，不管 R 是怎样造的（卽不管用什么变换来把 E 的值变成 R 的值），它不能完成調节作用．

如果不需要严格的邏輯証明，我們可用較簡单的推理来說明为什么情形必須是这样的：我們已經知道，R 是通过 T 与 E 而获得信息的．假定 R 以某种方式起了調节作用，这就意味着 E 的变异度減到比 D 的小——也許甚至減到零．这一減低的結果使通道

$$\boxed{D} \rightarrow \boxed{T} \rightarrow \boxed{E} \rightarrow$$

有較小的容量；若能将 E 保持得近乎不变，則通道就近于堵塞．所以，若 R 使 E 保持不变的調节功能愈好，則 R 将其用以获得信息的通道堵塞得愈利害．在这样的情况下，如有 R 能起什么調节作用的話，那末很明显，这一作用至多是片面的．

12-6．但是幸好在許多情形下并不需要有全面的調节作用．在这以前，我們倒是把基本变量 E 的状态清楚划分成“正常的”（η）和“致命的”，因而一出現“不好的”状态就会跟調节作用完全不相容．但事实往往是这样：系統具有連續性，所以基本变量状态的好坏，是沿着一根表示好坏量的尺度而連續变化的．因此陆生动物在渴死以前，体內逐漸經过許多不同程度的缺水状态，而在这一变化过程的半路上，如果出現合适的逆变化，并且終于使动物保全了生命的話，那么这一变化也很可以称做是“調节性”的，虽然它并不能使动物免受痛楚．

因此，如系統的状态有連續性，就能使那种虽非完善但在实践上至为重要的調节作用可能实現．小的誤差是容許发生的；然后将这些誤差的信息傳給 R，就使防止发生大誤差的調节作用有可

能实現．用通訊工程中的术語来說，这就是簡单反饋調节器的基本理論．

12-7．讀者也許会覺得剛才对受誤差控制的調节器有点太过分重視了，因为我們在前面把一些熟知的事实讲得那么細致．但是把道理讲得这样細微明确也許是合适的，因为我們現在就要把受誤差控制的調节器这一問題，推广到比平常广得多的一批問題上去．

装在确定性机器里的这一类調节器是大家早已熟悉了的．在那里这就是伺服机构，恒溫調节器，生理学上的体内稳定机构等等．但这种調节器也可体現在非确定性机器中，而由此所产生的一类現象虽在工业用的机器中并不多見，但对生物系統来說却是极常見而又是极重要的．这一問題我們在 12-11 节中还要再讲．暂时我們先叉开談一件别的事情，即所謂"非确定性"机器这一概念中究竟包含什么意思．

馬尔可夫型机器

12-8．現在我們所要讲的一类机器比第一篇和第二篇中所讲的要普遍些［从写书的邏輯次序讲这一問題早就該讲了，但在那两篇里讲确定性机器（即有单值变換的机器）的地方是那么多，因此若再夹讲更普遍类型的机器可能会引起混淆］．

所謂一架"机器"主要是指这样的一个系統，它的性态具有足够的規律性或重現性（即循环性或周期性），使我們得以对其未来的动态能作某种預测（7-19 节）．如果能作一种預测的話，这一預测可能表現为各种不同的形式之一．对某一机器来說，我們也許能預测它的下一个状态——那时我們称这机器为"确定性"的，这就是第一篇中所讲的那种机器．对另一机器来說，我們也許不能預测它的下一状态，但我們也許能預测：要是同样的条件能重复出現好多次的話，那末会发現各种不同状态出現的頻率可能具有某些数值．頻率可能具有定值这一情况我們在 9-2 节中已經指出过．这是馬尔可夫鏈的特征．

因此我們可以考察新的一类絕对系統：这类系統中状态随时間而变的規律并不由单值变换确定而是由一轉移概率矩陣来确定．但要使它保持为同一个絕对系統，各个概率的值一定不能变．

在 2-10 节中曾指出，一个单值变换也可用轉移矩陣来規定，但在矩陣格子里填的概率只是些 0 和 1．在 9-4 节中，一馬尔可夫鏈也是用矩陣来确定的，但格子里填的是些分数．因此，一个确定性絕对系統只是馬尔可夫机器的一种特殊情形；它是当馬尔可夫机器中的所有概率都变成 0 或 1 时的一种极端形式(参照 9-3 节)．

一架“带輸入的机器”是一批絕对系統．各个絕对系統之間由一参数所取得的值来区别．一架带輸入的馬尔可夫机器同样也必然是一批馬尔可夫机器，由一組矩陣来規定，以一参数及其所取的值来指出在某一步时应該采用哪个矩陣．

馬尔可夫机器这一概念是普通确定性机器(第一篇中就統統讲这类机器)概念的自然推广．如馬尔可夫机器中的概率都是些 0 和 1，那末这两种机器的概念是一致的．如果所有的概率都很接近于 0 和 1，那末这一机器就几乎是确定性的，但偶尔也会出現非常的状态．若各个概率跟 0 和 1 相差愈来愈远，則机器就一步步地变得愈来愈不是确定性的，而愈来愈象 9-4 节中所讲那群昆虫所形成的系統的动态了．

应該指出，这一定义虽未曾把話完全說定，但在某些方面說仍然是絕对严格的．如果处于状态 x 的机器在 90% 的情形下会变到 y，而在 10% 的情形下会变到 z，那么这两个百分数就必須是不变的(意思是說，当把序列弄得愈来愈长的时候，相对頻率必須趋近于这两个百分数；而当我們接二連三地用别的序列来代替时，这两个极限不能改变)．这在实踐上的意义就是說：决定这些百分数的条件必須保持不变．

讀者通过做底下的练习題，就可熟悉这一概念．

題 1: 一鐘摆在左右两极端位置 R 与 L 之間来回摆动，在当它处于右方 R 的位置时有 1% 的机会卡住在那里．求它的轉移概率矩陣？

题 2: 一确定性机器 α 的变换是

$$\downarrow\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ B & D & D & D \end{array}$$

一馬尔可夫机器 β 的轉移概率矩陣是

↓	A	B	C	D
A	0	0	0	0
B	0.9	0	0	0
C	0	0	0.2	0
D	0.1	1.0	0.8	1.0

問它們的性态有什么区别?(提出:作 α 的图,再让 β 矩陣的概率变到 1 或 0 之后作 β 的图.)

题 3: 一个带輸入的馬尔可夫机器,它有一个参数能取 p, q, r 三值,机器本身則有两个状态 a 与 b,其轉移矩陣为

(p)

↓	a	b
a	$\frac{1}{2}$	1
b	$\frac{1}{2}$	0

(q)

↓	a	b
a	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
b	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

(r)

↓	a	b
a	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
b	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$

現它从状态 b 起开始动作,經过一步后輸入在 q,再过一步輸入在 r,在过一步輸入在 p. 問現时它处于 a 或 b 的概率是多少?

*题 4(續): 若用矩陣乘法,就能有什么一般規則使我們可把解答写成代数形式?(題示: 題 9-6-8.)

题 5: 設有馬尔可夫机器(能取状态 a, b, c; 輸入状态有 α, β)

α:

↓	a	b	c
a	0.2	0.3	0.3
b	·	0.7	0.2
c	0.8	·	0.5

β:

↓	a	b	c
a	0.3	0.9	0.5
b	0.6	0.1	0.5
c	0.1	·	·

与另一馬尔可夫机器(能取状态 e, f; 輸入状态有 δ, ε, θ)

δ:

↓	e	f
e	0.7	0.5
f	0.3	0.5

ε:

↓	e	f
e	0.2	0.7
f	0.8	0.3

θ:

↓	e	f
e	0.5	0.4
f	0.5	0.6

試用变换

$$\downarrow\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \varepsilon & \delta & \theta \end{array} \qquad \downarrow\begin{array}{cc} e & f \\ \beta & \alpha \end{array}$$

把这两机器耦合起来．所得結果是什么样的一个馬尔可夫机器(无輸入的)？(提示：先試把所有的概率换成 0 和 1，使各系統成为确定性的，并按 4-8 节的方法做；然后再让各个概率变成分数，再按同样的基本方法做．)

*题 6(續)： 新矩陣是否非得仍是馬尔可夫式的？

*題 7： 若馬尔可夫机器 M 主制确定性机器 N，試証只有在 M 到达統計平衡状态(照 9-6 节所讲的意义)之后，N 的輸出才能成一馬尔可夫鏈．

12-9. 給我們一架现实机器，要想知道它是馬尔可夫式的还是确定性的，有时就要看机器能被观察到的地方有多少而定(3-11 节)；有时，现实机器可能是这样的，只要观察能力的范圍稍有变动，就能使机器的外表行为从一类变到另一类．

例如，設将一条长紙带送到电子数字計算机上，紙带上带有要电子計算机来处理的一批随机数字．若带子是磁性的，对于观察不到带子上磁性情况的人来說，电子計算机的輸出不是确定性的；但若观察者已有一分磁带所录数字的記录，那么对他来說这輸出又是确定性的了．因此，除非已明确規定观察者的观察能力范圍，那么提出“这机器是否确为确定性的？”这种問題是无意义的，也是不恰当的．换言之，有时馬尔可夫式的与确定性的两种机器之間的区别，只有在系統准确規定之后才能分辨(因此这一个例子又足以說明，要把“系統”說成是一个现实物件，用这种方法来定义“系統”是多么不够．现实物件可以提供給我們多种多样都是同样有理可說的“系統”，而这些系統就其为我們所关心的那些性质来說，都可能是相差极为悬殊的；因此对某一特定問題作什么回答，可能就要因所处理的系統不同而大有差別)(参看 6-22 节)．

12-10. 馬尔可夫式机器与确定性机器之間有密切关系这一事实，也可从有混合形式机器存在这一点看出来．例如，假定如图 12-10-1 所示有一包含九格的迷陣，其中 G 是最后目标，并假定白鼠已部分記住了迷陣的內容．設在繪有阴影綫的 1, 2, 3, 6 这些格里，白鼠不能从感官方面得出該往何处跑的綫索(用什么方法办到这一点的情形不必在这里細說)，因此白鼠跑到这种格子的任何一格中之

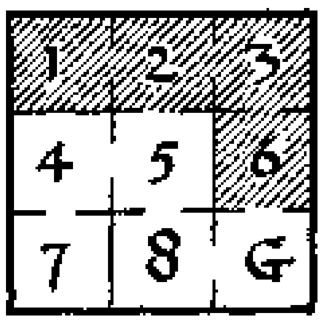


图 12-10-1

后，只能依迷陣所許可的通行路綫而作随机行动．因此，若每次都把它放在格 3 中，它就将以同样的概率跑到 2 或 6 中去（这里假定以同样的概率，只是为討論方便起見而假定的）．但若在 4，5，7，G 这些格中，它就能获得該跑向何处的綫索，而会直接穿过一格又一格跑向目标．例如，若每次都把它放在格 5 中，它就总会通过 8 跑到 G 处．在生物界中，这种性态并不是一种很不常规的現象．

它的轉移矩陣是很容易求出来的．例如，若从 1 开始，它就只能跑到 2（由迷陣的构造所致）．从 2 它可以同样的概率跑到格 1，3 或 5．从 4 它只会跑到 5．从 G 它的下一步位置只可能还是 G．这样矩陣就可以写出来了．

题：写出白鼠可能有的轉移概率矩陣．

12-11． 稳定性　在細致考察之下，可发現馬尔可夫机器具有相应于第一篇中所述的那些性质，尽管这些性质往往有了明显的变化．这样，机器的动态图綫就可以画出来；虽然由于变换不是单值的緣故，图中从每一状态出发的箭头可以不止一个．例如，馬

↓	a	b	c
a	0.2	0.3	0.1
b	0.8	0.7	0.5
c	·	·	0.4

尔可夫机器的图綫如图 12-11-1 所示，其中每一箭头旁的小数指出所示点按該箭头方向轉移的概率．

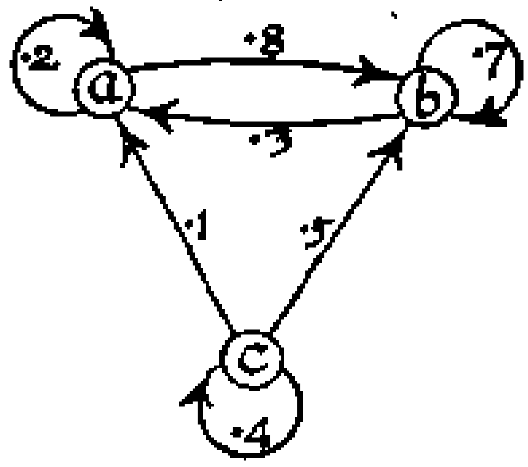


图　12-11-1

在这一特例中可以看到，若系統在状态 c，它就早晚会离开这一状态，再也不回到原处．

一架馬尔可夫机器也有相应于第五章中所讲各种不同形式的稳定性．所謂稳定域是指这样的一批状态，只要所示

点一旦取得其中某一状态，它就再也不会取这批状态以外的其余状态了．例如图 12-11-1 中的 a 与 b 就形成稳定域．

一个平衡状态并非就是缩为单独一点(状态)的稳定域．正负

在第三步之后有 $\frac{1}{8}$ 到达状态 a

这样一直下去．因此，从 b 到 a 所需的平均时間是

$$\frac{\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{8}\times 3+\cdots}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots}=2\text{ 步}$$

如果循有些变迹来变，所需的平均步数还要比 2 大得多．

正如大家所熟知的，系統在平衡状态附近的性态是“有目标”的，平衡状态就是它的“目标”．馬尔可夫系統也有相应的現象．但馬尔可夫系統并不是一心一意地奔向它的“目标”，而是犹豫不决地奔走在各种状态之間，不过若它并不处于平衡状态則总会改变它所处的状态，而若它已碰到平衡状态的位置，它也同样总会停留在那里．平衡状态对于这种系統来說仍象是它的“目标”，但系統好象是在采取一个随机序列的状态而到达那里的，它以后怎样变动还是停住不动，要看它到达什么状态而定．所以当一个馬尔可夫机器向平衡状态变动时，我們就看到，这是“边試边改”然后达到目的这样一种过程性质的客观描述．

这里值得指出的是：普通对于“边試边改”这一方法是应該有这样的意思的：按照这一方法的主要精神，“試”应該是多次的持續不断的試，而不是单独一次的試．“改”和“試”并提也是不恰当的，因为重要的是最后要获得成功．因此，如果用“寻踪追击(hunt and stick)”这句話来描写这一过程，那不仅更加生动而且也更加准确．以后倒不如用这种說法来描述．

所以以“寻和追”这种方式趋向目标的运动过程，据 12-8 节中所讲，是和确定性机器趋向目标的运动过程同調的（見 12-8 节），因为两者都是机器趋向平衡状态的运动．只要用的时候小心点，可以对这两种机器应用同样的一批原理和論点．

題 1: 題 12-10-1 所述的系統有什么平衡状态？

題 2: 一馬尔可夫机器的矩陣是

↓	a	b	c	d	e	f
a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	·	·	·	·
b	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	·	·	·	·
c	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	·	·	·	·
d	·	·	1	·	·	·
e	·	·	·	1	·	·
f	·	·	·	·	1	1

这机器多次都从 a 开始运轉；怎样用白鼠迷陣心理学上的术語来描写它的性态？

馬尔可夫型的調节作用

12-12. 单独一架馬尔可夫型机器趋向一个平衡状态的过程，比起确定性机器的过程来要不規則得多，因此在工业上很少用馬尔可夫型調节器．跟普通伺服机构的平稳而直接的調节作用比較起来，馬尔可夫型調节作用确乎显得很笨手笨脚．但生物机体常运用这种更一般的調节方法，因为总的說来，运用这种調节方法的机器，它的制造和維护都要容易得多；如果受到小的損伤，它也不易因此受到影响．在速度和效率不重要的許多簡单調节作用里，事实上就是常常用这种方式来进行調节的．

这种調节作用的头一个例子是：假定房間里的人要調节室內蒼蝇的数目，使它等于或接近于零．如果在适合的場所放一張捕蝇紙，这对蒼蝇的数目并不会起确定的改变．但有了这捕蝇紙之后，每个蒼蝇的唯一的平衡状态是"粘在紙上"，而"不在紙上的蒼蝇数目"这个变量的平衡状态是零．这一方法很原始，但它有一个很大的好处是設备要求很低，而实用起来足够有效．

打高尔夫球的人也常用类似的調节方法，在有球的那块地方去找一个失去了的球．这里的状态是他在那块地方的位置，他的变化規則是：除了一个状态以外，"不断来回轉悠"；而那个例外的状态是"不再轉悠"．虽然这种方法可能不是理想的，但毕竟不失

为一种简单的調节方法.

另一个低效率的調节作用的例子是:設有脑部受了伤的白鼠,它已經不能記住迷陣中的任何情况,但它能认得食物,只要一碰到食物,它就能停下来去吃(試把这一性态与那种見了食物并不停下来去吃的白鼠的性态相比). 它在迷陣內的行程大部是随机的,并且也許还不断地重复犯些錯誤;但它的性态仍显出一种原始的調节形式,因为只要它找到了食物它就会停下来吃,就会維持生命,而那不知道停下来吃食物的白鼠,就只会不断地奔跑餓死.

題:如果做一种掷硬币的游戏,規定掷出后"正面朝上我贏,反面朝上大家都輸". 問这种游戏是不是調节性的?

12-13. 在这以前,我們只考察了馬尔可夫机器趋向目标运动的方式. 从原理上讲,它同确定性机器的唯一不同之处仅在于它的动态图不是唯一的. 只要我們記住这一差别,那末本篇以前各章所讲的一些概念,都可用到馬尔可夫机器的調节作用上去.

[在11-11节(第五段)中所提出的注意事項讀者必須記住. 使馬尔可夫型机器沿变迹运动的各步間的步距,同从一种調节作用(按11-3节的意义来讲就是"走一步")到另一种調节作用間的步距比較起来,前者的数量級应是属于較低阶的. 在后一种情形下的各步轉移相当于从一个变迹轉移到另一个变迹,这跟在同一变迹上从一点轉移到另一点的情形很不相同.]

所以11-4节中的基本表示法对于 T 和 R 中的机器是确定性机器或馬尔可夫型机器都适用,都可給出切实的結果. 这两种情形在原理上并无差别,虽然用心理学上的术語或用人性論上的术語来描写它們的性态时,看起来可能显得很不相同,例如,若要求 R(对一定的干扰而言)的調节能力表现在它能趋向某一状态,则确定性的 R 就直接变向該状态,好象它深知它所需要的东西是什么似的,而馬尔可夫式的 R 則看起来好象还是在找它的目标似的.

馬尔可夫型机器也可象确定性机器一样用来作为控制手段;

因11-14节中的讲法对它們两者都可用(那里只关心所得到的結局是什么,而不問它們是怎样达到的). 用馬尔可夫型机器来作控制手段,缺点是它的变迹不确定,但它的优点是易于設計.

12-14. 用否决器来施行調节作用 11-4节的基本表示法应用非常之广. 它的最重要的特殊情形可能就是:当 T 与 R 都是机器(确定性的或是馬尔可夫式的), E 的值取决于 T 所能达到的某一(或一些)平衡状态,而 η 则是具有某种所需的或合适的性质的某一(或一些)状态. 大多数物理調节器都属于这一类型. 若 R 与 T 是馬尔可夫式机器, 則要以 R 的作用来把 T 带到所需要的平衡状态是立刻可以做到的,只要我們利用这样一个基本事实:若两机器互相耦合(如同現今我們假設 T 与 R 就是这样的)則要整体达到平衡状态, 只有当每一部分在另一部分的影响下本身处于平衡状态时才有可能. 这一論点在5-13节中是关于确定性机器来說的,但它对馬尔可夫型机器来說也同样成立.

設調节器 R 是照着下面的样子造的. 我們让它有一个能取二值 β 及 γ 的輸入. 当它的輸入是 β (代表"不好"的輸入)时,让它的状态都不是平衡状态,而当它的輸入是 γ (代表"好的"輸入),让它的所有状态都是平衡的. 現在把 R 跟 T 耦合起来,使属于 η 的一切状态在 R 的輸入处都变成了 γ 值,而其余的状态都变成 β 值. 現在让整个系統循某一变迹变动. 整个系統所能达到的平衡状态,必須是使 R 处于平衡状态的那些状态(据5-13节); 但这就意味着 R 的輸入必須是 γ, 从而又意味着 T 的状态必須是属于 η 的一个状态. 这样,根据 R 的造法,使 T 的一切平衡状态除了那些属于 η 中的以外,一概都被 R 否决了. 因此整个系統是有調节作用的;并且由于这里的 T 和 R 都是馬尔可夫式的,所以整个系統就好象是在找寻一个"所需要"的状态,而找到之后就紧追不放了. 我們可以把 R 看作是在"指揮着" T 的寻求.

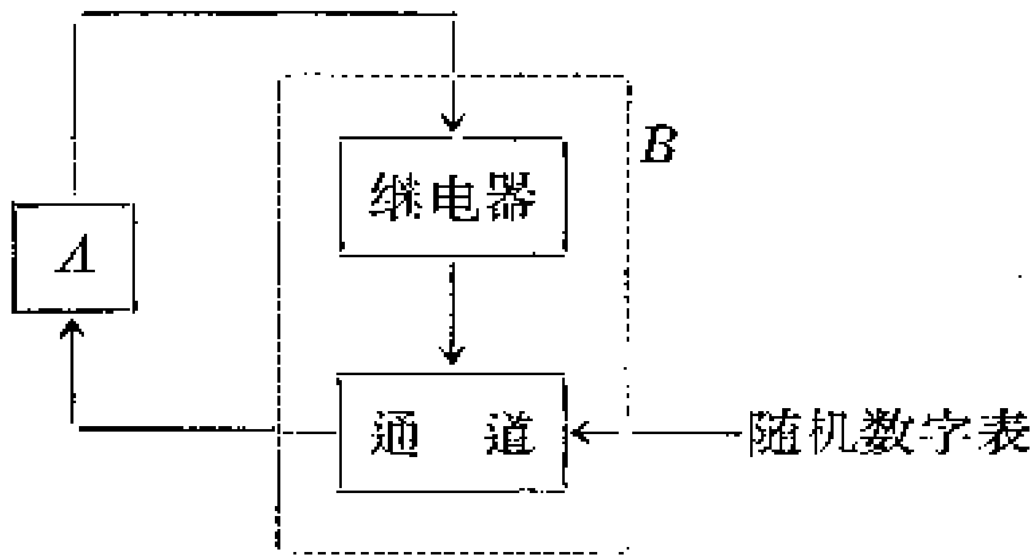
(至于 T 和 R 会陷入那所含状态不属于 η 内的穩定域,这种可能性是可以尽量弄得很小的,只要把 R 做得很大,就是說只要給 R 以許許多的状态,让它的 β 矩陣接头很多,使它不管从任何

状态开始变，总会以某个不等于零的概率变到任何别的状态.)

题 1：試簡述 γ 矩陣与 β 矩陣的独特之点.

*題 2：試証 5-13 节的論点对馬尔可夫机器也同样成立.

12-15. 內稳定器　按照这一形式，我們可以得到对內稳定器的另一种看法. 在 5-14 节中(讀者应把那一节再看一遍)，我們把它看作是整个地趋向平衡的一个系統，但在那里，我們把多档开关上的值看作是焊住了的，給定的，已經知道的. 因此 B 的行为是确定性的. 但我們可以重新規定內稳定器，使其包括以 Fisher 和 Yates 所編随机数字表中的值为决定因素(它們显然是这样的)的那些过程. 如果現在我們忽略(即假定沒有)开关上的电阻，那就可以把(5-14 节中的) B 这个部分看作是只由一个继电器和一个通道(接受表中数字的通道)所組成的. 現在我們把 B 看作是有两个輸入的.



B 的状态仍然是含二分量的矢量：其中一个分量是表中的值，另一个是继电器的值(通电或是不通电). 对于看不到随机数字表的人来說，B 是馬尔可夫式的(比較 12-9 节). 从 A 給它的輸入有两个状态 β 和 γ；并且我們把 B 做成这样，使輸入是 β 时沒有一个状态是平衡状态，而輸入为 γ 时每一状态都是平衡的. 最后我們还把它象 5-14 节中那样耦合起来.

現在整个系統是馬尔可夫型机器(只要数字表沒有被看到). 它趋向一个平衡状态(象 5-14 节中那样)，但对这个观察的人来說，它就好象是用"寻踪追击"的方式趋向平衡状态的，看起来象是随机地在搜寻它所要到达的目标，找到了才停在那里.

值得指出的是，只要当继电器的輸入是在β处时，表内的变异度就会傳到A；但当輸入是β时，就傳不过去了．所以继电器的作用就好比是个"龙头"，用以开閉从数字表流到A的变异度．若整个系統达到一个平衡状态，这平衡状态就必然是从表流过来的变异度被堵塞时的那个状态．現在它所到达的是这样的一个状态，使得表里的变异度（它会使整个系統离开这一状态）流不过来．这样，整个系統就好似自己把自己关閉在这一状态里（因此这就是說明4-22节中論点的一个实例）．

12-16．上节的例子說明这样一个系統里的一种調节作用，它是部分确定性的（A的各个磁鉄間的相互作用），部分馬尔可夫型的（部件B的通道所取的值）．这个例子說明所用一些概念基本上是一致的且又是普遍的．以后我們要随时利用这一普遍性，因此我們常常不再把确定性的和馬尔可夫型的机器区别开来．

用馬尔可夫型机器来司調节职能的还有另外一个例子值得一提，因为这个例子大家很熟悉．有一种孩子們做的游戏叫"热还是冷？"参与游戏的一个孩子甲（作为T）被人用布蒙住眼，别的孩子把一件东西放在（好些地方中的）一处地方，这样就相当于引入了干扰D．甲就到处用手摸索着去找那件东西，結果往往是找不到的．但这一摸索过程常可用乙（作为R）的参与使之变成有調节性的．乙能看到东西放在什么地方（从D傳来的輸入），它可以把信息傳給甲．傳信息的方式規定是这样的：設想要找的那个东西是能放热的，因此乙可以这样来把信息傳給甲："你身上很冷；还是很冷；現在暖和一些了；不，你又冷起来了……"[1]．孩子們就可以很高兴地看到这一过程的确是有調节作用的，因为这样甲常常能終于找到所要的东西．

自然，在这里起馬尔可夫型机器作用的是甲，因他是在乱摸，下一步往那摸，每次都是有些随机性的．乙的行为就显得比較是确定的，因他是要把甲和所找东西两者的相对位置，用一种准确的

[1] 或者可以用掌声的起落和大小，来把甲是否在接近所找物件的信息傳給甲——譯者注。

密碼傳告給甲的.

所以我們現在可以把用馬尔可夫型机器做調节看作是习見的和平常的事了.

确定性調节

12-17. 讲过了 T 与 R 体現在机器里的情形，并且研究了机器是馬尔可夫型的情形，現在又可以接下去討論 12-7 节中开始讲而中断了的問題，并且可以考察所有概率都变成 0 和 1 的那种特殊情形(12-8 节)，即机器是确定性的那种情形．我們仍然讲受誤差控制的那种調节器． 对生物学家来說，为了徹底探討較原始的調节方式，我們来考察反饋仅有两个状态的那种情形.

这种系統的一个例子是：电話总机的接綫員着手找一沒有占綫的綫路的情形． 接綫員按照一定的次序試接每根綫，每次获得"占綫"或"不占綫"的信息，等接到第一根不占綫(到达一个平衡状态)就不再試了．这里的一組干扰是各个綫路中"占用"和"不占用"的一切可能的分布情況．这个系統之所以是調节性的，因不管干扰是什么，最后的結果总是和一根不占用的綫接通.

这机构是受誤差控制的，因为决定継續往下試接还是接在一根綫路上不再試了，所依据的信息是从綫路本身得来的.

这一情形是如此簡单，好象近乎极端(或者說有点象蜕化的情形)．如果不計較 R 和 T 之間的內部作用，因而两者融合成 10-5 节中的 F，那末上述情形干脆就变成确定性系統在給定初始状态后沿确定变迹趋向一个平衡状态的情形．这样，有一平衡状态在 η 中的每个洼，就可說是表現出調节作用的一种簡单形式；因为它变动的方式是使初始状态的变异度(作为干扰 D)减小到最終状态所有的較小的变异度.

对在仓庫里穿行的老鼠說，情形也很相象；因为无論它走到那里，它总能返回它的洞穴．同样，对以逐次逼近法程序进行工作的計算机来說情形也大为相似；因不論开始的是什么值，以后逐步得出的諸值都是肯定地趋向一个目标的——这是唯一的平衡状态.

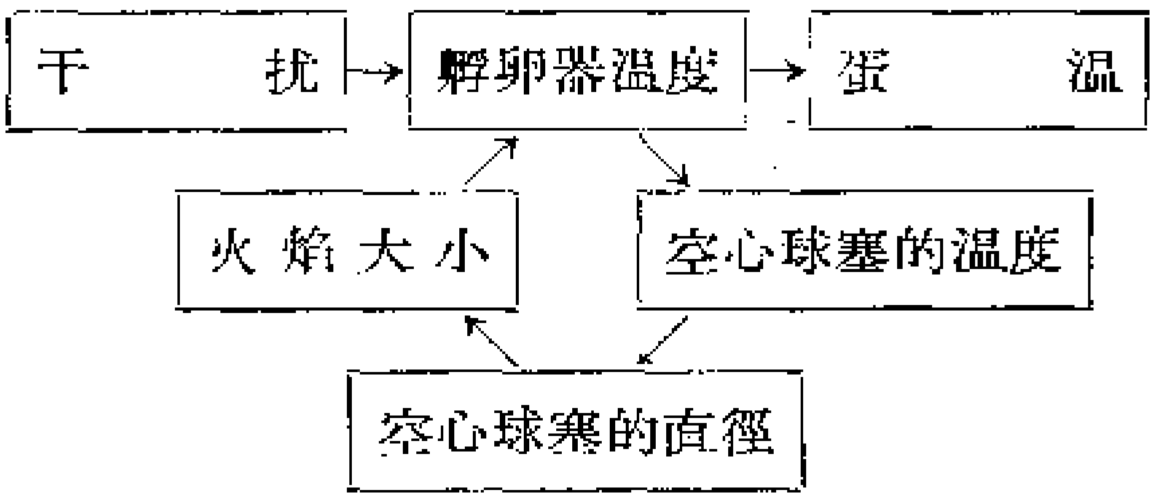
题：在一副洗好的52张紙牌中，要一張張地查找其中某一張紙牌．如果(i)逐張翻查紙牌，(ii)拿出一張紙牌之后，如果看了不是就又放回去重新洗过，再抽一張，照着这样不断做下去，那末在这两种情形下，平均說来，需要查看几張才能找到所要的紙牌？(系統地找与随机地找．)

12-18． 当机器都是确定性机器，可能产生12-14节中的問題：怎样能使T变到具有某种所需性质的某一平衡状态．在这时，12-14节那里在馬尔可夫型机器的情形下所得出的解决办法当然还是适用的：只要配上(耦合)一个否决器就行了．

12-19． 連續变异 在讲过这些原始的調节形式之后，我們要讲有連續变动变量的調节器(必須記住，如2-1节所讲的，連續是离散的一种特殊情形)．对現有的許多調节器我这里只能提一两件，因为我們这里只注意研究它們的一般原理．

有連續变量的典型調节器是煤气加热的人工孵卵器．这里机构是这样装置的，使空心球塞胀大的結果便能减小煤气火焰(或减小流到孵卵器中去的热空气量)；这样就能防止温度过高．

这里的直接影响图特别値得注意，它是这样的：

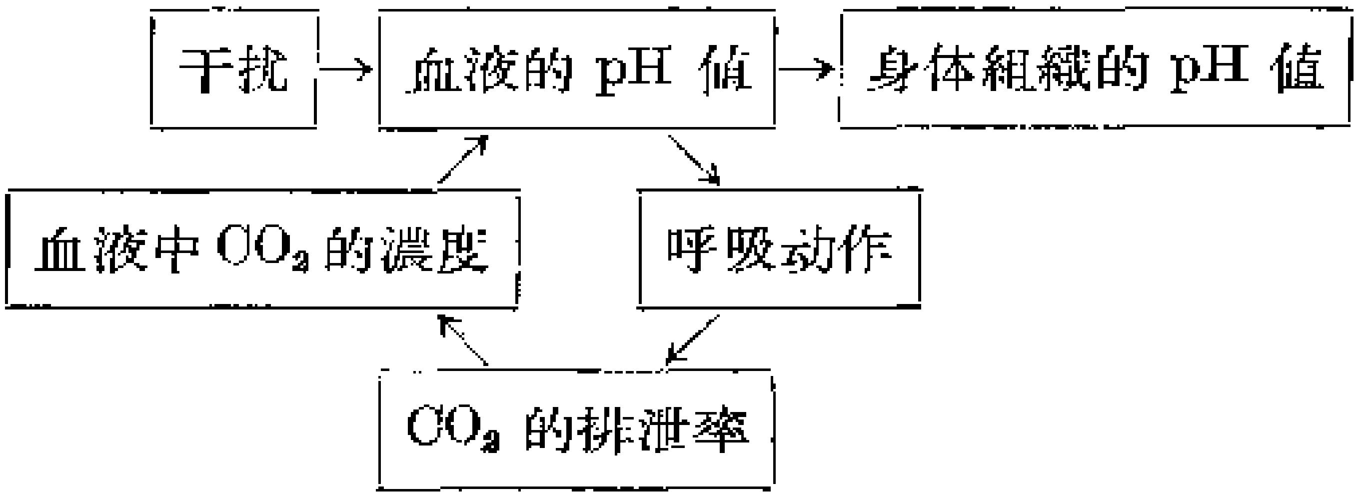


或者也可表示成其它等价形式．这里哪些是D, T, R和E是很容易看出来的(虽然T和R以及和它們的部件間的区分是有点任意的)．整个系統的作用是把来自干扰方面(不管这些是什么)的变异度堵塞住，不让它傳給(影响到)蛋上．如果稍稍变一下規定的方法，把調节器的任务改成使孵卵装置的温度保持恒定，那么这調节器就受誤差的控制而不是受干扰本身的控制了．

在这种形式的調节器里，系統当然必須对任何給定的干扰都是稳定的，所需的温度也必須是系統的平衡状态．因此循着回路

的反饋通常必須是負反饋.

活机体内的調节器有好多是属于这一种簡单形式的，卡农(Walter B. Cannon)的"人体的智慧"(The Wisdom of the Body)一书的讀者，对这些事实都是很熟悉的. 典型的例子是血液内二氧化碳的含量調节血液的 pH 值的情形：



这一系統又显示了上述調节作用的特点.

这种机构的例子是不胜枚举的，其中也包括經济机构. 拓斯汀(Tustin)的"經济系統机构"(Mechanism of Economic System)一书告訴我們，經济系統的种种性质跟我們在这里所讲的，有多么密切的关系.

題 1：就你所知的任何調节器，試画出它的直接影响图来.

題 2(續)：再想想还有什么别的参数能因它們的变动而影响調节器的工作；把这些参数添进图里去.

12-20. 为把調节作用讲得完整些，我們还值得提一下这一类調节系統的一个变种，这就是調节机构只能間歇地进行工作的那种系統.

比方說为使一个儲水槽的液面保持在两个高度之間，可以装一个虹吸管，使下端管口与水槽在較低液面处相通，而管的弯曲部分的高度和較高的液面相齐. 如果一般情况下进水量大于出水量的話，那么当水面达到較高的那个高度时虹吸管就会起作用，而当水面到达較低的那个高度时，虹吸管的作用就会停止，这样就使水面始終保持在两个高度之間.

生理上的許多調节器是間歇地进行工作的. 对冷引起顫抖的反应就是一个例子. 这种特殊的反应对我們特别有意义(請看

12-4节),因为其中只是在体温确实降落之后(从 E 发出的誤差控制)或是在体温尚未降落时因見到致冷的事物之后,才喚起了調节器的作用.

功率放大器

12-21. 本章的討論里常常提到輸出 E 是恒定的,但这种形式可以包括許多情况,其中有好些初看之下并无恒定的因素,讀者不要因 E 是恒定这一事实而漠視了后一种事实. 这个問題在11-15节中已經提到过,这里我們要考察一种在許多方面已有重要意义的应用,而且这一应用在讲到第十四章时还需要参考. 我說的是指那种能放大功率的調节器与控制器.

功率放大器有許多不同的形式. 这里我只讲一种,选擇一种簡单而明了的形式(图 12-21-1).

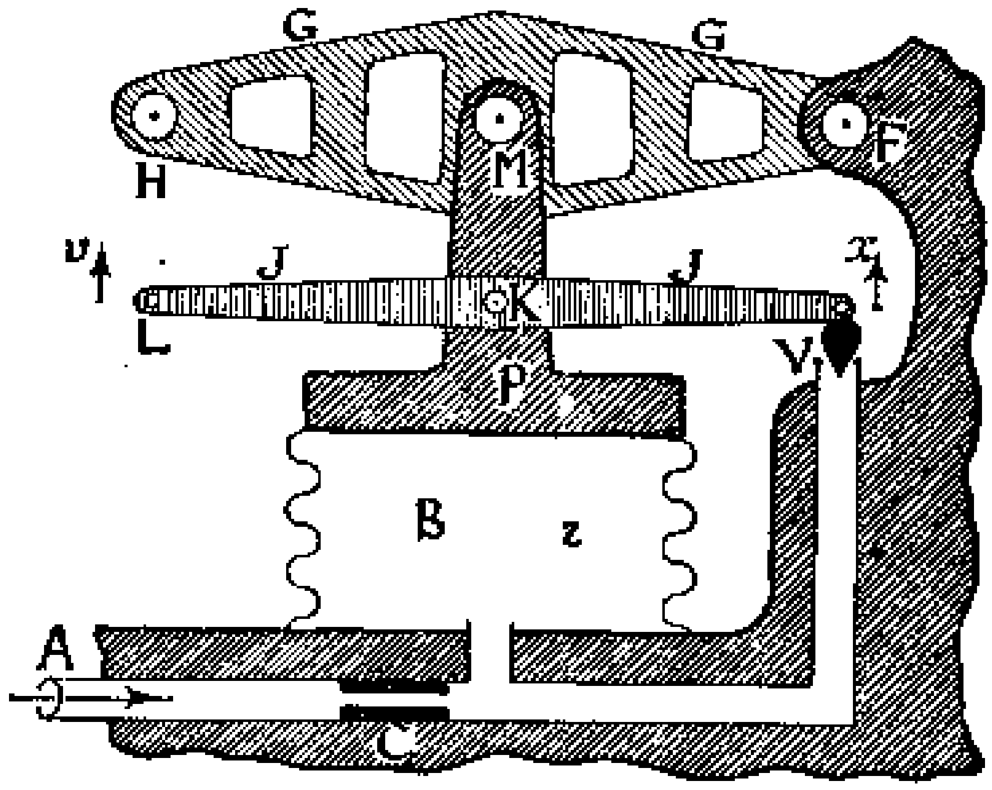


图 12-21-1

从 A 端可以送入儲备充裕的压縮空气,而这压縮空气在进入伸縮箱 B 或自閥門 V 处逸出以前,須流經窄管 C. A 处的压力比 B 中平常的工作压力要高得多,而窄管的管徑很小,所以空气流过 C 的速率是相当恒定的. 空气流过 C 后就必須在 V 处逸出,或者积儲在 B 中,使压力 z 升高. 在 V 处的逸出孔有一錐形閥門对气流起一些阻塞作用. 这錐形閥門装在一根剛性輕杆 J 的一端. 杆

J 能繞樞軸 K 轉动. 空气在 V 处逸出的快慢如何, 就要看錐形閥門 V 上下移动的距离而定. 故若 K 不动, 则杆的另一端 L 下降时会把錐形閥門提升, 使空气逸出, 从而使 B 内的压力 z 降低; 反之, 若 L 往上提, 则会使压力 z 上升.

B 内的空气压力能頂住一重物 P. 我們假定这 P 往上通象个柱体, 而且整个重物只能上下移动. 柱上裝有两个樞軸 K 与 M. M 是一粗杆 G 的樞軸. 杆 G 的一端 F 是固定在另一樞軸上的. 故若 P 往上移动, M 也必定往上移动同一距离, 于是 G 的可以自由运动的一端 H 就必定往上移动两倍的距离.

現在我們来看, 如果移动 L, 会出現什么情况. 假定有人把 L 提起一英寸, 另一端 V 就立即下降一英寸, 閥門就关紧一些, 跑出去的空气也少一些, 在 B 中积儲的空气就多些, 使压力上升. 在压力上升之后就把 P 往上頂, 从而也把 M 和 H 往上頂. 所以 H 的动作有抄襲 L 的动作这种趋势 [我們可以注意到, P 的上升运动 (L 在提升一英寸之后是固定了的) 会使閥門 V 开放, 故整个系統对 L 的动作所引起的反应是自制性的 (self limiting), 因反饋是負的; 故在某种定量的詳細規定之下——这在任何特定問題中都需要作严格准确的討論——这系統在平衡状态是稳定的, 而这一平衡状态的位置则由 L 的位置决定].

于是整个系統也可以看作是这样的一种稳定系統, 它的反应是, 虽则 L 处(比方說是)一英寸的移动将也会引起 V 处一英寸的移动, 但整个系統的反应却要抵消 V 处的这一移动. 所以整个系統可以看作是使 V 的位置保持固定的那种系統.

現在我們可以看到怎样来把这系統变成功率放大器, 用来作为杠杆.

假定設計时让杆 J 是輕的, 并且把閥門做成一种合适的形状, 使逸出的空气, 或压力 z, 对需要施加在 L 处的力不起影响. 同时又使 B 对 P 有大的施力面积, 并使平均工作压力 z 是高的 (A 处的压力还要比这高些). 如果設計得好, 那末在 L 处施一小小的力, 把它提升一英寸, 就足以在 H 处产生大的力, 能将一重物提升

同一高度．于是，比方說在 L 处有一磅的力使 L 移动一英寸，就可能在 H 处产生 1000 磅的力移动一英寸．因此这就成为一种功率放大器．

以上只不过是簡单的具体例子，把前面讲过的調节与控制原理解釋清楚．以后(14-1 节)我們还要再提到这个例子，因为我們还需要搞清楚，为什么一方面有能量不能无中生有的能量守恒定律，而另一方面又能作出功率放大器．

题 1：P，J，G 三物体的运动各有几个自由度？

题 2：試把上述系統改装一下，使 H 的运动与 L 的反方向，但仍保持平衡状态是稳定的．

题 3：再把这系統改装一下，使平衡状态是不稳定的．

博奕游戏和对策

12-22. 調节和控制这个問題的范圍是非常广的，前面所讲的仅仅是些开場白．若 D 与 R 是矢量，且若最后使 T 或 E 处所得結局的組合在时間上是这样分布的，以使 D 与 R 的分量是交互出現的，那么这类問題的研究又成为調节和控制方面的一門大的学科．在这种情况下，所呈現的整个干扰以及所产生的整个效应，都各自由一系列从属的干扰与从属的效应所組成．

例如在野生动物的生活中，当一个被猎食的动物設法調节猎食动物对它的攻击时，当整个生存斗爭的过程通过交替的威胁与防御阶段而进行时，情形就是如此．这时，猎食动物的整个襲击行动包含一系列的动作 $D_1, D_2, D_3, \cdots$，而每一这种动作各自引起被猎食动物的一种反应，因而整个反应也形成一序列 $R_1, R_2, R_3, \cdots$．因此整个生存斗爭过程包含一个二重序列

$$D_1,\ R_1,\ D_2,\ R_2,\ D_3,\ R_3,\ \cdots$$

結局就要依賴于猎食动物的整个襲击行动与被猎食动物的整个反应之間的某种关系．

我們这里讲的，是对 11-4 节中基本表示法的一种更复杂的解釋．但在生物界中这种情形是很常見的．就其現实的形式而論，这

就是生活的斗爭过程;就其数字的形式而論,这就是博奕論与对策論. 例如,圍棋的結局依賴于白子与黑子的某一系列的下法:

$$白_1,\ 黑_1,\ 白_2,\ 黑_2,\ 白_3,\ 黑_3,\ \cdots$$

(在 11-4 节中所說的走一"步"自然就相当于这里的下一个棋子).

馮·諾意曼(von Neumann)在 30 年代正确奠立的这一理論虽然尙未发展完善,但已是范圍太广的一个論題,在这里再多讲也是讲不出什么名堂来的. 但我們应該注意它与本书所讲的对象之間有密切而且明确的关系,这对生物学无疑有重大的科学价值;因为生命机体的先天遺傳性能,无非就是世世代代生存竞爭中用之有效的对策,因而这种性能就嵌入幼生动物,成为随时可用的本能. 正好比許多棋手发現"P-Q4"是开始下棋的好着一样,許多种的动物也发現"生牙齿"是开始进行生存斗爭的好着.

对策論与本书所論对象之間的关系,可作一簡要的說明如下:

第一件事实是:11-4 节中的基本表示法——調节与控制理論所依据的結局表——跟对策論中有基本意义的"支付矩陣"(pay-off matrix)是同一回事. 只要应用这一公共概念,就立刻可以看出这两种理論在特定情形下的明确关系.

第二件事实是:馮·諾意曼与摩根西透恩(Morgenstern)所述的博奕論,跟某种帶輸入的机器是同构的. 我們来看图 12-22-1 中所示的机器——这跟馮·諾意曼的拓广博奕(generalised game)是等价的(图中所注字母相当于馮·諾意曼书中第二章所用的,讀者应参閱該书;但該书中 T 的用法与本书不同).

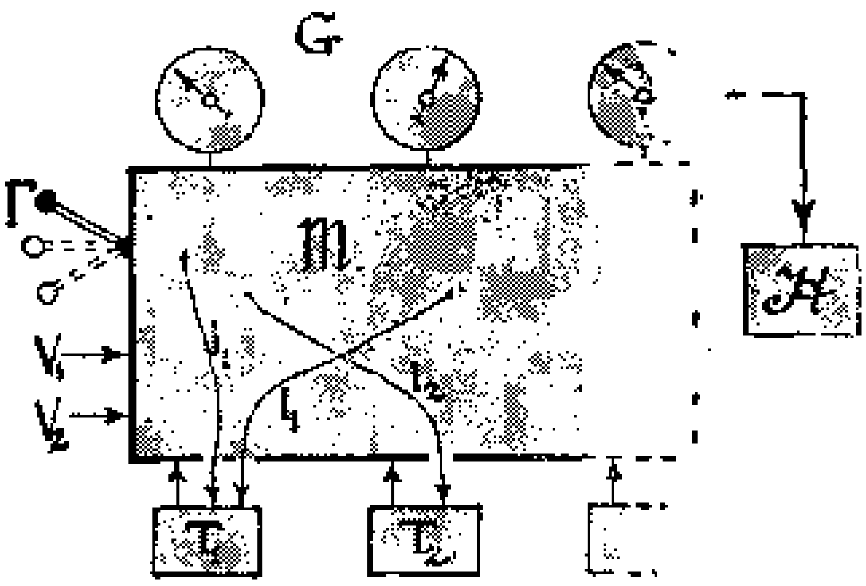


图 12-22-1

有一个帶輸入的机器 M. 它的内部結构(它的变換)是所有奕者 T_i 都知道的. 它有三类輸入:Γ,V 及 T. 参数 Γ(比方說可能是个多档开关)是用以选定它将有什么結构的,就是說,是用以选定做什么样博奕

的．其他的輸入 V_i 則容許作隨机动作（例如輪盘轉出来的結果，从一付紙牌中抽出来的紙牌；参閱 12–15 节）．每一奕者 T_i 是个确定性能动系統，跟 M 双方耦合．他通过特定的通道 I_i 获得来自 M 的信息，再据以确定性地作用于 M．諸 I 的接头在何处則由 Γ 确定．从每一 T，以及从其他諸 T 与諸 V 所起作用的效果，則通过 M 而对諸指示仪表 G 起复杂的控制作用．当奕局——即变迹——告終时，裁判員 $\mathscr{H}$ 即报出諸 G 中的讀数，然后按讀数付款給各 T．

这显然就是有許多調节者的一种情形．这时每个調节者都力求达到 G 的某一目标，在 M 內同时工作而且彼此互有竞爭（調节者之間互有竞爭的可能性，在这几章里一直沒有正面考虑到，只是到这里才讲到它）．

若这一系統是超稳定的 (ultrastable)，則每一 T 的性态就由参数而定，这时参数就起台阶函数的作用．若某一奕者“滿足”于 $\mathscr{H}$ 給他的付款，他的参数就保持既有值不变，从而他的对策也不变；但若他并不滿意（即若所付款額小于某一临界值），台阶函数就要变值，負者在第二盘棋中就要采用新的对策．

跟这有关的另一事項是軍事上的編密碼与解密碼的問題．申农所著“密碼系統的通信理論”(Communication Theory of Secrecy Systems) 一文中，告訴我們这些事項之間有何等密切的关系．如果我們对其中一門学科的知識有什么进展，差不多总能使我們对其他的学科了解得更清楚．

但眼前所能讲的却只能是这一些，因为它們之間的关系还有待进一步探索发揮．調节理論（其中包含大脑和社会組織中許多突出的問題）与对策論之間有許多值得彼此互相学习的地方，这看来似乎是不成問題的，如果讀者感到研究这些学問有点抽象和缺乏实用，那他就应該想想：对策論和控制論无非是研究“怎样达到你所需目的”的理論基础．請問还有什么旁的学問能比这个用处更广的呢？

12–23. 現在讲到本章的末尾了，生物学家可能会感到有些

失望，因为本章只讲了一些足够小而且容易处理的系統，不値得去深究．他可能会問：要是想对生物界中那样复杂龐大的系統进行調节与控制，那就会把問題讲成什么样子呢？例如，若想对大脑或人类社会进行調节和控制，会出现什么情况呢？

以后几章就要討論这一問題．

第十三章 特大系統的調节

13-1. 特大系統中的調节和控制問題,对任何一門生物科学工作者来說都是特别有趣味的,因为他所研究的大多数系統都是复杂的,并且是由几乎数不尽的很多部件組成的.生态学家可能需要对傳染病侵入一大而复杂的生物系統內的过程加以調节,在这个复杂的系統里,气候、土壤、寄主的反应、猎食者、爭食者以及其他許多因素都发生作用.在一个經济系統內,价格、可用的劳动力、消費者的需要、原料成本等等(这些只是其中很小的一部分)因素都起一定的作用,而經济学家可能要調节这一經济体系,以抵制經济衰退的趋势.社会学家所面临的情况也是这样的.精神病学家(psychotherapist)要設法調节一个病态大脑的功能,而这病脑和他自己的脑髓大的程度相同而复杂惊人.跟上章所讲簡单机构中的調节問題比起来,这种調节問題显然是很不相同的.乍看之下,它們是这样的不同,以致于使人会怀疑这以前所讲的是不是終于还能用得上.

13-2. 但事实并非这样,再把 4-18 节中的話重复一遍,可以說,以前所建立的許多命題,陈述的形式是跟系統的大小无关的(有时可能要牵涉到状态的数目或变量的数目,但牵涉到这种数目时,总是不管实际数目是多少,而命題还是成立的).

生物系統中的調节作用当然会引出难的問題来——这是我們可以大胆承认的.但在承认这一点时,应該注意不要把困难的根源找錯了.大和多本身不是困难的根源;它之所以易于被人看作是发生困难的根源,一方面是因为大就引人注目,一方面則是因为大小变动了,实际困难的根源在何处也有随之而变动的趋势.困难的主要原因,通常在于那需要以調节作用来抵制的、存在于干扰

中的变异度.

体现 T 的那个能动系統的大小，它之所以会跟 D 中的变异度发生相关作用，这是有許多原因的. 若 T 由許多部分組成，而若对任一部分的初始状态不能确定，則变异度可以轉到 D 处 (11-19 节)；所以通常說来，在其他一切都相同的情况下，部件的数目愈大，則 D 中的变异度就愈大. 其次是，若每一部分跟周圍世界并未完全隔絕，則每一部分所受的輸入就会增添一些变异度，而这变异度又会轉到 D 处；所以一般說来，部分愈多，D 中分量的数目就愈大，因此，若各分量都具有某种独立性，D 中的变异度也就愈大了(也許还有別的原因，但讲这些也够了).

所以，若把系統大小所起的作用，跟那些对 D 的变异度有所影响的作用区别开来，那就常会发现，大小本身是无关紧要的，而重要的只是后者.

由此可知，若系統 T 很大，而調节器 R 又小得多(这是生物学中一种常見的情形)，則必需变异度律可能要起主导的作用. 它的重要性在于，若 R 的通道容量是固定的，則根据这一定律，可知 R 所能完成的調节(或控制)量就有一絕对的限制，而不管 R 的內部結构怎样改排，也不管 T 的可能性有多大. 因此，若生态学家的作为通道的容量不变，那他就至多只能完成他所想完成的一小部分工作，他的这一小部分工作可以做在各种不同的地方——他可以决定把力量用在控制(防止)傳染病的发生上，而不用在阻止它的蔓延上，或者用在防止病毒而不用在防止細菌上——但不管怎样，他所能施展的控制的数量仍是有限的. 同样，經济学家也得衡量一下应該把他的力量专注在哪一方面的工作上，而精神病医生也得决定病人的哪些病症可以忽視，而哪些是必須加以控制的.

这里所提出的新观点，跟費歇尔(Ronald Fisher)在統計学上的革新有点相象. 在費歇尔以前，大家认为，不管統計学家多么聪明，总会有比他更聪敏的人，能从数据中取出更多的信息. 而費歇尔却出来說任何提取信息的工作都有一个极大限度，統計学家的职責也无非就是使他所得的信息接近这一最大限度——而要超过

这一限度则是誰也办不到的．同样地，在申农的著作出現以前，大家都以为不管是什么通道，只要使用的技巧好一些，就可使它变得能多傳輸一些信息．申农則告訴我們，工程师的任务是使所傳輸的信息量合理地接近最大限度，而超过最大限度则是誰也办不到的事．必需变异度律对未来的調节者和控制者也限定他采取同样的战略：他只能尽力取得他的最大限度值——过此便无能为力．因此，我們对特大的系統能做些什么，也不怀着过分的希望．

13-3．在我們研究这一問題以前，应注意在系統很大时，干扰源 D 与那得出結局的系統 T 之間的区别可能是不大明确的，因为可以按各种不同但一样令人滿意的方式来划两者之間的界綫．

在出現于地球上的各系統（因世間的系統有显著的趋势，使它們具有某种公共特征）之間，这种可以随意划定界綫的情况特别明显．在这地球上，整个能动的生物系統和生态系統有由許多結合（耦合）松散（4-20节）的子系統組成的趋势；而这些子系統本身又大多是由些更小的系統組成，它們本身內部的耦合比它們之間的耦合又要紧密得多；这样依此下推．例如在一牛群中，牛只之間的耦合比单只牛身上各部分（例如它的四肢）之間的耦合松得多；而四肢之間又沒有象一根骨头里的各分子之間那样紧密耦合．故若从总体中划出某一部分作为 T，则主要干扰源 D 常是跟 T 耦合得不紧的其他一些系統，而且往往跟 T 中的系統足够相象，以致于我們同样有理由可以把它們包括在 T 中．在下面的討論中及本书往后的全部討論中，讀者应記住这一事实：有时根据区分 T 和 D 的另一同样合理的原則，可能把界綫分得不同，而不致对最后結論有很大影响．但不管是不是任意划定的，总必須要划定某一界綫，至少在实际科学工作中需要这样，否则不可能作什么明确的陈述．

13-4．当系統 T 很大——当那担任調节者的机体面临着又大又复杂的环境而本身能力又有限时——可以有各种不同的方法使調节作用仍能实現（若調节不能实現，机体就死亡．不应忘記这是极为平常的一种結局；但这一情况无需詳細考虑）．

有时可重新規定那认为是可用的标准——降低标准，而使調节可能实現．这是一种頗为不足道的办法，但不应忘記它是一种可能的办法．

另一可能的办法是增加 R 的权限和能力，直到使 R 具有充足的容量为止．这一方法当然坚决不应忘記的；但我們不預备詳細討論它．我們要对那看来最难甚或不可能而实际却可能发生調节作用的有趣的情况，作較充分的討論．

13-5． 約束　按照必需变异度律来理解，上节最末这句話的意思是：干扰 D 中的变异度实际上并沒有象表面看来那么大；换言之，干扰是有約束的(見 7-8 节)．

因此我們所面临的是下列这种情形：D 有許多分量，每个分量都具有变异度．我們对 D 的变异度起初估計得太高，乃至有誤断(若已知調节器的容量)对 E 作某种調节为不可能的危险．但在进一步考察之下，可能发現 D 的各分量并不独立，而彼此間存在約束，因而 D 的实有变异度比初步所估計的要小得多．我們可能发現，若 R 的容量业已給定，这較小的变异度是可以通过調节来抵制的，从而可把 E 加以完全的調节和控制．故若发現有約束，这一发現便可把"不能調节"变成"能調节"．若 R 的容量是不变的，这是使"不能"化为"能"的唯一途徑．

这样我們又看到，发現約束是件多么重要和有用的事，同时对前述論点(7-14 节)："若存在約束，便可加以利用"，这又是另一个很好的例証．

現在我們再来讲讲，对特大系統起影响的干扰中，会出現什么样的一些約束，而我們又怎样来利用这些約束．这問題有很大的实际意义，因若 R 的容量是不容易增加的，而又不能用别的方法来代替 R 的作用，則根据必需变异度律可知，設法去找約束，是打算做調节工作者的唯一希望．

13-6． 如同我們在 7-10 节中所說过的，約束不能用几句簡单的話加以分类．除了在第七章中指出一些較有意思的可能情况之外，我只能再談一些对我們这里特别有意义的那些类約束．这

样，我就用这短短的几句話，跳过一个范圍很大的問題，而这問題却是人类全部活动中的主要部分．

这样，我們就要来研究一类特殊的約束．这类約束本身也很有意义，它可用来說明上章中的論点，并在特大系統的調节問題中有相当大的实际重要意义．

重复干扰

13-7． 虽則前几章里很少提到这件事，許多干扰（以及相应的調节反射）是累发的，特别是当你长期观察一个系統的时候．咳嗽反射是調节性的又是有用的，这不单单是因为它清除了这次的尘埃，而是因为它在你的一生中一次又一次地清除尘埃——有多少次需要，它就給你清除多少次．大多数生理調节器都是一次又一次地起作用的，有多少次需要，它就作用多少次．海岸救生艇也不是只救一次人而是要一再地救人的．如果我們在几章中談到“調节反射”时沒强調指出这調节反射是多数，那只不过因为一次是多次的典型代表，而不是因为反射必然只有一次．

有那么多熟知的調节作用都是累次的，因此要找出只作用一次的調节作用实在不容易。一个天文台里为观察将出現的超新星而作的一切准备計划工作，可能是这样的一个例子，因为在天文台长的一生中，出現超新星这种事是很难得碰到第二次的．为此就得考虑到各种可能发生的情形——它可能出現在天空的那一部分，在白昼出現还是在晚上出現，它在光譜上和其他方面有什么特点，以便决定該用什么类型的底片和滤光鏡来把它照下来，等等．天文台长在作他的計划时，事实上就得造一張象 11-4 节中那样的表，列出那些需預防的不可測因素(D)，現有的設备(R)以及結果(E)．考察了象題 11-4-4 中那样的表之后，他就能决定是不是在任何情况下都能获得他所需要的結果．

所以，采取調节措施，来应付那一去不复返的干扰，这种情形也是有的，但并不常見．

我們今后要考察的，是干扰和調节反射都不止出現一次的那

种情形；因为在这种情形里存在約束，可加以利用.

13-8. 約束以下列方式出現.

調节过程的基本表示法是对一組干扰而言的，但只假定这組干扰中的各个干扰（元素）是各不相同的，此外再不作别的限制．象任何别的量一样，一个干扰可能是单分量的或者是个矢量．在干扰是矢量的情况下，它至少可以分为两大类型.

第一种类型在 11-17 节中討論过了：这时干扰的各分量同时起作用；象空气調节器，它可以在每一时刻同时調节温度和湿度.

第二种类型可拿有恒温控制設备的浴室为例；不管是在短时間內或长时間內，我們都可以把它看作是調节器．就短时間內說，“干扰”的意思是指象“浴盆中浸入这个瓶子”这样一种情况，而它的“反应”是指“下一分钟所发生的情况”．恒温控制設备的性能好不好，就依那一分钟所发生的情况来判断．还有就长时間来說的．在使用了一年之后，有人会問我，在这一年里它是不是个好的調节器．在我决定如何来回答这一問題时，我得把全年內的干扰看作是一种总干扰（由許多个别的干扰組成，用小写的 d 表示），而这大干扰引起的是总反应（由許多个别小反应組成，用小写的 r 表示）．应据一沐浴設备在一年內应該达到的某种标准（例如，从来沒有一次使用不灵，或者温度的平均偏离值小于 $\frac{1}{2}^{\circ}$ 等等），我就对总的結果——是好还是坏——得出一个意見，据此作出我的回答.

应該指出，总結果的所謂“好”，并不一定来自个别各結果的“好”（η）；所以总結果的好坏必須重新規定．例如，若我买三張奖券，有一張中奖（結果是其他两張未中），那末总的結果自然要算是“好”的；所以在这里有 1 好 +2 坏 = 好．另一方面，若我因謀杀案被审三次，有一次被判无罪，这时个别的各个結果仍是：1 好 + 2 坏，但在这一情形下，总的結果自然必須算作是坏的．在每一个别干扰都能致机体于死亡的情况下，总的結果好，自然必須相应于“每一个别的結果都好”.

这些总干扰都是矢量，它的各分量是按时定期出现的个别干扰．这些矢量都有一种約束．例如我們回头来看本书所讲矢量的第一个例子(3-5 节)．这矢量是 A;我們拿它同 B 对比：

A	B
車龄：……………………	某甲車的車龄：…………
馬力：……………………	某乙車的車龄：…………
車身顏色：………………	某丙車的車龄：…………

很明显，这里矢量 B 所受的限制是 A 所未有的．因左边 A 的三行里的項目，变异度是三；B 的三行里的項目，变异度是一．

象 B 这种矢量在概率論里是常見的，出現在所謂“归还抽样法”这种場合下．例如，轉硬币只会得出两个結果：正(面)或反(面)朝上．但若把一硬币接連轉六次，就会得出象(正，正，反，正，反，正)或(反，反，正，正，反，正)等等 64 种可能有的結果(比較 9-9 节)．

这里重要的一点是，在这样的一組矢量(它們的各分量都来自同一个基本集合，象 B 中的分量那样)里，变异度可分为两种：即有 (i) 基本集合中的变异度(对轉硬币来說是 2，在 B 中則是各种車龄的数目)，以及 (ii) 把基本集合使用 n 次(若矢量有 n 个分量)而形成的变异度．就轉硬币的情形来說，这两种变异度是 2 和 64．一般地說，若基本集合中的变异度是 k，而矢量有 n 个分量，每一分量都是基本集合中的一个元素．这时，这两种变异度至多是 k 和 k^n．特别是，我們应該指出，若基本集合中的变异度有某种限值，則只要取适当大的 n 值，就能使第二种变异度大于那一限值．

13-9. 上面所讲的这几点适用于許多种調节的場合．为确定起見，假如浴盆每分钟可能受到下列各种干扰中的一种：

(a) 吹进一陣风把它变凉些；

(b) 照进来的日光把它变暖些；

(c) 盆內浸入一个冷的东西．

这里的变异度是三，但这个数目不足以代表长时間內实际出現的变异度．比方說在一年內，总干扰是个长矢量，也許有几百个分

量．例如一个总干扰可能是有 400 个分量的矢量(序列)：

$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{b}, \mathrm{a}, \mathrm{c}, \mathrm{b}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{c}, \mathrm{b}, \mathrm{b}, \cdots, \mathrm{c}, \mathrm{b}, \mathrm{a}, \mathrm{b})$$

同时若各个正确的反应分别是 α, β, 及 γ，则适应于这特定总干扰的总反应是下列矢量(序列)：

$$(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \beta, \alpha, \gamma, \beta, \beta, \gamma, \gamma, \beta, \beta, \cdots, \gamma, \beta, \alpha, \beta)$$

若在总干扰中，从左到右各分量沒有約束，則一切可能有的总干扰所組成的集合里，变异度的数目是 3^{400}；于是，若要得到完滿的調节，总反应的变异度至少要一样多．

現在我們就讲到問題的关鍵：随着时間的推移而出現的这二重序列，具有一架机器所特具的約束，即是說，这二重序列所规定的，是同构于一架机器的对象．例如，在剛才所举的例子中，从左到右，事件依次出現：

$$\mathrm{a}\ \mathrm{b}\ \mathrm{a}\ \mathrm{b}\ \mathrm{b}\ \mathrm{a}\ \mathrm{c}\ \mathrm{b}\ \mathrm{b}\ \mathrm{c}\ \mathrm{c}\ \cdots, \text{等等}$$

$$\alpha\ \beta\ \alpha\ \beta\ \beta\ \alpha\ \gamma\ \beta\ \beta\ \gamma\ \gamma\cdots, \text{等等}$$

(虽然不一定是在等长时段内出現的)．这就很容易地驗証了：这序列，作为一个登記表来說，规定了带輸入的机器：

$\downarrow$	α	β	γ
a	α	α	α
b	β	β	β
c	γ	γ	γ

故当总干扰是一矢量，而其分量都取自干扰的一个基本集合，則总反应可以是个有相同变异度的矢量，也可以是一个带輸入的适当机器的輸出．

13-10． 現在假定在第三篇中所討論的調节問題都是某 Ω 的責任，而这某 Ω 常是那基本变量 E 的拥有者．在前几章里，我們研究了調节器 R 应該怎样工作．現在我們看到，在干扰是重复的場合下，Ω 可以任擇下面的一种办法，它或者自己就是調节器(起 R 的作用)，或是造一机器，使机器造就之后能作为 R 并永远起調节作用，而无需 Ω 再操劳．这样我們就碰到下列問題：Ω 是

要靠自己操劳来直接进行調节，还是要造一机器来担任这一工作呢？

这問題也会因其他理由而产生．从第三篇的开头起，我們把調节器的存在当作是不言而喻的事，这才提出調节器必須有什么性质的問題．至于怎样来做調节器，什么是使調节器出現的因素，我們并沒有讲什么．例如，在10-5节中虽然已經讲清了，机体有調节器就能有多大的好处，但我們沒有指出靠什么来获得調节器．

因为这些緣故，我們必須現在开始想想怎样去切实設計和制作一架調节机器．这里我們并不怎么去多想工程师怎样在他的工作台上搞設計制造，而要去想想：如果大脑要在学习反应中完成調节作用，就得在已有的神經材料里設法生出調节机器来．

为要明了这里面所牵涉的一切問題，我們必須从原理上更进一步考察所謂“設計”一架調节机器这句話包含什么意义．

調节器的設計

13-11． 設計看作是通信工作　現在让我們暂时忘却什么“調节”，而只来考察有关設計和制作任何一架机器的某些問題．

我們考察这問題，既要十分明确，同时又必須使所考察的范圍很广——即是說必須是抽象的——因为我們是生物学家，得考察那些比鋼做的和銅做的远为广泛的一类机器．我們要在

某 Ω 設計机器 M

这个公式內包括象下面这样的各种情形：

(1) 基因决定心脏的形成．

(2) 机械工人制造一辆自行車．

(3) 大脑的一部分决定神經网路的內部連接．

(4) 工厂經理布置一个工厂使生产循某种路綫进行．

(5) 数学家給一架自动計算机編程序，使其按某种方式进行計算．

如果我們用控制論的观点来考察設計和制造机器的問題，那我們所关心的，就不是进行什么鑄鍛加工或装配一片片的材料这

种很明显的过程，而是要关心象什么决定最終模型以及怎样把它(从可能有机器中)挑选出来这类比較不明显的問題．我們要追究一长串的因和果，以便找出一組可能有的原因和那作为最終結果而产生的一組机器之間的关系；好比一个电話机工，整理一条有一百根导綫的电纜，要找出电纜一头的每根导綫，跟另一头的一根导綫的关系一样．这样处理問題时，我們会发現其中必然有某些定量的关系；这样就可把上章所讲的那些思想建立在这些关系的基础之上．这里我們从头到尾将要用例子来說明麦克凱(D. M. Mackay)的論点：这里所算出的信息量总相应于某一量，这就是(实际的或假想的)选擇强度．

选擇、設計、制造、装配(簡言之，用以最后导致生产机器的任何方式)一架机器 M，如果我們找出什么是这些过程中的变异度而且把它們算出来，那末可以看到这些概念都有一种共同的性质．可能作为 M 而生产出来的这个机器是有变异度的——一个胚胎可能产生出任何一种形式的肌肉血泵[1]．事实上，蚯蚓类的基因型会导致产生蚯蚓的心脏，蛙属的基因型会产生蛙的心脏，人类的基因型会产生人的心脏．这里显然有基因对心脏的控制作用．調节作用也是这样，因不管蚯蚓类分子的初态如何(就其可能有的状态来說是有变异度的)，在基因型作用下，变异度消失了，一个标准蚯蚓形式的心脏就出現了．

这里要指出，設計或制作这名詞，虽則在普通用語看不出是多数，实质上却是应用于集合(或組)的概念(比較 7-3 节)．因此象"基因型决定心脏形式"这句話是一种縮写式的說法，詳尽的說法应是：各类生物的基因型形成一集合，这一集合中的各元素，跟各类生物的一切可能有的心脏那一集合中的各元素，有一一对应的关系，就好比电話电纜头的各导綫之間有一一对应关系那样．因此，"設計"或"制作"一架机器这过程，实质上就是生产者和产物間的一种通信过程，故可应用信息論中的原理来考察它．特别是，为处理各种可能消息归結为一个消息这种問題而研究出来的那些

1) 即心脏——譯者注．

量，就可用来研究各种可能机器最后变成一种机器的这一問題。

为突出这一方面的思想，可設想“設計”过程是通过电話或别的特定通道来实现的。于是只要找出設計过程中所需傳輸的实际信息量，就立即可以得出变异度的量。

13-12. 当設計者选定机器的最終形式时，“选擇”机器这話用本书的一般概念来讲該有什么意思呢？我們来看下面讲的一系列例子，其中最后的机器都是无綫电收音机。

第一个例子是讲购买收音机的顾客，假定他要从三架机器中选购一种。第二个例子，从抽象观点来說跟头一个例子等价，这就是收音机的設計师，考虑三种可能采用的綫路究竟采用哪一种，而最后选用了其中的一种。第三种情形，从抽象意义来說也跟前两个例子等价，这就是一个人拥有一架收音机，其中装有三种綫路，把开关撥到三个位置中的任何一个，就选定了他所实际使用的綫路。因此，就抽象观点来讲，从三架机器中选定一架，等价于从参数的三个值中选取一值。例如，假定是要在三架机器 α，β，及 γ 之間来选擇（每架机器有状态 a 和 b）：

$$\alpha:\downarrow\begin{matrix} a & b \\ b & a\end{matrix}\qquad \beta:\downarrow\begin{matrix} a & b \\ a & a\end{matrix}\qquad \gamma:\downarrow\begin{matrix} a & b \\ b & b\end{matrix}$$

假如选用了 β，于是选擇的結果得出机器

$$\downarrow\begin{matrix} a & b \\ a & a\end{matrix}$$

抽象地說，这一选擇过程就是：原来有一架具三值輸入的机器

$\downarrow$	a	b
α	b	a
β	a	a
γ	b	b

而最后决定把輸入永远撥在 β 处（这两种过程之所以一样，是从这样的意义来說的：若某人只看到这两种过程的結果，他就不能說出究竟发生了那一种过程，除非根据其他的本书所未讲的准則）。

在上例中，把輸入擬定在β处，就使选擇出来的机器变成一个沒有輸入的絕对系統. 若要选擇后的机器是有輸入的机器，那末原有的机器开头就必須有两个或更多个輸入，使在設計选擇过程中选定一个輸入之后，使别的輸入仍可作为普通輸入供以后自由变化之用.

設計者从許多模型中选定一种，这一过程相当于某主制因素(比方說是人)給輸入选取了一个永远不变的值.

13-13. (本节讲一个略微复杂一些的情形.)

上述各例中，作为选擇对象的各机器，它們的变換都有相同的一組原象，即各机器都有相同的一組状态. 但若要在

$$\downarrow\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix} \quad 与 \quad \downarrow\begin{matrix} p & q & r \\ r & q & r \end{matrix}?$$

之間来选擇，情形又会是怎样的呢？我們是不是还能采用选定一值的办法来表示这种选擇过程呢？在設計工作的头几个阶段，就可能有作这种选擇的需要，例如，当我們首先要决定机器的部件是采用电子式的还是水力式的时候，情形就是这样.

事实上这情形也是包括在上述情形中的，而且只要改变記法，仍能用上述那种办法来表示. 例如，剛說的这一选擇过程，同样可表示为从下列(可約)机器的μ与ν間选取一值的过程，这一机器的状态是含二分量的矢量

$\downarrow$	(a,p)	(a,q)	(a,r)	(b,p)	(b,q)	(b,r)
μ	$(b\ \ .)$	$(b\ \ .)$	$(b\ \ .)$	$(a\ \ .)$	$(a\ \ .)$	$(a\ \ .)$
ν	$(.\ \ r)$	$(.\ \ q)$	$(.\ \ r)$	$(.\ \ r)$	$(.\ \ q)$	$(.\ \ r)$

(表中的黑点，表示那沒有关系的数值). 今若选了μ，則从头一个分量来看便給出了下列机器:

$$\downarrow\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$$

这时我們并不去注意第二个分量是怎样变化的；选定了ν，則从第二个分量的变化情况便得出

$$\downarrow\begin{matrix} p & q & r \\ r & q & r \end{matrix}$$

因此开头的那种讲法确实是很一般的.

13-14. 黑箱里的設計 我們要指出，这里所了解的“設計”工作，可以在有輸入的黑箱里实現. 事实上，有收音机的人(13-12节)，如果他不懂得收音机里装的是什么东西，但懂得旋鈕的轉动会怎样影响收音机的輸出，那么当他撥动收音机的旋鈕得出他需要的輸出时，他就在进行“黑箱里的設計”工作.

还可举出些别的例子来扩大这一論点的应用范圍. 黑箱（或收音机）可能受制于另一机器，由另一机器的动作或数值来决定旋鈕的位置. 在这种情形下，我們可以說（只要記住所用詞句的意义）主制机器在把旋鈕撥到一特定位置时，它就在“設計”收音机. 重要的一点只是，主制机器对收音机所显出的性质，正是一个設計者客观地显示出来的那种行为.

这一观点也同样可应用到大脑上，因此我們可以看出，大脑的一部分对另一部分所起的作用，也显示出設計者与机器間的那种客观上的行为关系. 我們可以开始看出，大脑的一部分——可能是一个基础結构（basal structure）——怎样对它所主制的另一部分——比如說是神經网路，来起“設計者”的作用.

因此，一机器設計另一机器这个概念可用明确而通用的語言来說明，这里之所謂明确的意义，是指我們能用实驗来客观地驗証两者間是否确有这种关系.

选 擇 量

13-15. 設計过程的这一方面情况——即当原有的許多可能性因选擇过程而把它的数目最后减到很少或减到一个的情况——是容易度量的. 我們也可用那用来量变异度和信息量（見7-7及9-11节）的同一尺度，并且也可直接用数或取对数后的值来表示.

这种定量表示法不仅方便，而且还自然地規定了通道 C

$$\boxed{\text{設計者}} \xrightarrow[C]{\quad\quad} \boxed{\text{机器}}$$

必須有多大的容量，才能使設計者所必須傳給机器的变异度或信息量，得以通过这个通道.

要指出的是，这个定量表示方法对“这个机器里（而沒有提到它可能是什么机器）有多少設計量?”这問題并不去作什么回答，因我們所說的量只对一組可能出現的机器才有. 这个量不适用于最后得出的那个东西，而只适用于傳送信息的过程（見 13-11 节）.

做做下面的练习题，可以帮助讀者对上面讲的那些多少有点抽象的道理，懂得它們的現实意义，并且可以說明这些道理跟那在直观上是显然的事情很合得来.

題 1: 在設計某一电机的一个阶段里，必須决定三个不同欧姆电阻的数值. 每一电阻各自都可能有 10, 15, 22, 23, 47, 67 或 100 欧姆这些数值. 若要把这些可能减到 1，設計者必須（根据必需变异度律）具有多大的变异度?

題 2（續）: 若要把这三个欧姆电阻的电阻值选取得跟所需值相差不超过一欧姆，即若三者都能取 10, 11, 12, …, 99, 100 这一批数值中的任一值，設計者必須具有多少变异度之行?

題 3: 有三个电阻，每个电阻都能取 10, 20 或 30 欧姆的值，若把它們并联，則設計者必須有多少变异度，才能把可能有的电气特性（总欧姆数）减到 1?

題 4: 两机器都具有状态 a, b, c, d:

$$\downarrow\ \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \hline b & a & b & c \end{array} \quad 及 \quad \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \hline c & b & c & a \end{array}$$

若要在它們之間定选择，需用多少設計量?

題 5: 印制一分值的邮票时，若（i）画面含 15,000 点，每点可印成 10 种不同的深淺度，（ii）把最后設計好的三种邮票形式請主管者选擇，在这两过程中需用多少設計量. 說明为什么两个量是不一致的?

題 6: 要使具 n 状态的一切可能的机器减到一种，必須用多少变异度?（提示：参看題 7-7-8.）

題 7（續）: 同上題，不过机器除了有 n 状态外，还具 i 个輸入状态（在設計好之后）.

13-16. 这同一定量表示法也正好用在一馬尔可夫机器的过程中. 例如，两个馬尔可夫机器

$$
\begin{array}{c|ccc}
\downarrow & & & \\
\hline
 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\
 & \frac{1}{3} & \cdot & \frac{1}{2} \\
 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}
\end{array}
\quad \text{与} \quad
\begin{array}{c|ccc}
\downarrow & & & \\
\hline
 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}
\end{array}
$$

間的变异度正好是 1 比特，因我們是在两个东西之間来选擇的，而这两个东西的內容——它們所含的各个分数——在这里无关紧要[1 比特这个数量，当然跟那把右边的矩陣看作是信息源时每步产生的平均信息量 1.58 比特是不同的(9-12 节)].

13-17. 分阶段的选擇　选擇过程可按不同程度依时間分布．特別是，选擇过程可在各个离散的阶段分段进行．

开汽車的人要选购一辆新車，常常就是这样想的．首先他可能說“这車的价錢必須低于 1,000 英鎊”．这一准則就使可能购买的汽車种数减少了一些．然后他也許再添上一个条件，說这車还必須能乘五个人．照这样附加一个个的条件．每添一个新条件(准則)，尙能供选擇的可能种数就少一些．如果这些条件使他只能买一种車，那末这些准則最后就使可能的种数減到一．不管按什么样的准則，可能的种数必須这样減到一，那怕是用轉硬币的方法来定最后的选擇也行．

选擇(設計)一架机器的抽象过程也同样可以是分阶段进行的．例如，設机器有四个状态 a, b, c, d．若变换 T

$$
T: \downarrow \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ * & * & * & * \end{array}
$$

中的星号 * 表示还未决定的选擇，这种变换就不排斥一切可能的情形．換到变换

$$
U: \downarrow \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ c & * & b & * \end{array}
$$

就表示换到一个局部的选擇．U 也表示一組变换，虽則这是較小

的一組．同样 V 也如此

$$V:\downarrow \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \overbrace{b\text{ 或 }c} & * & * & * \end{array}$$

这一变换排除了那种含有轉移 $a\to a$ 或 $a\to d$ 的一切单值变换的可能性．因此，选定一架机器这个过程可以分阶段进行，而各个阶段可以按各种不同的方式来规定．

这里在量的方面的基本事实是：所做的总选擇量不能大于各个选擇量的和（如果用对数来表示选擇量的話）．（选擇量用变异度的减低程度来表示．）例如，設有一副紙牌，进行了有 2 比特的选擇，然后再作了 3 比特的选擇，那末，除非再作一个至少有 0.7 比特的选擇，你是沒法选出一張唯一的牌来的，因 $\log_2 52=5.7$．这个限制是絕对不可变的，而且这跟（如果选出了一个机器）机器是什么类型不相干，也跟采取什么方式来选擇不相干．

題 1：对 a, b 与 c 的封閉单值变换，原来可能有 27 种形式，若加上"不許有平衡状态的变换"这一限制，能减去多少可能的形式？

題 2（續）：如果所加限制是"变换必須是有三个平衡状态的"又怎样？

題 3：若用对数表示，題 1 中所作的选擇量是多少？

題 4：一絕对系統有 n 个状态 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，原来是一切变换都可能有的，若加上"不許含平衡状态"这一限制，試問这样对所說絕对系統所作的选擇量是多少？（参看題 1）

題 5（續）：求这个量在 $n\to\infty$ 时的极限！（提示：对 $n=10, 100, 1,000$ 計算这个量）（这一估計法可用于 12-15 节中的机器）

題 6：若如本节所讲的，在一副洗过的紙牌里，一張接着一張地找某一張特定的紙牌（以后不再洗），問在抽看第一、第二、第三張等等的紙牌时，所得的平均信息是多少？（系統尋覓法）

題 7（續）：若每次抽看的一張不是所需的，在抽看后仍把它放回去，并在抽第二次时把牌重新洗过，所得的平均信息又是多少？（隨机尋覓法）

13-18． 选擇作用的輔助　选擇常可分阶段进行，这一事实就意味着整个选擇过程可由一个以上的选擇器来实行，因而一个选擇器的作用可由其他选擇器的作用来輔助．

如果夫妻二人打算从现有各种牌号型式的汽車中选购一辆汽車，由丈夫先决定車价不得超过 1000 英鎊，然后再让他的妻子作其余的选擇工作，那末这就是上述这种有輔助的选擇．如果妻子

把可供选擇的汽車型式的数目减小到二之后，用轉硬币的办法来定最后的决擇，那末这又是一次輔助选擇.

这种例子是随处都有的(下面讲的那些是用随机因素来作輔助选擇的，因下章中我們将研究它們). 在桥牌游戏中，发出第一張牌之后的状态，部分是由各当局人叫分的多少决定，部分則决定于机会——統計上标准化了的洗牌的結果——它选出牌的一种分布状态. 事实上，玩桥牌的规則就保証要使整个决定胜負的过程里，有确定的一部分选擇工作指定給机遇(即按规定方式的洗牌过程)来执行. 請机遇来协助进行选擇，这在过去的历史上是常用的一种选擇法. 例如，罗馬时代的将軍們，在拟出許多对策之后，就常常靠这以后天空飞过的一群飞鳥或新宰羊腸所盘成的图形等其他因素，来决定以后的一切(本书以前在 4-19 与 12-15 节中就用过了輔助选擇).

在科学研究工作中，特意用完全不相干的选擇器，作为"随机"决定因素来完成所需的整个选擇工作，这样做的第一个人显然就是費歇尔；因他是最先体会到这种方法的重要和有用的人.

[說一个因素是随机的，并不指这因素本身的性质，而是指該因素与主要系統的关系来說的. 例如，π 的各位数字都象任何别的数一样是确定的，但它的头一千个数字却很可以用作农业試驗中的随机数字，不仅因为它們是随机的，而是因为它們跟特定的一批单位种植面积的特性也許是不相关的. 因此所謂靠"机遇"来协助选擇，意思是(除了一些小的，特殊的要求以外)指从一个在性态上与主要系統不相关的系統，取它的效应(或变异度)来协助进行选擇. 在 12-15 节中已举出一例. 因此，若所研究的主要系統是迷陣中白鼠的性态，而需要用一个随机变量，那末用昨天金子股票的牌价作为这一变量就可能是合适的；但若所研究的主要系統是財政經济系統的一部分，用金子股票牌价作随机变量就不合适了.]

选擇与机器

13-19. 用机器选擇　前几节中我們考察在选擇一机器时所

牵涉到的信息傳輸問題．但从控制論的一般原理讲来，凡进行选擇工作的，不管它是什么，也都可以看作是一种机构．因此，如果考察了系統

$$\boxed{L} \rightarrow \boxed{M}$$

其中 L 的作用是設計或选擇机器 M，我們就必須把 L 看作是一机器，以某种方式起着設計者或选擇者的作用．但一架机器又怎能进行选擇呢？回答这一問題的說法当然要跟本篇中所用的說法符合．

最簡单的选擇过程也許就是一机器沿一特定变迹运动的过程，这时它在状态 i（比方說）后变到状态 j（比方說），而不变到它的任何其他状态．当机器的"消息"（从它得出的登記表）說明机器有这个变換而不是什么别的变換时，这就是机器所作的一种通常选擇过程．

（机器所作）选擇过程的另一个例子是 7-24 节中所指出的：每个确定性机器，在其把原有可能状态的变异度，从极大数值最后减到它动态图中坑的数目时，就显出了它有选擇过程．

选擇过程的另一例子是 5-13 节中所讲的，那里整个机器中的一部分可以"否决"另一部分的某些平衡状态，而对另一部分可能有的平衡状态进行了选擇．这也許是形式最明显的一种选擇过程，因若假想有一人观察这两部分的性态时，他就几乎象能听到那行使否决权的一部分在說"…不行，还是不行，我不愿有这个，还是不行，要它！——对了，永远让它这样．"若要造一个机器来作为选擇器（可能就是为实现本章末节所提示的那个程序），那末据我看来，就得把这机器造得能按照这种方式进行工作．这是图 5-14-1 中二阶反饋的工作方式（在 12-15 节中有补充說明）．

无疑地还可有别的方式来进行选擇，但只讲这些也足以說明問題了，足以把进行"选擇"的机器这一观点弄确切了（事实上这样特别来讲一下几乎也是多余的，因此申农的理論里，每一傳輸信息的动作也是一种选擇作用——这就是让特定消息出現的选擇作用）．

13-20. 选擇过程的长短 到这里还应該讲讲进行一給定选擇过程需要用多长的时間这一問題，因在初步估算之下，所需的时間可能太长，以致选擇过程不能实际进行。当造調节器是用来調节特大系統时，这一問題变得特别重要。如果要把大致看来所必需的选擇量近似估算一下，就会发現所需的时間将远远超过天文数字；因此可能就会一下子作出結論說，实际进行选擇所需的时間也会一样地长。但事实完全不是这样。

这方面的基本原理已由申农搞清楚了，特别是在他的**密碼系統的通信理論**一本册子中。他証明：若需要从 N 个元素中作出一个特定的选擇，且若选擇者只能指出（或者作出某种規定）所需元素是否属于一給定的集合，那末以最少次数来完成整个选擇的方法，是接連施行一分为二(dichotomy)的选擇法，这样，头几步的选擇是在群与群之間进行的，不是在元素与元素之間进行的。用这种方法来选擇，比在 N 个元素中一个接着一个地来进行选擇要快得多。如果数目 N 变得很大，那末在群与群之間进行选擇的方法，相形之下就几乎快得无可比拟。限于本书的篇幅我們不能好好地讲讲这一重要的問題，但在丢开这一問題以前，我得举一个例子，来說明这一分为二法相形之下快到怎样惊人的程度。

我們来考察一项工作量眞眞浩大的选擇。假定在宇宙（今日天文学家所能見到的）某处有个独特的原子，有人要把它找出来。这天文学家所能观察到的宇宙約含有 100,000,000 个銀河系，每个銀河約含有 100,000,000,000 个太阳系，每个太阳系約含有 300,000 个象地球那样的物体，而地球则有 1,000,000,000,000 立方英里，一立方英里約含有 1,000,000,000,000,000,000,000 粒尘埃，每粒尘埃約含有 10,000,000,000,000,000 个原子。现在有人要从这么些原子里去找出其中的某一个来！

我們把这种选擇作为特大規模选擇的一个单位，称它为 1 **宏擇**(mega-pick)；約相当于从 10^{73} 个对象中选擇一个。那末从其中找出某一个原子需多少时間呢？

有两种方法值得拿来比較一下。第一种方法是每次一个个地

来检查，用快速电子檢驗器，每秒檢查一百万个．簡单計算一下就可知道，照这样来查出所要的那个原子，所經历的世紀数也是本书这一頁里写不下的．因此，如果照这一方法来进行，选擇工作（从一切实际目的来說）必然是搞不成的．

在第二个方法里，他用（假定这是可能的）一分为二法，先問：所要的原子在这半部分还是在那半部分宇宙里？然后再把所决定的那半部分宇宙平分，考察所需原子在其中的哪半个部分里，这样一直下去．假定这种选擇每秒內只能作出一次．那末用这一方法选擇需要多久时間？回答是：四分钟稍多一点就够了！用这一方法，选擇之功是可以告成的．

从这个例子，讀者就容易相信分群选擇法比逐个檢查的选擇法快得很多．还有，正是在逐个查找所需时間变得过分长的时候，分群查找法才确实显出它具有能节省时間的功效．

13-21． 选擇与可約性　上述一切在选擇某一具体机器时表示什么意义呢？为确定起見，假設这机器有 50 个輸入，每个輸入可取 25 个值之中的任一值，而要从可能有的一切机器形式中找出某一个来．这一选擇量正好約等于 1 宏擇，并且我們知道要想一个个地进行选擇是毫无希望的．那么能不能分群进行选擇呢？如果能想出把輸入状态进行分类分群的某种切实可行的办法，这是可以分群来选擇的．

一个有重要实际意义的特殊情形，是当整个机器可約（4-14 节）且輸入是分别地接到各个子系統上去的情形．那时可采取下列程序：給第一子系統（部分）的輸入选擇合适的值；給第二个子系統选擇合适的值；等等——这就相当于用快的方法分群进行选擇．因此，若机器可約，那就可用快的（分群）选擇法．

事实上，在地球上的系統中，可約性是极为平常的性质．这种性质是这样的平常，以致我們往往以为事情原来就該是这样的，但是对那些想学习調节特大系統的人来讲，就必須充分认識到可約性的重要意义．

我們所生活的世界是这样地富于可約性，为使讀者对这事实

得到一些认識，不妨把平常的世間情景跟一旦可約性丧失后——一旦每一变量都会对每一别的变量产生即时的或迟发的影响——的情景比較一下．那时，当你把这本书的一頁翻过去时，这一动作就不再是仅仅翻过了书上的一頁，再也沒有什么别的了，而是会使光亮引起变动，使桌子开始移动，使钟表改变快慢，乃至引起整个室内一切事物的变动．如果世界眞眞是不可約的，調节工作就会变得这样困难以致于不可能进行，从而任何有机的生命物都不可能生存下去(7-17节)．

现在我們必須放下这一問題了，但在“大脑設計”一书关于“分量系統”(iterated systems)及其后各章中，对这一論点有进一步的发揮．同时这里我們可以总結說：若某 Ω (13-10节)要負責設計(即选擇)一架机器，来調节一特大系統，因而調节器本身也是頗为浩大的，那末能否在相当短的时間內作出必須的选擇，这可能就要看調节器是否能做成可約的形式而定．

13-22． 調节器从那里来？ 现在我們終于可以来回答这隐伏在整个第三篇中的問題：所需要的調节器是怎样产生出来的？这一問題在13-10节中已提出了，但这以后我們探討了各种各样的事情，因只有在討論了这些事情以后才能把問題归結起来，理出一个头緒．现在我們来看看这一問題的情况．

最后得出具有所需性质的某一架机器，这一过程就意味着选擇，并且还意味着那負責进行选擇的 Ω (13-10节中的)成功地达到了目的．不管各分量原来有什么样的变异度，也不管从設計(即輸入值)到最后认为合适的形式变动了多少变异度，Ω 起了达到这一目的的作用．因此他本身做了調节器所做的事．因此，作出一架具有所需性质的机器(就其不是获得一架具有非所需性质的机器这个意义来說)，这是一种調节动作．

现在假定具有所需性质的这架机器就是整个第三篇中所討論的調节器——那末它是怎样造出来的呢？回答只有一个：由另一个調节器来造．

这是不是把我們的整个問題繞了一个大圈子，而最后仍然絲

毫沒有解决呢？我想不是这样的．因为对于“从哪一个調节器起开始来制造”这个显然会发生的問題，我們是馬上可以回答的．作为生物学家，我們的基本事实（10-3 节）是地球很久以来就已存在，而自从地球存在以来选擇过程一直都在进行，而选擇过程則有利于調节器的出现（10-5 节）．单单是这些事实，就足以說明为什么今日地球上有这么多好的調节器．如果我們发現某些調节器的工作目标是把某种机构变成标准形式——即使这标准形式就是調节器（这調节器所要达到的目标当然跟头一个調节器的目标不同）的形式，那末这一事实也无需再作进一步的解釋．至于为什么某些事情能够一步直接做好的，实际做起来却要間接地分成两步，科学家也不必太过于感到奇兀．

于是我們对本节这个問題的回答是：只有当調节器是某种自然选擇过程后的屹存者，或是被另一調节器所制造（另一选擇过程）的，它才能从某一組一般的机构里（其中有許多是非調节性的）选擇出来．

13-23． 分两个阶段来这样造出所需的調节器，这是不是浪费了？要經过两个阶段才能得出調节器，这說明总必須先解决如何得出調节器这一問題之后，才能談制造調节器的問題！

还有，当所要調节的特大系統是世上的社会和經济系統，而負責进行調节工作的 Ω 組成某个集合——也許就是社会学家，而他們作为調节者的能力則又限于人类各成員所能具有的能力，那末上面所讲的又意味着什么呢？这是不是意味着調节作用是不可能有进展的呢（因調节者須由被調节的成員制造出来）？

这話并沒有这种意思，因当調节作用分阶段完成时——当調节器 R_1 的作用是产生調节器 R_2 时——R_2 的能力并不为 R_1 的能力所限．可能有 R_2 的能力大于 R_1 的这种情形，因此这里就有一种放大作用．这一可能的情形我們将在下章研究，在那里可以看到，分阶段进行調节，不但并不一定是浪費的，反而能提供某些非凡的可能性．

第十四章　調节作用的放大

14-1. 什么是放大器？ 一般說，放大器是这样的一种装置，如果你傳給它一点点什么，它就会放出大量的那个什么来．例如，若傳一点点声音給声音放大器（如微音器——或麦克风），它就会放出好大的声音．一个功率放大器，象12-12节中所讲的，若傳給它一点点功率（只足以移动L），就会（从H）放出好多功率．假如有一个錢币放大器的話，那末在这种装置里放进去一点点錢，就会放出好多錢来．

这种装置靠什么来工作呢？得靠我們对它对所要放出的那种东西有充裕的儲备．这时就用輸入作为一种控制手段，以控制来自儲备器的那种东西的流出率．放大器把輸入直接放大而进行放大工作的情形，象电影放映机的鏡头那样，是很少有的；比較普通的情形是靠輔助力量来进行放大工作的．例如功率放大器具有能供給大量功率的来源（图12-12-1里A处的压縮空气），輸出处的大部分功率就是由这来源供給的，而輸入对輸出所提供的功率則很少甚或沒有．同样，操纵举重机的人在控制杆上所做的功，对举起主要重物并无直接貢献，因他的全部工作只化在撥动电气开关或其他开关上．

我們可以看到，在功率放大器里（例如图12-21-1里的），整个过程——用L处的力来使H处举起重物——是用两个相耦合的系統分两阶段来完成的．功率之所以能放大就靠着过程的分为两个阶段，否则——即若过程在一个阶段里进行，根据能量守恒定律，是不可能有干脆而直接的功率放大过程的．在阶段1里，使用操纵器的人移动点L，克服K处的磨擦力和V处的压力；在这一过程里，能或功率是絕对守恒的．在阶段2里，压縮空气流入或

流出 B，頂起 P，G 与 H；在这一阶段里，能量也是守恒的；因把 H 处重物上举所用的能量是因压縮空气的膨脹而来的．这样，整个系統可以看作是由两个系統組成的，在每一系統里能量是絕对守恒的，但两者間是这样耦合起来的，使 L 处的 0，1，2，… 达因的力各相应于 H 处的 0，1000，2000，… 达因（或別的倍数）的力．就因为把过程分为两个阶段进行，这才使我們有可能制造功率放大器，尽管存在能量守恒律．問題在于在阶段 1 里提供給輸入处的能可予以补充，以得阶段 2 里的輸出．

有时，輸出和輸入的比例关系是很重要的，象在无綫电放大器中的情形就是如此．在那种情形下就該把机器造得使这一比值在輸入值的整个变化范圍內都是一样的．在別的情形下，比值究竟是否准确不变是沒有多大关系的，如同在举重机的情形，在那里重要的是輸入值都要在某一范圍內（由机器操纵者的臂力而定），而用于輸出的补充力必須很充裕，大大超过輸入的值．

題：試設計一个“出水放大器”，也就是这样的一种裝置，若你在輸入处每秒注入 x 单位的水，就能使輸出处每秒放出 100 单位的水来．

14-2． 因此我們可以从两种非常不同的观点来看放大过程，从而就会对究竟有沒有起放大作用这件事产生非常不同的意見．

站在一方面的是理論家，也許就是起重机的設計师，如果他要使起重机有效工作，他必須了解这一过程的內部实质．在他看来这里面沒有眞实的放大作用；放出的功率幷沒有超过供給的（总）功率．他知道操纵者之所以能在控制机械上成功地操纵，只是因为他能利用別的能源（煤、油等等）来达到他的目的．如果自然界沒有供給煤这种充裕的补充来源，起重机的操纵者就不能举起重物来．机器操纵者之所以能“放大”只是因为他求助于煤炭王．所以，小孩子能提重物——只是因为他爸爸愿意代他提，这就是放大器的基本型式！

这一切都說得很对，但另一方面还有那要使用这起重机的实际工作人員，比方說他要把这起重机装在碼头上．如果他有大量的廉价能源可用，那末对他說来“放大作用”是很眞实很实惠的．

对他說来，用不用起重机就意味着船上的貨是用机器装卸得又快又輕便，还是用人工装卸得又慢又費力．如果装卸的貨大一些，比方說是个火車头，那末若沒有功率放大器，装卸工作可能就根本不能做．所以，对实际工作的人来說，能否有这种表面放大作用就是极为重要的事．

这两种观点显然都是对的．起重机的設計师应該清楚意識到

量是 27，見題 7-7-8）所成的集合中挑选出来．这里，“制作”調节器的过程就在于明确地規定了这一变換，卽是說，把它跟别的变換区别开来．

在 13-12 节中用另一种方法，那里我們从可能有的一組輸入值里面选取一特定值，从而就算是“設計”了一架——可能作为調节器用的——机器．

做出調节器的第三个方法，是用硬实的材料把它装配起来，象工匠建造浴室的情形就是如此．这里选擇过程也是不可少的：从可能的物件中挑选（清理）出装配的零件来，还要选擇合适的装配方式，以区别于其他不合适的装配方式．所用的选擇量是可以测算的；而若对测算的結果有什么不同的意見，那就可以用 13-11 节（最末段）的方法来解决．

由 13-18 节可知，若可分几个阶段（整个选擇过程分段进行），来得出最后的調节器，那就可能使第一阶段里提供一个小調节器，而最后能造出一个大得多的調节器（卽容量較大的），因而这一过程就具有放大作用．

所謂“放大”調节作用一語，我們就是照上述意义来了解的．必需变异度律，也象能量守恒定律一样，絕对地否定了有任何直接而单純放大的可能，但并不否定有提供补充的可能．

14-5． 我們来看几个确实能放大調节作用的例子．

假定干扰是电源外綫电压的上下变动，因而当电源接到 Ω 所用的电器上时有每秒达几百次的变动，使电器的使用受到干扰．假定这些干扰每秒内所产生的变异度远远超过 Ω 本人作为通道的容量，因而不可能直接靠他本人的調节作用来克服这些干扰．但是他有一本机器制造厂家的产品目录，其中有三样产品：

1．电視机，

2．外綫电压稳定器，

3．頻率变換器．

假定他有能力从三者中选购一种；如果他作了合适的选购，結果就会使接到电器上的外綫电压稳定起来．因此，他的三个可能做的

初步选擇就可跟三种結果成一一对应关系，这三种結果之一是：把外綫电压弄稳定了.

但电压稳定器所作的調节作用（比方說在一年内），就远不止是从三者中擇一；因此在整个过程中，无疑发生了放大作用.

在这个例子里，补充工具是这样的明显，Ω 的依靠制造工厂的設計能力是这样明摆着的事，以致讀者很可能要把这种“放大作用”看作是不值得认真加以考虑的（但比起操纵起重机的人要依賴于合适的能源来，这不見得更加平凡不足道）. 不过这一情形只是有点极端化（我們取来用以表明“放大”这一概念所涉范圍的一个极端）. 在这范圍内还可有許多别的情形，更具有一般的意义，但原理都是一样的.

其次再来看 Ω 需要把浴室恢复到某一温度的情形；恢复温度的这一过程每天要进行 100 次而且一年内天天要进行. 这就是說必須用升高或降低温度的办法——好比說进行 1 比特的选擇——校正温度 36,500 次. 因此整个总干扰（見 13-8 节）有 2^{36500} 种不同的可能. Ω 也許在一年内能傳輸这个变异度，但总感到这样不方便. 如果他有这样的設备使他能化 1000 比特制造一个温度調节器，于是利用总干扰是重复性的这一事实（13-9 节），可自 1000 比特中合适选擇，得出从 36,500 比特中正确选擇的結果，这样就产生了約 30 倍（若是用对数来表示变异度的話）的放大作用.

这第二个例子比第一个例子更常見些. 从这方法在实踐上用得很广这一事实，就可看出实际工作者认为它是不是有价值的.

当然，这里并不一定要有什么放大作用；因此实际工作者在制造机器来帮他干活以前，常至少会下意識地权衡一下利害得失：

制造替他干活的机器要化費（某种意义上的化費）多少	他自己来干活要化費多少

本章所討論的量，正是我們在計算所需信息傳輸量和选擇量时实际有关的量.

最后我們再来談一个例子，那里放大的可能性很显然，而且也

是实际有用的．假定让二十个人負责使两千間屋子保持一定的温度和湿度．如果每間房有些控制設备，而这二十个人仍然覺得要靠他們直接操纵控制設备来調节一切气温的变化，是他們力所不能及的．但可能用机器来代为操纵，只要这些人是机工，对机器起着調节的作用，就可把机器装成空气調节器，并作为空气調节器来維护．并且还可能出现这种情形，这些机工化在空气調节器上的調节量，足以使調节器有效地調节两千間房子里的温度和湿度．因此，一个阶段里所不能完成的調节作用，在合适的条件下，用两个阶段是可能做到的．

这些調节过程里的通信量（通道容量）可以測算得任意准确，并定出准确的放大率，于是若确实有放大，那末就可用实驗来証明这一事实的眞确性，而无容再怀疑分辯．

但（上一个例子中的）輔助东西从哪里来呢？一般說，凡是从其他輸入来的一切都可作为輔助．在刚才举的例子里，这就包括凡对机器的設計与制造有所貢献的那些因素，并且还包括环境本身，因环境把每一刻的温度和湿度情况傳給調节器，但并未傳給机工．結果是这些信息来源在整个調节过程中也参与作用，但并未利用机工作为信息通道．

从刚才讲的例子可以看出其中有两层調节，但我們并沒有理由說調节作用只能分到两层为止．比方說要是有一个医生負責照顾那一批机工，使他們保持健康正常工作，那么这医生也可以說是在执行第三层調节作用的人．但只要原理搞清楚了，我們无需再一层层探索下去，特别是在許多情形下，各个調节作用的执行者并不能列成簡单的层次．

14-6．大脑中的放大作用　现在我們可以从量的方面来理解，为什么用这种間接方法来調节更加优越——为什么那些具有最有效手段执行調节功能的机体正是用这一方法来調节的——因为这样使調节作用可以得到放大．

基因型作为变异度的儲存所或通道来說，它的容量是有限的．凡能充分利用其现有容量的那些类生物，就特别适于維持生存．

而信息通道的容量则可以直接地或間接地来利用.

若基因型直接用之于规定調节器，这就是直接利用通道的情形. 調节器造好（在胚胎里）后，机体就按基因型所定的方式对每一干扰起反应，进行它的生活. 这里沒有放大作用[按这里的观点来說沒有放大作用，尽管在机体的生存期内，干扰不断重复出現，这种調节作用还是有其优越之处的(13-9 节)].

若基因型生出一調节器(R_1)，而用这(R_1)来造出主要調节器(R_2)，特别是当这一过程通过好几层的調节器来完成时，这就是間接利用基因型的情形. 这样通过分层的手續实現最后的調节作用，就有了大規模利用輔助的可能，从而可能使最后的調节作用比基因型所能直接作出的大得多.

在 12-15 节中的例子清楚說明一个調节器可以怎样起制造另一調节器的作用. 先造好内稳定器的部分 B，这就成为初級調节器 R_1. 把它跟部分 A 耦合之后，它的作用是使 A 变为稳定，使 A 的指針位在中央. 做到这一步之后，A 就对外来的要把指針偏向两边的干扰，起着調节器(R_2)的作用. 虽則在这一特殊例子里，R_2 是非常簡单的，但这一情形跟那調节器 R_2 可具有任意复杂程度的情形，在原理上是完全沒有分别的.

基因型先造出 R_1，R_1 再造出 R_2，这样分两阶段来完成調节作用的方法就是哺乳动物所用的方法. 哺乳动物利用基因型对胚胎大脑的作用，来决定初生时产生某些調节器(R_1)，其作用并不直接为机体本身服务. 但在出生以后的生活过程中，这些 R_1 就对大脑皮质起作用，使大脑皮质里形成浩大的調节机构(R_2)，在到达成熟年龄时，这(R_2)就比基因型所能直接产生的調节器好得多(即有大得多的容量)了.

但輔助从哪里得来呢？就象 12-15 节里那样从随机来源或是从环境本身得来！因为决定机体該怎样动作的許多因素正是不得不由环境来供給的. 因此，对于形成长大成熟的动物，基因型与环境都是有貢献的，基因型的設計量也就是这样由环境的設計(作为变异度或信息)量来补充的. 因此成熟动物的調节量終于就比基

因型所能单独决定的調节量多了．这样調节作用的放大并不是件新鮮事情，因为那些能从学习产生适应动作的高等动物，早就发現了这种方法．

但放大是不是还可以进一步加强呢？如果是这样的話，那末是否可能用我們現今所有的調节本領来造出更完善的調节器，使它的調节量比人的調节量大得多，能調节出現在社会（这对我們来說是很大的系統）上的各种禍患呢？

14-7． 智力的放大　本书是作为一本入門书而写的，前十二章里就讲的是入門知識．但在末两章里就把控制論的問題讲得有些玄了，这一方面是为了使讀者练习运用前面的方法，另一方面則是为告訴讀者这門学問将来可能有的发展，因为前景是令人兴奋的．

在 13-18 节里我們看到选擇作用是可以放大的．但"解决問題"主要就是——也許完全是一种进行适当选擇的事．例如，拿任何一本通俗的問題书和趣味难題书．差不多每一个問題都可化成这样一种形式：从某一集合里，指出一个所需要的元素来．例如，某甲袋里可能有的一切苹果数目中，找出一个合适的数目；通过某一类点子的一切可能作的直綫中，作出所需的一根来；可能塡写在一批空格里一切字母中，塡上一批合适的字母．事实上，很难想出一个游戏性的或认眞的問題，是不需要最后进行合适选擇来作为求解的必要和充分条件的．

还有，許多測驗"反应能力"的方法，主要是按被測者进行合适选擇的能力来評分的．例如，在一种測驗里，給孩子看一件东西，叫他說出东西的名称来：他得在一切可能的名称中选擇一个合适的名称．另一种測驗是让孩子在一块地上找一个球：在一切可能通行的道路上，他得挑选几条合适的路来．因此，通常所謂"智力"这个东西很可能就相当于"进行合适选擇的能力"．事实上，假如有个能說話的黑箱，对这些事都具有进行合适选擇的高度的能力——例如若給它出难題它总会給出正确答案——那末我們很难否认它在性态上有相当于"高級智力"的东西．

如果情形是这样的話，而我們又知道选擇能力是可以放大的，那么由此可知智力活动也象举重等体力活动一样是可以放大的。誰也不該說这是不可能做到的，因为每当基因型形成大脑，使其发育成长后，变为比基因型所能直接規定者更好的大脑时，它就都进行了这种放大工作。所不同的是，我們現在可以用綜合的、自覺的、有意識的方式来做到这一点。

但本书必須到此結束；这些都不是一本入門书里所讲的事。

参 考 文 献

ASHBY, W. ROSS. *Design for a brain.* Chapman & Hall, London; 2nd imp., 1954.

Idem. The applications of cybernetics to psychiatry. *Journal of Mental Science*; **100**, 114-124; 1954.

Idem. The effect of experience on a determinate dynamic system. *Behavioral Science*; **1**, 35–42; 1956.

BELLMAN, R. *Stability theory of differential equations.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1953.

BOURBAKI, N. *Théorie des ensembles;* fascicule de resultats. A.S.E.I. No. 1141; Hermann & Cie., Paris; 2nd edition, 1951.

Idem. Algèbre, Chapitre 1, A.S.E.I. No. 1144.

Idem. Topologie générale, Chapitre 1, A.S.E.I. No. 1142.

CANNON, WALTER B. *The wisdom of the body.* London, 1932.

FISHER, SIR R. and YATES, F. *Statistical tables.* Oliver & Boyd, Edinburgh, 1943.

GOLDMAN, S. *Information theory.* Constable & Co., London; 1953.

GRANIT, R., LEKSELL, L., and SKOGLUND, C. R. Fibre interaction in injured or compressed region of nerve. *Brain;* **67**, 125–140; 1944.

LASHLEY, K. S. in *Cerebral mechanisms in behavior.* John Wiley & Sons, New York; 1951.

LEWIN, K. *Principles of topological psychology.* McGraw-Hill Book Co., New York; 1936.

MACKAY, D. M. Quantal aspects of scientific information. *Philosophical Magazine;* **41**, 289–311; 1950.

NEUMANN, J. VON, and MORGENSTERN, O. *Theory of games and economic behavior.* Princeton; 1947.

PAVLOV, I. P. *Conditioned reflexes.* Oxford University Press; 1927.

RIGUET, J. *Fondements de la théorie des relations binaires.* Thèse de Paris; 1951.

Idem. Sur les rapports entre les concepts de machine de multipole et de structure algébrique. *Comptes rendues de l'Académie des Sciences;* **237**, 425–7; 1953.

SHANNON, C. E. Communication theory of secrecy systems. *Bell System technical Journal;* **28**, 656–715; 1949.

Idem. The synthesis of two-terminal switching circuits. *Ibid.;* **28**, 59–98; 1949.

Idem. Computers and automata. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers;* **41**, 1235–41; 1953.

Idem and WEAVER, W. *The mathematical theory of communication.* University of Illinois Press, Urbana; 1949.

SOMMERHOFF, G. *Analytical biology.* Oxford University Press, London; 1950.

TINBERGEN, N. *The study of instinct.* Oxford University Press, London; 1951.

TUSTIN, A. *The mechanism of economic systems.* Heinemann, London; 1953.

WIENER, N. *Cybernetics.* John Wiley & Sons, New York; 1948.

习题解答

2-4. **1:** 不是. **2:** 不是. **3:** A是；B是；C不是；D是. **4:** 这变换的形式必是 $a\to a$. **5:** D先生的賭注是下对的；棋子被逼住的位置不能有映象，因按棋法不能再走下一步；如果C的变换是封閉的，他每下一步所占的位置总能容許有下一步，因此他的变换不会有把对方逼住的位置.

2-5. **1:** 是. **2:** 不是；因有些原象如 40 的末位数碼字是 0，从而 40 就要被 B 变成 0，但原象集合中不含 0.

2-6. **1:** $n'=n+10(n=1, 2, 3)$. **2:** a. $n'=7n(n=1, 2, 3$，本題中以后的 n 都取这三值)；b. $n'=n^2$；c. $n'=\dfrac{1}{n}$；d. $n'=11-n$；e. $n'=1$；f. $n'=n$. **3:** $\downarrow\begin{matrix}5&6&7\\2&3&4\end{matrix}$，不是封閉的. **4:** (i) $\downarrow\begin{matrix}5&6&7\\25&30&35\end{matrix}$；(ii) $\downarrow\begin{matrix}-1&0&1\\2&0&2\end{matrix}$. **5:** 是. **6:** 是.

2-8. **1:** 是多一变换；因 1 和 8 都变成 9.

2-9. **1:** 沒有售出貨. **2:** 叫空場(maiden over).

2-10. **1:** 主法綫上都是“+”号，其余都是零. **2:** a: ii; b: iii; c: i. **3:** a: 是；b: 不. **4:** 在一直綫上；方程图形上的綫与矩陣中“+”号所成的綫，其上各点的分布情形一样，彼此互相表示. **6:** 16. **7:** 4.

2-11. **1:** A^2: $\downarrow\begin{matrix}a&b&c\\a&a&c\end{matrix}$. **2:** 和原来的一样. **3:** A. **4:** $n'=n+2$ $(n=1, 2, \cdots)$. **5:** $n'=49n(n=1, 2, \cdots)$. **6:** $\downarrow\left|\begin{matrix}+&0&0\\0&0&0\\0&+&+\end{matrix}\right.$.

2-14. **1:** $n''=9n$. **2:** $a''=a+16$. **3:** $a'''=343a$. **4:** $k''=9k-4$. **5:** $m''=\log(\log m)$. **6:** $p''=p^4$. **7:** (i) $n'=4n+9$；(ii) $n'=n^4+2n^3+2n^2+n$；(iii) $n'=1+2\log(1+2\log n)$. **8:** $n'=-27n-7$. **9:** $n'=\dfrac{1-n}{2+n}, \dfrac{2+n}{3+2n}, \dfrac{3+2n}{5+3n}, \dfrac{5+3n}{8+5n}$，等等. **10:** 全同(或恒等)变换. **12:** 极限位置是$\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$.

2-15. **1:** 2, 3, 1. **2:** $g:\downarrow\begin{matrix}6&7&8\\8&7&8\end{matrix}$. **3:** $h:\downarrow\begin{matrix}\alpha&\beta&\nu&\delta\\\nu&\delta&\beta&\alpha\end{matrix}$. **4:** 17. **5:** 0. **6:** $9n$. **7:** t.

2-16. **1:** $U^2T:\downarrow\begin{matrix}a&b&c&d\\d&c&b&d\end{matrix}$. **2:** $UTU:\downarrow\begin{matrix}a&b&c&d\\c&d&c&b\end{matrix}$. **3:** 它們是一样的；正因为一样，所以把变换写成上下方向而不是左右方向（参看题9-6-8及12-8-4）.

2-17. **1:** (i) $b\to a\leftarrow d$，$c\to a$；(ii) $f\rightleftarrows gp\rightleftarrows q$. **2:** 图里沒有箭头，只有一些孤零零的点子. **3:** 每个这种变换的图都完全由孤零零的点子和（或）沒有分叉的簡单环綫組成. **4:**

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 9\to 2 & & 5\leftarrow 6 & & \\ & & & & \uparrow & & \downarrow & & \\ 4 & \to & 0 & \to & 1 & \leftarrow & 7 & \leftarrow & 8 \\ & & & & \uparrow & & & & \\ & & & & 3 & & & & \end{array}$$

如果用的是四位对数表. **5:** 7, 1, 2, 2. **6:** 不能. **7:** 能. **9:** 不能.

3-1. 可以这样回答：(a)生蛋→熟蛋；(b)木柴→灰；(c)充滿油气混合物的汽缸→充滿燃气的汽缸；(d)单細胞卵子→双細胞卵子；(e)积云→雷雨；(f)春情发动→受孕；(g)低价格（供应已缺时）→高价格；(h)猫見耗子→猫追耗子；(i)聚集的星云→稀散的星云.

3-4. **1:** $n'=2n$. **2:** 2, 4, 8, 16, 32, 64×10^3. **3:** 图(ii)：1000→2000→4000→⋯. **4:** $n'=0.8n$. **5:** (i) 800, 640, 510, 410, 330×10^6；(ii) 零. **6:** 它就会变到状态3并保持在那里；3是它能保持不变的唯一状态. **7:** 它就会在状态2与8之間不断循环变动. **8:** 有四个洼；其中二洼有一平衡状态，二洼有一循环圈. **9:** $n'=0.9n+1{,}000{,}000$. **10:** 20, 19, 18.1, 17.3, $\times10^6$. **11:** 10,000,000. **12:** 若l是其体长，則每一段时間内体长的变化是$l'-l$；故$l'-l=1.2$，于是变换是$l'=l+1.2$. **13:** 細菌增多的数目（不是下一阶段的細菌数）是$n'-n$；故$n'-n=10^{-8}n(10^8-n)$，于是变换是$n'=n+10^{-8}n(10^8-n)$. **14:** 19, 34, 57, 81, 97×10^6.

3-5. **1:** $\downarrow\begin{matrix}(ABC)&(BCA)&(CAB)\\(BCA)&(CAB)&(ABC)\end{matrix}$. **2:**
$$\begin{array}{ccc} & (ABC) & \\ \nearrow & & \searrow \\ (CAB) & \leftarrow & (BCA) \end{array}$$

3: $(1,-1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. **4:** 含四个元素的一个循环圈. **5:** (2, 3, 5), (3, 5, 8), (5, 8, 13).

3-6. **1:** $\left(\frac{1}{2},2\right)$, $\left(2,-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$, $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},2\right)$等等.

2: (1, 2, 0, 2, 2). **3:** (2, 1, 0, 2, 2) $\rightleftarrows$ (1, 2, 0, 2, 2). **4:** 再加上彼此不相連的、各由两个元素組成的一些循环圈. **5:** (8, −3, 1). **6:** (8, 4)变到(6, 6)，系統就在(6, 6)这状态保持不变. **7:** 若原象是(a, b)，$a'=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, $b'=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$. **8:** (30, 34)→(28, 36)→(24, 40)→(16, 48)→(0, 64)→? 下一步怎么变就要看是否許可借錢继續賭. **9:** $a'=\frac{1}{2}\times(3a-b)$, $b'=\frac{1}{2}(3b-a)$. **10:** 开始賭时誰錢多的誰就总能贏. **11:** $m'=m-n$, $n'=2n$. **12:** 矢量(m, n). **13:** (150, 10) → (140, 20) → ⋯ → (0, 160)，这以后代数变换情况就不能表示生物界的实际情况了. **14:** $x=10, 0, -5, -5, -2\frac{1}{2}, 0, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}, \frac{5}{8}$; 不. **15:** 摆的振幅衰减得很厉害. **16:** 若用x表示工資，用y表示物价指数，那末第一个命題告訴我們$x'-x=y-100$. 第二个命題告訴我們$y'=x$; 故变换是$x'=x+y-100$, $y'=x$. **17:** (110, 110) → (120, 110) → (130, 120) → ⋯ → (1540, 990). **18:** 不，系統就陷入恶性螺旋圈. **19:** (110, 110) → (110, 100) → ⋯ → $\left(100\frac{5}{16}, 100\frac{5}{16}\right)$. **20:** 每个都收斂于100. **21:** 一个系統是稳定的，其余的有膨脹得愈来愈厉害的傾向. **22:** (80, 120)→(100, 80) → (90, 110) → ⋯ → $\left(99\frac{3}{8}, 100\frac{5}{8}\right)$. **24:** 是的. **25:** 3.

3-7. **1:** $\frac{d^3x}{dt^3}-\frac{d^2x}{dt^2}-2x\frac{dx}{dt}+x^2=0$. **2:** $\frac{dx}{dt}=y$, $\frac{dy}{dt}=-ax$. **3:** $\frac{dx}{dt}=y$, $\frac{dy}{dt}=(1-x^2)\frac{y}{x}-\frac{2}{x(1+x^2)}$.

4-1. **1:** 三个. **2:** 是的. **3:** 在R_1作用之下它变成$c\to d\to b$; 然后在R_2作用之下成为$b\to a\to b$; 因此它处于b. **4:** (i) R_1之后再继以R即行; (ii) R_1, R_3, R_2就可以. **5:** 它就会变成$x'=4$, $y'=4-y$; 注意第一行属于x的方程就弄成实际上不正确; 固定后就迫使机器具有不同的性态. **6:** 每列中的各个状态必須是一样的.

4-2. **1:** (i) $g'=2g-2h$, $h'=2g-2h$; (ii) $g'=g-h$, $h'=2g$; (iii) $g'=0$, $h'=2g+2h$. **2:** (i) $h'=j$, $j'=e^{-h}$; (ii) $h'=\log(2+\sin h)$, $j'=1+\sin j$. **3:** (i) 0; (ii) 2; (iii) 交替为1与2; (iv) 前90步$a=1$，然后$a=10$. **5:** $PV=10$; 近似地說是的. **6:** $n'=n+a^2$. **7:** 是的; 每跳一次的量是$n'-n$，而这个量的值是$3a$.

4-3. **1:** $ab=00$　　01　　10　　11　　20　　21

$$\begin{array}{cccccc} s'=s & s & 0 & t & -s & -s+2t \\ t'=t & 2t & t-1 & 2t & t-2 & 2t \end{array}$$

2: 3. **3:** $a=9/8$. **4:** $a=9/10$, $b=-1/10$. **5:** 四个($ab=0, 1, 2$ 或 4).

4-4. 1: 令 a 与 b 总相等，即是使变换器实际成为 $p'=a(p+q)$, $q'=a(p+q)$.

4-5. 1: 动态图必由通过一切状态的单独一个鏈組成. **2:** 序列 (8, 4), (6, 6).

4-7. 1 与 **2:** (略去括号)四个注:

$$ai \rightleftarrows bk \qquad \begin{array}{c} dj \to bi \rightleftarrows ak \\ aj \to di \rightleftarrows ck \\ \uparrow \\ cj \end{array} \qquad bj \to ci \rightleftarrows dk$$

3: $ai \to ck \to di \to bk \to ci \to dk \rightleftarrows bi$. **4:** 是的. **5:** $n_1 n_2$. **6:** n^2. **7:** 每个部分相继到达状态 0. **8:** 每个部分依次发生变化 …0, 0, 1, 2, 0, 0…, 有点象一个脉冲沿神經傳輸的情形.

4-8. 1:

$$\begin{array}{c} ce \\ \downarrow \\ ae \to df \rightleftarrows bf \\ \uparrow \\ af \to cf \leftarrow be \leftarrow de \end{array}$$

3: 令 X 中所有的 β 取相同的值.

4-9. 1: $p, q; r, s, t, u$. **2:** (1, 0, 1, 0, 0).

4-11. 1: 在六对之間象 AB 那样的有 6; 沿四个象 ABC 那样的三元組，按两个方向之一算，有 8 个; 而所有四元組 ($ABCD$, $ABDC$, $ACBD$, $ACDB$, $ADBC$, $ADCB$) 周圍的有 6 个. **2:** $x'=y+z^2$, $y'=2z$, $z'=x-z$. **3:** 是的; 另外的变换是 $x'=y+z$, $y'=2z$, $z'=x-1$. **4:** 是的.

4-12. 1: (为书写簡便起見，略去方框)

(i) $y \to x$; y 主制 x;

(ii) $\begin{array}{c} y \\ \swarrow \quad \nwarrow \\ x \to z \end{array}$ 有反饋的系統;

(iii) $u \rightleftarrows x$ $v \rightleftarrows y$; "整个"系統实际上由不相連接的两部分組成;

(iv) $u \to x \to y \to z$; 作用关系形成一鏈;

(v) $y \begin{array}{l} \nearrow u \\ \to x \\ \searrow z \end{array}$; y 主制所有别的三个; (vi) $\begin{array}{r} u \searrow \\ x \to \\ y \nearrow \end{array} z$; z 为其他三个所主制.

2: 当 y 是零时.

4-13. **1:** z 主制 x, y 不依賴于 x 与 z.

4-14. **1:** 只有 (iii).

4-15. 若取下列各变量 S＝歌声, L＝笑声, X＝琴声, Y＝焚香, 規定每个变量起作用时的值为 1, 不起作用时的值为 0, 則可发現这是一个带輸入的机器

	↓	(S, L) 00	01	10	11
(X, Y)	00	01	01	10	10
	01	00	00	11	11
	10	11	01	00	10
	11	10	00	01	11

要使这机器处于 (0, 0) 状态的一个办法是: 停止焚香一分钟; 下一步是停止焚香而彈琴; 最后又开始焚香; 这以后継續焚香而决不再彈琴. **2:** 是的, 因 L 的各个轉移受 S 所取值的影响. **3:** 不. **4:** $X \to S \rightleftarrows L \leftarrow Y$.

4-19. **1:** 可能采取的方法之一是: 擲一个骰子, 取第一次擲出的数作为 S_1 的映象, 等等. **2:** 可能采取的方法之一是: 取有号碼 1 到 6 的六張紙牌, 洗过之后排成一行, 然后把各个号碼依次塡到相应位置上去作为变换后的状态. **5:** 参看 4-20 节.

4-20. **1:** 是的, 不是, 不是.

5-3. **2:** 不是. **3:** 只有 (0, 0). **4:** y 軸上所有的点都是平衡点. **5:** $j=0$, $k=-1$. **6:** 是的. **7:** 不是. **8:** 每个箭头都要回到它的出发点, 因而示象点是不动的. **9:** 全同变换. **10:** 是的. **11:** 是的.

5-4. **1:** 如同 $\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \\ b & a & d & c & e & f & g \end{matrix}$ 便是. **3:** 不是. **4:** 不是. **5:** 不是. **6:** 每个变迹都是循环圈. **7:** 不是.

5-5. **1:** 只有 $b+c+g$. **2:** 是. **3:** 是. **4:** 是.

5-6. **1:** 是; 序列 $D(c)$, $TD(c)$, $T^2D(c)$, $T^3D(c)$, …是 d, a, c, c, …. **2:** 不; 极限不是 e. **3:** 系統虽然移出集合之外, 总会回到集合里面.

5-7. **1:** 可能用的一組变换是:

↓	a	b	c	d
T	a	b	a	b
D	c	c	•	•
E	b	d	•	•

5-9． **1:** $a=(100,100)$；D 把它变到 $(110,110)$——即 $\delta_1=10,\delta_2=10$；T 是已給的；它是不稳定的． **2:** a 及 D 照旧，但 T 变了，而系統是稳定的． **3:** 通常极限是除 a 以外的某一状态；它对这样的一些 D 是不稳定的． **4:** 是的，偏离要趋于零，这是一种平衡状态． **5:** 不；偏离会增加到某一程度，只受外界因素如间耦合形式的限制． **6:** 使任何偏离趋于减小而不致增大． **7:** 这是越来越厉害的——对交通管理人員来說永远是头痛而不得解决的事． **8:** 对于平衡位置的任何偏离总会增大，除非有别的限制因素． **9:** 对的；对一切位移 D 都这样；于是，若 D 把状态轉移到 (δ_1,δ_2)，則 x 的相继各值为 $\delta_1,\frac{1}{2}\delta_2,\frac{1}{4}\delta_1,\frac{1}{8}\delta_2,\cdots$，这显然是收斂于 0 的；对 y 也是如此．

5-13． **1:** 不对；因在 β 取某一值时 y 須以 0 为平衡状态；这样 β 就得满足 $0=2\beta 0+3$，这是不可能的．

6-3． **1:** 参看 **6-5** 节．

6-5． **1:** $\begin{matrix} g \searrow \\ h \nearrow \end{matrix} j\rightarrow f$． **2:** $j\rightarrow f\rightarrow h$（输入在 β 处时；从登記表看不出从 g 起的轉移是什么）． **3:** 不，从 C 起的轉移不是单值的． **4:** 是的，从所能看到的情形来說，是的．

5: $\downarrow\begin{matrix} (x,y) & 00 & 01 & 02 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 22 \\ (x',y') & 01 & 00 & 11 & 11 & 00 & 21 & 11 & 20 & 11. \end{matrix}$

6: 对每一輸入值須观察 n 个轉移，至少需 n 步才能完成；因此要观察整个这一組变换，所需的步数不能少于 mn． **7:** 取 x 及 a 的任何二值，看 x' 得出什么值来．于是，如"$a=1$，$x=4$，則得 $x'=4$"便說明黑箱是 I．还有一个更简单的测試法是取 $a=0$，然后看 x 值是增大了还是减小了．

6-7． **1:** y 主制 x．

6-9． **1:** $\downarrow\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ t & p & r & q & s \end{matrix}$． **2:** 六个． **3:** 需两个变量：度盘讀数 (v) 及其变化率 $(\dot{v})$；$\frac{dv}{dt}=\dot{v}$，$\frac{d\dot{v}}{dt}=k(u-v)-f\dot{v}$，其中 k 表示彈簧强度和质量慣性矩，f 是磨擦系数；(ii) $\frac{dy}{dt}=\dot{y}$，$\frac{d\dot{y}}{dt}=-R\dot{y}/L-y/CL+x$．要使它們在上述的严格意义下是同构的，必須有 $f=R/L$ 及 $k=1/CL$．在这条件下，可用一一变换

$$\downarrow\begin{matrix} y & \dot{y} & x \\ v & \dot{v} & ku \end{matrix}$$

来証明它們是同构的。

4: $\downarrow\begin{array}{ccc} u & v & w \\ z & x & y \end{array}$.

6-10. **1:** 它們是一样的: $p \rightleftarrows q \to r$. **2:** ii 与 iv 可能会改变; i, iii 及 v 是不变的. **3:** 都是不变的.

6-11. **1:** 設想 x 是黄油价格, y 是糖价格; 現时它們的差是 $x-y$; 明天的差是 $(x-y)'$; 这又跟明天的黄油价格减去明天的糖价格 $x'-y'$ 一样.

6-12. **1:** 是的, 如果把一一变换看作只是多一变换的一种极端情形.

6-13. **1:** 偶+偶=偶, 偶+奇=奇, 奇+偶=奇, 奇+奇=偶. **2:** (令"$x+y$"表示"把 x 和 y 混同起来"). 这些系統是: (i) $a+b$, (ii) $c+d$, (iii) $a+b$ 且 $c+d$, (iv) $b+c+d$, (v) $a+b+c+d$, (vi) 原系統(所有状态都不混同). **3:** 状态 (x, y) 与 $(-x, y)$ 可以混同起来, 因 x 变正負号并不改变下一个状态 (x', y'); 例如, 若只告訴說現在的状态是 $(\pm 4, -2)$ 而不明确說出 x 的正負号, 仍足以表示下一状态必定是唯一的 $(+2, +14)$.

6-16. **1:** 这时系統和模型就分不出誰是誰了. **2:** 石共存在, 大脑也存在; 它們是在最低水平上同构的. **3:** (i) $a, b+c+d$ 与 $p, q+r$ 同构; (ii) $a+b+c+d$ 与 $p+q+r$ 同构.

7-6. **1:** $26\times 26\times 26$ 共有 17,576 个. **2:** 16. **3:** 11. **4:** $2\times 2\times 2\cdots$ 共乘十次, 即 1024. **5:** (i) 27, (ii) 21. **6:** 27. **7:** $3^3=27$, 而 $3^4=81$; 故要从 52 張牌中挑出别人所看中的一張牌, 必須让他告訴四次. **8:** 父亲的血型只可能是 O 型.

7-7. **1:** 一比特. **2:** 4.7 比特. **3:** $5\times 4.7=23.5$ 比特. **4:** (i) 1 比特; (ii) 20 比特. **5:** $2^{20}=1,048,576$. **6:** 每个問号处的填法有 $\log_2 6$ 比特的变异度, 故所有問号的填法共有 $6\log_2 6$ 比特即約为 15.5 比特. **7:** $n\log_2 n$ 比特. **8:** 12000 比特. **9:** 五千字一頁的印頁上約有 50,000 比特——这比唱片的变异度大. **10:** 在其他条件相同的情况下, 两者的变异度是一样的. **11:** 上題所指的集合是:"所有要用 10 分钟讀完的小册子". 变异度是就这个集合来說的而不是每本小册子所含的变异度. **12:** 当然能; 只要它与别的可能事件不同.

7-12. **1:** 沒有約束, 因这已包括过去和現今各种婚姻状态的一切可能有的結合. **2:** 有約束, 因还缺少四个可能組成的矢量.

7-13. **1:** 自由度是 4; 至少有 $10\times 8\times 10=800$ 辆. **2:** 有約束, 只要表針装得正确; 例如当时針在两个数字之間时, 就必定說明分針在 6 处. **2:** 是的. **3:** 自由度是一; 因关于分針在何处的信息从时針的位置已能得出.

4: 蜥蜴眼的自由度是 4，人眼的自由度略大于 2，因人眼的偏轉也有小小的独立性. **5:** 2. **6:** 1，因不管有多少分量，它的变异度不会超过 a 的变异度. **7:** 在未作图綫前，对任一 x，y 可取其变化范圍內的任一值；作图綫后，对任一 x，y 就限于取某一值——坐标为 x 处的纵坐标綫与所作图綫交点的纵坐标值. **8:** 6.

7-15. **1:** 这定律說明：在一切可能的有理数（个数无穷）中，化合物各元素的比总取一个較小子集（可能只有几十个有理数）中的数. **2:** 在几何上可能作出的一切变迹中以及在热状态的一切可能有的变迁中，这定律限定只能有少数几种.

7-19. **1:** 在所有象 $a\to a$，$a\to b$，$a\to c$ 等等的轉移中只許可有其中一个轉移而除掉其余一切轉移，因从 a 起的轉移必須是单值的；同样从 b 等起的轉移也必須如此.

7-20. **1:** 八个. **2:** 十七个. **3:** 十二个. **4:** (i) $4^{10}=1,048,576$; (ii) 21,892.

7-22. **2:** 寄生虫的变异度大些；因有些寄主显然可以是一类以上的寄生虫的食物. **3:** V 是多一变换，使变异度减小. **4:** 是个缺乏分辨能力的品評家. **5:** (i) 6 个状态；(ii) 2 个状态. "浴池温度不正常." **6:** 某一特定状态 S_i 能作为某一特定状态 S_j 的映象的概率是 $\frac{1}{n}$. 而 S_i 不是 S_j 的映象的概率是 $1-\frac{1}{n}$. S_i 不是 S_k 的概率也是 $1-\frac{1}{n}$. 因此，S_i 不是任何状态的映象的概率是 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. 这是变换后消失了的那部分原象. 当 $n\to\infty$ 表示这个部分的分数就 $\to\frac{1}{e}$. 因此表示剩下那一部分的分数是 $1-\frac{1}{e}$.

7-24. **1:** 三个状态 $=1.58$ 比特. **2:** 再增加 1.58 比特. **3:** "a 与 b" 先后变成：$5a$，$5a+7$，$10a+14$，$10a+b+14$. 若减去 14，就只余 $10a+b$. 因此 a 与 b 两个数碼字的 100 种組合数（若許可取 0 与 0）在减去 14 之后就变換成从 0 到 99 这一百个数. **4:** 所有两个数碼形成的組合. **5:** 零. **6:** 两个状态，一比特；这集合是各种不同的回路或一个回路的各个不同的时刻. **7:** 不. 它們可能同时沿同一循环圈运轉. 对 (i) 机器与机器間在同一时刻的状态相同，与 (ii) 同一机器在不同时刻的状态相同，这两件事应分别清楚.

8-3. **1:** 跟只洗过一次的情形差不多.

8-4. **1:** 是；平常叫做"取眞数". **2:** 不是；許多不同的 x 值可以給出同一个 x' 值. **3:** 全同变换. **4:** $n'=n-7$. **5:** $x'=x-y$，$y'=-x+2y$.

6: $3\log_2 26$ 比特，即 14.1 比特. **7:** $26^3=17576$. **8:** $\log_2 8+\log_2 7$ 即 5.8 比特. **9:** 不能，变异度是 5.7 比特，不够用 $(\log_2 52<\log_2 56)$. **10:** 1 比特；消息是"发动"与"未发动"，共两个. 至于分子結构等等的复杂性如何是沒有关系的.

8-5. **1:** *AACBDDBCBCCB*. **2:** *acdbdcd*. **3:** *bdcdbad*. **4:** 是. **5:** 10, 8, 7, 10, 11, 9, 8. **6:** 10, 8, 4, 3, -1, -1, 3, 0, 1, 1, -1, …. **7:** $x=2$, 1, 2, -11, 11, -2, 16, …, $y=1$, 4, -11, 13, -24, -13, -93, …. **8:** $x=\exp(-4t-\sin t)$. **9:** $x=\frac{1}{2}(e^{-t}+te^{-t}-\cos t)$. **10:** x 追赶 a 并愈来愈接近 a.

8-6. **1:** 不；在变换表中有 108 行，故每列必須有 108 个元素；今只有 100 个，其中必定有重复的. **2:** (i) 7; (ii) 5^{12}. **3:** 装一个速度表，使之能給出与时变率成比例的一个数. **4:** 不；因若輸出稳定于 0（若以 0 开始就会有这种情形），就不能从 x 的轉移（它对一切 a 都是 $0\to0$）推出 a 的值来.

8-7. **1:** 因它不能保持变异度，不能使原来不同的一切元素变换后仍然是不同的；即使有完善的譯碼机也是根本不可能的.

2:

(b, B)	$R\ \ R\ \ R$
(b, C)	$S\ \ S\ \ S$
(b, D)	(不会有)
(c, A)	$S\ \ S\ \ S$
(c, B)	$R\ \ R\ \ R$
(c, C)	(不会有)
(c, D)	$Q\ \ Q\ \ Q$
(d, A)	(不会有)
(d, B)	$Q\ \ Q\ \ Q$
(d, C)	$R\ \ R\ \ R$
(d, D)	$S\ \ S\ \ S$

3: 其直接影响图必为 $u\to x\to y$，其中 y 在两步之后发出 u 的值. x 的形式可以是

$\downarrow$	x_1	x_2	x_3	…
u_1	x_1	x_1	x_1	
u_2	x_2	x_2	x_2	
u_3	x_3	x_3	x_3	
…	等等			

今若 y 的形式是

$\downarrow$	U_1	U_2	U_3	$\cdots$
x_1	U_1	U_1	U_1	
x_2	U_2	U_2	U_2	
x_3	U_3	U_3	U_3	
$\cdots$	等等			

则 y 将发出与 u 原值相应的大写字母.

若把两个 $(x+y)$ 看作是有状态 (x, y) 的一个机器,则变换必为:

$\downarrow$	(x_1, U_1)	(x_1, U_2)	(x_1, U_3)	$\cdots$	(x_2, U_1)	(x_2, U_2)	(x_2, U_3)	$\cdots$
u_1	(x_1, U_1)	(x_1, U_1)	x_1U_1	$\cdots$	x_1U_2	x_1U_2	x_1U_2	
u_2	(x_2, U_1)	x_2U_1	x_2U_1	$\cdots$	x_2U_2	x_2U_2	x_2U_2	
u_3	(x_3, U_1)	x_3U_1	x_3U_1	$\cdots$	x_3U_2	x_3U_2	x_3U_2	
$\cdots$	等等			$\cdots$	等等			

一般地, u_i 取 (x_j, U_k) 到 (x_i, U_j) 的值,而它在下一步变到 $(—, U_i)$,重复原来的 u_i.

8-8. 1: $p'=n$, $m'=c/d$; 取 $d=n$ 及 $c=p$ 而接起来. **2:** $p'=n$, $m'=\frac{1}{2}(d-c)+2$; 取 $d=n$ 及 $c=p$ 而接起来. **3:** $p_1'=x$, $p_2'=y$, $m_1'=(c_1+c_2)/2d_1$, $m_2'=(c_2-c_1)/2d_2$; 取 $d_1=x$, $d_2=y$, $c_1=p_1$, $c_2=p_2$ 而接起来. **4:** 不能从方程分别解出 a 与 b 来,或者說 a 与 b 只能結合成 $a+b$ 时才对方程有影响,或它們两者的个别影响不能从輸出里分辨出来从而不能往回把它們追查出来——这些都是表达同一基本思想的不同說法. 注意譯碼机之所以不能作并非由于缺少什么合适的机件,而是由于輸出并不規定輸入——根本沒有必要的信息. **5:** 所需譯碼机是以 $\dot{x}_1$ 与 $\dot{x}_2$ 作为輸出的速度表. 于是形成函数

$$a_1=\frac{\dot{x}_1x_2-\dot{x}_2-x_1}{x_1(x_2^2-1)} \text{ 及 } a_2=\frac{-\dot{x}_1+\dot{x}_2x_2+x_1x_2}{x_2^2-1}$$

的任何机器就会放出原有的輸入,如果要实际求出变换,则(上述 $\dot{x}_1$ 等等的函数用 A_1 及 A_2 表示)变换 $a_1'=k(A_1-a_1)$, $a_2'=k(A_2-a_2)$ 可使之具有与所需性质相差任意小的性质,只要让 k 是个足够大的正数(题 8-5-10). **6:** -2 与 $(7, 3)$ 沒有什么特别关系,而 4 则与 $(7, 3)$ 有关系,这从表的构造可以看出来.

8-11. **1:** t 有三个状态；u 有两个状态. **2:** t 有三个状态；u 不能有多于六个的状态；u 实际有五个状态. **3:** T 有两个状态；U 也一样. **4:** 三个状态. 它們是：(0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)与(0, 1, 0, 1).

8-13. **1:** 每步一比特, 因 r 只有两个状态. **2:** 在头五步相继取得的不同状态数是：Q: 9, 4, 3, 3, 3; R: 1, 2, 2, 2, 2; S: 1, 1, 2, 3, 5. **3:** 因从 1 跳到 4 就会意义着增加变异度 3, 而 R 至多給出变异度 2.

8-14. **2:** 不管用什么方法, 至少要称三次. 因要傳送的变异度是 $\log_2 27$ 比特, 而傳送器每次只能傳送 $\log_2 3$ 比特.

8-15. **1:** 四步；从 A 傳出的变异度需要最多步数. **2:** 四步；(答案必然和上题的一样, 因这两个問題事实上是相同的). **3:** 三步；从 y 起的所需步数最多. **4:** 两步.

8-17. **1:** A 在(3, 2)处. [提示：A'' 在(−1, 0), B'' 在(1, 0).] **2:** 是；从輸出可推出一串輸入矢量, 其所有第一个分量所組成的一串值便是 α-信件. **3:** 不会；Y 的运动无非就是 A 的运动, 不过振幅减半而已. **4:** 若取适当的起点, 以 a, b, 等等表示 A, B, 等等往左右的运动(并取相同的度量单位), 則 $l=\frac{1}{2}(a-b)$, $n=\frac{1}{2}(a+b)$, $y=\frac{1}{2}(l+n)$, $z=\frac{1}{2}(-l+n)$, 而其中的 l 与 n 可以消去. 所謂“譯成明碼”的意思是指从联立方程解出未知的 a 与 b, 而用已知的 y 及 z 表示它們.

9-2. **1:** 所得变換是确定性的；至于如何得出这变換則并无关系. **2:** 因每一状态总会变到某一状态, 故每列中表示概率的各个数字加起来必定等于 1. **3:** 不. **4:** 2^{10}, 即 1024. **5:** 差别在于从每一点出发的箭头可以多于一个.

9-4. **1:** 实际轉移頻率是

↓	A	B
A	6	17
B	17	10

因每列中的概率相加必等于 1, 故第一列必可被 23 整除, 第二列必可被 27 整除；于是算出轉移概率如下：

↓	A	B
A	0.26	0.63
B	0.74	0.37

4:

↓	A	B
A	0.2	0.5
B	0.8	0.5

(这实际就是用来生出題1中变迹的那个系統).

9-5. **1:** 昆虫一旦到石子底下后就会停在那里. **2:** B 必是捕蝇紙(粘住蒼蝇的地方), D 必是生火的炉子(蒼蝇决不会停在那里). **3:** 把矩陣看作登記表的密碼;因自登記表可确定唯一矩陣,而矩陣只能确定一批登記表. 或者說,若矩陣失却了,我們可以从登記表把它重新得出来,但失了登記表就不能从矩陣把它重新得出来.

9-6. **1:** (100, 0, 0), (25, 75, 0), (62, 19, 19), (32, 61, 7), 等等. **2:** 3这一面常是朝上, 4这一面[illegible]朝下, 故 $x=4$. **4:** 我們来考察 100 个

9-13. **1:** 最后平衡状态都在 B；任何一串轉移到最后都会变成…BBB…．这就沒有变异度，于是熵必为零．**2:** 熵是在整个系統处于最后平衡状态时算得的，而在本題的情形下最后平衡状态不允許再有"系統处于状态 A"的假定．

9-16. **1:** 有約束，因 62 小于 3^{14}；$3^4=81$，故若适当选取四种醣就可以够了．**2:** 矩陣里每个数都一样，如同 9-10 节末的那个矩陣．

9-17. **2:** 若所作假設正确，則通道容量至少是每分钟 2000 比特．**3:** 每指的变异度是每 $\frac{1}{300}$ 分钟 $\log_2 3$，卽每分钟 $300\log_2 3$；十指是能独立运动的，故十指的变异度为每分钟 $3000\log_2 3$ 比特，故下界是每分钟 4800 比特．**4:** 每小时5540 个記号．

9-18. **1:** b 只能在 a 或 b 之后出現，而不能在 d 之后出现；故 Xb 必为 ab；同样 Xc 必为 ac；XX 必为 dX．

9-19. **1:** (i) $\downarrow\begin{matrix}A & B & C\\ 4 & 9 & 7\end{matrix}$； (ii) $\downarrow\begin{matrix}A & B & C\\ 2 & 1 & 5\end{matrix}$． **2:** 只有当 α 与 β 的組合限于四个中的某三个时才可能．

9-20. **1:** 是畸变，因再倒一次就会恢复原象．**2:** 是畸变，只要每一紧張产生不同的频率便行．**3:** 是摻变，因肌肉的不同紧張状态产生同一(零)輸出．

9-21. **1:** $H_1=\log_2 9$．H_2 可求出如下：

接收符号：	1	2	3	4	5	6	7	8	9
概　率：	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$

故得 2.948 比特；因此模棱度是每个符号 0.222 比特．**2:** 模棱度＝0；消息可以无歧叉地傳輸．**4:** 0.00299．**5:** 这些事件和概率可列表如下：

实际細胞：	L	L	M	M
驗血断定：	L	M	L	M
概　率：	0.9405	0.0095	0.00025	0.04975

(求概率的最簡方法如下：先把 20,000 个細胞分成两批：19,000 个的一批与 1,000 个的一批；然后再把这两批各分成誤断的和其余的两批；最后各用 20,000 去除)．$H_1=0.365$ 比特/每个細胞；$H_2=0.324$ 比特/每个細胞．故模棱度＝0.041 比特/每个細胞．

10-4. **1:** 表示猫在搞一只死耗子．**2:** 如果可能有这种情形，那就表示猫在干一种使死耗子复活的动作！**3:** 若 $C(M_1)$，…，$C(M_k)$ 之中沒有一

个属于 $M_1, \cdots, M_k$，则說 C 对 M 是"致命"的.

10-5. (i) 溫度与湿度；(ii) 爬山运动員血液內的氧含量以及有关的一切；(iii) 透过車窗的光綫方向；(iv) 日落后看不見的車前方路面和物件的照度；(v) 食品溫度——从而食品上的細菌感染程度；(vi) 植物叶子上所受的光照强度；(vii) 网膜上所受的照度；(viii) 脚跟上所受的压力；(ix) 眼球受物件的接触压强——使其保持为零；(x) 发出炮彈与目标的距离，使其为零或保持很小.

11-3. **1:** $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{matrix}$. **2:** 給定 D 后，R 应取能滿足 $37 = R - 2D$ 的値；故 R 应取値 $37 + 2D$. **3:** 主法綫(見 2-10 节)上所塡的結果是"打滑現象糾正了"，其他两格中的結果是"打滑更厉害了". **4:** 变异度是零——結局可能都是 c，不管 D 所能选擇的有多少变异度. **5:** 能.

11-4. **1:** 能. **2:** $\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \beta & \beta\text{或}\delta & \alpha & \alpha & \alpha\text{或}\delta \end{matrix}$.

3: 在任何情形下 R 只要取 γ，不管 D 走哪一步. **4:** 能，他只要采用下列变换：

↓	A 先生	B 先生	C 先生
	桔子汽水	大曲	桔子汽水

11-11. **1:** 够. D 的变异度有每秒 10 比特，視覚神經能傳送 200 倍这么多的变异度. **2:** 电話用以調节的容量是 0.63 比特/每秒，而舵輪的是 5.64 比特/每秒，故 D 平常显然不会发出多于 6.3 比特/每秒的变异度. **3:** 不，大为不够. D 每天发出 10^7 比特的变异度，而至多只有 $\frac{1}{17}$ 的这些变异度能傳送到将軍那里. **4:** 不够，他每天只能发出 3.6×10^5 比特.

11-14. **1:**

↓	1	2	3
a	β	α	γ
b	α	γ	β
c	γ	β	α

2: D 以傳輸 2 比特/秒的变异度危及 E. 为把这一变异度减到零，通道 $D \to R$ 的傳送率不能比这低. **3:** $C \to E$ 要傳送 20 比特/秒，故 $C \to R$ 至少必須傳送这一数量. **4:** $R \to T$ 必須能傳送 2 比特/秒才能抵消 D (从題 2)，以及来自 C 的 20 比特/秒；因这两者是独立的 (D 的値与 C 的値是不相关的)，故容量至少为 22 比特/秒.

12-8. **1:**

↓	L	R
L	0	0.99
R	1	0.01

2: 这两系統几乎是同构的；但 β 有时会从 A 直接跳到 D，而且有时会在 C 那里停留一步． **3:** a 在每步的概率相继为：0，$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{16}$，$\frac{25}{32}$；其余是 b 的概率． **4:** 可用矩陣乘积 prq 去前乘列矢量 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$；比較題 2-16-3 及 12-8-4． **5:** 新系統必是以象 (b,e) 这种組合状态为状态的；故它有六个状态．于是求其轉移概率．例如，求轉移 $(b,e)\to(a,f)$ 的概率是多少？要得到这一轉移，b 必須变到 a，而且这时另一分量必須处于 e 亦即处于 β．而当輸入在 β 处时 $b\to a$ 的概率是 0.9．同样，对 b（即 δ）$e\to f$ 的概率是 0.3；故整个轉移（两个独立事件都发生）的概率是 0.27．同样可求其他各轉移的概率，于是得矩陣（括号省略不写）：

↓	ae	be	ce	af	bf	cf
ae	0.06	0.63	0.25	0.14	0.15	0.12
be	0.12	0.07	0.25	·	0.35	0.08
ce	0.02	·	·	0.56	·	0.20
af	0.24	0.27	0.25	0.06	0.15	0.18
bf	0.48	0.03	0.25	·	0.35	0.12
cf	0.08	·	·	0.24	·	0.30

6: 是的．

12-10. **1:** 可能是这样一个矩陣：

↓	1	2	3	4	5	6	7	8	G
1	·	$\frac{1}{3}$	·	·	·	·	·	·	·
2	1	·	$\frac{1}{2}$	·	·	·	·	·	·
3	·	$\frac{1}{3}$	·	·	·	$\frac{1}{2}$	·	·	·
4	·	·	·	·	·	·	1	·	·
5	·	$\frac{1}{3}$	·	1	·	·	·	·	·
6	·	·	$\frac{1}{2}$	·	·	·	·	·	·
7	·	·	·	·	·	·	·	·	·
8	·	·	·	·	1	·	·	·	·
G	·	·	·	·	·	$\frac{1}{2}$	·	1	1

12-11. **1:** 只有 G. **2:** "当它在 a 或 b 处时,它就好象不知它在何处似的,下一步的轉移就是有随机性的;从 a 或 b 出发另外只可能轉到 c 处;若它到了 c 处,它就好象懂得它已經到什么地方似的,因这以后它就会毫不犹豫地通过 d 与 e 而到达 f,到达 f 之后它也許就永远停留在那里吃食".

12-12. 是的——对我的切身利益(基本变量)来說是有調节性的.

12-14. **1:** γ 必为全同矩陣;β 的主对角綫上沒有一个数是 1.

12-17. (i) 26; (ii) 52$\left(\text{参看“大脑設計”23-2 节;这里 } p=\frac{1}{52}\right)$.

12-21. **1:** 两个;G 的位置由 P 的位置(它有一个自由度)完全决定;J 的轉动角度就添上第二个自由度. **2:** 改法之一是把 V 改裝到 L 与 K 的中間. **3:** 改法之一是改装空气管道,使它朝下通向 V 而不是象原来那样朝上通向 V.

13-15. **1:** $3\log_2 7$,即为 8.42 比特. **2:** $3\log_2 91$,即为 19.52 比特. **3:** 至少为 3.3 比特,因只有十种組合法是不同的. **4:** 需 1 比特;状态的数目和其余一切都无关重要. 答数之所以必須为 1 比特也可以这样来理解:設想只可能有这两个机器(如题中所給),然后再設想設計者要用电报去傳达他所决定的选择;显然他用不着付多少电报費,因消息只要含有 1 比特的变异度就能傳达他的指示. **5:** (i) 49800 比特; (ii) 1.6 比特;不能期望两个量是一致的,因这不是对一張邮票来說的而是对可能有的不同的两批邮票(两个不同的集合)来說的. **6:** $n\log_2 n$ 比特. **7:** $in\log_2 n$ 比特.

13-17. **1:** 减去 19 种. **2:** 减去 26 种. **3:** 4.75 比特减到 3.00 比特,因此减去了 1.75 比特. **4:** 因 a_1 可变到 $n-1$ 个状态中的任一状态,a_2 等等也一样,故这种变换的个数是

$$(n-1)(n-1)\cdots(n-1)=(n-1)^n$$

若用对数表示,則原来的变异度是 $n\log_2 n$,而現今的变异度是 $n\log_2(n-1)$,故加上限制后所减去的变异度是

$$n\log_2 n-n\log_2(n-1)$$

5: 1.4 比特;更准确的数值是 $\left(1+\frac{1}{2n}+\cdots\right)\log_2 e$. **6:** 在 n 張牌里查看了第 k 張牌(如果还沒有找到所要的牌)之后,給出的平均信息或熵是

$$-\frac{1}{n-k+1}\log\frac{1}{n-k+1}-\frac{n-k}{n-k+1}\log\frac{n-k}{n-k+1}.$$

若这以前已找到所要的牌,則熵值是 0,这两种事件(及其熵)的概率是 $(n-k+1)/n$ 及 $\frac{k-1}{n}$. 故带权的平均熵值是

$$-\frac{1}{n}\left[\log\frac{1}{n-k+1}+(n-k)\log\frac{n-k}{n-k+1}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[(n-k+1)\log(n-k+1)-(n-k)\log(n-k)\right]$$

7: 每抽一張牌时熵值相同而抽中与不抽中的概率是 $\frac{1}{n}$ 与 $\frac{n-1}{n}$，故平均信息是

$$\frac{1}{n}\left[n\log n-(n-1)\log(n-1)\right]$$

14-1. 这当然需要有輔助的充分水量作为輸入．輸出可以从一个为輸入所控制的水龙头里放出来．比方說可以設計这样一种装置，用一水泵，使压力增加时自小孔注入的 0，1，2 单位流量能把水龙头打开到相应的位置．

譯后記

讲控制論方面的书現在已相当多了，这书可能是比較容易讀的一本．原作者是近一、二十年来专門研究控制論应用于生物系統的，他的讲法頗新穎，似乎也比别的同类书讲得簡单些，生动些，清楚些．正如有的人能用簡单的工具造出尖端的产品来一样，作者的确是相当成功地运用簡单的工具讲述了"控制論"这新兴科学的入門知識和应用技巧．书中附有相当数量完全可用初等数学方法解出的习題，少数用到微积分的习題在懂得微积分初步知識的人說来，可能比那些初等問題还要容易解决，而且略去这些部分并不会影响讀者对于全书的理解．

不过在說明这本书的优点时还应指出其中含有一些比較明显的錯誤观点和不妥之处．特别是在 4-15 节里，作者搞了一个"鬧鬼"的例子，来企图說明控制論可以与物质世界沒有关系．事实上正如譯者在該处脚注中所指出的，这个例子本身也并不会是从作者头脑中凭空想出来的，而很可能是作者把精神病院中三个患者的病态，故弄玄虛說成是鬼．作者是精神病院研究所的所长，当然有可能接触到这类問題．要是如实反映这个問題，我們很可以把它改編成为一个精神病院护士写給所长的一封信．唯心主义总是想尽办法在当代人所沒有完全理解的一切現象中找栖身之所，虽然結果总是失敗的．

作者还在书中不少地方表露出用控制論解决資本主义制度下社会問題的莫大希望．这种希望是沒有多大根据的．我們不否认控制論的新思想和新方法，可以应用在社会生活的一些技术性問題上，但并不认为这能帮助解决資本主义社会的根本問題．从历史上讲，即使在自然科学的領域内，在发現新原理和新方法的同

时，也曾有过类似的奢望．阿基米德对于杠杆的說法和拉普拉斯对微分方程的期望就是大家都熟悉的例子．在这方面我不妨引用控制論奠基人之一的維納在其所著“控制論”一书第八章中的几段話．維納认为那种打算利用科学新成就給資本主义社会医治病症的想法，就正如“老鼠想給猫挂上鈴鐺一般”．但是——他接着又問道，对作为老鼠的被剝削者来說，誰去給那掠夺成性的猫挂上鈴鐺呢？他认为抱着这种希望的人“表示了过份的乐观，并且誤解了一切科学成就的性质”．維納接着用控制論的观点分析了天文学、物理学和社会科学中的例子，說明精确科学方法何以能在天文学和物理学中获得很大成功而不能完全应用于社会科学，并在最后說“不管我們愿意与否，有許多东西我們只好让历史专家用不‘科学’的、叙述的方法去研究解决”．說得明确一点，这就是当代的許多重大問題归根到底只好用从历史总結出来的阶級分析的方法来进行研究．如果用历史唯物主义与辯証唯物主义的观点来写，本书的內容是可以叙述得更清楚更容易懂的．

作者在书中还有别的一些个别的議論和結論也是值得商榷的，有些題目和例子也不好（如 3–6 节題 6 等）．除了作者自认为特别重要的（例如 4–15 节）地方照原样譯出并附以脚注外，有的次要例子在翻譯时保持了实质，但改变了形式（如 7–12 节后面的題 1）．有許多地方为讀者閱讀方便也改变了原书的記号．但总的說来翻譯时是力求忠实于原意的．

为了尽可能对讀者負責起見，在翻譯过程中凡是能借到的有关参考书差不多也都看了．有好多术語都是沒有現成字典可查的，只好自己捉摸杜撰，不妥甚至錯誤之处一定还是难免的．对于原作者一些观点也只能按自己粗淺的水平作了不深不透的分析批判，敬請讀者多多指教．

譯　者

1964 年 2 月 25 日

内 容 索 引

注：　本索引中的简化字，是按照中国文字改革委员会(1964)公布的《简化字总表》为依据，每个字依其笔划排列。其中"阝"作二笔，"辶(辶)"作三笔，"衤(示)"作四笔，"艹(卄)作三笔，"乛"作一笔，"廿"作四笔。

七 笔

八 笔

九 笔

十 笔

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十　四　笔

十　五　笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十四笔

十五笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十四笔

十五笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上

十 四 笔

十 五 笔

十六笔以上