

高等学校教材

现代控制理论基础 例题与习题

尤昌德 阙志宏 杜继宏

电子科技大学出版社

0231-44

441083

Y72

高等学校教材

现代控制理论基础 例题与习题

尤昌德 阙志宏 杜继宏



电子科技大学出版社

• 1991 •

内 容 提 要

本教材对现代控制理论的几个方面：现代控制理论基础、系统分析与设计、最优控制、系统辨识等进行了阐述。全书分12章，每章都有各种典型例题。通过选例使学生深入了解和掌握运用基础理论解决实际问题。

本教材适用于自动控制、工业自动化、过程控制等专业的本科生、研究生，也可作其他专业和工程技术人员参考用书。

DY69/14

高等学校教材

现代控制理论基础例题与习题

尤昌德 阎志宏 杜继宏

*

电子科技大学出版社出版

(中国成都建设北路二段五号)

电子科技大学出版社激光照排中心排版

成都东方彩印厂胶印

四川省新华书店发行

*

开本 787×1092 1/16 印张 22.25 版面字数 535千字

版次 1991年6月第一版 印次 1991年6月第一次印刷

印数 1-4000册

中国标准书号 ISBN 7-81016-262-4/TP·21

(15452·119) 定价：5.70元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定,我部承担了全国高等学校、中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力,有关出版社的紧密配合,从1978年至1985年,已编审、出版了两轮教材,正在陆续供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要,贯彻“努力提高教材质量,逐步实现教材多样化,增加不同品种、不同层次、不同学术观点、不同风格、不同改革试验的教材”的精神,我部所属的七个高等学校教材编审委员会和两个中等专业学校教材编审委员会,在总结前两轮教材工作的基础上,结合教育形势的发展和教学改革的需要,制订了1986~1990年的“七五”(第三轮)教材编审出版规划。列入规划的教材、实验教材、教学参考书等近400种选题。这批教材的评先推荐和编写工作由各编委会直接组织进行。

这批教材的书稿,是从通过教学实践、师生反映较好的讲议中经院校推荐,由编审委员会(小组)评选择优产生出来的。广大编审者、各编审委员会和有关出版社为保证教材的出版和提高教材的质量,作出了不懈的努力。

限于水平和经验,这批教材的编审、出版工作还会有缺点和不足之处,希望使用教材的单位,广大教师和同学积极提出批评建议,共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

机械电子工业部
电子类教材办公室

前 言

本教材系接电子工业部的工科电子类专业教材 1986~1990 年编审出版规划,由自动控制教材编审委员会审定,推荐出版,责任编委古孝鸿。

本教材由西安交通大学尤昌德担任主编,上海交通大学施颂椒担任主审。

本教材是供自动控制专业本科生学习“现代控制理论基础”或“线性系统理论基础”课程时的参考书。旨在使学生通过解题深化对所学理论的理解,逐步学会灵活运用所学理论知识解决具体问题。本着加强基础,突出重点,拓宽适应面的原则,本书除介绍系统状态空间分析内容方面的例题和习题外,还介绍系统设计、最优控制以及系统辨识等方面的内容。本书所选习题既有一般水平的,又有部分难度较大、理论性较强以及一些适宜用计算机进行计算的题型。还有一些题目是作者在教学过程中自己设计的以及有关院校的硕士生入学试题。因此可以说,本书在一定程度上反映了目前我国在现代控制理论课程教学实践中的实际状况和新鲜经验。本书在编写格式上每节前均附有相应的内容摘要和典型例题,既可独立成章,又可供读者在算题前复习之用。另外,考虑到线性代数是学习现代控制理论的主要数学工具,为此,本书附录中安排了向量空间和矩阵理论的部分基础知识,以便读者需要时查阅。

本书第一、二、三、四、十二章及附录由西安交通大学尤昌德执笔,第五、六、七章由清华大学杜继宏执笔,第八、九、十、十一章由西北工业大学阙志宏执笔,尤昌德统编全稿。由于编者水平有限,书中难免还存在一些缺点和错误,殷切希望广大读者批评指正。

编者

1988.5

目 录

第一章 系统状态模型的建立	
§ 1-1 系统与数学模型	1
§ 1-2 系统状态模型的建立	3
§ 1-3 状态方程的特征值标准形	14
§ 1-4 组合系统的状态模型与传递函数矩阵	21
习 题	27
第二章 状态方程的解与连续时间系统的离散化	
§ 2-1 矩阵指数函数	32
§ 2-2 状态转移矩阵与状态方程的求解公式	40
§ 2-3 连续时间系统状态模型的离散化和离散时间状态方程的解	49
习 题	53
第三章 系统的可控性、可观测性分析	
§ 3-1 连续系统的可控性	57
§ 3-2 连续系统的可观测性	61
§ 3-3 离散系统的可控性、可观测性及对偶原理	65
§ 3-4 可控标准形与可观测标准形	69
习 题	81
第四章 线性系统的结构分解与传递函数阵的最小实现	
§ 4-1 线性系统的结构分解	84
§ 4-2 传递函数矩阵的实现问题	94
习 题	104
第五章 系统的稳定性分析	
§ 5-1 关于稳定性的基本概念	106
§ 5-2 李雅普诺夫第一方法	107
§ 5-3 李雅普诺夫第二方法	111
§ 5-4 李雅普诺夫第二方法在线性系统分析与设计中的应用	114
§ 5-5 李雅普诺夫第二方法在非线性系统中的应用	118
习 题	123
第六章 极点配置和观测器设计	
§ 6-1 状态反馈和输出反馈	125
§ 6-2 闭环系统的极点配置与镇定	130
§ 6-3 输入变换阵和稳态特性	142
§ 6-4 状态观测器的设计	144
§ 6-5 带有观测器的反馈控制系统	150
§ 6-6 极点配置与观测器的计算机辅助计算软件流程图	153
习 题	155

第七章 解耦控制和有外扰的综合	
§ 7-1 多变量控制系统的解耦问题	160
§ 7-2 消除扰动影响的综合	167
§ 7-3 线性多变量调节器	170
§ 7-4 鲁棒调节器的设计	178
习 题	185
第八章 变分法求泛函极值问题	
§ 8-1 泛函与变分的基本概念	189
§ 8-2 泛函极值问题	192
§ 8-3 应用变分法求解最优控制问题	201
习 题	208
第九章 极小值原理及应用	
§ 9-1 连续系统极小值原理及应用	211
§ 9-2 离散系统极小值原理及应用	226
习 题	230
第十章 线性二次型问题的最优控制	
§ 10-1 状态调节器	233
§ 10-2 输出调节器及跟踪器	246
§ 10-3 黎卡提方程的解析解法及计算机算法流程图	251
习 题	256
第十一章 动态规划	
§ 11-1 离散系统动态规划	260
§ 11-2 连续系统动态规划	267
习 题	272
第十二章 系统辨识技术基础	
§ 12-1 基本概念	275
§ 12-2 最大长度伪随机双电平信号(M序列)	277
§ 12-3 辨识系统脉冲响应函数的相关分析法	284
§ 12-4 系统辨识的最小二乘法	292
§ 12-5 传递函数的辨识	305
§ 12-6 系统辨识中的一些有关问题	312
习 题	317
附录 向量空间与矩阵理论的基础知识	
一、子空间	320
二、几个基本矩阵运算	320
三、线性变换	321
四、矩阵的约当形化	323
五、凯莱-哈密顿定理	326
习题解答	328
参考文献	348

第一章 系统状态模型的建立

§ 1-1 系统与数学模型

[内容提要]

一、系统的概念

1. 系统 简单地说,系统是由一些相互制约的环节组成并具有一定功能的整体。一个抽象系统可定义为一种数学过程。系统的概念既适用于简单的力学及电学装置,又适用于深奥复杂的系统。

2. 动力学系统 输入与输出用微分(或差分)方程关联起来的系统。

3. 系统的数学模型 所谓数学模型,就是物理系统的数学表达式。

它可以是时域的代表形式,也可以是频域的代表形式;它可以用输入输出关系来描述,也可以用状态变量来描述。

4. 线性系统 若系统的输入与输出之间服从叠加原理和一致性原理,则系统的数学模型是线性的。即若系统模型对任意两个输入 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 分别有响应 $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$,则系统对输入 $a_1u_1(t) + a_2u_2(t)$ 的响应为单个输出响应的线性组合, $a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$ (式中 a_1, a_2 是常数)。

二、状态、状态变量和状态模型的概念

1. 定义 动力学系统的状态是描述系统动力学行为的一个最小变量组。只要已知在 $t=t_0$ 时刻的该组变量的值和 $t \geq t_0$ 时刻的输入,便完全能够确定在 $t \geq t_0$ 任何时刻上系统的行为。用于描述系统状态的变量称为状态变量。

2. 两点注意:

(1) 系统的状态和系统的输出是不同的两个概念。输出是人们希望从系统中所要获得的信息;而状态是完全地描述系统动力学行为的一组信息。

(2) 状态变量不是唯一的,一个系统可以用各种不同的状态变量来描述。

3. 具有 n 个状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 的状态变量组构成 n 维状态向量 $x(t)$; 具有 r 个输入变量 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ 的输入变量组构成 r 维输入向量 $u(t)$; 具有 m 个输出变量 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ 构成 m 维输出向量 $y(t)$ 。

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad (1.1-1)$$

4. 系统的状态模型由状态方程

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)] \quad (1.1-2)$$

和输出方程

$$y(t) = g[x(t), u(t)] \quad (1.1-3)$$

构成。

(1) 状态方程描述变量间的动态关系, 对于连续时间系统, 状态方程是一组一阶微分方程; 对于离散时间系统, 状态方程是一组一阶差分方程。

输出方程不是动态关系, 常称 $g[x(t), u(t)]$ 为读出函数。

(2) 线性连续时间系统的状态方程和输出方程是

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.1-4)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.1-5)$$

其中: $A = n \times n$ 维系统矩阵; $B = n \times r$ 维输入矩阵; $C = m \times n$ 维输出矩阵; $D = m \times r$ 维直接传递矩阵。

对于定常系统, A, B, C, D 是常系数矩阵; 对于时变系统, A, B, C, D 是时变系数矩阵, 记为 $A(t), B(t), C(t), D(t)$ 。

(3) 线性离散时间系统的状态方程和输出方程是

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (1.1-6)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (1.1-7)$$

对于定常系统, G, H, C, D 是常系数矩阵; 对于时变系统, G, H, C, D 是时变系数矩阵, 记为 $G(k), H(k), C(k), D(k)$ 。 ($k \in Z$) 表示这些元素只能在离散时刻 $k (k \in Z)$ 上发生变化。

5. 线性定常连续时间系统和离散时间系统的状态模型的示意图分别如图 1-1(a), (b) 所示。

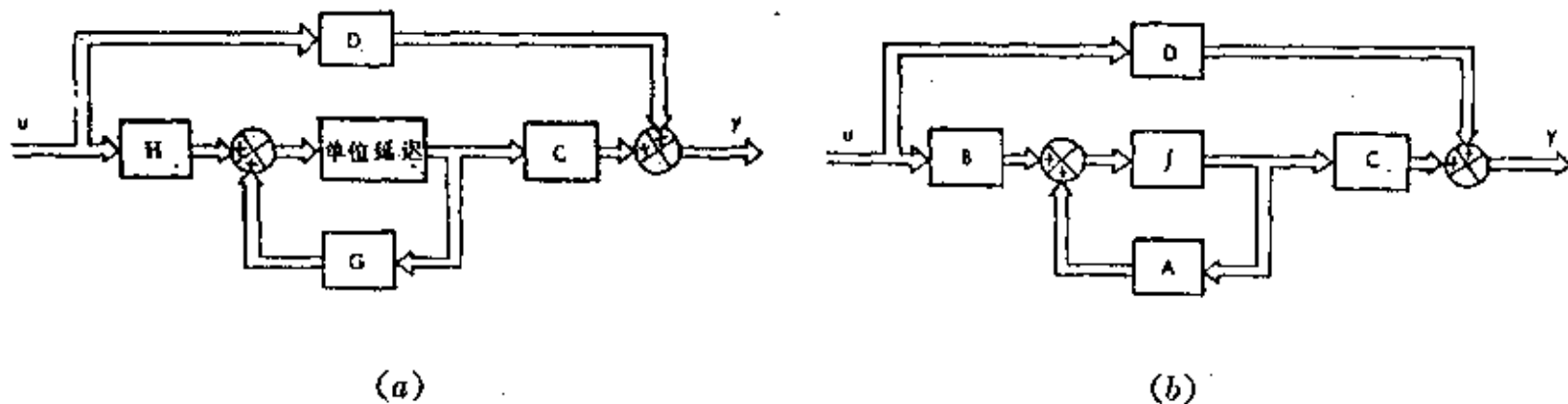


图 1-1 系统的状态模型

三、状态模型的线性化

通过将式(1.1-2)和式(1.1-3)的状态方程和输出方程在平衡点 (x_0, u_0) 展开成台劳级数, 并略去二次及二次以上的高阶项, 即可将状态方程和输出方程围绕工作点 (x_0, u_0) 线性化。

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \quad (1.1-8)$$

$$\tilde{y} = C\tilde{x} + D\tilde{u} \quad (1.1-9)$$

式中

$$\tilde{x} = x - x_0 \quad (1.1-10)$$

$$\tilde{u} = u - u_0 \quad (1.1-11)$$

$$\tilde{y} = y - y_0 \quad (1.1-12)$$

$$A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x^T} \Big|_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \quad (1.1-13)$$

$$B = \frac{\partial f(x, u)}{\partial u^T} \Big|_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \quad (1.1-14)$$

$$C = \frac{\partial g(x, u)}{\partial x^T} \Big|_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \quad (1.1-15)$$

$$D = \frac{\partial g(x, u)}{\partial u^T} \Big|_{x_0, u_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial u_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \frac{\partial g_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix}_{x_0, u_0} \quad (1.1-16)$$

§ 1-2 系统状态模型的建立

一、根据系统的物理机理建立状态模型

根据系统的物理机理建立状态模型的步骤如下：

1. 选择系统中储能元件的输出物理量作为状态变量；
2. 按照制约该系统运动的物理定律列写状态方程；
3. 按指定输出写出系统的输出方程。

表 1-1 是控制系统中一些常见的储能元件及其相应的能量方程。

表 1-1

储能元作	电容 C	电感 L	质量 M	转动惯量 J	弹簧 K
能量方程	$Cv^2/2$	$Li^2/2$	$Mv^2/2$	$J\omega^2/2$	$Kx^2/2$
物理变量	端电压 v	电流 i	速度 v	转速 ω	位移 x

二、根据系统的输入输出微分方程建立状态模型

1. 微分方程右边输入函数中不含有导数项的情况

对于微分方程式为

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = bu \quad (1.2-1)$$

的系统,取 $y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(n-1)}(t)$ 等 n 个变量为状态变量,记为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (1.2-2)$$

则状态模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.2-3)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (1.2-4)$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (1.2-5)$$

由于此模型呈 $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n$ 故又称相变量标准形。

2. 微分方程右边输入函数中含有导数项的情况

对于系统微分方程为

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y &= b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} \\ &+ \dots + b_1\dot{u} + b_0u \end{aligned} \quad (1.2-6)$$

状态模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= Cx + du \end{aligned}$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.2-7)$$

$$b = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad (1.2-8)$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (1.2-9)$$

$$d = \beta_0 \quad (1.2-10)$$

其中 $\beta_i = (i=0, 1, \dots, n)$ 按下式解出

$$\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & a_{n-1} & & & \\ & \vdots & & & \\ & a_1 & a_2 & \dots & \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad (1.2-11)$$

此方法计算量大,常用下面一种按传递函数分解的方法来计算。

三、按照系统的传递函数建立状态方程

本方法是将系统的传递函数分解成一系列最简单的一阶系统的组合。可以说是“化整为零”。

1. 传递函数直接分解

设 n 阶系统的传递函数

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.2-12)$$

其状态模型的 A, b, C, d 为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \quad (1.2-13a)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1/a_n \end{bmatrix} \quad (1.2-13b)$$

$$C = \left[\left(b_0 - \frac{a_0}{a_n} \right) \quad \left(b_1 - \frac{a_1}{a_n} \right) \quad \dots \quad \left(b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} \right) \right] \quad (1.2-13c)$$

$$d = b_n/a_n \quad (1.2-13d)$$

2. 传递函数串联分解

经串联分解后的系统传递函数

$$G(s) = \frac{b_n}{a_n} \frac{s+z_1}{s+p_1} \frac{s+z_2}{s+p_2} \dots \frac{s+z_n}{s+p_n} \quad (1.2-14)$$

指定每个积分器的输出为状态变量,系统的状态模型的 A, b, C, d 分别为

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & z_2 - p_2 & & 0 \\ & -p_2 & \dots & \\ & & \dots & z_n - p_n \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \quad (1.2-15a)$$

$$b = \begin{bmatrix} b_n/a_n \\ \vdots \\ b_n/a_n \end{bmatrix} \quad (1.2-15b)$$

$$C = [(z_n - p_n) \cdots (z_1 - p_1)] \quad (1.2-15c)$$

$$d = b_n/a_n \quad (1.2-15d)$$

3. 传递函数并联分解

(1) 极点为互异的情况

$$G(s) = \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{k_n}{s + p_n} \quad (1.2-16)$$

式中

$$k_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} G(s)(s + p_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2-17)$$

系统状态模型其 A 为对角形

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \quad (1.2-18a)$$

其 b, c 为

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \quad (1.2-18b)$$

$$c = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n] \quad \text{或} \quad [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \quad (1.2-18c)$$

(2) 具有重极点的情况

$$G(s) = \frac{Q(s)}{(s + p_1)^n} = \frac{k_{11}}{(s + p_1)^n} + \frac{k_{12}}{(s + p_1)^{n-1}} + \cdots + \frac{k_{1n}}{s + p_1} \quad (1.2-19)$$

式中

$$k_{1i} = \lim_{s \rightarrow -p_1} \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} [G(s)(s + p_1)^n] \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2-20)$$

系统的状态模型其 A 为约当形

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & -p_1 & \\ 0 & & & -p_1 \end{bmatrix} \quad (1.2-21a)$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2-21b)$$

$$c = [k_{11} \quad k_{12} \quad \dots \quad k_{1n}] \quad (1.2-21c)$$

4. 繁分式分解
若传递函数

$$G(s) = \frac{Q(s)}{D(s)}$$

的分母多项式 $D(s)$ 为 n 阶, 分子多项式 $Q(s)$ 为 $n-1$ 阶, 其繁分式展开式为

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Q(s)}{D(s)} = \frac{1}{\frac{D(s)}{Q(s)}} = \frac{1}{\beta_1 + a_1s + \frac{R_1(s)}{Q(s)}} = \frac{1}{\beta_1 + a_1s + \frac{1}{\frac{Q(s)}{R_1(s)}}} \\ &= \frac{1}{\beta_1 + a_1s + \frac{1}{\beta_2 + a_2s + \frac{1}{\frac{R_2(s)}{R_1(s)}}}} \\ &= \frac{1}{\beta_1 + a_1s + \frac{1}{\beta_2 + a_2s + \frac{1}{\frac{R_1(s)}{R_2(s)}}}} \\ &= \frac{1}{\beta_1 + a_1s + \frac{1}{\beta_2 + a_2s + \frac{1}{\beta_3 + a_3s + \frac{1}{\frac{R_3(s)}{R_1(s)}}}}} \\ &= \frac{1}{\beta_1 + a_1s + \frac{1}{\beta_2 + a_2s + \frac{1}{\beta_3 + a_3s + \frac{1}{\beta_4 + a_4s + \frac{1}{\ddots}}}}} \end{aligned} \quad (1.2-22)$$

令

$$\frac{X_n(s)}{X_{n-1}(s)} = \frac{1}{\beta_n + a_n s}$$

推出

$$\dot{x}_n = \frac{1}{a_n} x_{n-1} - \frac{\beta_n}{a_n} x_n$$

.....

令

$$\frac{X_3(s)}{X_2(s)} = \frac{1}{\beta_3 + \alpha_3 s + \frac{X_4(s)}{X_3(s)}}$$

推出

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{\alpha_3} x_2 - \frac{\beta_3}{\alpha_3} x_3 - \frac{1}{\alpha_3} x_4$$

令

$$\frac{X_2(s)}{X_1(s)} = \frac{1}{\beta_2 + \alpha_2 s + \frac{X_3(s)}{X_2(s)}}$$

推出

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{\alpha_2} x_1 - \frac{\beta_2}{\alpha_2} x_2 - \frac{1}{\alpha_2} x_3$$

令

$$\frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{\beta_1 + \alpha_1 s + \frac{X_2(s)}{X_1(s)}}$$

推出

$$\dot{x}_1 = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} x_1 - \frac{1}{\alpha_1} x_2 - \frac{1}{\alpha_1} u$$

按 x_1, x_2, \dots, x_n 的顺序排列, 则有

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_1}{\alpha_1} & -\frac{1}{\alpha_1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{\alpha_2} & -\frac{\beta_2}{\alpha_2} & -\frac{1}{\alpha_2} & 0 & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{\alpha_3} & -\frac{\beta_3}{\alpha_3} & -\frac{1}{\alpha_3} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & -\frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}} & -\frac{1}{\alpha_{n-1}} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{\beta_n}{\alpha_n} \end{bmatrix} \quad (1.2-23a)$$

$$b = \begin{bmatrix} 1/\alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2-23b)$$

$$c = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (1.2-23c)$$

上述建立连续时间系统状态模型的方法全都可以推广到离散时间系统。

[例 题]

例 1.2-1 列写图 1-2 所示电路中以电容 C_1, C_2 上的端电压 u_1, u_2 为输出的状态空间表

达式。

解 按基尔霍夫定律列写该网络三个回路方程和两个节点方程：

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} & i_2 &= C_1 \frac{dv_1}{dt} + i_1 \\ v_2 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + v_1 & i &= i_3 + C_2 \frac{dv_2}{dt} + i_2 \\ v_2 &= L_3 \frac{di_3}{dt} \end{aligned}$$

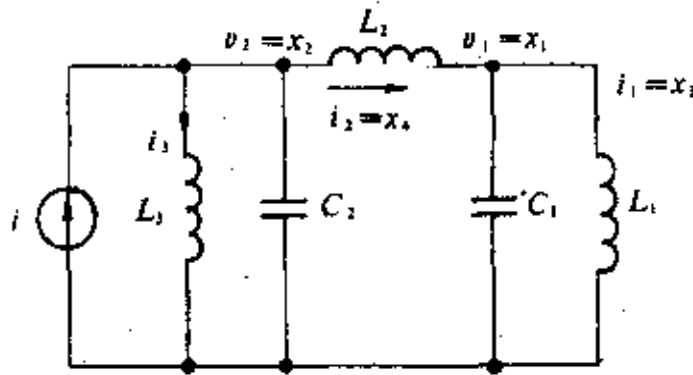


图 1-2 电路示意图

由电路分析知

$$i_3 = \frac{L_1}{L_3} i_1 + \frac{L_2}{L_3} i_2$$

故该网络系统只有四个独立的物理变量,即令

$$x_1 = v_1, \quad x_2 = v_2, \quad x_3 = i_1, \quad x_4 = i_2$$

且令控制变量 $u = i$,

由此可得该网络系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & -\frac{L_1}{L_3 C_2} & -\frac{L_2 + L_3}{L_3 L_2} \\ \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L_2} & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

指定 v_1, v_2 为输出,输出方程为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

例 1.2-2 列写图 1-3 所示机械运动模型中以质量块 M_1 和 M_2 的位移 y_1 和 y_2 输出的状态空间表达式。

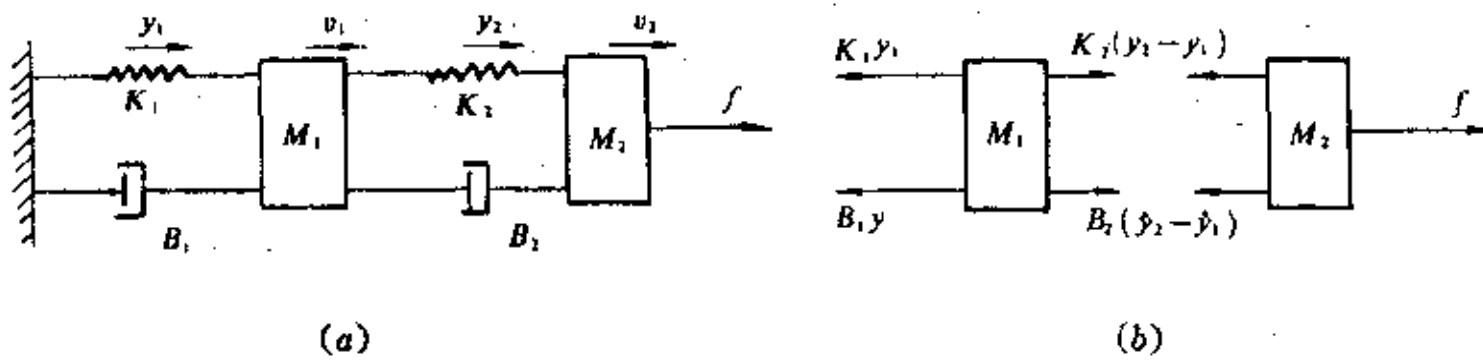


图 1-3 例 1.2-2 的机械系统示意图

解 选择弹簧 K_1, K_2 的伸长长度 y_1, y_2 , 质量块 M_1, M_2 的速度 v_1, v_2 作为系统的状态变量, 即 $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = dy_1/dt, x_4 = dy_2/dt$.

根据牛顿定律列写运动方程, 整理后, 有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{M_1}(K_1 + K_2) & \frac{K_2}{M_1} & -\frac{1}{M_1}(B_1 + B_2) & \frac{B_2}{M_1} \\ \frac{K_2}{M_2} & -\frac{K_2}{M_2} & \frac{B_1}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{bmatrix} f$$

指定 x_1, x_2 为输出, 故

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

例 1.2-3 列写图 1-4 所示电枢控制直流电动机的状态空间表达式, 图中 R, L 分别为电枢回路的电阻和电感, J 为机械旋转部分的转动惯量, B 为旋转部分的粘性摩擦系数。

解 选择回路电流 i 及电枢旋转角速度 ω 作为状态变量, 即 $x_1 = i, x_2 = \omega$ 由电枢回路微分方程, 有

$$L \frac{di}{dt} + Ri + e = u$$

由机械旋转部分的微分方程, 有

$$J \frac{d\omega}{dt} + B\omega = K_t i$$

由电磁感应关系式, 有

$$e = K_b \omega$$

式中 e 为反电势, K_t 为转矩常数, K_b 为反电势常数。将上面三式整理, 并把 $x_1 = i, x_2 = \omega$ 代入, 有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

若指定角速度 ω 为输出,则有

$$y = \dot{x}_2 = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

若指定转角 θ 为输出,需增添一个状态变量 $x_3 = \theta$,于是系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K_b}{L} & 0 \\ \frac{K_s}{J} & \frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

因指定转角 θ 为输出,故输出方程为

$$y = x_3 = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

例 1.2-4 列写图 1-5 所示倒立摆装置的状态空间表达式。该装置包含一个小车和一个用铰链安装在小车上的摆杆。由于小车在水平方向可适当移动,因此可通过控制小车的移动使摆杆维持直立不倒。

解 设小车和摆杆的质量分别为 M 和 m ,摆杆长为 $2l$,且重心位于几何中点 l 处。由图可得,摆杆重心的水平位置为 $z + l \sin \theta$,垂直方向的位置为 $l \cos \theta$,按照物理定律,摆杆和小车的运动方程式给出如下:

(1) 摆杆的转动方向

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} + B_1 \frac{d\theta}{dt} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta$$

(2) 摆杆的水平方向

$$m \frac{d^2}{dt^2} (z + l \sin \theta) = H$$

(3) 摆杆的垂直方向

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = V - mg$$

(4) 小车的水平方向

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + B \frac{dz}{dt} = u - H$$

式中, J 是长为 $2l$ 的摆杆的转动惯量, $J = ml^2/3$; H 和 V 分别是摆杆和小车接合部的水平反力和垂直反力; B_1, B_2 分别是摆杆和小车的粘性摩擦系数; u 是作用在小车上的力,作为控制输入。消去上面四个方程的 V 和 H ,得

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} + ml \cos \theta \dot{z} = -B_1 \dot{\theta} + mlg \sin \theta$$

$$(M + m)\ddot{z} + (ml \cos \theta)\ddot{\theta} = -B_2 \dot{z} + ml \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 + u$$

显然上面两个方程式是关于 θ 的非线性微分方程,将它们进行线性化后,其线性化方程式为

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{z} = -B_1 \dot{\theta} + mlg\theta$$

$$(M + m)\ddot{z} + ml\ddot{\theta} = -B_2 \dot{z} + u$$

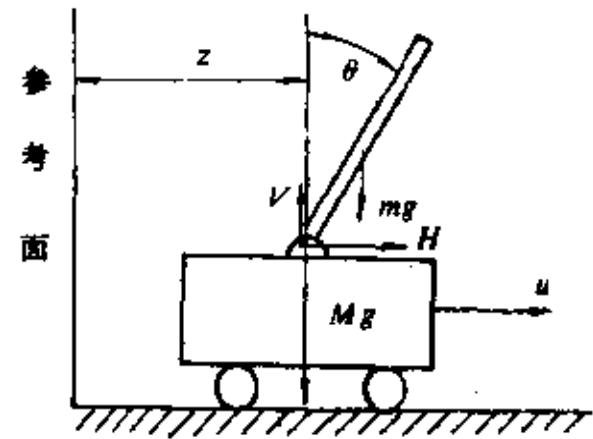


图 1-5 倒立摆示意图

注意,上式中的 θ 和 z 实际上应表示为 $\Delta\theta$ 和 Δz ,这样写法只是为了书写清晰。

为将上述微分方程写成状态空间表达式,选取小车位移 z ,小车速度 \dot{z} ,摆杆偏角 θ 以及角速度 $\dot{\theta}$ 为状态变量,即

$$x_1 = z \quad x_2 = \dot{z} \quad x_3 = \theta \quad x_4 = \dot{\theta}$$

则得系统状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-B_2(J+ml^2)}{\Delta} & \frac{-m^2l^2g}{\Delta} & \frac{mlB_1}{\Delta} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{mlB_2}{\Delta} & \frac{ml(M+m)g}{\Delta} & \frac{-B_2(M+m)}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(J+ml^2)}{\Delta} \\ 0 \\ \frac{-ml}{\Delta} \end{bmatrix} u$$

其中

$$\Delta = (M+m)J + Mml^2$$

若把位移 z 和偏角 θ 视为输出 y ,则输出方程为

$$y = \begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

为简化问题,忽略 J, B_1 及 B_2 ,则系统状态方程变为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u$$

若系统参数为: $M=1\text{kg}, m=0.1\text{kg}, l=1\text{m}, g=9.81\text{m/s}^2$

则

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

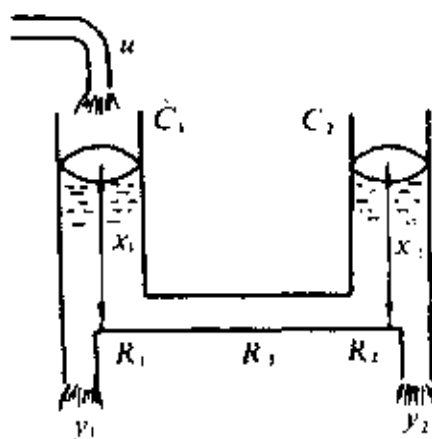


图1-6 例1.2-5的水槽示意图

例1.2-5 设有如图1-6所示的水位系统。已知水槽1的横截面积为 C_1 ,水位为 x_1 ;水槽2的横截面积为 C_2 ,水位为 x_2 ; R_1, R_2, R_3 分别为各管的阻抗。试列出以 x_1, x_2 为状态变量的系统微分方程。且知,输入量 u 是单位时间的流入量,输出量 y_1, y_2 是水槽的水在单位时间的流出量。

解 对于水槽1,在单位时间内的流入量是 u 与由于两个水槽的水位差造成的水量 $(x_2 - x_1)/R_3$ 之和,流出水量是 $y_1 = x_1/R_1$,这样,在微小时间 Δt 内的水量的净增量 $C_1 \Delta x_1$ 当为

$$C_1 \Delta x_1 = \left[-\frac{1}{R_1} x_1 + \frac{1}{R_3} (x_2 - x_1) + u \right] \Delta t$$

同理,若水槽2的水位增量为 Δx_2 时,也可得到如下关系:

$$C_2 \Delta x_2 = \left[-\frac{1}{R_2} x_2 + \frac{1}{R_3} (x_1 - x_2) + u \right] \Delta t$$

$$y_2 = \frac{1}{R_2} x_2$$

因此,若令 $\Delta t \rightarrow 0$,则得到 $(\Delta x_1 / \Delta t) \rightarrow \dot{x}_1$, $(\Delta x_2 / \Delta t) \rightarrow \dot{x}_2$ 。

于是

$$\dot{x}_1 = - \left(\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_3} \right) x_1 + \frac{1}{C_1 R_3} x_2 + \frac{1}{C_1} u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C_2 R_3} x_1 - \left(\frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_2 R_3} \right) x_2$$

写成矩阵形式,可得该水位系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \left(\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_3} \right) & \frac{1}{C_1 R_3} \\ \frac{1}{C_2 R_3} & - \left(\frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_2 R_3} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

例1.2-6 假定国民经济状况可以由以下四个变量描述:

$Y(k)$ ——第 k 年度国家的总产值,即国家的总收入;

$C(k)$ ——第 k 年度国家的总消费;

$I(k)$ ——第 k 年度国家的总投资;

$G(k)$ ——第 k 年度政府的总支出。

试根据以上变量建立国民经济的动态模型。

解 根据收支平衡的原则,上述四个变量应当满足以下关系:

$$Y(k) = C(k) + I(k) + G(k) \quad (1.2-24)$$

由于消费应当总是国家收入的一个固定部分,可以表达为:

$$C(k) = mY(k) \quad (1.2-25)$$

式中, $0 < m < 1$, m 称为消费倾向系数。

投资的总效果应当是扩大再生产,即把现在的投资用来增加国家将来的收入。假定国家的收入的增长与投资的水平成比例,则有

$$Y(k+1) - Y(k) = rI(k) \quad (1.2-26)$$

式中, r 称为增长因子。

式(1.2-24), (1.2-25), (1.2-26)决定了国家的经济行为及其演化。将式(1.2-24)、(1.2-25)代入式(1.2-26),整理得

$$Y(k+1) = [1 + r(1 - m)]Y(k) - rG(k)$$

这是一个一阶差分方程。如果要研究今年政府支出对明年国家总收入的影响,则只要把政府支出 $G(k)$ 看成是这个经济系统的输入量,便可算出明年国民经济的总产值。

例1.2-7 为了研究一个国家或一个地区的人口增长规律,把该地区的总人口按年龄范

围,每五岁划分为一组,并设 α_i 为第 i 组人口的出生率, β_i 为第 i 组人口的存活率,试建立以各组人口数为状态变量的人口增长动态模型。

解 设 $x_1(k)$ 为第 k 个时间周期内第一个年龄段(0~5岁)的人口数, $x_1(k+1)$ 应该是这一时间周期内所新生的后代,应包括各组人口所生的后代,这样, $x_1(k+1)$ 应依赖于第 k 个时间周期内各组的人口出生率乘以各组的人口数,它们之间应当满足

$$x_1(k+1) = \alpha_1 x_1(k) + \alpha_2 x_2(k) + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}(k) \quad (1.2-27)$$

对于 $x_i(k)$, $i > 1$ 演变的规律是相同的。若不考虑死亡率,则经过一个时间周期后,第 i 组的人口将全部转移到第 $i+1$ 组中去。如果考虑到该组人口的死亡率,则应将第 i 组人口乘上一个存活率 β_i ($\beta_i \leq 1$) 后再向第 $i+1$ 组转移,这样就可以列出以下 $n-1$ 个差分方程

$$x_{i+1}(k+1) = \beta_i x_i(k) \quad (1.2-28)$$

将式(1.2-27)和(1.2-28)写成矩阵向量形式,为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \dots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \dots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (1.2-29)$$

显然,该模型所描述的是没有输入控制作用下的人口自然增长律。

例1.2-8 假定在一个孤岛上,主要生长着的动物是狼和羊,羊依靠吃草而生存,狼依靠吃羊而生存,试建立狼—羊的生态模型。

解 设 $n_1(t)$ 为 t 时刻羊的总头数, $n_2(t)$ 为 t 时刻狼的总头数。

对羊来说,当没有狼时,即 $n_2(t) = 0$,羊的增长率将与该时刻羊的总头数 $n_1(t)$ 成正比,即羊愈多则繁殖也愈快;当有狼存在时,羊的数目就会减少,其减少量与狼和羊相遇的机会成正比。考虑它们相遇是随机的,可以看作它们相遇机会与它们各自的数目的乘积成比例,于是

$$\frac{dn_1(t)}{dt} = an_1(t) - bn_1(t)n_2(t) \quad (1.2-30)$$

式中, a ——羊的增长因子, $a > 0$ 。

对狼来说,因为狼是依靠吃羊而生存的,当没有羊时,即 $n_1(t) = 0$,狼的增长率将以 $-cn_2(t)$ 的速率减小(c 是狼的衰减因子);但当有羊存在时,狼的数目将会增多,且与它们各自的数目的乘积成比例,故其增长率为

$$\frac{dn_2(t)}{dt} = -cn_2(t) + dn_1(t)n_2(t) \quad (1.2-31)$$

式(1.2-30)和(1.2-31)组成的方程组即为所求问题的数学模型。

§ 1-3 状态方程的特征值标准形

[内容提要]

一、特征值标准形的三种形式

选择适当的坐标变换阵,藉助相似变换,可以把系统矩阵 A 化为以特征值为其元素的对角形(特征值为互异)、约当形(特征值具有重根)或共轭模态形(特征值具有共轭复根)。

二、状态方程的对角形化

1. 对角形化的条件

$n \times n$ 矩阵 A 的独立特征向量数等于 n 。当然,若 A 的特征值互异,其独立特征向量数必等于 n 。

2. 对角形化的步骤

(1) 计算 A 的特征值 λ_i 和对应于每个特征值的特征向量 $v_i (i=1, 2, \dots, n)$

(2) 用特征向量 $v_i (i=1, 2, \dots, n)$ 构造坐标变换矩阵 P

$$P = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] \quad (1.3-1)$$

(3) 对状态方程的 A, B, C 矩阵施行下列运算,使 A 变换成对角阵 \hat{A} ,且系统保持等价。

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1.3-2)$$

$$\hat{B} = P^{-1}B \quad (1.3-3)$$

$$\hat{C} = CP \quad (1.3-4)$$

3. 若矩阵 A 是“底”友矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.3-5)$$

即矩阵中最底行元素 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 是矩阵 A 的特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

的系数,将 A 变换为对角形矩阵的变换矩阵 P 为范德蒙矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.3-6)$$

式中, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是矩阵 A 的互异特征值。

若矩阵 A 是“左”友矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3-7)$$

将 A 变换为对角形矩阵的变换矩阵 P 为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 + a_1 & \lambda_2 + a_1 & \cdots & \lambda_n + a_1 \\ \lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2 & \lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_2 & \cdots & \lambda_n^2 + a_1\lambda_n + a_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} + a_1\lambda_1^{n-2} + \cdots + a_{n-1} & \lambda_2^{n-1} + a_1\lambda_2^{n-2} + \cdots + a_{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} + a_1\lambda_n^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.3-8)$$

4. 若 A 的特征值是复数, 化 A 为对角形的计算方法与实数时相同。

三、状态方程的约当形化

1. A 阵化为约当标准形的条件

矩阵 A 不但具有重特征值, 而且其独立特征向量的个数低于 n 。

2. 约当标准形化的步骤

(1) 计算 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (其中含有重根)。

(2) 计算每个单根的特征向量, 及对于各重根的特征向量和广义特征向量 (具体方法见附录)。

(3) 由已算得的特征向量和广义特征向量, 构成变换矩阵。

$$Q = [v_1 \quad v_2 \quad v'_2 \quad \cdots \quad v_m \quad v'_m] \quad (1.3-9)$$

(4) 对 A, B, C 施行下列变换

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ \quad (1.3-10)$$

$$\tilde{B} = Q^{-1}B \quad (1.3-11)$$

$$\tilde{C} = CQ \quad (1.3-12)$$

3. 当矩阵 A 具有“底”友矩阵形式, 且特征值 λ_i 具有 m 重, 即

$$\lambda = \underbrace{\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m \text{重}}, \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n$$

则化 A 为约当形的变换矩阵 Q 为修正的范德蒙矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{m+1} & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & \lambda_{m+1}^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^2 & 3\lambda_1 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \frac{d}{d\lambda_1}(\lambda_1^{n-1}) & \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda_1^2}(\lambda_1^{n-1}) & \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\lambda_1^3}(\lambda_1^{n-1}) & \cdots & \lambda_{m+1}^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.3-13)$$

当矩阵 A 具有“左”友矩阵形式, 则化 A 为约当形的坐标变换阵 Q 为

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 + a_1 & 1 & 0 & \cdots & \lambda_n + a_1 \\ \lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_2 & 2\lambda_1 + a_1 & 1 & \cdots & \lambda_n^2 + a_1\lambda_n + a_2 \\ g_3(\lambda) & 3\lambda_1^2 + 2a_1\lambda_1 + a_2 & 3\lambda_1 + a_1 & \cdots & g_3(\lambda_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{n-1}(\lambda_1) & \frac{d}{d\lambda_1}g_{n-1}(\lambda_1) & \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda_1^2}g_{n-1}(\lambda_1) & \cdots & g_{n-1}(\lambda_n) \end{bmatrix} \quad (1.3-14)$$

四、状态方程的共轭模态形

1. 目的 为把具有复数特征值的矩阵化简,又避免在矩阵中出现复数,以便在计算机上计算,折衷的办法是把状态方程化为模态形。

2. 特征值为 $\lambda_1 = \sigma + j\omega, \lambda_2 = \sigma - j\omega$, A 阵的模态矩阵

$$\Pi = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (1.3-15)$$

这是一个以特征值实部和虚部为元的矩阵。

3. 化 A 为模态形的变换矩阵

$$P = [v_r \quad v_i] \quad (1.3-16)$$

其中, v_r 是 A 的对应于特征值 λ_1 的特征向量的实部; v_i 是 A 的对应于特征值 λ_1 的特征向量的虚部。

[例 题]

例1.3-1 试将下列状态方程变换为对角标准形

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0 \quad 0]x \end{aligned}$$

解 方法一:计算对应于各特征值的特征向量,并构成变换矩阵 P 。

(1)经计算得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$

及

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(2)用 v_1, v_2, v_3 构成变换矩阵 P 并计算 P^{-1}

$$P = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{\text{adj}P}{|P|} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

(3)计算 \hat{A}, \hat{B} 和 \hat{C}

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & 0 \\ & -2 & \\ 0 & & -3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CP = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = [1 \ 1 \ 1]$$

于是变换后的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}$$

方法二:由变换公式 $\hat{A} = P^{-1}AP$ 有

$$\hat{A}P^{-1} = P^{-1}A$$

其中, \hat{A} 由特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 直接写出

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

令

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

代入 $\hat{A}P^{-1} = P^{-1}A$ 中,有

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix}$$

解此方程组,得

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & -2 \\ -3 & -4 & 3 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

从而有

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

于是可计算 \hat{b}, \hat{c} 。

例1.3-2 试将下列状态方程。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

化为对角标准形。

解 A 的特征方程

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

即

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$$

解之得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = j, \lambda_3 = -j$ 。

由于 A 是友形矩阵, 故化为对角形的坐标变换是范德蒙矩阵。

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & j & -j \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 8 + 4j & -10j & -2 + 4j \\ 8 - 4j & 10j & -2 - 4j \end{bmatrix}$$

最后

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & -j \end{bmatrix}$$

$$\hat{b} = P^{-1}b = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 + 2j \\ -1 - 2j \end{bmatrix}$$

$$\hat{c} = cP = [1 \ 1 \ 1]$$

例1.3-3 将矩阵 A 化为共轭模态形。

解 A 的特征方程

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$$

解之得 $\lambda_1 = -3 + j4, \lambda_2 = -3 - j4$ 。

对应于 λ_1 的特征向量可求得

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 + j4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

因此, 变换矩阵 P 为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

其逆矩阵为

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 的模态形为

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -17 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例1.3-4 试将 A 化为约当标准形。

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

解 (1) 求特征值

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ -1 & 4 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2) = 0$$

因此, A 的特征值是 -1 (二重) 和 -2 。

(2) 确定二重特征值 $\lambda_1 = -1$ 的广义特征向量的阶数 K 。

$$\text{rank}[\lambda_1 I - A] = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rank}[\lambda_1 I - A]^2 = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\text{rank}[\lambda_1 I - A]^3 = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

由于 $\text{rank}[\lambda_1 I - A]^2 = \text{rank}[\lambda_1 I - A]^3 = 1$, 所以对于 λ_1 的广义特征向量的阶数 $K=2$ 。

(3) 求满足

$$[\lambda_1 I - A]^2 v = 0 \text{ 和 } [\lambda_1 I - A]v \neq 0$$

的 v , 解之得

$$v = [0 \ 0 \ 1]^T$$

并用这个 v 来确定广义特征向量 v_1, v_2 。

$$v_1 = [\lambda_1 I - A]v = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = v = [0 \ 0 \ 1]^T$$

显然, 由于 $K=2=\tilde{n}_1$ (重数), 故转入下一步:

(4) 求对于 $\lambda_2 = -2$ 的特征向量, 容易求得

$$v_3 = [0 \quad 1 \quad 2]^T$$

(5) 用 v_1, v_2, v_3 为列向量构造变换矩阵

$$Q = [v_1 \quad v_2 \quad v_3] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

并有

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

§ 1-4 组合系统的状态模型与传递函数矩阵

[内容提要]

一、组合系统的状态模型

由一些子系统按一定规律联结构成的系统称之为组合系统。子系统的联结方式有并联联结、串联联结和反馈联结。

1. 子系统的并联联结

子系统 S_1, S_2 并联联结的组合系统示意图如图1-7所示。

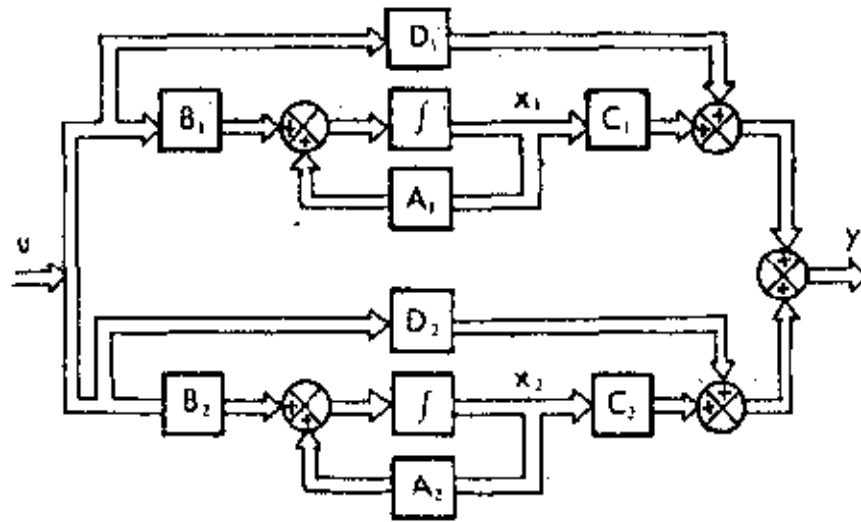


图1-7 子系统并联联结示意图

该组合系统的状态模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (1.4-1)$$

$$y = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [D_1 + D_2] u \quad (1.4-2)$$

2. 子系统的串联联结

子系统 S_1, S_2 串联联结的组合系统示意图如图1-8所示。

该组合系统的状态模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u \quad (1.4-3)$$

$$y = [D_2 C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_2 D_1 u \quad (1.4-4)$$

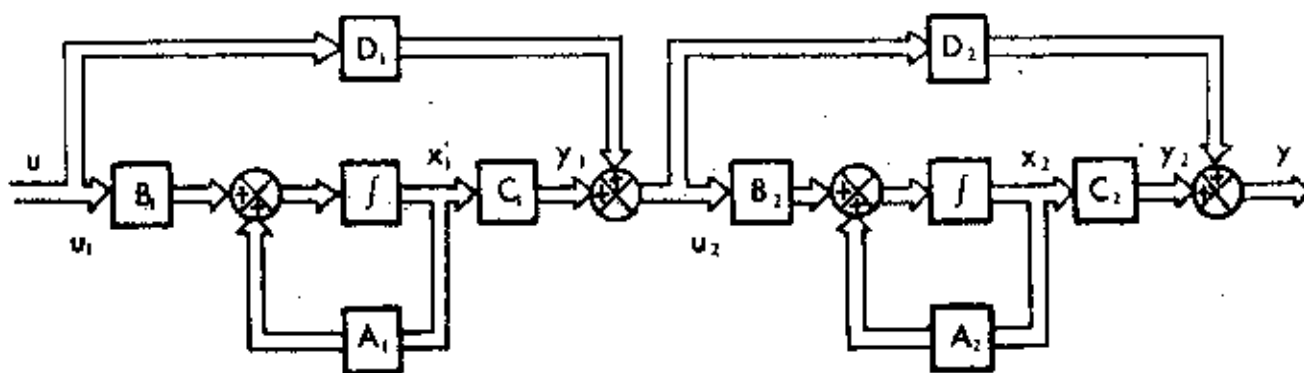


图1-8 子系统串联联结的示意图

3. 子系统的反馈联结

子系统 S_1 和 S_2 经反馈联结的组合系统的示意图如图1-9所示。

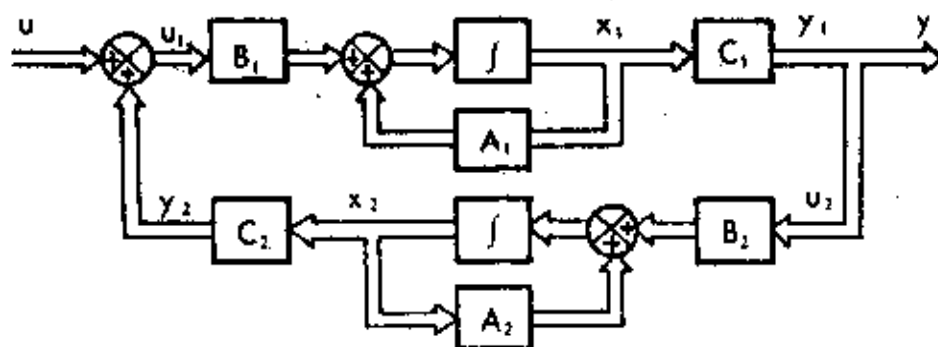


图1-9 子系统反馈联结示意图

该组合系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1.4-5)$$

$$y = [C_1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (1.4-6)$$

二、根据状态模型求传递函数阵

1. 定义 对于状态模型为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

的定常系统,其传递函数阵是

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.4-7)$$

$$= \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1r}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2r}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \cdots & G_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

2. 几点说明

(1) 传递函数阵是一个 $m \times r$ 维矩阵,其中第 i 行第 j 列的元素 $G_{ij}(s)$ 在物理上表示第 i 个输出变量中由第 j 个输入所引起的分量和第 j 个输入变量间的传递函数。

$$G_{ij} = \frac{y_i(s)}{u_j(s)} \quad (1.4-8)$$

(2) $G(s)$ 是系统的输入输出描述(或称外部描述),它与系统内部的状态变量取法无关。所以尽管其状态模型不是唯一的,但其传递函数阵是不变的。

(3) 如果传递函数阵是一个对角形方阵,该系统称之为解耦系统,即不同序号的输入输出之间消除交连。

3. $[sI - A]^{-1}$ 的计算程序框图

根据预解矩阵的性质, $[sI - A]^{-1}$ 的计算式为

$$[sI - A]^{-1} = \frac{Q(s)}{X(s)} = \frac{Q_{n-1}s^{n-1} + Q_{n-2}s^{n-2} + \dots + Q_1s + Q_0}{s^n + x_{n-1}s^{n-1} + \dots + x_1s + x_0} \quad (1.4-9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} Q_{n-1} &= I \\ x_{n-1} &= -\text{Tr}(Q_{n-1}A) \\ Q_{n-2} &= Q_{n-1}A + x_{n-1}I \\ x_{n-2} &= -\frac{1}{2}\text{Tr}(Q_{n-2}A) \\ &\dots\dots\dots \\ Q_1 &= Q_2A + x_2I \\ x_1 &= -\frac{1}{n-1}\text{Tr}(Q_1A) \\ Q_0 &= Q_1A + x_1I \\ x_0 &= -\frac{1}{n}\text{Tr}(Q_0A) \\ 0 &= Q_0A + x_0I \\ \text{Tr}A &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \end{aligned} \right\} \quad (1.4-10)$$

求 $(sI - A)^{-1}$ 的计算机实用程序框图如图1-10所示。

4. 组合系统的传递函数阵

设子系统的传递函数阵分别为 $G_1(s), G_2(s)$ 。

(1) 对于图1-7所示并联系统,其组合系统的传递函数阵为

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) \quad (1.4-11)$$

(2) 对于图1-8所示串联系统,其组合系统的传递函数阵为

$$G(s) = G_2(s)G_1(s) \quad (1.4-12)$$

注意,由于是矩阵相乘,它们的次序不能任意颠倒。

(3) 对于图1-9所示反馈系统,其组合系统的传递函数阵为

$$G(s) = G_1(s)[I + G_2(s)G_1(s)]^{-1} \quad (1.4-13)$$

或

$$G(s) = [I + G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s) \quad (1.4-14)$$

[例 题]

例1.4-1 设子系统 S_1, S_2 的状态空间表达式分别为

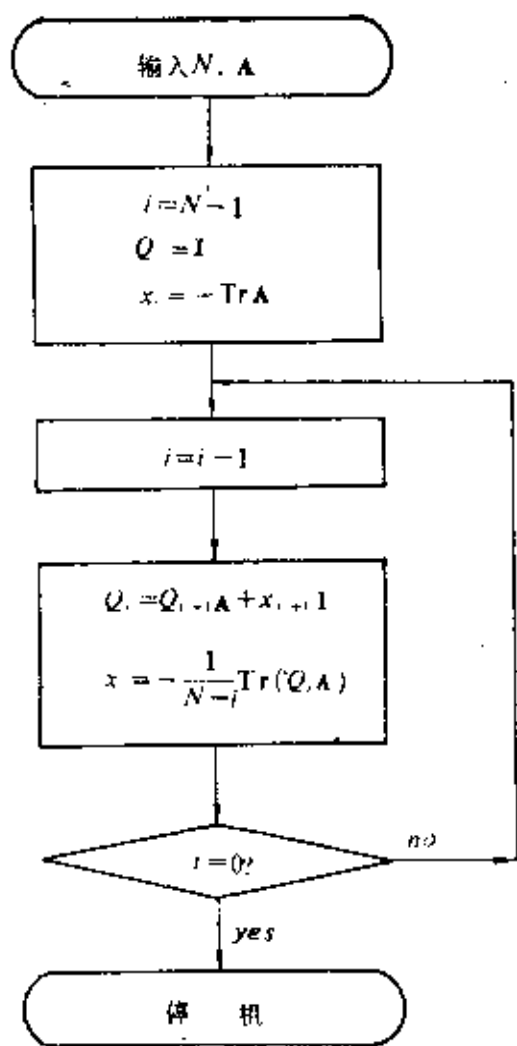


图1-10 求 $(sI - A)^{-1}$ 的计算程序框图

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y_1 = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y_2 = [2 \ 1] \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

求并联系统的状态空间表达式。

解 根据并联联结的组合系统的状态模型式(1.4-1)和式(1.4-2),有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 2 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

例1.4-2 已知系统的输出—输入微分方程为

$$\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_1y = b_1\dot{u} + b_0u$$

$$c_2\ddot{z} + c_1\dot{z} + c_0z = y$$

试列写其状态空间表达式。

解 对于这个系统可以看作两个子系统串联组成,其结构方块图如图1-11所示。

对于子系统 S_2 ,其状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_0 - a_2b_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ bx_3 \end{bmatrix}$$

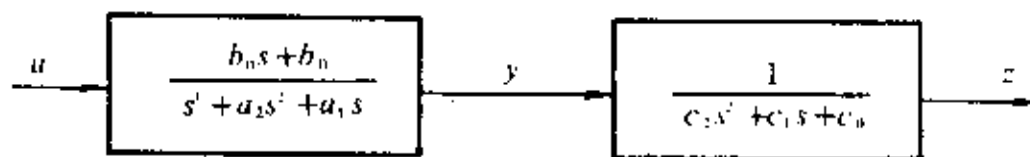


图1-11 例1.4-2的结构示意图

对于子系统 S_2 , 其状态空间表达式为

$$\dot{x}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c_0}{c_2} & -\frac{c_1}{c_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{c_2} \end{bmatrix} y$$

$$z = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

按照串联联结的组合系统的状态模型式(1.4-3)和(1.4-4), 计算

$$B_2 C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{c_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 D_1 = 0$$

于是组合系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{c_2} & 0 & 0 & -\frac{c_0}{c_2} & -\frac{c_1}{c_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_0 - a_2 b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$z = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5]^T$$

例1.4-3 试建立如图1-12所示反馈系统的状态空间表达式。

解 对于子系统 S_1 , 其状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1$$

$$y_1 = x_1$$

对于子系统 S_2 , 其状态方程和输出方程为

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + u_2$$

$$y_2 = x_3$$

根据以上求得的子系统 S_1, S_2 的状态空间表达式, 得

$$-B_1 C_2 = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 C_1 = [1 \quad 0]$$

于是整个反馈系统的状态空间表达式由式(1.4-5)和(1.4-6)可以求得:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

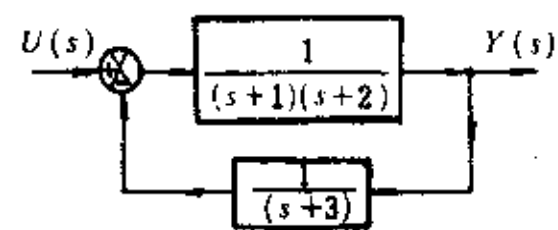


图1-12 例1.4-3的系统示意图

$$y = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

例1.4-4 已知系统的状态空间表达式

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + 2u_1 - u_2$$

$$\dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 2u_2$$

$$y_1 = x_1 - x_2$$

$$y_2 = 2x_1 + x_2 - x_3$$

试求其传递函数阵。

解 把状态空间表达式写成矩阵形式

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

根据式(1.4-7),有

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 6 & 11 & s+6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \begin{bmatrix} -s^2 - 4s + 29 & s^2 + 3s - 4 \\ 4s^2 + 56s + 52 & -3s^2 - 17s - 14 \end{bmatrix}$$

或写成

$$G(s) = \frac{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 56 & -17 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 29 & -4 \\ 52 & -14 \end{bmatrix}}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

例1.4-5 试求图1-13所示二输入二输出系统的传递函数阵。

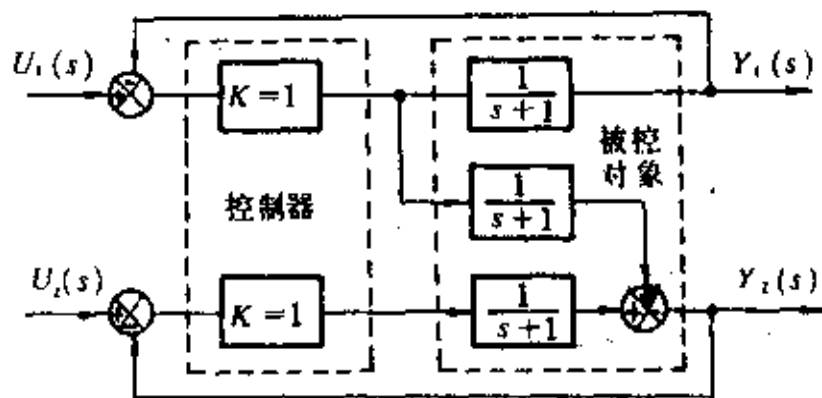


图1-13 例1.4-5的系统示意图

解 由系统的结构方块图可知,

控制器的传递函数阵 $G_c(s)$ 为

$$G_c(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

被控对象的传递函数阵 $G_p(s)$ 为

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

反馈通道的传递函数阵 $H(s)$ 为

$$H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据反馈联结的组合系统的传递函数阵式(1.4-11),得该系统的传递函数阵

$$G(s) = [I + G_p(s)G_c(s)H(s)]^{-1}G_p(s)G_c(s)$$

代入上述各项,经化简得

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & 0 \\ \frac{s+1}{(s+2)^2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

由上式可得系统的输出量 $Y_1(s), Y_2(s)$ 为

$$Y_1(s) = \frac{1}{s+2} R_1(s)$$

$$Y_2(s) = \frac{s+1}{s+2} R_1(s) + \frac{1}{s+2} R_2(s)$$

习 题

1-1 建立图1-14所示电路的状态模型。

- (1) 对于图(a)选择 $v_1(t)$ 和 $v_2(t)$ 作为状态变量;
- (2) 对于图(b)选择电容器 C 上的电压作为输出量。

1-2 建立图1-15所示机械系统的状态模型。

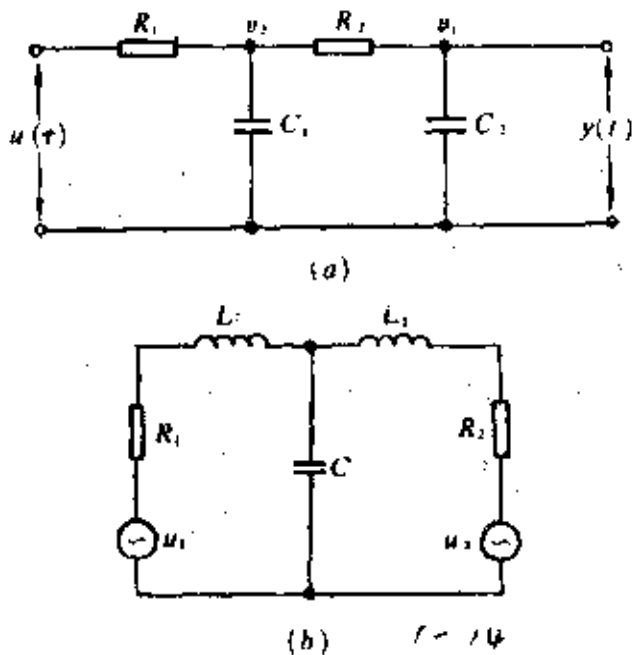


图1-14 题1-1中的电路示意图

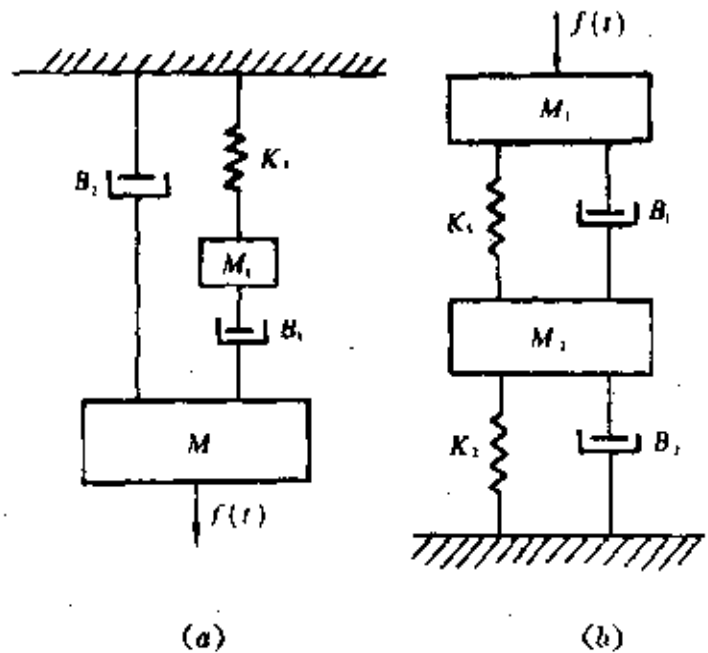


图1-15 题1-2中的机械系统示意图

1-3 对图1-4所示的电枢控制直流电动机。

- (1) 试建立以转矩为输出的状态模型;
- (2) 试建立在电枢控制电压和外力矩同时作用下以转角为输出的状态模型。

1-4 图1-16为一热交换器,槽1的体积为 $v_1(\text{m}^3)$,装有比热为 $c_1(\text{kcal}/^\circ\text{Cm}^3)$ 的液体,槽2的体积为 v_2 ,装有比热为 c_2 ,流量为 $Q(\text{m}^3/\text{s})$ 的流动液体。液体向槽2流入时的温度为 $\gamma^\circ\text{C}$,热源发出的热量为 $u(\text{kcal}/\text{s})$,槽1和槽2之间的热导率为 $K(\text{kcal}/^\circ\text{Cs})$ 。试建立槽1和槽2的温度 x_1 和 x_2 (相对于 γ) 的状态模型(假定槽内液体经过充分搅拌具有均匀温度)。

1-5 试建立图1-17所示系统的状态模型。图中 u_1, u_2 及 u 为输入量的小变化; x_1, x_2 为水槽水位的微小变化。

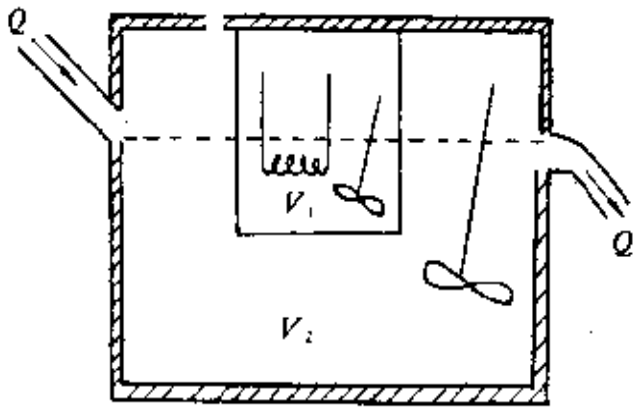


图1-16 题1-4中的热交换器示意图

感者采取预防措施为 u_1 , 对患病者治疗措施为 u_2 . 试用状态方程列写此流行病学的数学模型。

1-6 某国家在某年人口为1亿, 其中首都人口为1千万, 首都每年有4%的人离开, 而外地每年有2%的人进入首都, 设人口自然增长率为1%。试列写该国家首都的人口状态方程。

1-7 某城市居民中流行某种传染病。按不同情况将全体居民分为如下四类: 对疾病敏感者; 患病者; 有免疫功能者; 因病死亡者。设每天敏感者被免疫的百分数为 α , 敏感者被感染而患病的百分数为 β , 患病者中死亡百分数为 γ , 患病者因治疗痊愈而获免疫的百分数为 δ 。为控制传染病流行对敏感者采取预防措施为 u_1 , 对患病者治疗措施为 u_2 。试用状态方程列写此流行病学的数学模型。

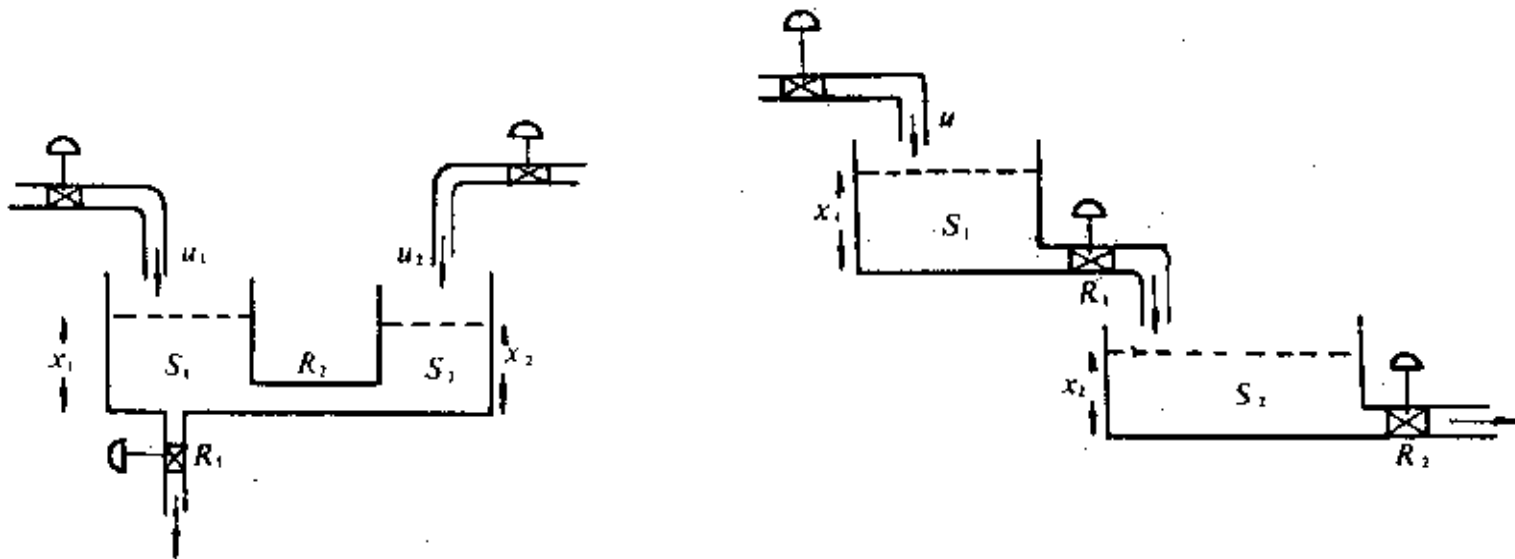


图1-17 题1-5中的水槽系统示意图

1-8 某山林中狐、兔共存。设兔的自然增长率(即假设没有狐, 当年兔数比上一年的增长量与上一年兔数的比值)是一个正的常数 α , 又设狐的增长率受食物量的制约而可表为 $K\beta + \gamma$, 其中 β 为食物丰裕系数, 即当年兔数减当年狐数的 λ 倍(λ 为每只狐每年平均食兔数, 是一个正值常数), 再除以当年狐数; K 是正值常数; γ 是负值常数。

(1) 试以狐数和兔数为状态变量写出该生态系统的状态方程。

(2) 设 $\alpha=2.5, \lambda=250, K=0.004, \gamma=-1$ 写出该方程的数字形式。

1-9 列写如下微分方程的状态模型

$$(1) \quad \dot{y} = 3\ddot{y} + 4\dot{y} - 2y = u \quad (2) \quad 2\ddot{y} + 3\dot{y} = \ddot{u} - 2\dot{u}$$

1-10 用直接分解法画出下列传递函数的模拟结构图, 并建立其状态模型。

$$(1) \quad G(s) = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 4s + 10} \quad (2) \quad G(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 2s^2 + 3s + 1}$$

1-11 用串联分解法和并联分解法画出下列传递函数和微分方程的模拟结构图, 并建立其状态模型。

$$(1) \quad G(s) = \frac{6(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \quad (2) \quad \ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 2\dot{u} + u$$

1-12 建立图1-18所示系统的状态模型。

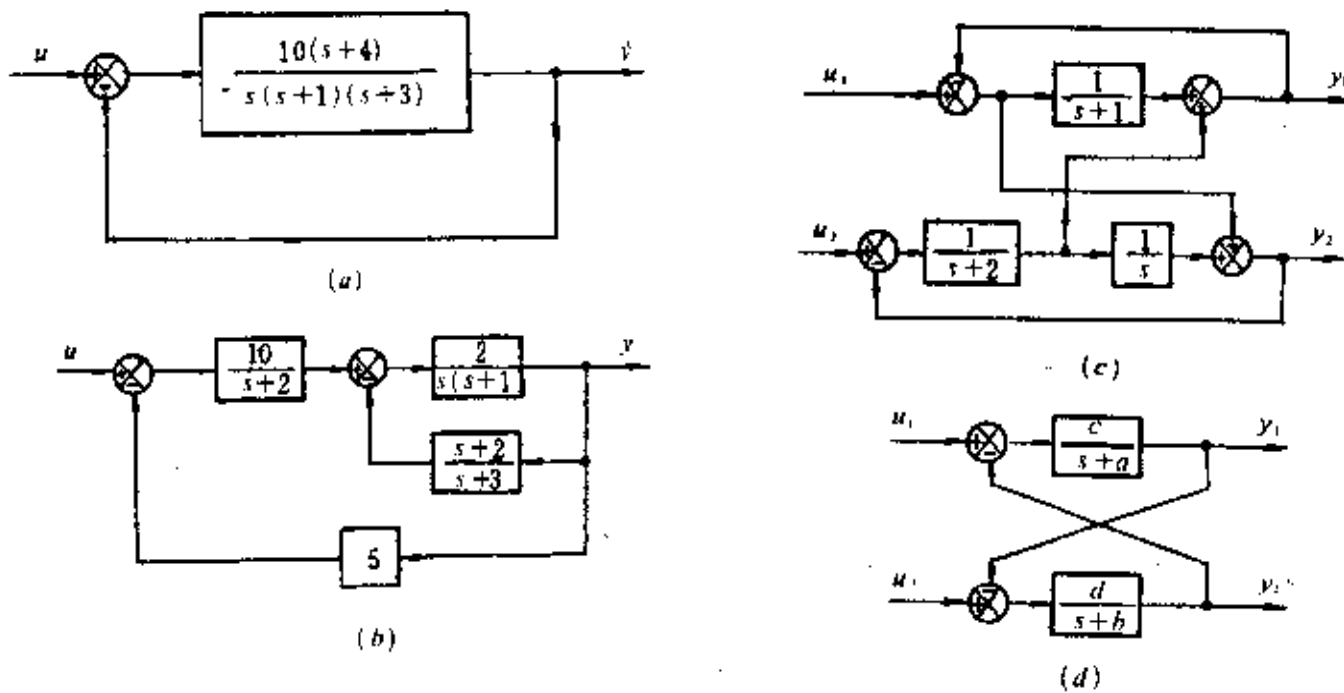


图1-18 题1-12中的系统示意图

1-13 将下列系统进行对角线化。

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 0]$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 0 \quad 0]$$

1-14 将下列系统进行约当形化

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1-15 将下列矩阵化为模态形

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -17 & -4 \end{bmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

1-16 设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + 5s + 8s + 9}$$

试用繁分式展开法列写其状态空间表达式。

1-17 试证明

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$$

1-18 证明对于具有特征值互异 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

能将其变换为对角标准形的变换矩阵 P

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 + a_0 & \cdots & \lambda_n + a_0 \\ \lambda_1^2 + a_0\lambda_1 + a_1 & \cdots & \lambda_n^2 + a_0\lambda_n + a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} + a_0\lambda_1^{n-2} + \cdots + a_{n-2}\lambda_1 + a_{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} + a_0\lambda_n^{n-2} + \cdots + a_{n-2}\lambda_n + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

1-19 用予解矩阵法求 $(sI - A)^{-1}$

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1-20 试求下列系统的传递函数阵。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1-21 设

$$G_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & -\frac{1}{(s+1)} \\ \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix} \quad H(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试求其闭环传递函数阵。

1-22 求题1-12中图1-18(c)和(d)所示系统的传递函数阵。

1-23 证明下列单输入单输出系统

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & I_{n-1} & \\ 0 & \vdots & \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [\beta_0 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}]$$

和

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ \vdots & & & -a_1 \\ I_{n-1} & & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad \tilde{c} = [0 \quad \cdots \quad 0]$$

的传递函数是相同的。

1-24 设分块矩阵的逆矩阵存在,且表示为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

试证明

$$E = A^{-1} + A^{-1}BHCA^{-1} = (A - BD^{-1}C)^{-1}$$

$$F = A^{-1}BH = -EBD^{-1}$$

$$G = -HCA^{-1} = D^{-1}CE$$

$$H = (D - CA^{-1}B)^{-1} = D^{-1} + D^{-1}CEBD^{-1}$$

1-25 若分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 中 A^{-1} 或 D^{-1} 存在,证明分块矩阵行列式为

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C| = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|$$

此即 Schur 公式。

第二章 状态方程的解与连续时间系统的离散化

§ 2-1 矩阵指数函数

[内容提要]

一、矩阵指数函数的定义及性质

1. 定义 设 A 为 $n \times n$ 的常数阵, 下列无穷幂级数

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \end{aligned} \quad (2.1-1)$$

称为矩阵指数函数, 用符号 e^{At} 表示。

2. 基本性质

$$(1) \quad e^{A(t+r)} = e^{At} \cdot e^{Ar} \quad (2.1-2)$$

$$(2) \quad e^{A0} = I \quad (2.1-3)$$

$$(3) \quad (e^{At})^{-1} = e^{-At} \quad (2.1-4)$$

$$(4) \quad e^{(A+B)t} \neq e^{At} \cdot e^{Bt} \quad (AB \neq BA) \quad (2.1-5)$$

$$(5) \quad \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A \quad (2.1-6)$$

二、特征值标准形的矩阵指数函数

1. 对角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2.1-7)$$

2. 约当形矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_l \end{bmatrix} \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & & & 0 \\ & e^{A_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{A_l t} \end{bmatrix} \quad (2.1-8)$$

式中

$$A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (2.1-9)$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(m-2)!}t^{(m-2)} & \frac{1}{(m-1)!}t^{(m-1)} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(m-3)!}t^{(m-3)} & \frac{1}{(m-2)!}t^{(m-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1-10)$$

3. 共轭模态形矩阵

$$A_M = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (2.1-11)$$

$$e^{A_M t} = \begin{bmatrix} e^{\sigma t} \cos \omega t & e^{\sigma t} \sin \omega t \\ -e^{\sigma t} \sin \omega t & e^{\sigma t} \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (2.1-12)$$

三、计算矩阵指数函数的几种方法

1. 按照 e^{At} 的定义计算

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots \quad (2.1-13)$$

2. 按照 $(sI - A)^{-1}$ 计算

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} \quad (2.1-14)$$

3. 按照特征值标准形的公式计算

(1) 若 A 的特征值互异, $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \quad (2.1-15)$$

式中, P 是使 A 变换为对角形矩阵的变换阵。

(2) 若 A 具有 n 重特征值 λ

$$e^{At} = Q \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(n-1)!}t^{(n-1)}e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & te^{\lambda t} \\ 0 & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix} Q^{-1} \quad (2.1-16)$$

式中, Q 是化 A 为约当标准形的变换阵。

4. 应用凯莱—哈密顿定理, 化 e^{At} 为 A 的有限项

$$e^{At} = \alpha_0(t)I + \alpha_1(t)A + \dots + \alpha_{n-1}(t)A^{n-1} \quad (2.1-17)$$

式中, $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ 为 t 的某组标量函数。

计算 $\alpha_i(t) (i=0, 1, 2, \dots, n-1)$ 的方法:

(1) A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互异的情况

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (2.1-18)$$

(2) A 具有 n 重特征值 λ_1 的情况

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & (n-1)\lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)\lambda_1^{n-3}}{2} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \cdots & (n-2)\lambda_1^{n-1} & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-2} & \lambda_1^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{\lambda_1 t} \\ \frac{1}{(n-2)!} t^{n-2} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} t^2 e^{\lambda_1 t} \\ t e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \quad (2.1-19)$$

5. 西勒维斯特(Sylvester)内插公式法

$$e^{At} = \sum_{k=1}^n \exp(\lambda_k t) \frac{(A - \lambda_1 I) \cdots (A - \lambda_{k-1} I)(A - \lambda_{k+1} I) \cdots (A - \lambda_n I)}{(\lambda_k - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \cdots (\lambda_k - \lambda_n)} \quad (2.1-20)$$

式中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 为矩阵 A 的互异特征值。

四、 e^{At} 的数值计算

1. 取 e^{At} 的幂级数表示式 $\sum_{k=0}^{\infty} (At)^k / k!$ 为有限的 N 项

(1) 算法思路

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^N \frac{A^k t^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \quad (2.1-21)$$

取 $t=T$,

$$e^{At} = M + R \quad (2.1-22)$$

$$M = \sum_{k=0}^N \frac{A^k T^k}{k!} \quad (\text{近似矩阵}) \quad (2.1-23)$$

$$R = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{A^k T^k}{k!} \quad (\text{剩余矩阵}) \quad (2.1-24)$$

若要求 e^{At} 中每一元素必须在最小有效数量级为 b 的精度范围内, 则 R 矩阵的元素应满足下列不等式

$$|r_{ij}| \leq 10^{-b} |m_{ij}| \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1-25)$$

式中, r_{ij} 是 R 的元素, m_{ij} 是 M 的元素。

取矩阵 R 的范数为

$$\|R\| = \sum_{i,j=1}^n |r_{ij}| \quad (2.1-26)$$

代入式(2.1-24), 并考虑到

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1-27)$$

显然, 有

$$|r_{ij}| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\|A\|^k T^k}{k!} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1-28)$$

定义上面级数的第二项与第一项之比为 ε , 则有

$$\varepsilon = \frac{\|A\|T}{N+2} \quad (2.1-29)$$

因此

$$\frac{\|A\|}{k} \leq \varepsilon \quad k \geq N+2 \quad (2.1-30)$$

将上式代入式(2.1-28), 有

$$|r_{ij}| \leq \frac{\|A\|^{N+1} T^{N+1}}{(N+1)!} (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots) \quad (2.1-31)$$

即

$$|r_{ij}| \leq \frac{(\|A\|T)^{N+1}}{(N+1)!} \frac{1}{1-\varepsilon} \quad (2.1-32)$$

(2) 求解 e^A 迭代程序的步骤

- 任意选取有限项数 N ;
- 利用式(2.1-23)求 m_{ij} ;
- 利用式(2.1-29)确定 ε 的值;
- 利用式(2.1-32)计算 $|r_{ij}|$ 的上限;
- 将 M 的每一个元素与 $|r_{ij}|$ 的上限相比较;
- 若式(2.1-25)不满足, 则再增加 N 值, 重复(a)~(e), 否则程序结束。

图2-1是计算程序框图。在该程序中首先将 T 缩小为 $T_1 = 2^{-N_1} T$, 其目的是使 e^{AT_1} 的收敛速度加快, 从而减少计算时间。

2. 利用凯莱—哈密顿定理及 Leverrier 算法的方法

(1) 算法原理

设 A 的特征多项式为

$$\Psi(\lambda) \triangleq \det[\lambda I - A] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 \quad (2.1-33)$$

由凯莱—哈密顿定理, $\Psi(A) = 0$, 有

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \dots - a_0 I \quad (2.1-34)$$

反复使用式(2.1-34), A 的幂 A^{n+m} ($m \geq 0$)

也可以由 I, A, \dots, A^{n-1} 线性表示, 即

$$A^{n+m} = a_{0,m}I + a_{1,m}A + \dots + a_{(n-1),m}A^{n-1} \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (2.1-35)$$

A^{n+m} 表示式的系数 $a_{0,m}, a_{1,m}, \dots, a_{(n-1),m}$ 可由其前一项 A^{n+m-1} 的系数 $a_{0,(m-1)}, a_{1,(m-1)}, \dots, a_{(n-1),(m-1)}$ 递推算出

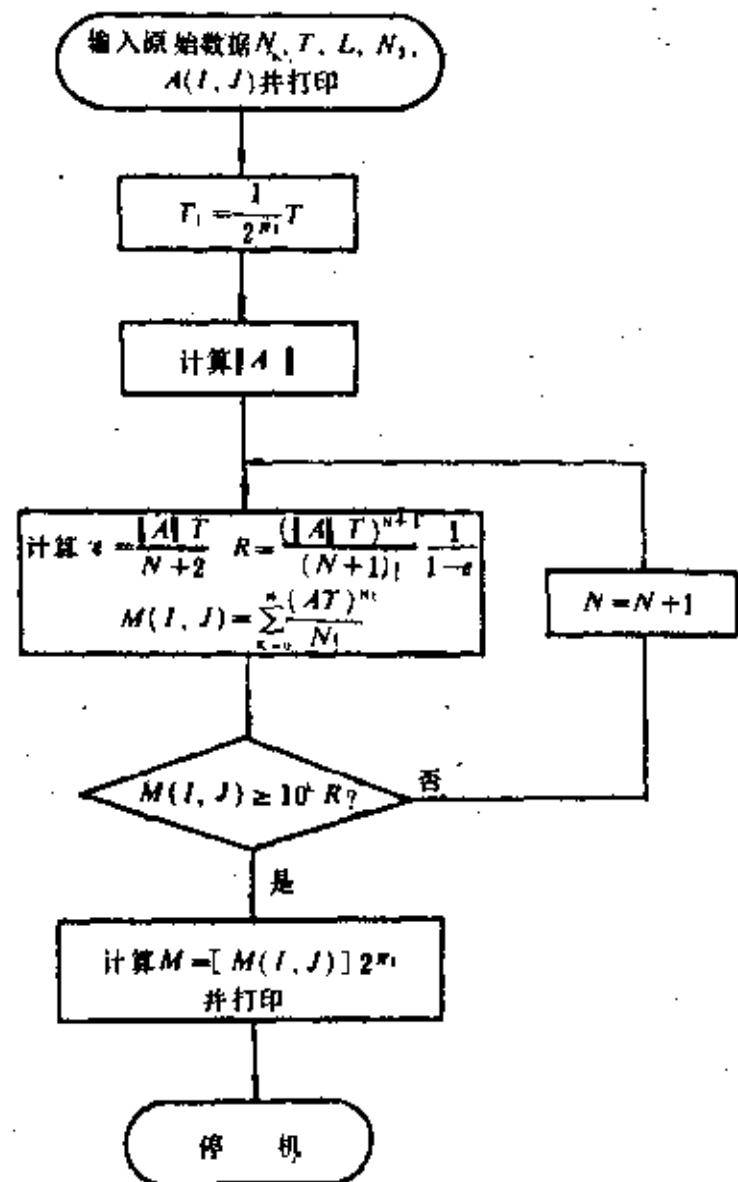


图2-1 计算 e^A 的程序框图

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{0,m} &= -\alpha_0 \alpha_{(n-1),(m-1)} \\ \alpha_{1,m} &= \alpha_{0,(m-1)} - \alpha_1 \alpha_{(n-1),(m-1)} \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{(n-1),m} &= \alpha_{(n-2),(m-1)} - \alpha_{n-1} \alpha_{(n-2),(m-1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.1-36)$$

因 $\alpha_{0,0} = -\alpha_0, \alpha_{1,0} = -\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1,0} = -\alpha_{n-1}$, 则从 $m=1$ 起依次使用式(2.1-36)确定 $\alpha_{0,m}, \dots, \alpha_{(n-1),m}$ 。于是

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (AT)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} A^k + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T^{n+m}}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{km} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k \left[\frac{T^k}{k!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_{km} T^{n+m}}{(n+m)!} \right] \end{aligned} \quad (2.1-37)$$

(2) 计算步骤

a) 计算 A^2, A^3, \dots, A^n

b) 按下列 Leverrier 公式确定 A 的特征多项式

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= -\text{Tr}(A) \\ \alpha_{n-2} &= -\frac{1}{2} [\alpha_{n-1} \text{Tr}(A) + \text{Tr}(A^2)] \\ &\vdots \\ \alpha_0 &= -\frac{1}{n} [\alpha_1 \text{Tr}(A) + \alpha_2 \text{Tr}(A^2) + \dots + \alpha_{n-1} \text{Tr}(A) + \text{Tr}(A^n)] \end{aligned} \quad (2.1-38)$$

c) 根据给定精度, 在式(2.1-37)括号内的第二项中适当地选取有限项, 在此基础上算出 e^{At} 。

[例 题]

例2.1-1 按照 e^{At} 的定义和 $(sI-A)^{-1}$ 的拉氏反变换分别求 e^{At} , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

解 (1) 用定义计算 e^{At}

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 - t^2 + \dots & t - \frac{3}{2} t^2 + \dots \\ -2t + 3t^2 + \dots & 1 - 3t + \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 按照 $(sI-A)^{-1}$ 的拉氏反变换计算 e^{At}

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}] \\ (sI-A) &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(sI - A) &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s-2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \\
e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} \\
&= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由上面的两种算法可以看出,用定义计算不易获得解析形式的结果,但适合于计算机计算。

例2.1-2 已知矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试按如下方法求转移矩阵 $\Phi(t,0) = e^{At}$ 。

(1) e^{At} 的级数展开法。

(2) 拉氏反变换法。

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & A^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
A^4 &= A^5 = \dots = 0
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
e^{At} &= I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(2) 因为

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 & 1/s^3 & 1/s^4 \\ 0 & 1/s & 1/s^2 & 1/s^3 \\ 0 & 0 & 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/s \end{bmatrix}$$

所以

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/3! \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{bmatrix}$$

例2.1-3 当矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

时,用西勒维斯特内插公式求转移矩阵 e^{At} 。

解. 求矩阵 A 的特征值

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

特征值是 $-1, -2, -3$ 。

因为特征值互异,根据西勒维斯特内插公式,有

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{\lambda_1 t} \frac{(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)} + e^{\lambda_2 t} \frac{(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_3 I)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} + e^{\lambda_3 t} \frac{(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \\ &= \frac{e^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -11 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -6 & -11 & -3 \end{bmatrix} - e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -6 & -11 & -3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & -11 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 6 & -11 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{-t}}{2} \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ -6 & -5 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-2t}}{2} \begin{bmatrix} -6 & -8 & -2 \\ 12 & 16 & 4 \\ -24 & -32 & -8 \end{bmatrix} + \frac{e^{-3t}}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -9 & -3 \\ 18 & 27 & 9 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6e^{-t} - 6e^{-2t} + 2e^{-3t} & -5e^{-t} - 8e^{-2t} + 3e^{-3t} & e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t} \\ -6e^{-t} + 12e^{-2t} - 6e^{-3t} & -5e^{-t} + 16e^{-2t} - 9e^{-3t} & -e^{-t} + 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \\ 6e^{-t} - 24e^{-2t} + 18e^{-3t} & 5e^{-t} - 32e^{-2t} + 27e^{-3t} & e^{-t} - 8e^{-2t} + 9e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例2.1-4 利用约当标准形的方法求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

的矩阵指数函数 e^{At} 。

解 矩阵 A 的特征方程为

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - 3\lambda - 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2) = 0$$

解之,得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 。

由此可以很容易地求出化 A 为约当标准形的变换阵 Q

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad Q^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} e^{At} &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} e^{2t} + (8 + 6t)e^{-t} & 2e^{2t} + (-2 + 3t)e^{-t} & e^{2t} - (1 + 3t)e^{-t} \\ 2e^{2t} - (2 + 6t)e^{-t} & 4e^{2t} + (5 - 3t)e^{-t} & 2e^{2t} + (-2 + 3t)e^{-t} \\ 4e^{2t} + (-4 + 6t)e^{-t} & 8e^{2t} + (-8 + 3t)e^{-t} & 4e^{2t} + (5 - 3t)e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例2.1-5 用凯莱-哈密顿定理计算

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

的矩阵指数函数 e^{At} 。

解 由特征方程

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

解之,得 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$ 。

按照式(2.1-16),有

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} \\ (5/2)e^{-t} - 4e^{-2t} + (3/2)e^{-3t} \\ (1/2)e^{-t} - e^{-2t} + (1/2)e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = a_0(t)I + a_1(t)A + a_2(t)A^2$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t} & -(5/2)e^{-t} - 4e^{-2t} + (3/2)e^{-3t} & (1/2)e^{-t} - e^{-2t} + (1/2)e^{-3t} \\ -3e^{-t} + 6e^{-2t} - 3e^{-3t} & -(5/2)e^{-t} + 8e^{-2t} - (9/2)e^{-3t} & (1/2)e^{-t} + 2e^{-2t} - (3/2)e^{-3t} \\ 3e^{-t} - 12e^{-2t} + 9e^{-3t} & (5/2)e^{-t} - 16e^{-2t} + (27/2)e^{-3t} & (1/2)e^{-t} - 4e^{-2t} + (9/2)e^{-3t} \end{bmatrix}$$

例2.1-6 用凯莱-哈密顿定理计算

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

的矩阵指数函数 e^{At} 。

解 在例2.1-1中已经算得

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

对于 $\lambda_1 = 2$, 有

$$a_0(t) + a_1(t)\lambda_1 + a_2(t)\lambda_1^2 = \exp(\lambda_1 t)$$

对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, 有

$$a_0(t) + a_1(t)\lambda_2 + a_2(t)\lambda_2^2 = \exp(\lambda_2 t)$$

因 $\lambda_2 = -1$ 是二重根, 将上式对 λ_2 求导一次, 补充一个方程

$$a_1(t) + 2a_2(t)\lambda_2 = t \exp(\lambda_2 t)$$

把 λ_1, λ_2 的值代入, 并对 $a_0(t), a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 求解

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \\ te^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e^{2t} + 8e^{-t} + 6te^{-t})/9 \\ (2e^{2t} - 2e^{-t} + 3te^{-t})/9 \\ (e^{2t} - e^{-t} - 3te^{-t})/9 \end{bmatrix}$$

由此得

$$\begin{aligned} e^{At} &= a_0(t)I + a_1(t)A + a_2(t)A^2 \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} e^{2t} + (8 + 6t)e^{-t} & 2e^{2t} - (2 - 3t)e^{-t} & e^{2t} - (1 + 3t)e^{-t} \\ 2e^{2t} - (2 + 6t)e^{-t} & 4e^{2t} + (5 - 3t)e^{-t} & 2e^{2t} - (2 - 3t)e^{-t} \\ 4e^{2t} + (6t - 4)e^{-t} & 8e^{2t} + (3t - 8)e^{-t} & 4e^{2t} + (5 - 3t)e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

§ 2-2 状态转移矩阵及状态方程的求解公式

[内容提要]

一、线性定常齐次状态方程的解

$$\dot{x} = Ax$$

在初始条件 $x(t_0) = x_0$ 的解为

$$\begin{aligned} x(t) &= (I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots)x_0 \\ &= e^{At}x_0 \end{aligned} \quad (2.2-1)$$

二、状态转移矩阵

1. 定义 状态转移矩阵是齐次状态方程

$$\dot{x} = Ax$$

在初始状态为下列 n 个基向量

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

时的一个基本解阵, 用 $\Phi(t-t_0)$ 表示。

2. 性质

(1) $\Phi(t-t_0)$ 满足矩阵方程

$$\dot{\Phi}(t-t_0) = A\Phi(t-t_0) \quad (2.2-2)$$

和初始条件

$$\Phi(t_0-t_0) = \Phi(0) = I \quad (2.2-3)$$

$$(2) \quad \Phi(t_2-t_1)\Phi(t_1-t_0) = \Phi(t_2-t_0) \quad (2.2-4)$$

$$(3) \quad \Phi^{-1}(t-t_0) = \Phi(t_0-t) \quad (2.2-5)$$

3. 几点说明

(1) 定常系统的状态转移矩阵的数学表达式是 $\exp[A(t-t_0)]$ 。

$$\Phi(t-t_0) = \exp[A(t-t_0)] \quad (2.2-6)$$

(2) 定常系统状态转移矩阵的结构是由其特征值所确定振型决定的。

a. 对于互异特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \exp(\lambda_1 t), \exp(\lambda_2 t), \dots, \exp(\lambda_n t)$ 称单根振型；

b. 对于共轭特征值 $-\sigma \pm j\omega, e^{-\sigma t} \cos \omega t$ 和 $e^{-\sigma t} \sin \omega t$ 称共轭根振型；

c. 对于阶数(不是重数)为 n_1 的重根 $\lambda, e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{n_1-1} e^{\lambda t}$ 是重根振型。

(3) 时变系统的状态转移矩阵既是 t 的函数又是 t_0 的函数, 用 $\Phi(t-t_0)$ 表示。

(4) 时变系统的状态转移矩阵通常不能写成封闭形式, 只能采用如下公式计算。

$$\Phi(t, t_0) = I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t A(\tau_1) \left[\int_{t_0}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 + \dots \quad (2.2-7)$$

若 $A(t)$ 和 $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ 是可交换的, 则 $\Phi(t, t_0)$ 有如下封闭形式

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left[\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right] \quad (2.2-8)$$

三、非齐次状态方程的求解公式

1. 时域求解公式

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \\ &= \exp[A(t-t_0)x(t_0)] + \int_{t_0}^t \exp[A(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.2-9)$$

2. 状态方程 s 域的求解公式

$$x(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}Bu(s) \quad (2.2-10)$$

3. 时变系统状态方程的求解公式

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.2-11)$$

四、状态方程的数值解

1. 龙格—库塔法

对于状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \quad x(t_0) = x_0 \\ y &= Cx \end{aligned}$$

的龙格—库塔计算公式为

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \quad (2.2-12)$$

式中

$$k_1 = h[Ax(t_k) + Bu(t_k)] \quad (2.2-13)$$

$$k_2 = h[Ax(t_k) + k_1/2] + Bu(t_k + h/2) \quad (2.2-14)$$

$$k_3 = h[Ax(t_k) + k_2/2] + Bu(t_k + h/2) \quad (2.2-15)$$

$$k_4 = h[Ax(t_k) + k_3] + Bu(t_k + h) \quad (2.2-16)$$

2. 先将连续时间状态方程离散化, 然后再按离散状态方程求其数值解, 详见 § 2.3。

[例 题]

例2.2-1 已知系统的状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2(e^{-2t} - e^{-t}) \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix}$$

求系统矩阵 A 。

解 由式(2.2-2)有

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$$

令 $t=0, \Phi(0)=I$, 从而有

$$\begin{aligned} A = \Phi(t) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2(e^{-2t} - e^{-t}) \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} \\ &= \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 2(-2e^{-2t} + e^{-t}) \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} & -4e^{-2t} + e^{-t} \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例2.2-2 已知某二阶系统齐次状态方程 $\dot{x}=Ax$, 其解如下

当

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{时, } x(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

当

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{时, } x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2te^{-t} \\ e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix}$$

求该系统的状态转移矩阵。

解 从 $x(t)=\Phi(t)x(0)$ 可以写出下列方程

$$\begin{bmatrix} 2 - e^{-t} & e^{-t} + 2te^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} & e^{-t} + 2te^{-t} \\ e^{-t} & e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2te^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix}$$

例2.2-3 已知齐次状态方程 $\dot{x}=Ax$ 的状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

试求其逆矩阵 $\Phi^{-1}(t)$ 。

解 根据状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的性质, 得

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(t) &= \Phi(-t) = \Phi(t) \Big|_{t \rightarrow -t} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例2.2-4 利用在 $AB=BA$ 的条件下, $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$ 这一性质来求状态方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix} x$$

的转移矩阵。

解 系数矩阵可分解为

$$\begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ \omega & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} = A + B$$

而

$$\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma\omega \\ -\sigma\omega & 0 \end{bmatrix}$$

符合 $AB=BA$ 的条件

故
即

$$e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$$

$$\Phi(t) = e^{At} \cdot e^{Bt}$$

而

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\sigma t} & 0 \\ 0 & e^{\sigma t} \end{bmatrix} \quad e^{Bt} = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

所以

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\sigma t} & 0 \\ 0 & e^{\sigma t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \\ -\sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\sigma t} \cos \omega t & e^{\sigma t} \sin \omega t \\ -e^{\sigma t} \sin \omega t & e^{\sigma t} \cos \omega t \end{bmatrix}$$

例2.2-5 求矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

的矩阵指数 e^{At} 。

解 矩阵 A 的特征方程

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 5 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0 \end{aligned}$$

解此方程得 A 的特征值

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1 + j2 \quad \lambda_3 = -1 - j2$$

由于 A 具有友矩阵形式, 它的三个特征向量应为

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ (-1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \pm j2 \\ (-1 \pm j2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \pm j2 \\ -3 \mp j4 \end{bmatrix}$$

即

$$\operatorname{Re}P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Im}P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Re}P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Im}P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

据此可以作出变换矩阵

$$P = [P_1 \quad \operatorname{Re}P_2 \quad \operatorname{Im}P_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

其逆阵

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

从而求得 A 的模态形

$$A_M = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

对于模态形的矩阵指数, 由式(2.1-12)可以写出

$$\exp(A_M t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t \\ 0 & -e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix}$$

于是 A 的矩阵指数

$$\begin{aligned} e^{At} &= P \exp(A_M t) P^{-1} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t}\cos 2t & e^{-t}\sin 2t \\ 0 & -e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{-t}}{4} \begin{bmatrix} 5 - \cos 2t + 2\sin 2t & 2(1 - \cos 2t + \sin 2t) & 1 - \cos 2t \\ -5 + 5\cos 2t & -2(1 - 3\cos 2t - \sin 2t) & -1 + \cos 2t + 2\sin 2t \\ 5 - 6\cos 2t - 10\sin 2t & 2(1 - \cos 2t - 7\sin 2t) & 1 + 3\cos 2t - 4\sin 2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 2.2-6 矩阵 A, B , 当 $AB=BA$ 成立时, 利用 $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$ 这个性质, 求系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} x$$

的转移矩阵 $\Phi(t, 0)$ 。

解:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A + B$$

$$AB=BA$$

容易验证
这样

$$\begin{aligned} \Phi(t, 0) &= \exp \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} t \right\} \\ &= \exp \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} t \right\} \cdot \exp \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t \right\} \end{aligned}$$

利用性质可以求得

$$\exp \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} t \right\} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sigma t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sigma t} \end{bmatrix}$$

利用定义可以求得

$$\exp \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t \right\} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$\Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

例2.2-7 设线性时变系统的齐次状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x(t)$$

式中

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1/(t+1)^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试求该系统的状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 。

解 首先校验 $A(t)$ 和 $\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$ 是否可交换。

即

$$A(t) \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau A(t)$$

亦即

$$\int_{t_0}^t \{A(t)A(\tau) - A(\tau)A(t)\} d\tau = 0$$

是否成立。也就是说,对任意时刻 t_1 和 t_2 是否有

$$A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$$

为此,对于所给 $A(t)$ 表达式,有

$$A(t_1)A(t_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1/(t_1+1)^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/(t_2+1)^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$A(t_2)A(t_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1/(t_2+1)^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/(t_1+1)^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

可见,条件 $A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$ 成立。因此,状态转移矩阵 $\Phi(t, t_0)$ 可按下式计算

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)$$

这样

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= I + \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau + \frac{1}{2!} \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right)^2 + \dots \\ &= I + \begin{bmatrix} 0 & \frac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t-t_0}{(t+1)(t_0+1)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例2.2-8 试计算线性时变系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

的状态转移矩阵 $\Phi(t, 0)$ 。

解 和上例相同, 首先检验 $A(t)$ 是否满足

$$A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$$

$$A(t_1)A(t_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t_2 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix}$$

$$A(t_2)A(t_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t_1 \\ 0 & t_1 t_2 \end{bmatrix}$$

显然

$$A(t_1)A(t_2) \neq A(t_2)A(t_1)$$

所以必须按下式计算状态转移矩阵 $\Phi(t, 0)$

$$\Phi(t, 0) = I + \int_0^t A(\tau) d\tau + \int_0^t A(\tau_1) \left[\int_0^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 \right] d\tau_1 + \dots$$

将 $A(t)$ 的表达式分别代入上式, 可求得

$$\begin{aligned} \Phi(t, 0) &= I + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & t^2/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t^3/6 \\ 0 & t^4/8 \end{bmatrix} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t + t^3/6 + \dots \\ 0 & 1 + t^2/2 + t^4/8 + \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 2.2-9 求输入量为 r 维时的 n 阶系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

在零状态下, 下列输入函数的响应。

- 1) 脉冲函数: $u = v\delta(t)$ (v 为 $r \times 1$ 维向量)
- 2) 单位输入函数: $u = v1(t)$ ($1(t)$: 单位阶跃函数)
- 3) 斜坡输入函数: $u = vt$

解 零状态响应由下式给出

$$x = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

1) 脉冲响应 $x_{imp}(t)$

$$\begin{aligned} x_{imp}(t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bv(\tau) d\tau \\ &= e^{At} Bv \end{aligned}$$

2) 单位阶跃输入响应 $x_{unit}(t)$

$$\begin{aligned} x_{unit}(t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bv1(\tau) d\tau \\ &= e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bv d\tau \end{aligned}$$

考虑到

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-A\tau} Bv d\tau &= \int_0^t [I - A\tau + A^2 \frac{\tau^2}{2!} - A^3 \frac{\tau^3}{3!} + \dots] Bv d\tau \\ &= [It - A \frac{t^2}{2!} + A^2 \frac{t^3}{3!} - A^3 \frac{t^4}{4!} + \dots] Bv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= A^{-1} \left[At - A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} - A^4 \frac{t^4}{4!} + \dots \right] Bv \\
 &= A^{-1} (I - e^{-At}) Bv
 \end{aligned}$$

另外可以推知 $e^{At} A^{-1} = A^{-1} e^{At}$

这样

$$\begin{aligned}
 x_{\text{unit}}(t) &= e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bv d\tau \\
 &= e^{At} A^{-1} [I - e^{-At}] Bv \\
 &= A^{-1} [e^{At} - I] Bv
 \end{aligned}$$

3) 斜坡响应 $x_{\text{ramp}}(t)$

$$\begin{aligned}
 x_{\text{ramp}}(t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bv \tau d\tau \\
 &= e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bv \tau d\tau
 \end{aligned}$$

类似于2)中的步骤推导,可得

$$\int_0^t \tau e^{-A\tau} Bv d\tau = A^{-2} [I - e^{-At} - Ae^{-At} \cdot t] Bv$$

并注意到 $e^{At} A^{-2} = A^{-2} e^{At}$,则可求得

$$\begin{aligned}
 x_{\text{ramp}}(t) &= e^{At} \int_0^t \tau e^{-A\tau} Bv d\tau \\
 &= e^{At} A^{-2} [I - e^{-At} - Ae^{-At} \cdot t] Bv \\
 &= [A^{-2}(e^{At} - I) - A^{-1}t] Bv
 \end{aligned}$$

例2.2-10 已知系统的状态模型为

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u \\
 y &= [1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

试利用龙格-库塔法求该系统在

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

下的数值解。

解 设步长 $\Delta t = h = 0.1$

(1) 计算 $t_1 = h = 0.1$ 时刻的值

由式2.2-13、14、15、16,有

$$k_1 = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = 0.1 \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times 2 \right) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix}$$

$$k_2 = \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix} = 0.1 \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2/2 \\ -0.2/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times 2 \right) = \begin{bmatrix} 0.19 \\ -0.19 \end{bmatrix}$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} k_{31} \\ k_{32} \end{bmatrix} = 0.1 \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.19/2 \\ -0.19/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times 2 \right) = \begin{bmatrix} 0.1905 \\ -0.1905 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = 0.1 \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1905 \\ -0.1905 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times 2 \right) = \begin{bmatrix} 0.18095 \\ -0.18095 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(\Delta t) &= x(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= \frac{1}{6} \left(\begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0.19 \\ -0.19 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0.1905 \\ -0.1905 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.18095 \\ -0.18095 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0.190325 \\ -0.190325 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(\Delta t) &= x_1(\Delta t) + 2x_2(\Delta t) \\ &= -0.190325 \end{aligned}$$

(2) 计算 $t_2 = 2h = 0.2$ 时刻的值

$$\begin{aligned} k_1 &= \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = 0.1 \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.190325 \\ -0.190325 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times 2 \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0.1809675 \\ -0.1809675 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix} = 0.1 \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.190325 + (0.180967/2) \\ -0.190325 - (0.180967/2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times 2 \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0.17191913 \\ -0.17191913 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= \begin{bmatrix} k_{31} \\ k_{32} \end{bmatrix} = 0.1 \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.190325 + (0.17191913/2) \\ -0.190325 - (0.17191913/2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times 2 \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0.17237155 \\ -0.17237155 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= \begin{bmatrix} k_{41} \\ k_{42} \end{bmatrix} = 0.1 \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.190325 + 0.17237155 \\ -0.190325 - 0.17237155 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times 2 \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0.16373035 \\ -0.16373035 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(2\Delta t) &= x(\Delta t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= \begin{bmatrix} 0.190325 \\ -0.190325 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \left(\begin{bmatrix} 0.1809675 \\ -0.1809675 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0.17191913 \\ -0.17191913 \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + 2 \begin{bmatrix} 0.17237155 \\ -0.17237155 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1637035 \\ -0.1637035 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.3625337 \\ -0.3625337 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(2\Delta t) &= x_1(2\Delta t) + 2x_2(2\Delta t) \\ &= -0.3625337 \end{aligned}$$

对于本例所给系统,可以求得其精确解为

$$y(t) = 2e^{-t} - 2$$

在 $t=0.1$ 时, $y(0.1) = -0.1903252$ 。

因此上面龙格-库塔法计算的误差为

$$\Delta y(1) = |y(\Delta t) - y(0.1)| < 10^{-6}$$

同理,在 $t=0.2$ 时, $y(0.2) = -0.365386$, 误差为

$$\Delta y(2) = |y(2\Delta t) - y(0.2)| < 10^{-6}$$

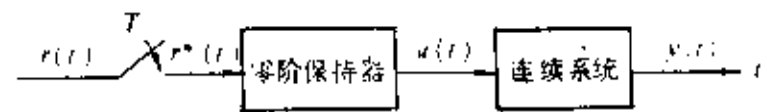
可见,利用龙格-库塔法计算可获得较高的精度,而且步长 h 越小,其精度越高。

§ 2-3 连续时间系统状态模型的离散化 和离散时间状态方程的解

[内容提要]

一、由零阶保持器推导的离散化状态模型

1. 连续时间系统离散化的示意图如图2-2所示。



2. 零阶保持器的特性 在离散周期内,保持器的输出不变且等于该采样时刻的输入值

$$u(t) = u(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T$$

3. 离散化状态方程

连续时间系统的状态模型

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu$$

$$y(t) = Cx + Du$$

零阶保持器下的离散化状态模型为

$$x[(k+1)T] = Gx(kT) + Hu(kT) \quad (2.3-1)$$

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \quad (2.3-2)$$

式中

$$G = \Phi(T) = e^{AT} \quad (2.3-3)$$

$$H = \int_0^T \Phi(\tau) d\tau \cdot B \quad (2.3-4)$$

式中 $\Phi(T)$ ——连续时间系统的状态转移矩阵;

T ——采样周期。

4. 若采样周期 T 较小, G 、 H 可用近似公式计算

$$G = I + AT \quad (2.3-5)$$

$$H = BT \quad (2.3-6)$$

二、由一阶保持器推导的修正型离散状态模型

1. 一阶保持器的特性 在离散周期内保持器的输出增量是一个随时间递增的函数

$$\begin{aligned} \Delta u(t) &= \frac{u[(k+1)T] - u(kT)}{T} t \\ &= \frac{\delta u(kT)}{T} t = \dot{u}(kT)t \end{aligned} \quad (2.3-7)$$

2. 修正型离散状态模型

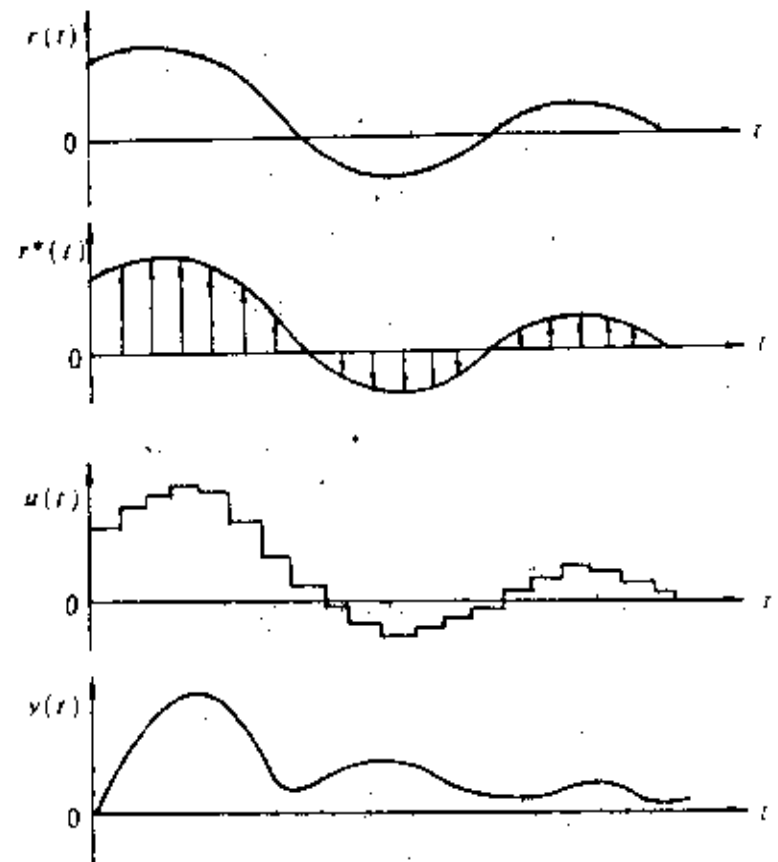


图2-2 连续时间系统离散化示意图

$$x[(k+1)T] = Gx(kT) + Hu(kT) + \hat{H}u(kT) \quad (2.3-8)$$

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \quad (2.3-9)$$

式中

$$\hat{H} = \int_0^T \tau \Phi(T-\tau) d\tau \quad (2.3-10)$$

3. 修正型离散状态模型可以在采样周期取得不太小的前提下保证一定的计算精度, 从而使计算工作量不致增加过大。

三、离散时间系统状态方程的解

1. 递推公式

$$x(k) = G^k x(0) + \sum_{j=1}^{k-1} G^{k-j-1} H u(j) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (2.3-11)$$

2. z 变换法

$$X(z) = (zI - G)^{-1} zX(0) + (zI - G)^{-1} H U(z) \quad (2.3-12)$$

3. 几点说明

(1) 递推法既适用于定常线性离散系统又适用于时变线性离散系统, 而 z 变换法只适用于定常线性离散系统。

(2) 递推法求得的解是序列形式, 而 z 变换法可以得到解的封闭形式。所以如用计算机进行计算, 递推法十分方便。

(3) 如果要获得采样瞬时间隔中 $t = (k+\Delta)T$ ($0 \leq \Delta \leq 1$) 的状态 $x[(k+\Delta)T]$, 其计算公式为

$$x[(k+\Delta)T] = \Phi(\Delta T)x(kT) + \int_0^{\Delta T} \Phi(\Delta T - \tau) d\tau B u(kT) \quad (2.3-13)$$

[例 题]

例 2.3-1 求连续时间系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

采样周期为 T 时的离散化方程。

解 首先求出连续时间系统的状态转移矩阵

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}[sI - A]^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} 1/s & 1/s(s+2) \\ 0 & 1/(s+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (1 - e^{-2t})/2 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据式(2.3-3)和式(2.3-4)求出

$$\begin{aligned} G(T) = \Phi(T) &= \begin{bmatrix} 1 & (1 - e^{-2T})/2 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \\ H(T) &= \left(\int_0^T \Phi(\tau) d\tau \right) B = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & (1 - e^{-2\tau})/2 \\ 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2T + e^{-2T} - 1)/4 \\ (1 - e^{-2T})/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

于是该连续时间系统的离散化状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (1 - e^{-2T})/2 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (2T + e^{-2T} - 1)/4 \\ (1 - e^{-2T})/2 \end{bmatrix} u(kT)$$

若采样周期较小,且对其精度要求不高的情况下,可用式(2.3-5)和式(2.3-6)求得

$$G = I + AT = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 + 2T \end{bmatrix}$$

$$H = BT = \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix}$$

例2.3-2 求图2-3所示比例-积分环节与积分环节串联系统的离散状态方程

解 由方框图可以直接写出该系统的状态方程和输出方程是

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [k_1 \quad k_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

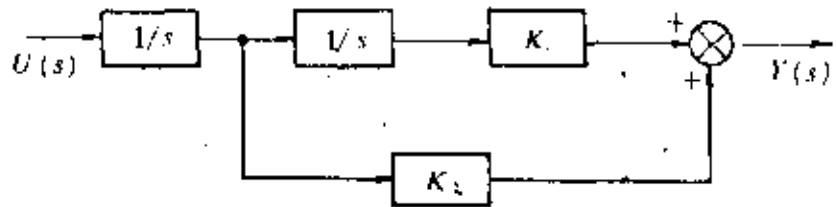


图2-3 例2.3-2中的PI+I环节

由式(2.3-3)、(2.3-4)和式(2.3-10)求出

$$G = \Phi(T) = \mathcal{L}^{-1}(sI + A)^{-1} \Big|_{s=0} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \int_0^T \Phi(\tau) d\tau B = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

$$\hat{H} = \int_0^T \tau \Phi(T - \tau) d\tau B = \int_0^T \tau \begin{bmatrix} 1 & T - \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} T^3/6 \\ T^2/2 \end{bmatrix}$$

最后写出修正型离散状态模型为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} T^3/6 \\ T^2/2 \end{bmatrix} \dot{u}(k)$$

$$y(k) = k_1 x_1(k) + k_2 x_2(k)$$

例2.3-3 求离散时间状态方程

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

在初始状态

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

输入 $u(k) = 1$ 时的数值解。

解 利用求解递推公式(2.3-11)

$$\begin{aligned} x(1) &= Gx(0) + Hu(0) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(2) &= Gx(1) + Hu(1) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1.84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x(3) = Gx(2) + Hu(2)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.84 \\ -0.84 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.16 \\ 1.386 \end{bmatrix}$$

依次递推下去可以得到一个解序列。

例2.3-4 试用z变换法计算上例的x(k)。

解 应用公式(2.3-12)

$$X(z) = (zI - A)^{-1}[zX(0) + HU(z)]$$

因为u(k)=1相应的U(z)=z/(z+1),则有

$$\begin{aligned} zX(0) + HU(z) &= \begin{bmatrix} z \\ -z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z/(z-1) \\ z/(z-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^2/(z-1) \\ (-z^2 + 2z)/(z-1) \end{bmatrix} \\ (zI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z+0.2)(z+0.8)} \begin{bmatrix} z+1 & 1 \\ -0.16 & z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4/3}{z+0.2} + \frac{-1/3}{z+0.8} & \frac{5/3}{z+0.2} + \frac{-5/3}{z+0.8} \\ \frac{-0.8/3}{z+0.2} + \frac{0.8/3}{z+0.8} & \frac{-1/3}{z+0.2} + \frac{4/3}{z+0.8} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

最后求得

$$X(z) = \begin{bmatrix} \frac{-17z/6}{z+0.2} + \frac{22z/9}{z+0.8} + \frac{25z/18}{z-1} \\ \frac{3.4z/6}{z-0.2} + \frac{-17.6z/9}{z+0.8} + \frac{7z/18}{z-1} \end{bmatrix}$$

最后将X(z)进行z反变换,得

$$\begin{aligned} X(k) &= \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{17}{6}(-0.2)^k + \frac{22}{9}(-0.8)^k + \frac{25}{18} \\ \frac{3.4}{6}(-0.2)^k - \frac{17.6}{9}(-0.8)^k + \frac{7}{18} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

若将k=1,2,...代入,即得到与上例结果相同的数值解。

例2.3-5 试求图2-4所示闭环离散系统的状态方程。

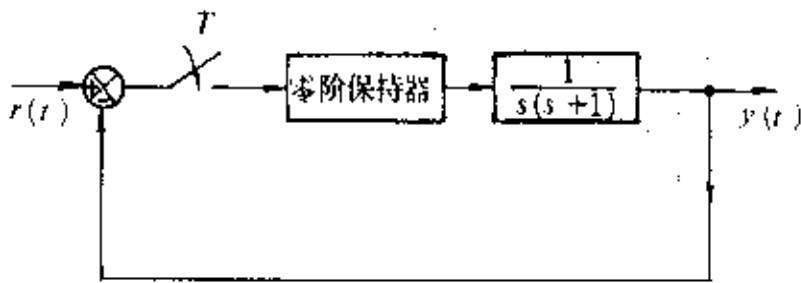


图2-4 例2.3-5中的闭环离散系统

解 首先求出开环离散化状态方程的G(T)、H(T)。

$$G(T) = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}$$

$$H(T) = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau = \begin{bmatrix} T - 1 + e^{-T} \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}$$

于是开环离散化状态方程及输出方程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T - 1 + e^{-T} \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} u(kT) \\ y(kT) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由结构图可知

$$u(kT) = r(kT) - y(kT)$$

将上式代入开环状态方程中,有

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T - 1 + e^{-T} \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} r(kT) - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

整理后得

$$\begin{bmatrix} x_1[(k+1)T] \\ x_2[(k+1)T] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - T - e^{-T} & 1 - e^{-T} \\ e^{-T} - 1 & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T - 1 + e^{-T} \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} r(kT)$$

$$y(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

例2.3-6 在图2-5的一阶系统中,若采样周期 $T=2s$,初始状态 $x(0)=1$,输入 $u(t)=t$,试求第三秒时刻的状态 $x(3)$ 。

解 连续部分的状态方程为

$$\dot{x} = -x + u$$

系统离散化方程为

$$x[(k+1)T] = Gx(kT) + Hr(kT)$$

式中

$$G = e^{AT} = e^{-2}$$

$$H = \int_0^T e^{At} dt B = \int_0^T e^{-t} dt = 1 - e^{-T} = 1 - e^{-2}$$

由于第三秒在 $T \leq t \leq 2T$ 期间,故

$$x(3) = e^{-1}x(2) + \int_0^1 e^{-t} dt u(2)$$

而

$$x(2) = Gx(0) + Hu(0) = e^{-2}$$

所以

$$x(3) = e^{-3} + 2(1 - e^{-1}) = e^{-3} - 2e^{-1} + 2$$

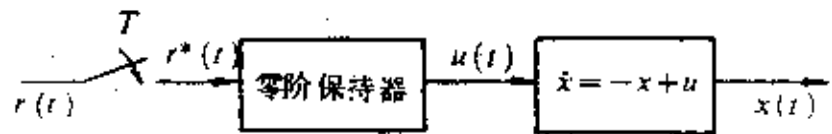


图2-5 例2.3-6中的系统示意图

习 题

2-1 试用矩阵指数函数的级数展开法及拉氏变换法求下列矩阵的矩阵指数函数 e^{At} 。

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2-2 试用对角线化或约当化法计算下列矩阵。

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

2-3 试用凯莱定理计算下列矩阵的 e^{At} 。

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2-4 试用共轭模态形计算下列矩阵的 e^{At} 。

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -17 & -4 \end{bmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

2-5 试证明,若

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix}$$

则其

$$\Phi(t, t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, t_0) & \Phi_{12}(t, t_0) \\ 0 & \Phi_{22}(t, t_0) \end{bmatrix}$$

并计算 $A = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的 $\Phi(t, 0)$ 。

2-6 验证下列矩阵是否满足状态转移矩阵的条件。若满足,试求其与之对应的 A 阵。

$$(1) \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & \sin t \end{bmatrix} \quad (2) \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & (1-2t)e^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & -te^{-2t} & (1+2t)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - 2e^{-t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} \end{bmatrix} \quad (4) \quad \Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-2t})/2 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

2-7 设某二阶系统的齐次状态方程

$$\dot{X}(t) = AX(t)$$

当

$$X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 时} \quad X(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2te^{-t} \\ -e^{-t} + 2te^{-t} \end{bmatrix}$$

$$X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 时} \quad X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

试求其状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 和系统矩阵 A 。

2-8 设系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试求初始状态 $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 时系统在单位阶跃输入下的时间响应 $x(t)$ 。

2-9 设系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试求初始状态 $x(0) = 0$ 时系统在单位斜坡函数输入下的系统响应 $x(t)$ 。

2-10 已知系统的齐次状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

试求在 $x_1^2(0) + x_2^2(0) = 1$ 的约束条件下使系统以可能最快速度返回静止状态的 $x_1(0)$ 和 $x_2(0)$ 。

2-11 计算下列线性时变系统的状态转移矩阵 $\Phi(t, 0)$ 。

$$(1) \quad A(t) = \begin{bmatrix} -2t & -1 \\ 1 & -2t \end{bmatrix} \quad (2) \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix}$$

2-12 求下列系统输入作用为:(1)脉冲函数,(2)单位阶跃函数,(3)斜坡函数下的响应。

$$(1) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/(b-a) \\ 1/(a-b) \end{bmatrix} u$$

$$(2) \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -ab & -(a+b) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

2-13 图2-6所示 RC 电路,其参数为

$$R = 1\text{M}\Omega \quad C = 1\mu\text{F}$$

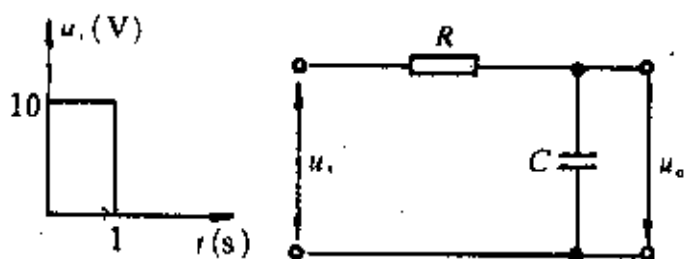


图2-6 RC 电路

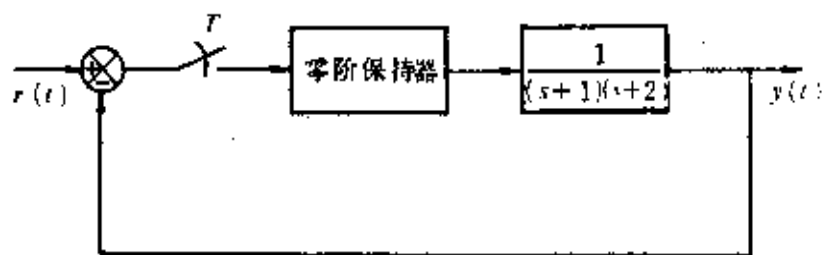


图2-7

如在输入端加上幅值为10V,持续时间为1秒的矩形脉冲输入电压信号,若在第三秒时刻测得其输出电压为0V,求电容器C上的初始电压 $u_c(0)$,并作出其输出电压的响应曲线 $u_o(t)$ 。

2-14 对于状态方程 $\dot{x} = Ax$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ -12 & -7 & -6 \end{bmatrix}$$

试寻求初始条件 $x(0)$,该初始条件的向量只引起其特征值中实部最负的那个特征值的响应。

2-15 已知某线性离散系统的差分方程为

$$y[(k+2)T] + 0.5y[(k+1)T] + 0.1y(kT) = 1$$

试写出该系统的离散状态空间表达式。若初始状态 $y(0) = 1, y(T) = 0$ 。试用递推法求出 $y(kT), k = 2, 3, \dots, 10$ 。

2-16 设连续时间系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

假定采样周期 $T = 0.2\text{s}$,试将该连续系统的状态方程离散化。

2-17 某离散时间系统的结构图如图2-7所示。

- (1) 写出系统的离散状态方程;
- (2) 当采样周期 $T = 0.1\text{s}$ 时的状态转移矩阵;
- (3) 输入为单位阶跃函数,初始条件为零的输出 $y = (kT)$;
- (4) $t = 0.25\text{s}$ 时刻的 $y(t)$ 。

2-18 已知某离散时间系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix} u(k)$$

若初始状态

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试求 $u(k)$ 使系统能在第二个采样时刻转移到原点。

第三章 系统的可控性、可观测性分析

§.3-1 连续系统的可控性

[内容提要]

一、可控性的定义

对于给定线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

如果存在一个分段连续的输入 $u(t)$, 能在 $[t_0, t_f]$ 有限时间内将系统从任一初始状态 $x(t_0)$ 转移到零态 $x(t_f) = 0$, 则称系统是状态可控的。

1. 上述定义若改为将系统从零态 $x(t_0) = 0$ 转移到任意终态, 则称系统是状态可达的。

2. 在上述定义中我们所关心的只是是否存在某个分段连续的输入 $u(t)$ 能把任意初始状态转移到零, 并不要求算出具体的输入和状态的轨线。

3. 对于连续时间系统, 可控性与可达性是等价的。

二、连续系统可控性的判别准则

1. 定常系统可控判别矩阵

n 阶线性定常系统 $\Sigma = (A, B)$, 状态完全可控的充分必要条件是由 A, B 所构成的可控判别矩阵

$$Q_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \quad (3.1-1)$$

的秩等于 n , 即

$$\text{rank} Q_c = n \quad (3.1-2)$$

(1) 对于单输入系统, Q_c 是 $n \times n$ 维矩阵; 对于具有 r 维输入的多输入系统, Q_c 是 $n \times rn$ 维矩阵。

(2) 根据

$$\text{rank} Q_c = \text{rank} Q_c^T Q_c$$

判别 $n \times rn$ 维矩阵 Q_c 的秩是否为 n 的问题可通过计算方阵 $Q_c^T Q_c$ 的行列式 $\det Q_c^T Q_c$ 是否为零来判定。这是计算机判别系统可控性的一种常用算法, 其计算程序框图如图 3-1 所示。

2. A 阵对角线化后的判别法

若系统矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互异, $\Sigma = (A, B)$ 经对角线化为

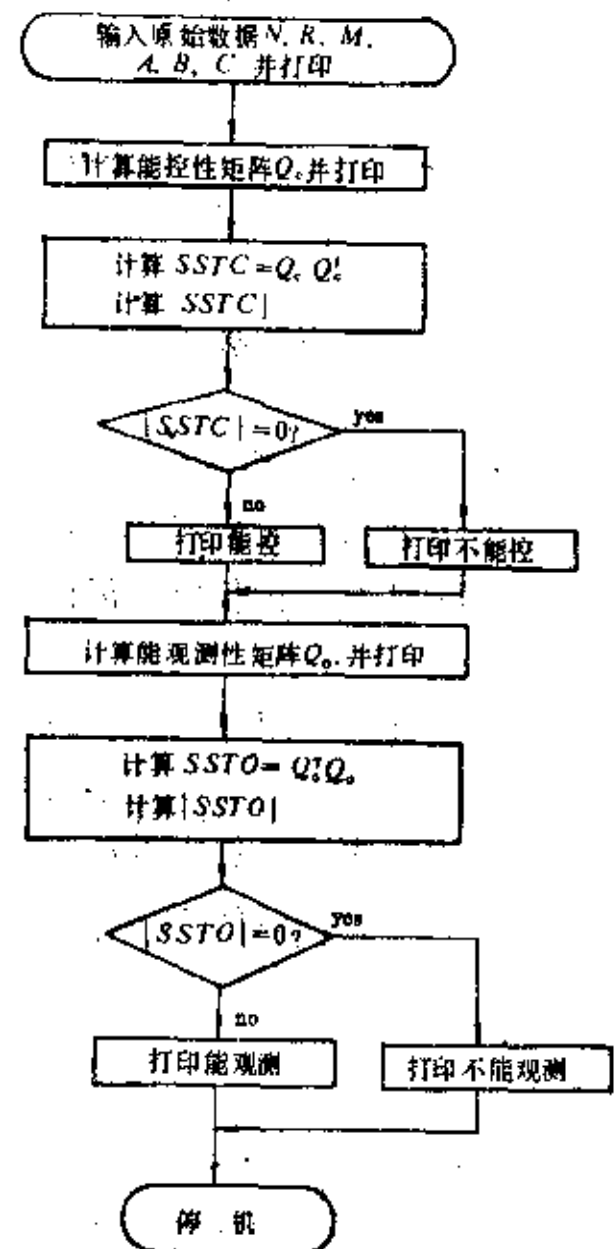


图 3-1 判别系统可控性可观测性的计算程序框图

$$\dot{x} = \hat{A}x + \hat{B}u = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \hat{x} + \hat{B}u$$

其状态可控的充分必要条件是 \hat{B} 中不包含元素全为零的行。

注意,某些具有重特征值的 A 阵虽然也能化成对角线形,但不能应用这个判别法则,仍应按约当形判别。

3. A 阵约当化后的判别法

若具有重特征值的 n 阶系统 $\Sigma = (A, B)$ 经约当化为

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_l \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_l \end{bmatrix}$$

其状态可控的充分必要条件是对于相同特征值下的每个约当块最后一行所对应的 \bar{B} 阵的行线性无关。

显然,在每个特征值只有一个约当块的情况下,上述条件只要求每个约当块最后一行所对应的 \bar{B} 阵各行元素不全为零。

4. 若对于 A 的任意特征值 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都有

$$\text{rank}[\lambda_i I - A \quad B] = n \quad (3.1-3)$$

则定常系统 $\Sigma = (A, B)$ 是可控的。

满足式(3.1-3)的 λ_i 所确定的振型 $\exp(\lambda_i t)$ 称可控振型,否则称不可控振型。

5. 线性连续时变系统的可控判别准则

(1) 线性连续时变系统 $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ 在时间区间 $[t_0, t_f]$ 上完全可控的充分必要条件是下列 Gram 矩阵

$$W_c(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t) B(t) B^T(t) \Phi^T(t_0, t) dt \quad (3.1-4)$$

为非奇异。

(2) 设系统 Σ 的状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$A(t), B(t)$ 的元对时间 t 分别是 $(n-2)$ 和 $(n-1)$ 次连续可微,记

$$\left. \begin{aligned} B_1(t) &= B(t) \\ B_i(t) &= -A(t)B_{i-1}(t) + \dot{B}_{i-1}(t) \quad i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (3.1-5)$$

令

$$Q_c \triangleq [B_1(t) \quad B_2(t) \quad \dots \quad B_n(t)] \quad (3.1-6)$$

如果存在某个时刻 $t_f > 0$, 使得

$$\text{rank} Q_c(t_f) = n \quad (3.1-7)$$

则该系统在 $[0, t_f]$ 上是状态完全可控的。

应该注意,这是一个充分条件,不满足这个条件的系统并不一定是不可控的。

三、可控子空间的几个概念

1. 可控状态

(1) 定义 如果系统 $\Sigma = (A(t), B(t))$ 对 t_0 时刻存在时刻 $t_f > t_0, t_f \in T$, 对 t_0 时刻的某给定初始状态 $x(t_0) = x_0$, 可找到容许控制 $u(\cdot) \in L^2_T[t_0, t_f]$, 使 $x(t_f) = 0$, 则称 x_0 是系统在 t_0 时刻上的一个可控状态。

(2) 状态 x_0 在 t_0 是可控的充分必要条件是存在 t_f 和 $u(t)$, 使得

$$x_0 = - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad (3.1-8)$$

2. 可控子空间

(1) 所有可控状态构成状态空间中的一个子空间, 称为可控子空间, 记为 X_c 。

(2) 可控子空间 X_c 是由 $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ 的所有列向量所张成的子空间, 即

$$X_c = \text{Span}\{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B\} \quad (3.1-9)$$

(3) 如果可控子空间 X_c 的维数等于状态空间 X 的维数, 即

$$X_c = X$$

则称系统是完全可控的。

[例 题]

例 3.1-1 已知系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

试判别其可控性。

解 首先构造可控判别矩阵

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} Q_c = \text{rank} Q_c Q_c^T = \text{rank} \begin{bmatrix} 8 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 8 & 8 \end{bmatrix} = 2 < n$$

所以系统是不可控的。

例 3.1-2 对于任意 $m \times n$ 矩阵 A , 试证明

$$\text{rank} A = \text{rank} AA^T = \text{rank} A^T A$$

证 设与 A 行等价的行标准形为 $\tilde{A}_r = PA$, 此时若 A^T 的列等价标准形为 \tilde{A}_c , 则 $\tilde{A}_c = \tilde{A}_r^T = A^T P^T$ 因此

$$\text{rank} A = \text{rank} \tilde{A}_r \tilde{A}_c = \text{rank} AA^T$$

例 3.1-3 试判别如下系统的可控性

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

解 系统(1)对应于约当块的最后一行的 B 阵元素为 $\boxed{0 \ 0}$, 所以系统是不可控的。

系统(2)对应于约当块的最后一行的 B 阵元素为 $\boxed{1 \ 0}$, 所以系统是可控的。

例 3.1-4 试判别如下系统

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

的可控性, 并作出它的可控子空间。

解 该系统具有重特征值, 不能应用对角线化后的判别法则。为此构造可控判别矩阵

$$Q_c = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} Q_c = 1 < n$$

所以该系统是不可控的。应用约当化后的判别法则亦能得到同一结论。该系统的可控子空间如图 3-2 所示。

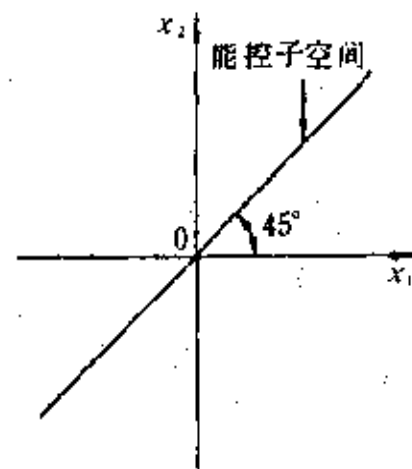


图 3-2 可控子空间示意图

例 3.1-5 试判别下列系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

的可控性。

解 (1) 首先求系统的状态转移矩阵, 考虑到该系统的系统矩阵 $A(t)$ 满足

$$A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1)$$

故状态转移矩阵 $\Phi(0, t)$ 可写成封闭形式

$$\begin{aligned} \Phi(0, t) &= I + \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau + \frac{1}{2!} \left\{ \int_0^t \begin{bmatrix} 0 & \tau \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\tau \right\}^2 + \dots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -(t^2/2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 计算可控判别矩阵 $W_c(0, t_f)$

$$\begin{aligned} W_c(0, t_f) &= \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2}t^2 & 1 \end{bmatrix} dt \\ &= \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t^4 & -\frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{1}{2}t^2 & 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1}{20}t_f^5 & -\frac{1}{6}t_f^3 \\ -\frac{1}{6}t_f^3 & t_f \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(3) 判别 $W_c(0, t_f)$ 是否为非奇异

$$\det W_c(0, t_f) = \frac{1}{20}t_f^5 - \frac{1}{36}t_f^6 = \frac{1}{45}t_f^5$$

当 $t_f > 0$, $\det W_c(0, t_f) > 0$ 。所以系统在 $[0, t_f]$ 上是可控的。

§ 3-2 连续系统的可观测性

[内容提要]

一、可观测性的定义

对于给定线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

如果对任意给定的输入 u , 存在一有限观测时间 $t_f > t_0$, 使得根据 $[t_0, t_f]$ 期间的输出 $y(t)$ 能唯一地确定系统在初始时刻的状态 $x(t_0)$, 则称系统是状态完全可观测的。

1. 和可达性对应于可控性一样, 与可观测性相对应的是可构造性, 也称可重构性。即根据输出 $y(t)$ 能唯一地确定出状态 $x(t_f)$ 。

2. 上述定义中所关心的只是由输出 y 的测量值能否确定系统的初始状态, 它是由 A, C 反映出来。

3. 对于连续时间系统, 可观测性和可构造性是等价的。

二、连续系统可观测性的判别准则

1. 定常系统可观测判别矩阵

n 阶线性定常系统 $\Sigma = (A, C)$ 状态完全可观测的充分必要条件是由 A, C 所构成的可观测判别矩阵

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.2-1)$$

的秩等于 n , 即

$$\text{rank} Q_0 = n \quad (3.2-2)$$

(1) 对于单输出系统, Q_0 是 $n \times n$ 维矩阵; 对于具有 m 维输出的多输出系统, Q_0 是 $mn \times n$ 维矩阵。

(2) 和判别 Q_0 的秩是否是 n 的方法一样, 判别 $mn \times n$ 维矩阵 Q_0 的秩是否为 n 也可通过计算方阵 $Q_0^T Q_0$ 的行列式 $\det Q_0^T Q_0$ 是否为零来进行。其计算程序框图如图 3-1 所示。

2. A 阵对角线化后的判别准则

若系统矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互异, $\Sigma = (A, C)$ 经对角线化为

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tilde{x} \quad (3.2-3)$$

$$y = \tilde{C}\tilde{x} \quad (3.2-4)$$

其状态可观测的充分必要条件是 \tilde{C} 中不含有元素全为零的列。

注意, 和可控性判别准则一样, 对于具有重特征值的 A 有时也能化为对角形, 但不能应

用这个判别准则,应按约当形判别。

3. A 阵约当化后的判别准则

若具有重特征值的 n 阶系统 $\Sigma=(A, C)$ 经约当化为

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & J_l \end{bmatrix} \quad (3.2-5)$$

$$\tilde{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_l] \quad (3.2-6)$$

其状态可观测的充分必要条件是对于相同特征值下和每个约当块首列所对应的 \tilde{C} 阵的列线性无关。

显然,在每个特征值只有一个约当块的情况下,上述条件只要求每个约当块首列所对应的 \tilde{C} 阵各列元素不全为零。

4. 若对于 A 的特征值 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都有

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} = n \quad (3.2-7)$$

则定常系统 $\Sigma=(A \quad C)$ 是可观测的。

满足式(3.2-7)的 λ_i 所确定的振型称可观测振型,否则称不可观测振型。

4. 线性连续时变系统的可观测判别矩阵

(1) 线性连续时变系统

$$\dot{x} = A(t)x$$

$$y = C(t)x$$

在 t_0 时刻上状态完全可观测的充分必要条件是

$$W_0(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt \quad (3.2-8)$$

为非奇异。

(2) 设系统中 $A(t)$ 和 $C(t)$ 的元对时间 t 分别是 $(n-2)$ 和 $(n-1)$ 次连续可微,组成如下矩阵

$$R(t) = \begin{bmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{bmatrix} \quad (3.2-9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} C_1(t) &= C(t) \\ C_i(t) &= C_{i-1}(t)A(t) + \dot{C}_{i-1}(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.2-10)$$

$$i = 2, 3, \dots, n$$

若存在某个时刻 $t_f > 0$, 使得 $\text{rank} R(t_f) = n$, 则系统在 $[0, t_f]$ 上是能观测的, 这也是一个充分条件。

三、关于不可观测子空间的几个概念

1. 不可观测状态

(1) 定义 一个非零状态 $x(t_0) = x_0 \in X$, 当输入 $u(t) = 0$, 如果存在一有限时间 $t_f > t_0$, 使得 x_0 引起的输出 $y(t)$ 在 $[t_0, t_f]$ 上恒等于零, 则称 x_0 为 $[t_0, t_f]$ 区间上的不可观测状态。

(2) x_0 为不可观测状态的充分必要条件为

$$y(t) = C\Phi(t, t_0)x_0 = 0 \quad t \in [t_0, t_f] \quad (3.2-11)$$

对定常系统来说, x_0 为不可观测状态的充分必要条件为

$$y(t) = Ce^{At}x_0 = 0 \quad (3.2-12)$$

(3) 严格说, 研究系统的可观测性应从不可观测的状态入手。

2. 不可观测子空间

所有不可观测的状态构成状态空间中的一个子空间, 记为 X_{y0} 。

不可观测子空间是核空间 $\text{Ker}C, \text{Ker}CA, \dots, \text{Ker}CA^{n-1}$ 的交空间, 即

$$X_{y0} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ker}CA^k$$

不可观测子空间是 A 的不变子空间。

3. 系统可观测的充分必要条件是

$$X_{y0} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ker}CA^k = 0 \quad (3.2-13)$$

[例 题]

例3.2-1 已知系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

试判别其可观测性。

解 构造可观测性判别矩阵

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由于 $\text{rank}Q_0 = 3$, 所以系统是可观的。

在构造 Q_0 时, 当算至 CA 便可发现 Q_0 的秩等于 n , 无需再计算下去。

例3.2-2 试判别如下系统

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$$

的可观测性, 并作出它的不可观测子空间。

解 该系统具有重特征值, 不能应用对角线化后的判别准则。为此, 构造可观测判别矩阵

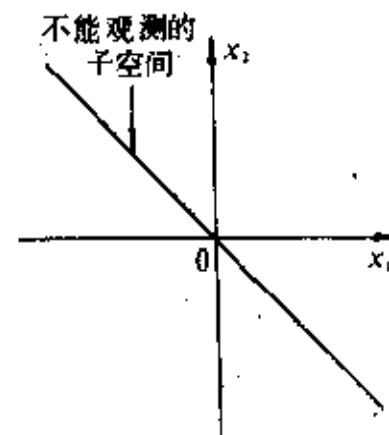


图3-3 例3.2-2中不能观测子空间的示意图

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} Q_0 = 1 < n$$

所以该系统是不可观测的,如图3-3所示。应用约当化后的判别准则亦能得到这一结论。

例3.2-3 设有约当形动力学方程

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

试判别该系统的可控性与可观测性。

解 矩阵 A 具有两个不同的特征值 λ_1 和 λ_2 。与 λ_1 相关的约当块有3个,对于这三个约当块的最后一行所对应的 B 阵的行是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显见它们是线性无关的;与 λ_2 相关的约当块有1个,其最后一行所对应的 B 阵的行是 $[0 \ 0 \ 1]$,因为其元素不全为零,所以该系统是可控的。

同理,检验与 λ_1 相关的三个约当块的首列所对应的 C 阵的列是

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

显见它们是线性无关的,可是与 λ_2 相关的约当块其首列对应的 C 阵的列是 $[0 \ 0 \ 0]^T$,不满足可观测条件,所以该系统是不可观测的。

例3.2-4 设系统 $\Sigma = (A(t), C(t))$

$$A(t) = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix} \quad C(t) = [1 \ 0 \ 1]$$

试判别其可观测性。

解 按式3.2-9构造

$$C_1 = [1 \ 0 \ 1]$$

$$C_2 = C_1 A(t) + \dot{C}_1 = [t \ 1 \ t^2]$$

$$C_3 = C_2 A(t) + \dot{C}_2 = [t^2 + 1 \ 2t \ t^2 + t]$$

$$R(t) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 1 & t^2 \\ t^2 + 1 & 2t & t^2 + 2t \end{bmatrix}$$

容易判别, $t > 0$, $\text{rank} R(t) = 3 = n$, 所以该系统在 $t > 0$ 时间区间上是状态完全可观的。

§ 3-3 离散系统的可控性、可观测性及对偶原理

[内容提要]

一、线性离散系统可控性

1. 定义 对于 n 阶线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.3-1)$$

若存在控制作用序列 $\{u(0) \ u(1) \ \dots \ u(l-1)\} (l \leq n)$ 能将某个初始状态 $x(0) = x_0$ 在第 l 步上到达零状态, 即 $x(l) = 0$, 则称此状态是可控的。若系统的所有状态都是可控的, 则称此系统是状态完全可控的, 或简称系统是可控的。

2. 线性离散系统的可控性判别准则

线性离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

若可控性判别矩阵

$$Q_c = [H \ GH \ G^2H \ \dots \ G^{n-1}H] \quad (3.3-2)$$

的秩等于系统的阶 n , 即

$\text{rank} Q_c = n$

的秩等于系统的阶 n , 即

$$\text{rank} Q_0 = n$$

3. 离散系统的可观测性与可构造(重构)性也并非一定一致。

三、连续系统离散化后的可控性和可观测性

1. 如果连续系统 $\Sigma = (A, B, C)$ 是不可控的(不可观测的), 则其离散化后的系统 $\Sigma_r = (G, H, C)$ 也必是不可控的(不可观测的)。

2. 如果连续系统 $\Sigma = (A, B, C)$ 是可控的(可观测的), 则离散化后的系统 $\Sigma_r = (G, H, C)$ 不一定是可控的(可观测的)。

3. 离散化后的系统 $\Sigma_r = (G, H, C)$ 能否保持可控(可观测)将取决于采样周期 T 。

四、对偶系统与对偶关系

1. 对偶系统

设 Σ_1 系统的状态模型为

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (3.3-4)$$

$$y = C(t)x \quad (3.3-5)$$

式中

x —— n 维状态向量; A —— $n \times n$ 维矩阵;
 y —— m 维输出向量; B —— $n \times r$ 维矩阵;
 u —— r 维控制向量; C —— $m \times n$ 维矩阵。

Σ_2 系统的状态模型为

$$\dot{z} = -A^*(t)z + C^*(t)v \quad (3.3-6)$$

$$w = B^*(t)z \quad (3.3-7)$$

式中

z —— n 维状态向量; A^* —— A 的共轭转置矩阵;
 v —— m 维控制向量; B^* —— B 的共轭转置矩阵;
 w —— r 维输出向量; C^* —— C 的共轭转置矩阵。

称 Σ_2 为 Σ_1 的对偶系统

定常系统 Σ_1

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.3-8)$$

$$y = Cx \quad (3.3-9)$$

的对偶系统 Σ_2 可以简单表示为

$$\dot{z} = A^T z + C^T v \quad (3.3-10)$$

$$w = B^T z \quad (3.3-11)$$

2. 对偶系统的结构图, 如图3-4所示。

3. 对偶系统的对偶特性

(1) Σ_1 的状态转移矩阵 $\Phi_1(t, t_0)$ 与 Σ_2 的状态转移矩阵 $\Phi_2(t, t_0)$ 互为转置逆。

$$\Phi_1(t, t_0) = \Phi_2^T(t_0, t) \quad (3.3-12)$$

(2) Σ_1 的可观测性等价于 Σ_2 的可控性。

(3) Σ_1 的可控性等价于 Σ_2 的可观测性。

(4) Σ_1 的传递函数阵与 Σ_2 的传递函数阵互为转置。

系统的可控性与可观测性的对偶特性,只是线性系统的对偶原理的体现之一;借助对偶系统的对偶关系,人们可以把所要研究的问题转化为对其对偶系统的对偶性质来研究,而后者常常是比较容易解决或已解决的问题。例如,把对随机问题的研究,转化为对偶的确定性问题的研究,这是讨论对偶问题的最大推动力。

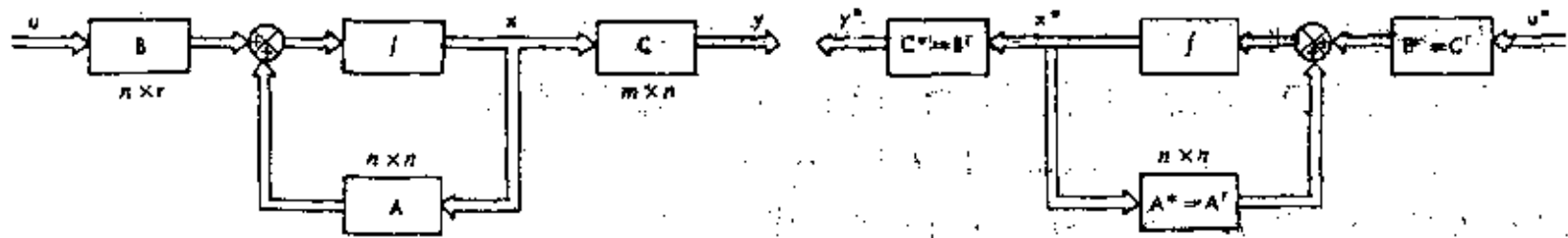


图3-4 对偶系统的结构图

[例 题]

例3.3-1 设离散系统的状态方程为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

试分析对该系统能否找到控制作用序列,将初始状态

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

在第一步上转移到零状态。

解 由递推公式(3.3-1)有

$$x(1) = Gx(0) + Hu(0)$$

即

$$\begin{aligned} x(1) &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(0) \end{aligned}$$

显然,对于上式,欲使 $x(1)=0$,该方程是解不出 $u(0)$,即对于该初始状态 x_0 是不能在第一步上转移到零。

读者可以继续递推下去,当 $k=2$,有

$$\begin{aligned} x(3) &= Gx(2) + Hu(2) \\ &= G^3x(0) + G^2Hu(0) + GHu(1) + Hu(2) \end{aligned}$$

即

$$x(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(2)$$

欲使 $x(3)=0$, 上式可以解得

$$u(0) = 6/5, u(1) = 12/5, u(2) = -9/5.$$

故该系统对于给定的初始状态 x_0 能在第三步上转移到零。对线性定常离散可控系统, 一定能在 $l(l \leq n)$ 步达到。

例3.3-2 试证明对于单输入 n 阶定常系统, 若在第 n 步上不能使某任意非零的初始状态 x_0 转移到零, 则在第 $n+1$ 以至以后的任何一步都不能转移到零。

证 若在第 n 步上不能使某任意非零的初始状态转移到零, 表明

$$\text{rank}[H \quad GH \quad \dots \quad G^{n-1}H] < n$$

即 $H, GH, \dots, G^{n-1}H$ 中至少有一列与其他列线性相关。不妨设

$$G^{n-1}H = c_0H + c_1GH + \dots + c_{n-2}G^{n-2}H$$

两边左乘 G , 有

$$\begin{aligned} G^n H &= c_0GH + c_1G^2H + \dots + c_{n-2}G^{n-1}H \\ &= c_{n-2}c_0H + (c_0 + c_{n-2}c_1)GH + \dots + (c_{n-3} + c_{n-2}c_{n-2})G^{n-2}H \end{aligned}$$

上式表明 $G^n H$ 和 $G^{n-1}H$ 一样, 都与 $H, GH, \dots, G^{n-2}H$ 线性相关。同理可推出 $G^{n+1}H, G^{n+2}H, \dots$ 都与 $H, GH, \dots, G^{n-2}H$ 线性相关。于是证明了如果初始状态经 n 步递推, 在第 n 步上不能转移到零, 则在第 $n+1$ 步上以及以后任何一步都不能转移到零。

例3.3-3 设离散系统 $\Sigma = (G, H, C)$ 为

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

试判别其可控性与可观测性。

解 构造可控判别矩阵

$$Q_c = [H \quad GH \quad G^2H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

从 Q_c 的前三列即可看出

$$\text{rank} Q_c = 3$$

所以系统是可控的。

构造可观测判别矩阵

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

从 Q_o 的前三行即可看出

$$\text{rank} Q_o = 3$$

所以系统是可观的。

例3.3-4 设连续时间系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

试分析采样周期 T 对离散化系统可控性与可观测性的影响。

解 若采样周期为 T , 其离散化系统的 G, H 为

$$G = e^{AT} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]_{t=T} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{1}{s^2 + \omega^2} \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix}_{t=T}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\omega T & \frac{\sin\omega T}{\omega} \\ -\omega \sin\omega T & \cos\omega T \end{bmatrix}$$

$$H = \int_0^T e^{At} B dt = \int_0^T \begin{bmatrix} \cos\omega t & \frac{\sin\omega t}{\omega} \\ -\omega \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos\omega T}{\omega^2} \\ \frac{\sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix}$$

于是离散系统可控判别矩阵和可观测判别矩阵分别为

$$Q_c = [H \quad GH] = \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos\omega T}{\omega^2} & \frac{\cos\omega T - \cos^2\omega T + \sin^2\omega T}{\omega^2} \\ \frac{\sin\omega T}{\omega} & \frac{2\sin\omega T \cos\omega T - \sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix}$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CG \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos\omega T & \frac{\sin\omega T}{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\det Q_c = \frac{2}{\omega^3} \sin\omega T (\cos\omega T - 1)$$

$$\det Q_o = \frac{\sin\omega T}{\omega}$$

显然, 若

$$T = \frac{K\pi}{\omega} \quad (K = 1, 2, \dots)$$

则有

$$\det Q_c = 0, \quad \det Q_o = 0$$

故欲使该系统离散化后是可控和可观测的, 采样周期 T 应满足

$$T \neq \frac{K\pi}{\omega} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

§ 3-4 可控标准形与可观测标准形

[内容提要]

由于坐标变换不改变系统的可控性和可观测性, 可以把状态模型变换为一种标准形, 以便于研究和设计。

一、线性单输入系统的可控标准形

1. 第一可控标准形

若系统是可控的,则可通过坐标变换,将状态模型

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$

化成如下标准形式

$$\bar{A} = T_{c1}^{-1}AT_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.4-1)$$

$$\bar{b} = T_{c1}^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4-2)$$

$$\bar{c} = cT_{c1} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \quad (3.4-3)$$

式中, $\alpha_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 是 $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$ 的各项系数, $\beta_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ 按下列分式计算

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= cb \\ \beta_1 &= cAb \\ &\vdots \\ \beta_{n-1} &= cA^{n-1}b \end{aligned} \right\} \quad (3.4-4)$$

坐标变换阵 T_{c1} 为

$$T_{c1} = [b \quad Ab \quad \cdots \quad A^{n-1}b] \quad (3.4-5)$$

2. 第二可控标准形

若系统是可控的,则可通过坐标变换,将状态模型 $\Sigma = (A, b, c)$ 化成如下标准形式

$$\bar{A} = T_{c2}^{-1}AT_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.4-6)$$

$$\bar{b} = T_{c2}^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4-7)$$

$$\bar{c} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \quad (3.4-8)$$

式中, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ 是系统特征多项式的系数, $\beta_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ 按下列分式计算

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= c(A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \dots + a_1b) \\ &\vdots \\ \beta_{n-2} &= c(Ab + a_{n-1}b) \\ \beta_{n-1} &= cb \end{aligned} \right\} \quad (3.4-9)$$

坐标变换阵 T_{c2} 按下式构造

$$T_{c2} = [A^{n-1}b \quad A^{n-2}b \quad \dots \quad b] \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4-10)$$

对于传递函数

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (3.4-11)$$

可以直接写出式(3.4-6), (3.4-7), (3.4-8)的第二可控标准形 $\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}$ 。

3. 用初等变换化 $\Sigma = (A, B, C, D)$ 为可控标准形

基本思路是: 坐标变换相当于对系统矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 施行适当的行列变换, 即

$$\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1}AT & T^{-1}B \\ CT & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} \quad (3.4-12)$$

而行变换和列变换均可分解成若干个初等变换, 因此可控标准形和可观测标准形均可用对系统阵的行和列的初等变换来确定。

由式(3.4-12)的变换关系可以看出, 若对系统阵的前 n 行施行某种行变换 U_1 时, 必须对系统阵的前 n 列施行与 U_1^{-1} 所对应的列变换; 同理, 若对系统阵的前 n 列施行某种列变换 U_1 时, 必须对系统阵的前 n 行施行与 U_1^{-1} 所对应的行变换, 其具体计算步骤见例 3.4-2。

二、线性单输出系统的可观测标准形

1. 第一可观测标准形

若系统是可观的, 则可通过坐标变换将状态模型 $\Sigma = (A, b, c)$ 化成如下标准形式

$$\tilde{A} = T_{o1}^{-1}AT_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.4-13)$$

$$\tilde{b} = T_{o1}^{-1}b = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.4-14)$$

$$\tilde{c} = cT_{o1} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (3.4-15)$$

坐标变换矩阵 T_{o1} 为

$$T_{01} = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.4-16)$$

2. 第二可观标准形

若系统是可观的, 则可通过坐标变换化成另一种标准形式

$$\tilde{A} = T_{02}^{-1}AT_{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.4-17)$$

$$\tilde{b} = T_{02}^{-1}b = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.4-18)$$

$$\tilde{c} = cT_{02} = [0 \ 0 \ \cdots \ 1] \quad (3.4-19)$$

坐标变换矩阵

$$T_{02}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cA^{n-1} \\ cA^{n-2} \\ \vdots \\ cA \\ c \end{bmatrix} \quad (3.4-20)$$

注意, 式(3.4-18)与(3.4-14)中的 $\beta_i (i=0, 1, \dots, n-1)$ 值是不同的。

三、多输入多输出系统标准形的特点

1. 对于多输入多输出系统, 因为要从

$$Q_c = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$$

中挑选出 n 个独立的列向量其方法可以有多种, 从而其标准形也有多种。

2. 从 Q_c 中选取 n 个独立向量常用的两种方法

(1) 按列搜索格栅 按 $b_1, Ab_1, \dots, b_2, Ab_2, \dots$ 的顺序选取, 如图3-5(a)所示。

(2) 按行搜索格栅 按 $b_1, b_2, \dots, b_r, Ab_1, Ab_2, \dots$ 的顺序选取, 如图3-5(b)所示。

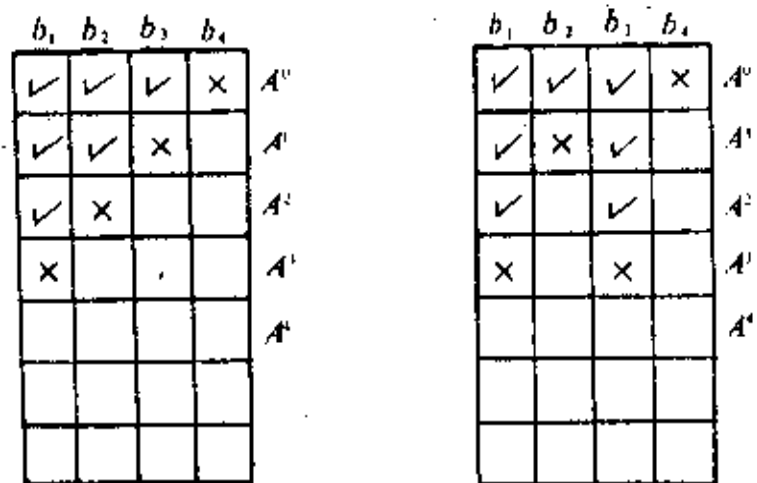


图3-5 两种搜索格栅示意图

四、按列搜索格栅的可控标准形和可观标准形

1. 按列搜索方案选取 n 个线性无关的列向量, 并排成如下顺序

$$\underbrace{b_1, Ab_1, \dots, A^{r_1-1}b_1}_{r_1 \uparrow} \quad \underbrace{b_2, Ab_2, \dots, A^{r_2-1}b_2}_{r_2 \uparrow} \quad \cdots \quad \underbrace{b_l, Ab_l, \dots, A^{r_l-1}b_l}_{r_l \uparrow}$$

$$\sum_{i=1}^l v_i = n$$

v_i 是由 b_i 所行成的 b_i, Ab_i, \dots 中的独立向量数; l 为列搜索所用 b_i 的个数。

2. 可控标准形的变换阵 T_c 的构造

$$T_c = [T_{11} \quad T_{12} \quad \dots \quad T_{1v_1} : T_{21} \quad T_{22} \dots \quad T_{2v_2} : \dots \quad T_{l1} \quad T_{l2} \dots \quad T_{lv_l}] \quad (3.4-21)$$

式中

$$T_{i,v_i} = b_i$$

$$T_{i,v_{i-1}} = Ab_i + a_{i,v_{i-1}} b_i \quad (i = 1, 2, \dots, l)$$

.....

$$T_{i,1} = A^{v_i-1} b_i + a_{i,v_i-1} A^{v_i-2} b_i + \dots + a_i Ab_i + a_{i,0} b_i$$

其中 $a_{i,k} (k=0, 1, \dots, v_i-1)$ 通过求解下列线性组合方程得到

$$A^{v_i} b_i = -a_{i,v_i-1} A^{v_i-1} b_i - \dots - a_{i,1} Ab_i - a_{i,0} b_i \quad (3.4-22)$$

3. 若 $\Sigma = (A, B)$ 为完全可控, 则必可通过变换矩阵 T_c 代数等价地变换为可控标准形 $\Sigma = (A_c, B_c)$ 。

$$A_c = T_c^{-1} A T_c = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1l} \\ & A_{22} & \dots & A_{2l} \\ & & \ddots & \\ \underbrace{0}_{v_1} & & & \underbrace{A_{ll}}_{v_l} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} v_1 \\ \} v_2 \\ \\ \} v_l \end{matrix} \quad (3.4-23)$$

式中

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & I_{v_i-1} & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \\ \hline -a_{i,0} & -a_{i,1} & \dots & -a_{i,v_i-1} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, l \quad (3.4-24)$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} r_{1,1}(i,j) & 0 & \dots & 0 \\ r_{2,1}(i,j) & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{v_{j-1},1}(i,j) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, l \\ j > i \end{matrix} \quad (3.4-25)$$

其中 $r_{s,1}(i,j)$ 表示 A_{ij} 块中第 s 行第一列上的元素

$$B_c = T_c^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_{1,l+1} & \cdots & \beta_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \beta_{s,l+1} & \cdots & \beta_{s,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.4-26)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{1,l+1} \\ \vdots \\ \beta_{s,l+1} \end{bmatrix} = T_c^{-1}b_{l+1}; \quad \cdots; \quad \begin{bmatrix} \beta_{1,r} \\ \vdots \\ \beta_{s,r} \end{bmatrix} = T_c^{-1}b_r \quad (3.4-27)$$

4. 设 $\Sigma = (A \ C)$ 为完全可观测, 则其可观测标准形 $\Sigma_0 = (A_0 \ C_0)$ 是 $\Sigma_c = (A_c \ B_c)$ 的对偶形式

$$A_0 = \begin{bmatrix} A_{11} & & & 0 \\ A_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \underbrace{A_{q1}}_{v_1} & \underbrace{A_{q2}}_{v_2} & \cdots & \underbrace{A_{qq}}_{v_q} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} v_1 \\ \} v_2 \\ \\ \} v_q \end{matrix} \quad (3.4-28)$$

这里 q 与式(3.4-19)中的 l 相对应, 即

$$\sum_{i=1}^q v_i = n \quad (3.4-29)$$

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\bar{a}_{i0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & -\bar{a}_{i,1} \\ I_{v_i-1} & & & \vdots \\ & & & -\bar{a}_{i,v_i-1} \end{bmatrix} \} v_i \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (3.4-30)$$

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{r}_{11}(i,j) & \cdots & \bar{r}_{1,v_j} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \} v_j \quad \begin{matrix} i = 1, 2, q \\ j = 1, 2, q \\ i \neq j \end{matrix} \quad (3.4-31)$$

$$\bar{C}_0 = \left[\begin{array}{cccc} 0 \cdots 1 & & & \\ & 0 \cdots 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \beta_{r+1,1} & \cdots & \cdots & \beta_{r+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta_{m,1} & \cdots & \cdots & \beta_{m,n} \end{array} \right] \quad (3.4-32)$$

$$\left. \begin{array}{l} [\beta_{r+1,1} \cdots \beta_{r+1,n}] = C_{r+1} T_0 \\ \vdots \\ [\beta_{m,1} \cdots \beta_{m,n}] = C_m T_0 \end{array} \right\} \quad (3.4-33)$$

T_0 的构造方法和 T_c 相同,其区别在于这里是对 $\Sigma = (A^T, C^T)$ 按可控进行选取独立向量。

五、按行搜索的 Luenberger 可控标准形和可观测标准形

1. 如图3-5(b)按行搜索格栅,选择了 n 个线性无关列向量,并按下面顺序构造矩阵 Q_c 。

$$Q_c = \left[\underbrace{b_1 \quad Ab_1 \cdots A^{r_1-1}b_1}_{p_1} \quad \underbrace{b_2 \quad Ab_2 \cdots A^{r_2-1}b_2}_{p_2} \quad \cdots \quad \underbrace{b_p \quad Ab_p \cdots A^{r_p-1}b_p}_{p_p} \right] \quad (3.4-34)$$

其中

$$p = \text{rank} B \quad (3.4-35)$$

r_i 是 b_i 所生成 Ab_i, A^2b_i, \dots 独立向量的个数

$$\sum_{i=1}^p r_i = n \quad (3.4-36)$$

2. 构造坐标变换矩阵 T_{cl}^{-1}

$$T_{cl}^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_1 A \\ \vdots \\ T_1 A^{r_1-1} \\ \vdots \\ T_p \\ T_p A \\ \vdots \\ T_p A^{r_p-1} \end{bmatrix} \quad (3.4-37)$$

其中 $T_k (k=1, 2, \dots, p)$ 是 Q_c^{-1} 的第 σ_k 行的行向量。

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^k r_i \quad (k=1, 2, \dots, p) \quad (3.4-38)$$

3. 若 $\Sigma = (A, B)$ 为完全可控,则其 Luenberger 可控标准形为

$$A_{cl} = T_{cl}^{-1} A T_{cl} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \cdots & \bar{A}_{1p} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \cdots & \bar{A}_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \bar{A}_{p1} & \bar{A}_{p2} & \cdots & \bar{A}_{pp} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} v_1 \\ \} v_2 \\ \} \vdots \\ \} v_p \end{matrix} \quad (3.4-39)$$

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & I & \\ \hline -a_{i,0} & -a_{i,1} & \cdots & -a_{i,v_i-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} v_i \\ \} \vdots \\ \} v_i \end{matrix} \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.4-40)$$

$$\bar{A}_{ij} = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ & & & \\ \hline -a_{j,0} & -a_{j,1} & \cdots & -a_{j,v_j-1} \end{bmatrix} \quad i \neq j \quad (3.4-41)$$

$$B_{cl} = T_{cl}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \times & \cdots & \cdots & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \times & \cdots & \times \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} v_1 \\ \} \vdots \\ \} v_1 \\ \} \vdots \\ \} v_p \end{matrix} \quad (3.4-42)$$

$$C_{cl} = C T_{cl} \quad (3.4-43)$$

4. Luenberger 可观测标准形

(a) 化系统 $\Sigma = (A, C)$ 为 Luenberger 第二可观测标准形的变换阵由其对偶系统的可控坐标变换阵求得

$$T_{ol} = (T_{cl}^*)^{-1} \quad (3.4-44)$$

T_{cl}^* 是其对偶系统 $\Sigma^* = (A^T, C^T)$ 的可控坐标变换阵, 按式 (3.4-37) 构造。

(b) Luenberger 可观测标准形

$$A_{OL} = T_{OL}^{-1} A T_{OL} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \cdots & \bar{A}_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \bar{A}_{p1} & \bar{A}_{p2} & \cdots & \bar{A}_{pp} \end{bmatrix} \quad (3.4-45)$$

$$A_{ii} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \cdots & 0 & a \\ \hline & I_{r_i-1} & & \vdots \\ & & & a \end{array} \right]_{h_i} \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (3.4-46)$$

$$A_{ij} = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \times \\ & & & \vdots \\ & 0 & & \times \end{array} \right]_{h_i} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, p \\ \text{但 } i \neq j \end{array} \quad (3.4-47)$$

h_i —— C_i 所生成行向量 $C_i, C_i A, \dots$ 独立行向量的个数。

$$C_{OL} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \times & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \times & \cdots & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & \times & 0 & & 0 & \times & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} p = \text{rank} C \\ (3.4-48) \end{array} \quad (3.4-49)$$

(c) 可控性指数与可观测性指数

定义 可控标准形中 v_1, v_2, \dots, v_p 所构成的数列

$$\{v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_p\} \quad (3.4-50)$$

称为可控指数数列, 且

$$v_c = \max\{v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_p\} \quad (3.4-51)$$

为可控性指数。

定义 可观测标准形中 h_1, h_2, \dots, h_p 所构成的数列

$$\{h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_p\} \quad (3.4-52)$$

称为可观测指数数列, 且

$$h_o = \max\{h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_p\} \quad (3.4-53)$$

为可观测指数。

[例 题]

例3.4-1 试将下列状态模型

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c = [0 \ 0 \ 1]$$

化为第二可控标准形和第二可观测标准形。

解 先构造可控判别矩阵 Q , 判别其可控性。

$$Q_c = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} Q_c = 3$$

所以系统是可控的。

再计算系统的特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 9\lambda + 2$$

即 $a_2=0, a_1=-9, a_0=2$ 。

将 a_0, a_1, a_2 代入式(3.4-6)、(3.4-7)、(3.4-8)及(3.4-9),得第二可控标准形

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{c} = c[A^2b \quad Ab \quad b] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 \end{bmatrix} = [3 \quad 2 \quad 1]$$

对于第二可观测标准形,先判别其可观测性

$$Q_0 = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

因为 $\text{rank} Q_0 = 3$,所以系统是可观测的。

将 a_0, a_1, a_2 代入式(3.4-22)、(3.4-23)、(3.4-24)及(3.4-25)得第二可观测标准形

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = T_{\tilde{a}_2}^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cA^2 \\ cA \\ c \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} = [0 \quad 0 \quad 1]$$

例3.4-2 已知系统的状态模型

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 1 \quad 0]$$

试用初等变换的方法求其可控标准形。

解 显见 A 是约当标准形,由可控性判据知其状态完全可控,故能化为可控标准形。

(1)将系统矩阵按式(3.4-13)排成如下形式

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
 & & & & & & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 \\
 I & A & B = & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
 & C & D & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & 0 & 0
 \end{array}$$

(2) 对上列系数阵按下述步骤施行行初等变换和相应的列初等变换,其目标将 B 化为 $[0 \ 0 \ 1]$ 。

行变换:第三行乘以 -1 后加到第一行;

列变换:第一列乘以 1 后加到第三列。

结果为

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
 & & & & & & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 & 0 & & \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & &
 \end{array}$$

(3) 继续施行行初等变换和相应的列初等变换,其目标是把矩阵 A 的对角元的上斜线的元全化成 1 ,再使斜上方均为零。

a. 行变换:第二行乘以 2 加到第一行;

列变换:第二列乘以 -2 加到第一列。

b. 行变换:第一行乘以 $1/4$;

列变换:第一列乘以 4 。

结果为

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
 & & & & & & 4 & -2 & 1 \\
 & & & & & & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 1 \\
 1/4 & 2/4 & -1/4 & 2 & 1 & 0 & 0 & & \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & & \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & & \\
 & & & 4 & -1 & 1 & & &
 \end{array}$$

(4) 最后用列变换逐步把 A 阵的前 $n-1$ 行中元素 1 左边的元素消掉,做列变换的同时,做相应的行变换。

a. 列变换:第二列乘 -2 加到第一列;

行变换:第一行乘 2 加到第二行。

b. 列变换:第三列乘 -6 加到第二列;

行变换:第二行乘 6 加到第三行。

c. 列变换:第三列乘 8 加到第一列;

行变换:第一行乘 -8 加到第三行。

$$T_{cl}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad T_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

最后得

$$A_{cl} = T_{cl}^{-1}AT_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B_{cl} = T_{cl}^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

习 题

3-1 判别下列系统的可控性和可观测性

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $C = [1 \ 0]$

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(4) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3-2 确定使下列系统为状态完全可控且可观测和待定常数 α_i, β_i 。

(1) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} \beta \\ -1 \end{bmatrix}$ $c = [1 \ 1]$

(2) $A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $c = [1 \ -1]$

(3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ $c = [1 \ 0 \ 0]$

3-3 试证明对于 $\Sigma = (A, B)$

$$A = \begin{bmatrix} -20 & -1 & 0 \\ 4 & 16 & 0 \\ 12 & 6 & 18 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

无论 b_1, b_2, b_3 取何值都不能使该系统成为状态完全可控的。

3-4 判定下列系统的可控子空间及不可观测子空间的维数。

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [2 \quad 1 \quad 0]$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad -1 \quad 1]$$

3-5 证明 $\text{rank}(B \ A) = n$ 是系统可控的必要条件。

3-6 已知 RLC 网络如图 3-6 所示。

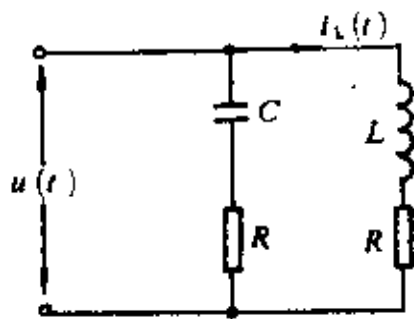


图 3-6 题 3-6 中的 RLC 电路示意图

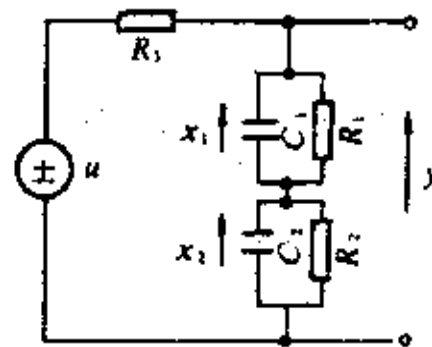


图 3-7 题 3-7 中的电路

(1) 试分析控制电压 $u(t)$ 对电容器上电压 $u_C(t)$ 和电感电流 $i_L(t)$ 的可控条件。

(2) 设电流 $i_L(t)$ 为可测量的输出量, 试分析该网络的可观测条件。

3-7 在图 3-7 所示电路中, 输入量为电压 u , 输出量为电压 y , 状态变量 x_1, x_2 分别为电容器 C_1 和 C_2 上的电压, 并且

$$C_1 = C_2 = 1\text{F} \quad R_1 = R_2 = 1\Omega$$

(1) 试分析电路的可控性。

(2) 设 $y(t)$ 为可测量的输出量, 试分析电路的可观测性。

3-8 试分析例 1.2-3 倒立摆装置的可控性和可观测性。若系统仅以位移 z 为输出, 该系统是否仍是可观测的。

3-9 试写出下列系统

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 11y + 6y = 6u$$

对偶系统的状态方程和输出方程。

3-10 试根据对偶原理由可控判别准则推证可观测判别准则。

3-11 已知可控系统 $\Sigma = (A, b)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试将该状态方程变换为可控标准形。

3-12 已知可观测系统 $\Sigma = (A, b, c)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [-1 \quad 1]$$

试将其化为可观测标准形。

3-13 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3}$$

试求其可控标准形和可观标准形。

3-14 已知系统

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

试求一坐标变换阵,将其化为 Luenberger 可控标准形。

第四章 线性系统的结构分解与 传递函数阵的最小实现

§ 4-1 线性系统的结构分解

[内容提要]

一、有关结构分解的基本思路

1. 可控(不可观测)状态构成可控(不可观测)子空间;
2. 相似变换不改变系统的可控性与可观测性;
3. 选择适当的坐标变换阵可使状态空间分解成标准结构形式。

二、按可控性分解

1. 目的 将一个状态不完全可控的系统 $\Sigma=(A, B, C)$

$$\text{rank}[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]=n_1 < n \quad (4.1-1)$$

通过坐标变换

$$x = R_c \hat{x} \quad (4.1-2)$$

将系统分解成可控的和不可控的两部分。

2. 变换后的状态模型

$$\hat{A} = R_c^{-1} A R_c = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hline 0 & \hat{A}_{22} \end{array} \right] \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n-n_1 \end{matrix} \quad (4.1-3)$$

$$\hat{B} = R_c^{-1} B = \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n-n_1 \end{matrix} \quad (4.1-4)$$

$$\hat{C} = C R_c = \left[\begin{array}{c|c} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 \\ \hline \end{array} \right] \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n-n_1 \end{matrix} \quad (4.1-5)$$

3. 结构示意图如图 4-1 所示。

4. 坐标变换阵 R_c 的构造

$$R_c = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_{n_1} \ \cdots \ r_n] \quad (4.1-6)$$

前 n_1 个列向量 r_1, r_2, \dots, r_{n_1} 是可控矩阵 $Q_c = [B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$ 中的 n_1 个线性无关的列, 另外的 $(n-n_1)$ 个列 $r_{n_1+1}, r_{n_1+2}, \dots, r_n$, 在确保 R_c 为非奇异的条件下完全是任意的。

三、按可观测性分解

1. 目的 将一个状态不完全可观测的系统 $\Sigma=(A, B, C)$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n_1 < n \quad (4.1-7)$$

通过坐标变换

$$x = R_0 \tilde{x} \quad (4.1-8)$$

将系统分解成可观测的和不可观测的两部分

2. 变换后的状态模型

$$\tilde{A} = R_0^{-1} A R_0 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n - n_1 \end{matrix} \quad (4.1-9)$$

$$\tilde{B} = R_0^{-1} B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n - n_1 \end{matrix} \quad (4.1-10)$$

$$\tilde{C} = C R_0 = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} n_1 \\ \} n - n_1 \end{matrix} \quad (4.1-11)$$

3. 结构示意图如图 4-2 所示。

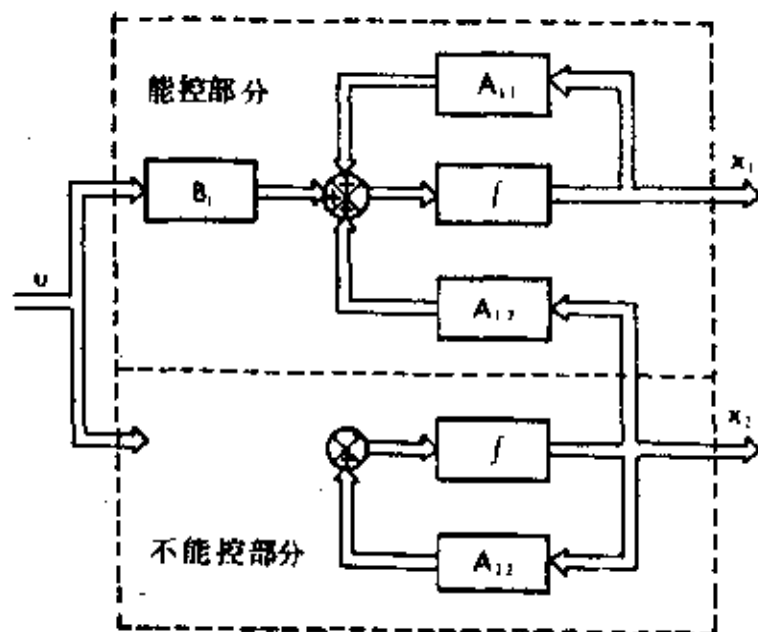


图 4-1 按可控性分解结构示意图

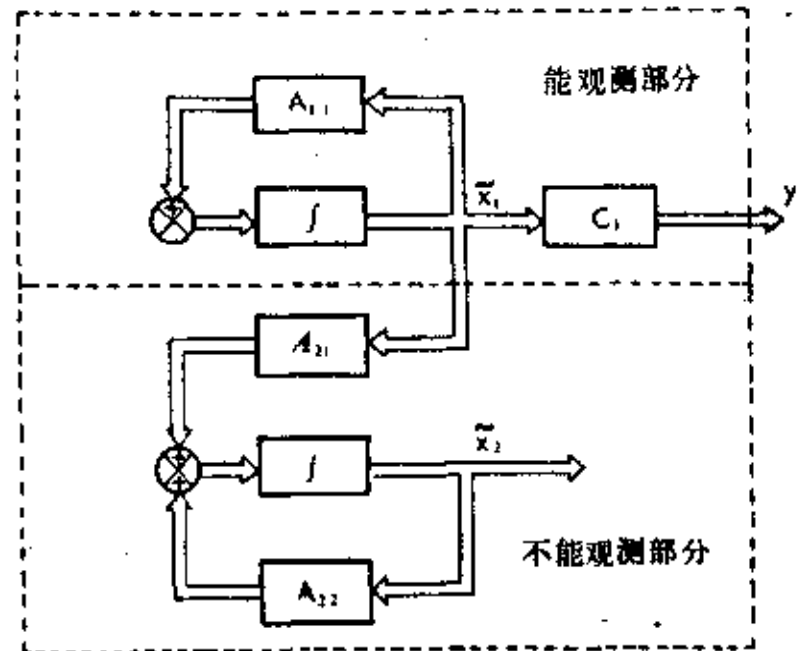


图 4-2 按可观测性分解结构示意图

4. 坐标变换阵的构造

$$R_0^{-1} = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ \vdots \\ r'_{n_1} \\ \vdots \\ r'_n \end{bmatrix} \quad (4.1-12)$$

前 n_1 个行向量 $r'_1, r'_2, \dots, r'_{n_1}$ 为可观测判别矩阵

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.1-13)$$

中的 n_1 个线性无关的行, 另外的 $n-n_1$ 个行向量 $r'_{n+1}, r'_{n+2}, \dots, r'_n$, 在确保 R_0^{-1} 是非奇异的条件下完全是任意的。

5. 由不可观测子空间的基构造变换阵 R

如果 n 维线性定常系统 $\Sigma = (A, B, C)$ 是不完全可观测的, 并设

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n_1 \quad (4.1-14)$$

不可观测子空间 X_{N0} 的维数

$$\dim[X_{N0}] = n - n_1 \quad (4.1-15)$$

$$X_{N0} = \text{Span}\{e_{n_1+1}, e_{n_1+2}, \dots, e_n\} \quad (4.1-16)$$

$e_{n_1+2}, e_{n_1+3}, \dots, e_n$ 是满足下列方程

$$\left. \begin{array}{l} Cx = 0 \\ CAx = 0 \\ \vdots \\ CA^{n-1}x = 0 \end{array} \right\} \quad (4.1-17)$$

的独立解

根据

$$X = X_0 \oplus X_{N0} \quad (4.1-18)$$

任取 X_0 的一组基 e_1, e_2, \dots, e_{n_1} , 即

$$X_0 = \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n_1}\} \quad (4.1-19)$$

于是按不可观测分解系统的坐标变换阵 R_0 为

$$R_0 = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{n_1} \ e_{n_1+1} \ \dots \ e_n] \quad (4.1-20)$$

四、典型结构分解

1. 目的 将不完全可控、不完全可观测的系统 $\Sigma = (A, B, C)$ 通过坐标变换分解成可控且可观测, 可控不可观测, 不可控可观测, 不可控不可观测四部分。

2. 典型结构分解后的状态模型

$$\bar{A} = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (4.1-21)$$

$$\bar{B} = R^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1-22)$$

$$\bar{C} = CR = [C_1 \quad 0 \quad C_3 \quad 0] \quad (4.1-23)$$

3. 结构示意图如图 4-3 所示。

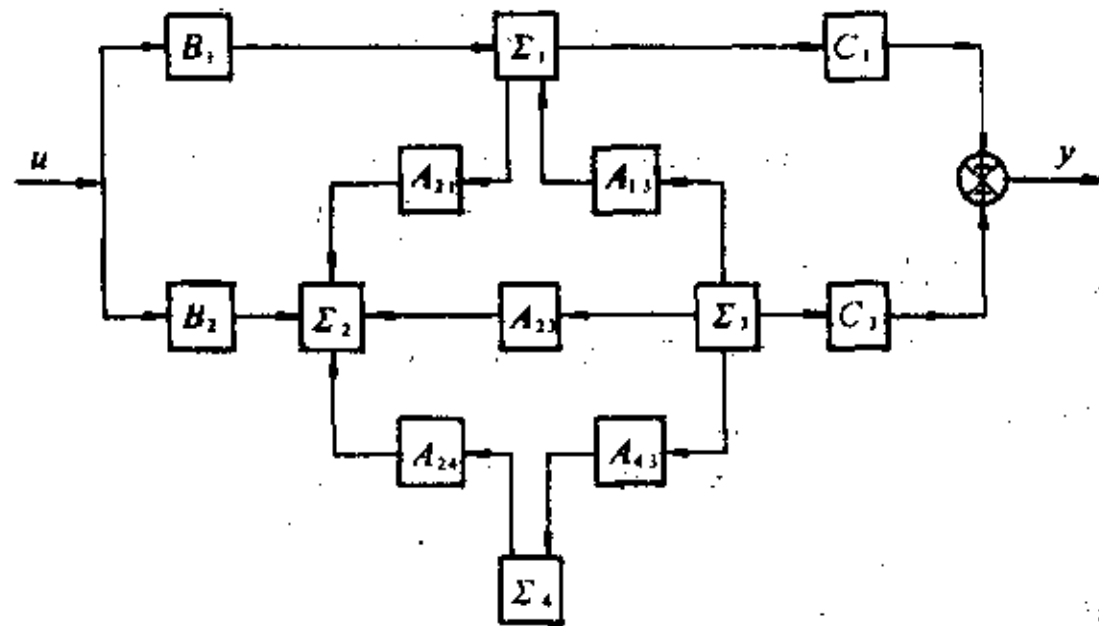


图 4-3 典型结构分解示意图

4. 坐标变换阵的构造

(1) 方法一

(a) 首先将系统 $\Sigma = (A, B, C)$ 按式 (4.1-2) 作可控分解, 其坐标变换阵为 R_c 。

(b) 进而将已分解的不可控部分按式 (4.1-8) 进行可观测分解, 其坐标变换阵为

$$\begin{bmatrix} \overbrace{I}^{n_1} & \overbrace{0}^{n-n_1} \\ 0 & R_{01} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} I \\ 0 \end{matrix}} \right\} n_1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ R_{01} \end{matrix}} \right\} n-n_1 \end{matrix} \quad (4.1-24)$$

(c) 最后将已分解的可控部分按可观测分解, 坐标变换阵为

$$\begin{bmatrix} \overbrace{R_{02}}^{n_1} & \overbrace{0}^{n-n_1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} R_{02} \\ 0 \end{matrix}} \right\} n_1 \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ I \end{matrix}} \right\} n-n_1 \end{matrix} \quad (4.1-25)$$

这样, 最终的坐标变换阵为

$$R = R_c \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R_{01} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{02} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.1-26)$$

(2) 方法二 先将系统化成对角标准形或约当标准形, 然后再按可控判别准则和可观测判别准则判别各状态变量的可控性和可观测性, 最后将它们分类排列, 组成相应的四部分, 详见例题。

(3) 方法三 设坐标变换后将状态空间 X 分为四个空间

X_1 可控可观测子空间 $\dim X_1 = n_1$

X_2 可控不可观测子空间 $\dim X_2 = n_2$

X_3 不可控可观测子空间 $\dim X_3 = n_3$

X_1 不可控不可观测子空间 $\dim X_1 = n_1$

其分解步骤如下:

(a) 按可控分解, 求出可控子空间 X_C

$$\dim X_C = n_C = n_1 + n_2 \quad (4.1-27)$$

(b) 按不可观测分解, 求出不可观测子空间 X_{N0}

$$\dim X_{N0} = n_0 = n_2 + n_1 \quad (4.1-28)$$

(c) 根据

$$X_2 = X_C \cap X_{N0} \quad (4.1-29)$$

选取 X_2

$$X_2 = \text{Span}\{\underbrace{e_{n_1+1} \ e_{n_1+2} \ \dots \ e_{n_1+n_2}}_{n_2}\} \quad (4.1-30)$$

(d) 根据

$$X_C = X_1 \oplus X_2 \quad (4.1-31)$$

由 X_C, X_2 选取 X_1

$$X_1 = \text{Span}\{\underbrace{e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{n_1}}_{n_1}\} \quad (4.1-32)$$

(e) 根据

$$X_{N0} = X_2 \oplus X_3 \quad (4.1-33)$$

由 X_{N0}, X_2 选取 X_3

$$X_3 = \text{Span}\{\underbrace{e_{n-n_1+1} \ \dots \ e_n}_{n_1}\} \quad (4.1-34)$$

(f) 根据

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 \quad (4.1-35)$$

将 X, X_1, X_2, X_3 代入, 选取 X_4

$$X_4 = \text{Span}\{\underbrace{e_{n_1+n_2+1} \ \dots \ e_{n_1+n_2+n_3}}_{n_3}\} \quad (4.1-36)$$

(g) 将 $e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n$ 组成变换矩阵

$$R = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_{n_1} \ e_{n_1+1} \ \dots \ e_{n_1+n_2} \ e_{n_1+n_2+1} \ \dots \ e_{n_1+n_2+n_3} \ e_{n_1+n_2+n_3+1} \ \dots \ e_n] \quad (4.1-37)$$

[例 题]

例 4.1-1 设线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \ 1 \ 2]x \end{aligned}$$

判别其可控性, 若不是完全可控的, 试将该系统按可控性进行分解
解 系统的可控判别矩阵

$$Q_c = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} Q_c = 2 < n$$

所以系统是不完全可控的。

构造非奇异变换阵 R_c

$$r_1 = b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_2 = Ab = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

即

$$R_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 r_3 是任意的, 只要保证 R_c 为非奇异。

变换后的系统的状态方程和输出方程分别是

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= R_c^{-1} A R_c \hat{x} + R_c^{-1} b u \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= C R \hat{x} = [1 \quad -1 \quad -2] \hat{x} \end{aligned}$$

从上式可以看出, 经过变换把系统分解成两部分。一部分是二维可控子系统, 另一部分是一维不可控子系统。变换矩阵的前 n_1 列向量是可控矩阵中的 n_1 个线性无关列。

例 4.1-2 判别如下系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 1 \quad -2] x \end{aligned}$$

是否可观, 若为不完全可观, 按可观性对系统进行结构分解。

解 可观判别矩阵 Q_0 为

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} Q_0 = 2 < n$$

所以该系统是状态不完全可观的。

为构造非奇异变换阵 R_0 , 取

$$r'_1 = c = [0 \quad 1 \quad -2] \quad r'_2 = cA = [1 \quad -2 \quad 3] \quad r'_3 = [0 \quad 0 \quad 1]$$

得

$$R_0^{-1} = \begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 r'_3 是在保证 R_0^{-1} 的非奇异的条件下任意选取的。

于是

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= R_0^{-1} A R_0 \tilde{x} + R_0^{-1} b u \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= C R_0 \tilde{x} \\ &= [1 \ 0 \ 0] \tilde{x} \end{aligned}$$

例 4.1-3 已知系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \ 1 \ -2] x \end{aligned}$$

是状态不完全可控和不完全可观测, 试将该系统按可控性和可观测性进行结构分解。

解 例 4.1-1 已将系统按可控性分解

取

$$R_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

经变换后, 系统分解为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_c \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ -1 \ -2] \begin{bmatrix} x_c \\ x_c \\ x_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从上式可以看出, 不可控子系统是一维的, 且显见是可观测的。故无需再进行分解。

最后对可控子系统 Σ_c

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 &= [1 \ -1] x_c \end{aligned}$$

判别其可观测性, 因

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_1 A_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

为奇异, 故 Σ_c 为不可观测的。按可观测分解, 并构造非奇异变换阵

$$R_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

于是 Σ_c 按可观测性分解为

$$\begin{bmatrix} x_{c,0} \\ x_{c,\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{c,0} \\ x_{c,\bar{v}} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{v}} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

即

$$\begin{bmatrix} x_{c,0} \\ x_{c,\bar{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c,0} \\ x_{c,\bar{v}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} x_{\bar{v}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y_1 = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{c,0} \\ x_{c,\bar{v}} \end{bmatrix} \\ = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_{c,0} \\ x_{c,\bar{v}} \end{bmatrix}$$

综合以上两次变换结果,其系统按可控和按可观测分解为显表达式

$$\begin{bmatrix} x_{c,0} \\ x_{c,\bar{v}} \\ x_{\bar{v},0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c,0} \\ x_{c,\bar{v}} \\ x_{\bar{v},0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad -2] \begin{bmatrix} x_{c,0} \\ x_{c,\bar{v}} \\ x_{\bar{v},0} \end{bmatrix}$$

例 4.1-4 给定系统 $\Sigma=(A,B,C)$ 和约当标准形为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & & & & \\ & 0 & -4 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & 0 & 3 \\ & & & & & & 0 & -1 & 1 \\ & & & & & & & & & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

试将该系统按可控性和可观测性进行结构分解。

解 根据约当标准形的可控判别准则和可观测判别准则,容易判定:

可控变量: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

不可控变量: x_6

可观测变量: x_1, x_2, x_4

不可观测变量: x_3, x_5, x_6

综合上述,可知:

可控且可观测变量: x_1, x_2

可控但不可观测变量: x_3, x_5

不可控但可观测变量: x_4

不可控不可观测变量: x_6

于是,令

$$x_{c,0} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad x_{c,1} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$x_{c,0} = x_4, \quad x_{c,1} = x_6$$

按此顺序重新排列 A, B, C 的行列式, 那么就可导出

$$\begin{bmatrix} x_{c,0} \\ x_{c,1} \\ x_{c,0} \\ x_{c,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c,0} \\ x_{c,1} \\ x_{c,0} \\ x_{c,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 4 & 3 \\ 1 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c,0} \\ x_{c,1} \\ x_{c,0} \\ x_{c,1} \end{bmatrix}$$

例 4.1-5 将系统 $\Sigma = (A, b, c)$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 4 & -4 \\ -4 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 1 \quad -1 \quad 2]$$

化为标准结构形式。

解 本题采用方法三求解

1. 按可控分解选取 X_c 的基

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \\ = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} Q_c = 2$$

可控子空间 X_c 为

$$X = \text{Span}\{b \quad Ab \quad A^2b \quad A^3b\}$$

$$= \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -8 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

2. 按不可观测分解, 选取 X_{N_0} 的基

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ -8 & -8 & -8 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{rank} Q_o = 2$$

对于 $x \in X_{N_0}$ 是

$$\begin{array}{ll} Cx=0 & CA^2x=0 \\ CAx=0 & CA^3x=0 \end{array}$$

的解。考虑到 $\text{rank}Q_1=2$, 经简单运算后, 可知 $x \in X_{N_0}$ 是满足下列方程组

$$\begin{array}{l} [0 \ 0 \ 0 \ 1]x=0 \\ [1 \ 1 \ -1 \ 0]x=0 \end{array}$$

的两个独立解

$$e_{11}^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_{10}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此得

$$\begin{aligned} X_{N_0} &= \text{Span}\{e_{11}^0, e_{10}^0\} \\ &= \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

3. $X_2 = X_C \cap X_{N_0}$

$$= \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \cap \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

4. 根据

$X_C = X_1 \oplus X_2$, 选取

$$X_1 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

5. 根据 $X_{N_0} = X_2 \oplus X_4$, 选

$$X_4 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

6. 根据 $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3 \oplus X_4$, 选

$$X_3 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

7. 以 X_1, X_2, X_3, X_4 的基作坐标变换阵

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. 坐标变换后的状态方程

$$\hat{A} = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = R^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CR = [1 \quad 0 \quad 2 \quad 0]$$

§ 4-2 传递函数矩阵的实现问题

[内容提要]

一、实现问题的概念

1. 定义 对于给定传递函数阵 $G(s)$, 若有一状态模型

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

使得

$$C(sI - A)^{-1}B + D = G(s) \quad (4.2-1)$$

成立, 则称 $\Sigma = (A, B, C, D)$ 是传递函数的一个实现。

(1) $G(s)$ 必须满足物理可实现条件, 即 $G(s)$ 中的每一个元的分子分母多项式的系数均为实常数。

(2) 若 $G(s)$ 的元都是严格真有理分式时, 其实现 Σ 具有 (A, B, C) 的形式 (即 $D=0$)。

(3) 对应于某一传递函数的实现不是唯一的。

2. 最小实现

定义 传递函数阵 $G(s)$ 的实现中其阶次最小的一种实现称为 $G(s)$ 的最小实现。

3. 最小实现的充要条件

$\Sigma = (A, B, C)$ 为最小实现的充要条件是 $\Sigma = (A, B, C)$, 既是可控的, 又是可观测的。

二、寻求最小实现的步骤

求最小实现的方法很多, 这里介绍一种初学者易于理解的方法。其步骤为

1. 对给定传递函数阵 $G(s)$ 先初选出一种实现 $\Sigma = (A, B, C)$, 通常选取可控标准形实现或可观测标准形实现。

若输入维数 $r >$ 输出维数 m , 采用可观测标准形实现。

若输入维数 $r <$ 输出维数 m , 采用可控标准形实现。

2. 用结构分解的方法对上面所初选的实现找出其可控可观测部分, 此即为最小实现。

三、可控标准形实现和可观测标准形实现

对于一个单输入单输出系统来说, 一旦给出了系统的传递函数

$$G(s) = c_r (sI - A)^{-1} b_r = c_0 (sI - A)^{-1} b_0$$

$$= \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \dots + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (4.2-2)$$

便可直接写出其可控标准形实现和可观测标准形实现。

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \quad (4.2-3)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b_0 = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad c = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1] \quad (4.2-4)$$

对于多输入多输出系统, 必须把 $m \times r$ 维的传递函数阵写成与式(4.2-2)相类似的形式, 即

$$G(s) = \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1s + \beta_0}{s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0} \quad (4.2-5)$$

式中 $\beta_{n-1}, \beta_{n-2}, \cdots, \beta_1, \beta_0$ 均为 $m \times r$ 维实常数阵。

对于式 4.2-5 形式的传递函数阵的可控标准形实现为

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_r & I_r & 0_r & \cdots & 0_r \\ 0_r & 0_r & I_r & \cdots & 0_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_r & 0_r & 0_r & \cdots & I_r \\ -a_0 I_r & -a_1 I_r & -a_2 I_r & \cdots & -a_{n-1} I_r \end{bmatrix} \quad (4.2-6)$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0_r \\ 0_r \\ \vdots \\ 0_r \\ I_r \end{bmatrix} \quad (4.2-7)$$

$$C_c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_{n-1}] \quad (4.2-8)$$

式中 0_r 和 I_r 分别表示为 $r \times r$ 阶的零矩阵和单位矩阵(r 为输入向量的维数), 这个实现的维数是 nr 维, 其中 n 是式(4.2-5)分母多项式的阶数。

与此类似, 其可观测标准形实现为

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & \cdots & 0_m & 0_m & -a_0 I_m \\ I_m & 0_m & \cdots & 0_m & 0_m & -a_1 I_m \\ 0 & I_m & \cdots & 0_m & 0_m & -a_2 I_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_m & 0_m & \cdots & 0_m & I_m & -a_{n-1} I_m \end{bmatrix} \quad (4.2-9)$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.2-10)$$

$$C_0 = [0_m \quad 0_m \quad \cdots \quad I_m] \quad (4.2-11)$$

式中 0_m 和 I_m 分别表示为 $m \times m$ 阶的零矩阵和单位矩阵 (m 为输出向量的维数)。

四、系统的传递函数中零点极点对消对其可控可观测性影响

1. 系统传递函数阵的最小实现与其可控且可观测是同义的,故可从传递函数阵的特征来判别其状态的可控可观测性。

2. 对于线性定常系统 $\Sigma = (A, B, C)$, 如果其传递函数阵

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{Q(s)}{\det(sI - A)} \quad (4.2-12)$$

的分子分母之间没有零点极点对消,则系统 $\Sigma = (A, B, C)$ 是可控和可观测的(即为最小实现)。

(1) 对于单输入——单输出系统,这是系统为最小实现的一个充分必要条件;

(2) 对于多输入——多输出系统,这是系统为最小实现的充分条件,即当传递函数发生零点极点对消,该系统仍然可能是可控和可观测的;

(3) 对于多输入——多输出系统,若传递函数阵的分母是 A 的最小多项式 $\Psi(s)$ 的形式

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{CP(s)B}{\Psi(s)} = \frac{Q'(s)}{\Psi(s)}$$

则 $Q'(s)/\Psi(s)$ 没有零点极点对消是系统可控和可观的必要条件。

3. 对于一个具有零点极点对消的串联系统,该系统可控性和可观测性将取决于两个串联子系统传递函数的排列顺序。若被消去的零点是在前面一个传递函数中,则系统是状态不能控但能观测。若被消去的零点是在后面一个传递函数中,则系统是状态可控但不可观测。

4. 从上述观点看,经典控制理论中基于传递函数零点极点对消原则的设计方法将可能破坏系统的可控性,其不可控部分的作用可能要引起系统品质变坏。

[例 题]

例 4.2-1 求下列传递函数阵

$$G(s) = \begin{bmatrix} (s+2)/(s+1) & 1/(s+3) \\ s/(s+1) & (s+1)/(s+2) \end{bmatrix}$$

的 D 及 $C(sI - A)^{-1}B$ 。

解

$$\begin{aligned} D &= \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ C(sI - A)^{-1}B &= G(s) - D = \begin{bmatrix} (s+2)/(s+1) & 1/(s+3) \\ s/(s+1) & (s+1)/(s+2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/(s+1) & 1/(s+3) \\ -1/(s+1) & -1/(s+2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 4.2-2 设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s^2 + 4s + 5}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

试写出系统的传递函数的可控标准形实现和可观测标准形实现。

解 对于这样一个单输入单输出的系统来说,一旦给出了系统的传递函数,利用式(4.2-3)和式(4.2-4)可直接得到可控标准形实现为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [5 \quad 4 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

可观测标准形实现为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

例 4.2-3 试求

$$G(s) = \begin{bmatrix} (s+2)/(s+1) & 1/(s+3) \\ s/(s+1) & (s+1)/(s+2) \end{bmatrix}$$

的可控标准形实现和可观测标准形实现。

解 首先将 $G(s)$ 化成严格真有理分式, 例 4.2-1 已经求得

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1/(s+1) & 1/(s+3) \\ -1/(s+1) & -1/(s+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

然后将 $C(sI-A)^{-1}B$ 写成按 s 降幂排列的标准格式

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} & \frac{(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ \frac{-(s+2)(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3)} & \frac{-(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3+s^2+11s+6} \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & s^2+3s+2 \\ -(s^2+5s+6) & -(s^2+4s+3) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3+s^2+11s+6} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \right\}$$

对照公式

$$\alpha_0=6 \quad \alpha_1=11 \quad \alpha_2=6$$

$$\beta_0 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

将上列系数及矩阵代入式(4.2-6), (4.2-7), (4.2-8)便可得到可控标准形实现

$$A_c = \begin{bmatrix} 0_r & I_r & 0_r \\ 0_r & 0_r & I_r \\ -a_0 I_r & -a_1 I_r & -a_2 I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -11 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -11 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0_r \\ 0_r \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_c = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2] = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -5 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

与此类似,将 α_i 及 $\beta_i (i=0,1,2)$ 代入式(4.2-9)、(4.2-10)和式(4.2-11)便可得可观测标准形。

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & -a_0 I_m \\ I_m & 0_m & -a_1 I_m \\ 0_m & I_m & -a_2 I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -3 \\ 5 & 3 \\ -5 & -4 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = [0_m \quad 0_m \quad I_m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 4.2-4 试求传递函数阵

$$G(s) = [1/(s+1)(s+2) \quad 1/(s+2)(s+3)]$$

的最小实现。

解 $G(s)$ 是严格真分式,直接将它按 s 降幂排列的标准格式

$$G(s) = \left[\frac{s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad \frac{s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right]$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} [s+3 \quad s+1] = \frac{[1 \quad 1]s + [3 \quad 1]}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

对照公式(4.2-5)知

$$\alpha_0 = 6 \quad \alpha_1 = 11 \quad \alpha_2 = 6$$

$$\beta_0 = [3 \quad 1] \quad \beta_1 = [1 \quad 1] \quad \beta_2 = [0 \quad 0]$$

由于输出向量的维数 $m=1$, 输入向量的维数 $r=2, m < r$, 所以先采用可观测标准形实现。

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m & -\alpha_0 I_m \\ I_m & 0_m & -\alpha_1 I_m \\ 0_m & I_m & -\alpha_2 I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0_m \quad 0_m \quad I_m] = [0 \quad 0 \quad 1]$$

检验所求可观测标准形实现 $\Sigma = (A_0, B_0, C_0)$ 是否可控

$$Q_c = [B_0 \quad A_0 B_0 \quad A_0^2 B_0] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -6 & -6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank} Q_c = 3 = n$$

所以, $\Sigma(A_0, B_0, C_0)$ 是可控且可观测, 为最小实现。

例 4.2-5 求微分方程组

$$\begin{cases} 2 \frac{dy_1}{dt} + 2y_1 + \frac{dy_2}{dt} + y_2 = \frac{du_1}{dt} + u_2 \\ \frac{dy_1}{dt} + y_1 + \frac{dy_2}{dt} + y_2 = \frac{du_1}{dt} - u_1 \end{cases}$$

的最小实现。

解 先求输入 u 到输出 y 的传递函数阵

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1/(s+1) & 1/(s+1) \\ (s-2)/(s+1) & -1/(s+1) \end{bmatrix}$$

将 $G(s)$ 写成标准格式

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1/(s+1) & 1/(s+1) \\ -3/(s+1) & -1/(s+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

即 $\alpha_0 = 1 \quad \beta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

先采用可控标准形实现

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

经检验上述实现也是可观测的, 故所求 $\Sigma = (A, B, C, D)$ 为所给微分方程组的最小实现。

例 4.2-6 试求下列传递函数阵

$$G(s) = \begin{bmatrix} (s+2)/(s+1) & 1/(s+3) \\ s/(s+1) & (s+1)/(s+2) \end{bmatrix}$$

最小实现。

解 第一步:将 $G(s)$ 的元化成严格真有理分式,并写出其可控标准形实现(由于 $m=r$, 所以也可写成可观标准形),例 4.2-1 中已经求出

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -11 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -11 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -5 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

第二步:判别该可控标准形实现的状态是否完全可观测

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ CA^4 \\ CA^5 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -5 & -4 & -1 & -1 \\ -6 & -6 & -5 & -9 & -1 & -3 \\ 6 & 6 & 5 & 8 & 1 & 2 \\ 6 & 18 & 5 & 27 & 1 & 9 \\ -6 & -12 & -5 & -16 & -1 & -4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

因为

$$\text{rank} Q_0 = 3$$

所以该可控标准形实现不是最小实现。为此,必须按可观测性进行结构分解。

第三步:构造变换矩阵 R_0^{-1} ,将系统按可观测性进行分解

取

$$R_0^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -5 & -4 & -1 & -1 \\ -6 & -6 & -5 & -9 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

利用分块矩阵的求逆公式求得

$$R_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -6 & 0 & -5 \\ \frac{5}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$\hat{A} = R_0^{-1} A R_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = R_0^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -3 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = C R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\hat{C}_1 \quad 0]$$

经检验, $\Sigma(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ 是可控且可观测的子系统, 因此 $G(s)$ 的最小实现为

$$A = \hat{A}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$C = \hat{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

若把上列 A, B, C, D 代入式 $C(sI - A)^{-1}B + D$, 则可对所得结果进行验算

$$\begin{aligned} C(sI - A)^{-1}B + D &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & s+1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2/(s+1) & 1/(s+3) \\ s/(s+1) & (s+1)/(s+2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由于 $r=m=2$, 所以本题也可以先写出可观测标准形实现 $\Sigma = (A_0, B_0, C_0)$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -6 & -3 \\ 5 & 3 \\ -5 & -4 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

然后将 $\Sigma(A_0, B_0, C_0)$ 按可控性分解, 选择变换矩阵 R .

$$R_c = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -9 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

并算得

$$R_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & -2 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

于是

$$\tilde{A} = R^{-1}A_0R = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = R^{-1}B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CR = [\tilde{C}_1 \quad 0] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Sigma = (\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1)$ 是可控且可观测的子系统, 故 $G(s)$ 的最小实现为

$$\tilde{A}_m = \tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \tilde{B}_m = \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_m = \tilde{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

例 4.2-7 已知系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

确定其最小多项式。并针对输入输出矩阵为下述两种情况

$$(I) \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(II) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

讨论传递函数阵的零点极点相消与系统可控可观的关系。

解 (1) 采用

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$$

约去公因式后的分母多项式即是最小多项式的方法计算

$$|sI - A| = (s-1)^2(s-4)$$

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} (s-1)(s-4) & 3(s-1) & 2(s-1) \\ 0 & (s-1)^2 & 2(s-1) \\ 0 & 0 & (s-1)(s-4) \end{bmatrix}$$

显然, $|sI - A|$ 与 $\text{adj}(sI - A)$ 中存在公因式 $(s-1)$, 所以 A 的最小多项式为

$$\Psi(s) = (s-1)(s-4)$$

并且

$$(sI - A)^{-1} = \frac{P(s)}{\Psi(s)} = \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & s-1 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix}$$

(2) 对于题目给定的 (I) 情况, 容易验证

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B]$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

都是满秩的。所以该系统是可控且可观的。

在传递函数阵 $G(s) = C \frac{P(s)}{\Psi(s)} B$ 的形式中

$$\begin{aligned} C \frac{P(s)}{\Psi(s)} B &= \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & s-2 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} 2 & s-4 \\ s-4 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

无零点极点对消。而在 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 的形式中存在零点极点对消。可见, 当系统是可控又可观时, 在传递函数 $C \left[\frac{P(s)}{\Psi(s)} \right] B$ 的形式下无零点极点对消, 而 $C(sI - A)^{-1}B$ 是否有零点极点对消, 在重特征值对应多个约当块时, 对系统可控可观性不提供任何信息。

(3) 对于题目给定的 (II) 容易验证 Q_c 是不满秩的 (读者自行计算), 故该系统是不可控的。而在传递函数阵 $C \left[\frac{P(s)}{\Psi(s)} \right] B$ 的形式中

$$C \begin{bmatrix} P(s) \\ \Psi(s) \end{bmatrix} B = \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s-4 & 3 & 2 \\ 0 & s-2 & 2 \\ 0 & 0 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-4)} \begin{bmatrix} s-4 & 3 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}$$

也无零点极点对消。也就是说,当系统不是状态可控且可观测时,传递函数阵 $C \begin{bmatrix} P(s) \\ \Psi(s) \end{bmatrix} B$ 中也可能是无零点极点对消。

综合上述两种情况,说明 $C \begin{bmatrix} P(s) \\ \Psi(s) \end{bmatrix} B$ 无零点极点对消只是系统状态可控且可观测的必要条件。即若 $C \begin{bmatrix} P(s) \\ \Psi(s) \end{bmatrix} B$ 有零点极点对消,只能判定系统不是状态可控且可观测的。

习 题

4-1 试将下列系统分别按可控性和可观测性进行结构分解。

$$1. A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad -1 \quad 1]$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad -1 \quad 1]$$

4-2 将下列系统按可控可观测性进行结构分解。

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c = [1 \quad 1 \quad 2]$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c = [3 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

4-3 求下列传递函数阵的最小实现。

$$1. G(s) = \begin{bmatrix} 1/s(s+1) & 2/(s+1) \\ 2/(s+1) & 1/(s+1) \end{bmatrix}$$

$$2. G(s) = \begin{bmatrix} (s+3)/(s+1)(s+2) & 1/(s+1) \\ 1/(s+1) & 2s/(s+1)(s+1) \end{bmatrix}$$

4-4 设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8}$$

问当 a 为多大时,系统将是不可控或不可观测的。

4-5 设 S_1, S_2 为两个可控且可观测的系统

$$S_1: A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_1 = [2 \quad 1]$$

$$S_2: A_2 = -2 \quad b_2 = 1 \quad c_2 = 1$$

(1) 试分析由 S_1 和 S_2 所组成的串联系统的可控性和可观测性,并写出其传递函数。(串

联次序分别为 S_1, S_2 和 S_2, S_1)

(2) 试分析由 S_1 和 S_2 所组成的并联系统的可控性和可观测性, 并写出其传递函数。

(3) 讨论上面的结果。

4-6 从传递函数是否出现零点极点对消现象出发, 说明图 4-4 中闭环系统 S 的可控性与可观测性和开环系统 S_0 的可控性与可观测性是一致的。

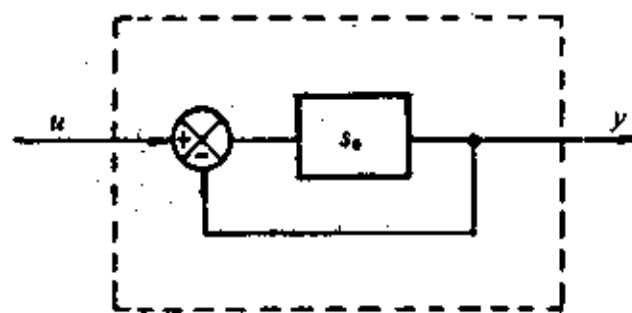


图 4-4 题 4-6 中的系统示意图

第五章 系统的稳定性分析

§ 5-1 关于稳定性的基本概念

[内容提要]

一、平衡态

研究下列微分方程所描述的系统:

$$\dot{x} = f(x) \quad (5.1-1)$$

式中, x 是 n 维状态向量; $f(x)$ 是以 $f_i(x_1, \dots, x_n)$ 为元素的 n 维函数向量。向量函数 $f(x)$ 不显含时间 t 。通常称式(5.1-1)为自治系统。

定义: 在式(5.1-1)的系统中, 满足

$$f(x_*) = 0 \quad (5.1-2)$$

的状态 x_* 称为该系统的平衡态, 或称平衡解。当平衡态的任意小邻域内不存在系统的别的平衡态时, 称为孤立的平衡态; 且可以通过坐标平移变换 $x - x_*$, 把它移到状态空间原点。所以, 以下讨论的平衡态均为 $x_* = 0$ 。

二、稳定的定义

对于式(5.1-1)描述的自治系统, 如果对任意实数 $\varepsilon > 0$, 都对应存在实数 $\delta > 0$, 使得满足不等式

$$\|x(t) - x_*\| \leq \delta \quad (5.1-3)$$

的任意初态 $x(t_0) = x_0$ 出发的解 $x(t)$, 在 $t \geq t_0$ 时均成立

$$\|x(t) - x_*\| \leq \varepsilon \quad (5.1-4)$$

则称系统平衡态 x_* 是李雅普诺夫(Ляпунов)意义下稳定的。

当 δ 的选择依赖于 t_0 时, 称 x_* 是一致稳定的。

三、渐近稳定的定义

如果系统式(5.1-1)的平衡态 x_* 是稳定的, 而且满足不等式(5.1-3)的任意初态出发的解 $x(t)$, 当 t 趋向无穷时, 都收敛于平衡态 x_* , 则称 x_* 是渐近稳定的。当 δ 不依赖于 t_0 , 且 $x(t)$ 收敛于 x_* 也不依赖于 t_0 时, 称 x_* 是一致渐近稳定的。

稳定和渐近稳定的二维几何解释见图 5-1。

四、大范围内渐近稳定的定义

如果初态 x_0 为状态空间任意有限点, 平衡态都是渐近稳定的, 则称 x_* 是大范围内渐近稳定的平衡态。

显然, x_* 为大范围内渐近稳定的必要条件是整个状态空间只存在 x_* 一个平衡态。

对于线性系统, 如果平衡态 x_* 是渐近稳定的, 那么它一定是大范围内渐近稳定的。

五、离散时间系统

离散时间自治系统的状态方程是差分方程

$$x(k+1) = f[x(k)] \quad (5.1-5)$$

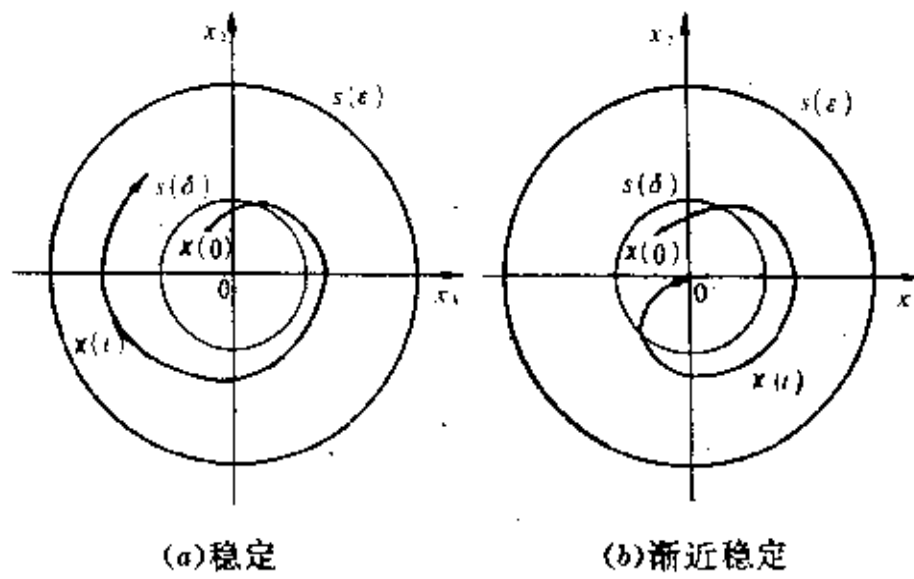


图 5-1 稳定和渐近稳定的定义

它的平衡态 x_0 应满足

$$f(x_0) = x_0 \quad (5.1-6)$$

而稳定、渐近稳定、大范围内渐近稳定的定义都和前述连续时间系统的定义极为相似。只要把定义中的初态写作 $x(t) = x_0$ ；系统的解曲线写作 $x(t), t > t_0$ ；其它均不必改动。

§ 5-2 李雅普诺夫第一方法

[内容提要]

李雅普诺夫第一方法又称间接法。该方法的基本思路是，首先求出系统的解或者是解的替代量(比如线性定常系统中解的模态或特征值)；然后依据解的特点确定平衡态的稳定性。即第一方法要依赖于对系统解的了解，这就限制了它在非线性系统中的应用。

一、线性定常系统的特征值判据

1. 线性定常连续时间自治系统

$$\dot{x} = Ax \quad (5.2-1)$$

的状态解为

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (5.2-2)$$

它的每一个分量都是系统的 n 个模态线性组合而成，而 n 个模态又是由 n 个特征值 $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ 一一确定。对单根，其模态是 $\exp(\lambda_i t)$ ；对重根，其模态是 $\exp(\lambda_i t), t\exp(\lambda_i t), t^2\exp(\lambda_i t), \dots$ 。所以特征值 λ_i 就确定了解的性质。如果特征值

(1)都具有负的实部，则系统是渐近稳定的。

(2)没有实部为正的，则系统是稳定的。

(3)有实部为正的，则系统是不稳定的。

式(5.2-1)所示的系统的特征多项式为

$$\Psi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (5.2-3)$$

由其系数 a_i 可组成劳斯(Routh)阵列

0 行	$a_{0,1} = 1$	$a_{0,2} = a_2$	$a_{0,3} = a_4$	$a_{0,4} = a_6$...
1 行	$a_{1,1} = a_1$	$a_{1,2} = a_3$	$a_{1,3} = a_5$	$a_{1,4} = a_7$...
2 行	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$...	
⋮	⋮				
n 行	$a_{n,1}$				

阵列中第 2 行以下的元素符合递推公式

$$a_{i,j} = - \det \begin{bmatrix} a_{i-2,1} & a_{i-2,j+1} \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,j+1} \end{bmatrix} / a_{i-1,1} \quad (5.2-4)$$

劳斯判据为：系统为渐近稳定的充分必要条件是：(1)式(5.2-3)中系数 a_i 都为正值；(2)劳斯阵列的第一列都为正值。或者由式(5.2-3)中系数 a_i 组成胡尔维茨(Hurwitz)矩阵 H ，它是 $n \times n$ 矩阵

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

胡尔维茨判据为：系统渐近稳定的充分必要条件是：(1)式(5.2-3)中 a_i 都是正值；(2)胡尔维茨矩阵 H 的全部主子式为正值，即

$$H_1 = a_1 > 0; H_2 = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} > 0; H_3 = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} > 0; \cdots,$$

$$H_n = \det H > 0$$

2. 线性定常离散时间自治系统

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (5.2-5)$$

如果其特征值 λ_i 满足：

(1) $|\lambda_i| < 1$ 则系统是渐近稳定的。

(2) $|\lambda_i| \leq 1$ ，且 $|\lambda_i| = 1$ 的特征值都是矩阵 A 的最小多项式的单根，则系统是稳定的。

特征多项式 $\Psi(\lambda)$ 仍如式(5.2-3)，其系数 a_i 可以组成朱利(Jury)表列：

1行	$a_0 = 1$	a_1	a_2	\cdots	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2行	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\cdots	a_2	a_1	$a_0 = 1$
3行	b_0	b_1	b_2	\cdots	b_{n-2}	b_{n-1}	
4行	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\cdots	b_1	b_0	
5行	c_0	c_1	c_2	\cdots	c_{n-2}		
6行	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-1}	\cdots	c_0		
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots			
$2n-3$ 行	s_0	s_1	s_2				

其中： $b_0 = \det \begin{bmatrix} 1 & a_n \\ a_n & 1 \end{bmatrix}$ ； $b_1 = \det \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} \\ a_n & 1 \end{bmatrix}$ ； \cdots ； $b_{n-1} = \det \begin{bmatrix} 1 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} \end{bmatrix}$ ；

$$c_0 = \det \begin{bmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{bmatrix}; \quad c_1 = \det \begin{bmatrix} b_0 & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_1 \end{bmatrix}; \quad c_{n-2} = \det \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ b_{n-1} & b_{n-2} \end{bmatrix};$$

.....

直到表的同一行只有三个元素为止。

朱利判据:式(5.2-5)所示系统渐近稳定的充分必要条件是:

- (1)特征多项式 $\Psi(\lambda)$ 满足: $\Psi(1) > 0$; $(-1)^n \Psi(-1) > 0$; $|a_n| < 1$ 。
- (2)朱利表列中满足: $|b_0| > |b_{n-1}|$; $|c_0| > |c_{n-2}|$; ...; $|s_0| > |s_2|$ 。

二、非线性系统的第一方法

平衡态为 $x_* = 0$ 的非线性自治系统

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.2-6}$$

在平衡态 $x_* = 0$ 附近将非线性函数 $f(x)$ 做台劳展开,得

$$\dot{x} = Ax + g(x) \tag{5.2-7}$$

其中:

$$F(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{5.2-8}$$

是向量函数 $f(x)$ 的雅可比矩阵, $n \times n$ 阶。式(5.2-7)中 $A = F(x_*) = F(0)$ 是 $n \times n$ 阶常数阵。 $g(x)$ 是级数展开的高阶项。略去高阶项则得到和式(5.2-1)相同的一次近似方程,称为线性化。

式(5.2-6)所示的非线性系统稳定性可借助近似方程:

(1)当近似方程是渐近稳定的(或不稳定的),则非线性系统在原点附近是渐近稳定的(或不稳定的),而且与高阶项 $g(x)$ 无关。

(2)当近似方程是稳定而非渐近稳定的,则非线性系统的稳定与否取决于高阶项 $g(x)$ 。当 $g(x_*) = 0$ 时,非线性系统原点是稳定的。

[例 题]

例 5.2-1 线性定常连续时间系统的特征多项式为

$$\Psi(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$$

试确定其渐近稳定的充分必要条件。

解 (1)劳斯方法:劳斯阵列

0 行	1	a_0	a_1
1 行	a_1	a_2	0
2 行	$(a_1 a_2 - a_3) / a_1$	a_1	
3 行	$(a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_1 - a_3^2) / (a_1 a_2 - a_3)$	0	

4行

a_4

系统渐近稳定的充分必要条件是:

a. a_1, a_2, a_3, a_4 均为正值;

b. $a_1 a_2 - a_3 > 0$; $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 > 0$ 。

(2) 胡尔维茨方法: 胡尔维茨矩阵

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{bmatrix}$$

系统渐近稳定的充分必要条件是:

a. a_1, a_2, a_3, a_4 均为正值;

b. $H_1 = a_1 > 0$; $H_2 = a_1 a_2 - a_3 > 0$; $H_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 > 0$; $H_4 = a_4 H_3 > 0$ 。

两种方法所得结果是一致的。进一步, 由本例可以看出两种方法的关系: 设劳斯阵列首列的五个元素分别是 R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 。则有

$$H_1 = R_1, \quad H_2 = R_1 R_2, \quad H_3 = R_1 R_2 R_3, \quad H_4 = R_1 R_2 R_3 R_4$$

由此证明劳斯方法和胡尔维茨方法是等价的。有的书中把它们统称劳斯—胡尔维茨判据。

例 5.2-2 离散时间系统方程

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.05 & 0.25 & 0.20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix}$$

试判断其稳定性。

解 系统的特征多项式为

$$\Psi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 0.20\lambda^2 - 0.25\lambda + 0.05$$

显然满足:

$$\Psi(1) = 1 - 0.20 - 0.25 + 0.05 = 0.60 > 0$$

$$(-1)^3 \Psi(-1) = 1 + 0.20 - 0.25 - 0.05 = 0.90 > 0$$

$$|a_3| = 0.05 < 1$$

构造朱利表列:

$$1 \text{ 行} \quad 1 \quad -0.20 \quad -0.25 \quad 0.05$$

$$2 \text{ 行} \quad 0.05 \quad -0.25 \quad -0.20 \quad 1$$

$$3 \text{ 行} \quad 0.9975 \quad -0.1875 \quad -0.24$$

由表中有: $|b_0| = 0.9975$; $|b_2| = 0.24$ 。显然有 $|b_0| > |b_2|$ 。可见系统是渐近稳定的。

例 5.2-3 非线性系统

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_1^2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

讨论其在原点的稳定性。

解 原点是系统的平衡态。系统右端函数

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 + 2x_1^2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

其雅可比矩阵

$$F(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} -2 & 4x_1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

代入原点 $x_0 = 0$, 得一次近似系统 $\dot{x} = Ax$

$$A = F(0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

显然其特征值 $-1, -2$ 均具有负的实部。所以, 非线性系统在原点附近是渐近稳定的。

应当注意, 用这种线性化方法只能判定平衡态的小范围内的稳定性。本例应是大范围内渐近稳定的, 请参看例 5.5-3 的结果。

§ 5-3 李雅普诺夫第二方法

[内容提要]

李雅普诺夫第二方法又称直接法。它可以不必求解系统的运动方程, 而给出线性和非线性系统平衡态稳定性的信息。

一、李雅普诺夫主稳定性定理

定理 1: 考察连续时间动力学系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (5.3-1)$$

如果存在状态向量 x 的纯量函数 $V(x)$, 它对 t 存在一阶导数 $\dot{V}(x)$, 同时满足下列条件:

(1) $V(x)$ 是正定的。即 $V(x) \begin{cases} = 0, x=0 \\ > 0, x \neq 0 \end{cases}$

(2) $\dot{V}(x)$ 是负定的。即 $-\dot{V}(x)$ 是正定的。

则平衡态 $x_0 = 0$ 是渐近稳定的, 且称 $V(x)$ 为式 (5.3-1) 所示系统的一个李雅普诺夫函数。如果, $V(x)$ 进一步满足:

(3) 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, 有 $V(x) \rightarrow \infty$ 。则平衡态 $x_0 = 0$ 是大范围内渐近稳定的。

几点说明:

第一, 定理只给出渐近稳定或大范围内渐近稳定的充分条件。如果找到满足上述条件的李雅普诺夫函数, 则可得到渐近稳定的结论; 而找到的函数 $V(x)$ 不满足定理条件, 不意味着平衡态的不稳定。

第二, 李雅普诺夫函数 $V(x)$ 可以看做是系统的广义能量, 则 $\dot{V}(x)$ 就是广义功率。能量为正, 功率为负, 说明系统运动过程是消耗能量。最终, 能量趋向零, 运动趋向平衡态 $x_0 = 0$ 。

第三, 定理中, 条件 (1) 和 (2) 提供了系统在 $x_0 = 0$ 为中心的小范围内渐近稳定的充分条件, 而条件 (3) 是保证大范围所要求的。

二、稳定性的其它结论

如果式 (5.3-1) 所示系统存在 $V(x)$ 及 $\dot{V}(x)$ 分别满足:

1. $V(x)$ 正定, $\dot{V}(x)$ 负半定 (即 $\dot{V}(x) = 0$, 而 $\dot{V}(x) \leq 0, x \neq 0$); 且 $\dot{V}(x)$ 在式 (5.3-1) 所示系统的任一解曲线上存在恒为零, 则 $x_0 = 0$ 是稳定的平衡态。

2. $V(x)$ 正定, $\dot{V}(x)$ 负半定, 除平衡态 $x_e=0$ 外, $\dot{V}(x)$ 在式(5.3-1)所示系统的任一解曲线上均不恒为零。则 $x_e=0$ 是渐近稳定的平衡态。

上述两点的 $V(x)$ 如果还满足定理 1 中的第(3)条则是大范围内渐近稳定的或稳定的。

3. $V(x)$ 正定, $\dot{V}(x)$ 也正定。则 $x_e=0$ 是不稳定的平衡态。

三、关于李雅普诺夫函数的讨论

1. $V(x)$ 是满足第二方法任一结论条件的纯量函数。有 n 个自变量, 可以写成 $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

2. 李雅普诺夫函数的最简单形式是二次型

$$V(x) = x^T Q x \quad (5.3-2)$$

式中, Q 为实对称方阵。 $V(x)$ 的定号性可由实对称阵 Q 的定号性确定。

3. 如果 $V(x)$ 是式(5.3-2)所示的二次型, 且 $Q=I$ 。

则
$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = C_i^2$$

式中 C_i 为常值, 在几何上表示状态空间中以原点为中心, 以 C_i 为半径的球面。当 $C_i < C_{i+1}$ ($i=1, 2, \dots$) 时, $V(x)=C_i^2$ 的球面必包含在 $V(x)=C_{i+1}^2$ 的球面之内。 $V(x)$ 是状态 x 距原点远近的量度。

当 $\dot{V}(x) < 0$ 时, 说明系统的运动趋向始终是由某一球面外穿向球面内, 从而原点是渐近稳定的。

当 $\dot{V}(x) \leq 0$ 时, 系统的运动趋向或是向球面内或是沿球面方向, 从而原点是稳定的。

如果 $\dot{V}(x) > 0$, 系统的运动趋向始终是由球面内穿向球面外, 从而原点是不稳定的。

4. 找到的 $V(x)$ 在某个域 Ω 内满足第二方法的某个结论, 说明在该域内平衡态是稳定或渐近稳定的, 但对域外是否稳定不提供信息。

5. 定义一个正数

$$\eta_{min} = \min \left\{ -\frac{\dot{V}(x)}{V(x)} \right\} \quad (5.3-3)$$

它反映了系统状态沿解曲线趋向平衡态 $x_e=0$ 时, 收敛速度的大小。

由式(5.3-3)可以解出:

$$V(x) \leq V(x_0) \exp[-\eta_{min}(t-t_0)] \quad (5.3-4)$$

它给出了系统由初态 x_0 出发沿解曲线变化时, 李雅普诺夫函数随时间的变化规律的估计。由于 $V(x)$ 是状态 x 距离原点远近的量度, η_{min} 就是 $x(t)$ 趋向原点时收敛速度的估计。 η_{min} 较大, 说明系统收敛速度较快。

四、离散时间系统的稳定性定理

离散时间系统

$$x(k+1) = f[x(k)] \quad (5.3-5)$$

1. 如果存在连续函数 $V(x)$ 是正定的, 而且 $\Delta V(x) = V[x(k+1)] - V[x(k)]$ 是负定的, 则平衡态 $x_e=0$ 是渐近稳定的。

2. 如果 $V(x)$ 正定, $\Delta V(x)$ 负半定或正定, 其稳定性结论的提法类似本节二。

[例 题]

例 5.3-1 给定非线性系统状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a(1+x_2)^2 x_2 - x_1; \quad a > 0 \end{cases}$$

试判断其稳定性。

解 (1) 确定平衡态

用 $x_1=0, x_2=0$, 代入方程有 $\dot{x}_1=0$ 和 $\dot{x}_2=0$, 所以, 系统的平衡态是原点 $x_e=[0 \ 0]^T$ 。

(2) 选正定的李雅普诺夫函数

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

它满足大范围的条件。

(3) 判断它的导数的定号性

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1x_2 - 2x_2[-a(1+x_2)^2 x_2 - x_1] \\ &= -2(1+x_2)^2 x_2^2 \end{aligned}$$

对 $x_2=-1$ 或 $x_2=0$ 和任意的 x_1 都有 $\dot{V}(x)=0$, 而对其余的 x_2 和任意的 x_1 都有 $\dot{V}(x)<0$ 。所以, $\dot{V}(x)$ 是负半定的, 即 $\dot{V}(x)\leq 0$ 。

(4) 证明在系统轨线上均不存在 $\dot{V}(x)\equiv 0$

由 $\dot{V}(x)$ 表达式知, 使 $\dot{V}(x)\equiv 0$, 则要求 $x_2\equiv 0, x_1$ 任意; 或 $x_2\equiv -1, x_1$ 任意。

对于 $x_2\equiv 0, x_1$ 任意的情况: 要求 $\dot{x}_2=0$ 和 $x_2=0$, 代入方程得 $\dot{x}_1=0$ 和 $x_1=0$, 即 $x_1\equiv 0$, 这说明只有原点满足这种情况。

对于 $x_2\equiv -1, x_1$ 任意的情况: 要求 $\dot{x}_2=0$ 和 $x_2=-1$, 代入方程, $\dot{x}_1=0$ 及 $\dot{x}_1=-1$ 。这说明系统轨线不可能停留在这一点上, 即 $\dot{V}(x)$ 不可能恒等于零。

综上所述, 除 $x_e=[0 \ 0]^T$ 点外, 在状态轨线上不可能出现 $\dot{V}(x)\equiv 0$ 现象。当 $x_1\rightarrow\infty$ 和 $x_2\rightarrow\infty$ 时, 有 $V(x)\rightarrow\infty$, 故系统平衡态 $x_e=[0 \ 0]^T$ 是大范围内渐近稳定的平衡态。

例 5.3-2 已知非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + ax_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + ax_2(x_1^2 + x_2^2); \quad a > 0 \end{cases}$$

试确定其稳定性。

解 (1) 确定系统的平衡态

当 $x_1=x_2=0$ 时, 有 $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$ 。所以, $x_e=[0 \ 0]^T$ 是系统的平衡状态。

(2) 选正定的李雅普诺夫函数

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

(3) 判断其导数的定号性

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1[ax_1(x_1^2 + x_2^2) - 1/a + x_2] + 2x_2[ax_2(x_1^2 + x_2^2) - 1/a - x_1] \\ &= 2a(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - 1/a) \end{aligned}$$

当 $x_1^2 + x_2^2 < 1/a$ 时, 有 $\dot{V}(x) < 0$;

当 $x_1^2 + x_2^2 > 1/a$ 时, 有 $\dot{V}(x) > 0$;

当 $x_1^2 + x_2^2 = 1/a$ 时, 有 $\dot{V}(x) = 0$ 。

所以, 平衡态 $x_e=[0 \ 0]^T$ 在 $x_1^2 + x_2^2 < 1/a$ 即圆域内是渐近稳定的。

如果, 系统初态 $x_1^2(0) + x_2^2(0) > 1/a$, 即圆域外是不稳定的。

如果,系统初态 $x_1^2(0) + x_2^2(0) = 1/a$,即圆域的边界上。那么,系统轨线 $x_1^2(t) + x_2^2(t) = 1/a$,保持在圆域的边界上,说明是稳定的。

§ 5-4 李雅普诺夫第二方法在线性系统 分析与设计中的应用

[内容提要]

一、线性定常连续时间系统渐近稳定的判别

对线性定常连续系统时间

$$\dot{x} = Ax \quad (5.4-1)$$

结论 I:式(5.4-1)所示系统渐近稳定的充分必要条件是,对给定任意一个正定对称阵 $Q > 0$,矩阵方程

$$A^T P + PA = -Q \quad (5.4-2)$$

有唯一正定对称解阵 P 存在。这时,系统的李雅普诺夫函数 $V(x) = x^T P x$,其导数 $\dot{V}(x) = -x^T Q x$ 。

结论 II:式(5.4-1)所示系统的特征值的实部均小于实数 σ 的充分必要条件是,对任意给定正定对称矩阵 Q ,存在正定对称矩阵 P 为下述矩阵方程

$$-2\sigma P - A^T P + PA = -Q \quad (5.4-3)$$

的唯一解。

几点说明:

(1)给定矩阵 Q 只要求正定对称,最方便的是取为单位矩阵 $Q = I$,而后求解矩阵方程式(5.4-2)。后者实质上是一个 $n(n+1)/2$ 的联立方程组。

(2)矩阵方程式(5.4-2)有唯一解的充分必要条件是,矩阵 A 不存在两个特征值之和为零的情况。

(3)当矩阵方程式(5.4-2)的解阵 P 已求出,还应当判断其定号性,才能确定系统的稳定性。当 $P > 0$ 时,系统是大范围内渐近稳定的;当 $P < 0$ 时,系统是不稳定的。而当 P 不定时,系统不是渐近稳定的,但稳定与否要另行讨论。

(4)当矩阵方程式(5.4-2)的解 P 不存在时,系统不是渐近稳定的,但稳定与否也要另行讨论。

(5)如果给定矩阵 Q 是正半定矩阵,则系统为渐近稳定的充要条件是:(I)矩阵方程式(5.4-2)有唯一正定解 P ;(II) $x^T Q x$ 除零解外在系统的任意解曲线上不恒为零。

(6)如果给定 $Q \geq 0$,由式(5.4-2)解出 $P \geq 0$ 时,则还要验证,对 $Q = C^T C$ 时 (A, C) 可观测,才能判定系统是渐近稳定的。其中 C 为 $r \times n$ 阵, $r = \text{rank} Q$ 。

二、线性定常离散时间系统渐近稳定的判别

结论 III:线性定常离散时间系统

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (5.4-4)$$

原点渐近稳定的充分必要条件是,对给定的任一正定对称矩阵 Q ,矩阵方程

$$A^T P A - P = -Q \quad (5.4-5)$$

存在唯一正定解矩阵 P 。

结论 IV:线性定常离散时间系统式(5.4-4)的特征值的绝对值均小于 σ (σ 为正实数)的

充分必要条件是,对任一给定的正定对称矩阵 Q , 矩阵方程

$$\sigma^2 A^T P A - P = -Q \quad (5.4-6)$$

存在唯一正定解矩阵 P 。

三、线性定常连续时间系统 η 的计算

由式(5.3-3)定义的反映系统快速性的指标 η_{\min} , 在线性定常系统中很容易确定。

$$\eta_{\min} = \lambda_{\min}(QP^{-1}) \quad (5.4-7)$$

式中, Q 是任意给定的正定矩阵;

P 是矩阵方程 $A^T P + P A = -Q$ 的解;

$\lambda_{\min}(QP^{-1})$ 是 $n \times n$ 矩阵 QP^{-1} 的最小特征值, 且满足, $\text{Re}[\lambda_{\max}(A)] \leq -\lambda_{\min}(QP^{-1})$ 。

由式(5.3-4)知, η_{\min} 可以做为沿系统解曲线李雅普诺夫函数收敛速度的估计。 $-1/\eta_{\min}$ 是李雅普诺夫函数的收敛时间常数的上确界。

四、系统的二次型性能指标与李雅普诺夫函数

线性定常连续时间系统 $\dot{x} = Ax$, 如果它是渐近稳定的, 则李雅普诺夫函数 $V(x) = x^T P x > 0$, 及其对时间的导数 $\dot{V}(x) = -x^T Q x < 0$ 。其中, 正定对称矩阵 P 和 Q 满足李雅普诺夫方程(5.4-2)。则系统的二次型积分性能指标

$$J = \int_{t_0}^{\infty} x^T Q x dt \quad (5.4-8)$$

可以转化为由矩阵 P 与系统初始值 $x(t_0)$ 构成的二次型

$$J = x^T(t_0) P x(t_0) \quad (5.4-9)$$

进一步, 系统的输出 $y = Cx$, 且 (A, C) 可观测, 那么输出量的平方积分指标

$$J = \int_{t_0}^{\infty} y^2(t) dt = x^T(t_0) P x(t_0) \quad (5.4-10)$$

其中 正定对称矩阵 P 满足矩阵方程

$$A^T P + P A = -C^T C \quad (5.4-11)$$

当系统渐近稳定, 且 (A, C) 可观测时, 上述矩阵方程有唯一解阵 P 存在。

利用这种转换关系, 可以完成在性能指标下系统参数的优化任务。详见例题 5.4-3。

[例 题]

例 5.4-1 已知线性定常连续系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

试判断其稳定性。

解 (1) 采用特征值判据

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \lambda + 1; \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm j\sqrt{3})。$$

具有负的实部。所以, 是渐近稳定的。

(2) 采用李雅普诺夫第二方法的充分条件

令 $P = I$ 。即取 $V(x) = x^T x > 0$ 。则

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T x + x^T \dot{x} = x^T (A^T + A)x$$

式中,

$$A^T + A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

是负半定矩阵, 即 $V(x) = -2x_2^2 \leq 0$ 。还需要确定在系统解曲线上, 是否存在 $V(x) \equiv 0$ 。使 $\dot{V}(x) \equiv 0$ 的条件是 $x_2 \equiv 0, x_1$ 任意。

由 $x_2 \equiv 0$, 即 $x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0$ 代入系统方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

得出: $x_1 = 0, \dot{x}_1 = 0$, 即只有原点满足 $\dot{V}(x) \equiv 0$ 。

所以, $x_c = 0$ 是渐近稳定的。

(3) 采用线性定常系统的充分必要条件

令 $Q = I, P = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ 。则矩阵方程 $A^T P + P A = -Q$ 化为

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

即 $n(n+1)/2$ 个方程联立:

$$\begin{cases} -2c = -1 \\ a - b - c = 0 \\ 2c - 2b = -1 \end{cases}$$

解得: $a = 3/2, b = 1, c = 1/2$ 。即对称矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

其中主子式: $\Delta_1 = 3/2 > 0$

$$\Delta_2 = \det P = ab - c^2 = 3/2 - 1/4 = 5/4 > 0$$

即 P 为正定对称阵。所以, $x_c = 0$ 是渐近稳定的。

例 5.4-2 线性定常离散时间系统

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1.2 & 0.2 \end{bmatrix} x(k)$$

试判断稳定性。

解 取 $Q = I$, 并令 $P = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$, 则矩阵方程 $A^T P A - P = -Q$ 化为

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 1.2 \\ -0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 \\ 1.2 & 0.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

得 $n(n+1)/2 = 3$ 个方程联立:

$$\begin{cases} -0.36a + 1.92c + 1.44b = -1 \\ -0.32a + 1.32c + 0.24b = 0 \\ 0.16a - 0.16c - 0.96b = -1 \end{cases}$$

解出: $a = 3.904, b = 2.223, c = -1.057$ 。即对称阵

$$P = \begin{bmatrix} 3.904 & -1.057 \\ -1.057 & 2.223 \end{bmatrix}$$

显然, 矩阵 P 是正定的。所以, $x_c = 0$ 是渐近稳定的。

例 5.4-3 对例 5.4-1 系统确定李雅普诺夫函数, 及从封闭曲线 $V(\mathbf{x})=150$ 上一点到封闭曲线 $V(\mathbf{x})=0.06$ 内一点的系统响应时间的上界。

解 由例 5.4-1 的结果:

$$P = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

可以写出李雅普诺夫函数及其导数:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} = \frac{1}{2}(3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = -(x_1^2 + x_2^2)$$

确定 QP^{-1} 的特征值, 应解 $\det(\lambda I - QP^{-1}) = 0$, 这等价于解 $\det(\lambda P - Q) = 0$ 。

$$\det \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\lambda - 1 & \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \frac{5}{4}\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0$$

其解为: $\lambda_1 = 1.417$ 和 $\lambda_2 = 0.553$ 。而

$$\eta_{\min} = \lambda_{\min} = \lambda_2 = 0.553$$

由式(5.3-4)得

$$V(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}_0) \exp[-0.553(t-t_0)]$$

$$t - t_0 \leq -\frac{1}{0.553} \ln \left[\frac{V(\mathbf{x})}{V(\mathbf{x}_0)} \right] = -\frac{1}{0.553} \ln \left(\frac{0.06}{150} \right) = 14.148$$

即从 $V(\mathbf{x}_0)=150$ 封闭曲线上任一点出发的系统运动轨迹, 进入 $V(\mathbf{x})=0.06$ 封闭曲线内, 所需时间不超过 14.148 个时间单位。

例 5.4-4 二阶控制系统如图 5-2 所示。已知参考输入 y_r 是阶跃函数, $t_0=0$ 时系统静止。求使下列积分指标 J 为最小时, 参数 ζ 的取值。

$$J = \int_0^{\infty} (e^2 + ay_2) dt; \quad a > 0$$

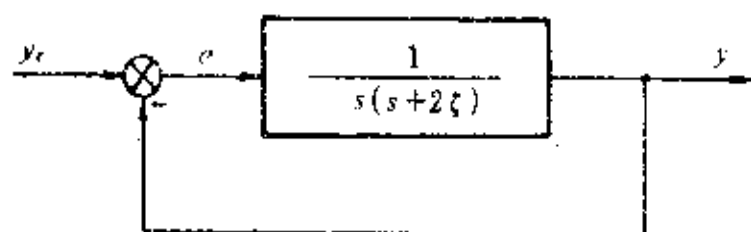


图 5-2 例 5.4-4 的系统结构图

解 这是一个使积分指标最小的参数优化问题, 即求最佳阻尼比 ζ 。

(1) 列写状态方程式

在图 5-2 中取状态:

$$x_1 = e = y_r - y$$

$$x_2 = \dot{e} = \dot{y}_r - \dot{y} = -\dot{y}$$

得状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2) 确定初始状态

当 $t=0$ 时, 系统是静止的。即 $\dot{y}(0)=0$, 而 $y(0)$ 大小不确定, 即 $x_1(0)$ 不确定, $x_2(0)=0$ 。

(3) 将指标 J 表达为二次型积分指标

$$J = \int_0^{\infty} (e^2 + ay_2) dt = \int_0^{\infty} (x_1^2 + ax_2^2) dt$$

$$= \int_0^{\infty} [x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} dt = \int_0^{\infty} [x_1, x_2] Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} dt$$

由于 $a > 0$, 所以对称阵 Q 是正定的。

(4) 求含参数矩阵 $P(\zeta)$

李雅普诺夫方程 $A^T P + PA = -Q$ 中, 令

$$P(\zeta) = \begin{bmatrix} d & f \\ f & b \end{bmatrix}$$

解得:
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & f \\ f & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & f \\ f & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$

$$d = \zeta + \frac{1+a}{4\zeta}; \quad b = \frac{1+a}{4\zeta}; \quad f = \frac{1}{2}$$

(5) 按式(5.4-9)将指标化为李雅普诺夫函数形式

$$J = x_0^T P x_0 = [x_1(0) \quad x_2(0)] \begin{bmatrix} \zeta + (1+a)/4\zeta & 1/2 \\ 1/2 & (1+a)/4\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \zeta x_1^2(0) + \frac{1+a}{4\zeta} [x_1^2(0) + x_2^2(0)] + x_1(0)x_2(0)$$

$$= \zeta x_1^2(0) + \frac{1+a}{4\zeta} x_1^2(0)$$

(6) 求含参数指标 $J(\zeta)$ 的极值点

极值点发生在 $\partial J / \partial \zeta = 0$ 处

$$\frac{\partial J}{\partial \zeta} = \left(1 - \frac{1+a}{4\zeta^2} \right) x_1^2(0) = 0$$

可以解出极值点的最佳阻尼系数: $\zeta = \sqrt{1+a}/2$ 。

当 $a=0$ 时, 最佳阻尼系数 $\zeta=0.5$;

当 $a=1$ 时, 最佳阻尼系数 $\zeta=0.707$ 。

§ 5-5 李雅普诺夫第二方法 在非线性系统中的应用

[内容提要]

一、克拉索夫斯基(Krasovskii)方法

对原点为平衡态的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (5.5-1)$$

取李雅普诺夫函数为方程右端向量函数的二次型

$$V(x) = f^T(x) f(x) \quad (5.5-2)$$

则它对时间的导数

$$\dot{V}(x) = f^T(x) [F^T(x) + F(x)] f(x) \quad (5.5-3)$$

式中, $F(x)$ 是系统的雅可比矩阵 $F(x) = \partial f(x) / \partial x^T$ 。

结论: 设式(5.5-1)所示系统的 $f(x)$ 对 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 可微分。则当 $F(x) + F^T(x)$ 为负定时, $x_e = 0$ 是渐近稳定的。

说明: (1) 克拉索夫斯基方法提供了判 $x_e = 0$ 为渐近稳定的方法。但是 $F(x) + F^T(x)$ 负定只是充分条件。当 $F(x) + F^T(x)$ 非负定时, 不提供信息。

(2) 当 $F(x)$ 的主对角线上元素恒等于零时, $F(x) + F^T(x)$ 是非负定的。所以, 当 $f_i(x)$ 不含有 x_i 时, 就不要应用克拉索夫斯基方法。

二、变量梯度法

变量梯度法是构造式(5.5-1)所示系统的李雅普诺夫函数的比较实用的方法。

其基本原理:

先将李雅普诺夫函数 $V(x)$ 的单值梯度 ∇v 设为如下形式

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \nabla v_1 \\ \vdots \\ \nabla v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} \quad (5.5-4)$$

式中, $a_{ij} (i, j=1, 2, \dots, n)$ 为待定参数, 它可以是常数、 t 的函数或是 x_1, x_2, \dots, x_n 的函数。通常, 把 a_{nn} 设为常数或 t 的函数。

则 $V(x)$ 和 ∇v 间满足

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n = (\nabla v)^T \dot{x} \quad (5.5-5)$$

而 $V(x)$ 是梯度 ∇v 对状态的积分

$$V(x) = \int_0^x dV(x) = \int_0^x (\nabla v)^T dx \quad (5.5-6)$$

这个曲线积分与路径有关。如果 $V(x)$ 梯度 ∇v 的 n 维旋度为零,

$$\frac{\partial \nabla v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla v_j}{\partial x_i}; \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad (5.5-7)$$

即为保守场。则积分式(5.5-6)与路径无关, 可以选如下最简单的分段积分方法

$$V(x) = \int_0^{x_1(x_2=x_3=\dots=x_n=0)} \nabla v_1 dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_3=x_4=\dots=x_n=0)} \nabla v_2 dx_2 + \dots + \int_0^{x_n(x_1=x_2=\dots=x_{n-1}=0)} \nabla v_n dx_n \quad (5.5-8)$$

变量梯度法的计算步骤如下:

- (1) 设 $V(x)$ 的梯度如式(5.5-4)所示形式。共 $n \times n$ 个未知的 a_{ij} 系数。
- (2) 按式(5.5-5)计算 $\dot{V}(x)$, 限制 $\dot{V}(x)$ 为负定或半负定, 确定 ∇v 中的部分系数。
- (3) 按保守场的要求式(5.5-7)的 $n(n-1)/2$ 个旋度方程, 确定 ∇v 中部分系数间的关系。
- (4) 按式(5.5-8)计算 $V(x)$, 限制 $V(x)$ 正定, 确定 ∇v 中剩余的未知数。
- (5) 确定渐近稳定的范围。

应当注意, 用变量梯度法求不出合适的李雅普诺夫函数时, 并不意味着平衡态是不稳定的。

[例 题]

例 5.5-1 用克拉索夫斯基方法判断下列系统的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

解 (1) 确定平衡态

用 $x_1 = x_2 = 0$ 代入系统方程, 有 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$, 所以, $x_c = 0$ 是系统的平衡态。

(2) 计算系统的雅可比矩阵 $F(x)$

系统方程的右端函数

$$f_1(x) = -3x_1 + x_2$$

$$f_2(x) = x_1 - x_2 - x_2^3$$

它们对状态 x_1 和 x_2 的偏导数

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -3; \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 - 3x_2^2$$

组成雅可比矩阵

$$F(x) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

主对角线上元素均不恒为零, 可以采用克拉索夫斯基方法。

(3) 确定 $F(x) + F^T(x)$ 的负定性

$$F(x) + F^T(x) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

顺序主子式

$$\Delta_1 = -6 < 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2 - 6x_2^2 \end{bmatrix} = 8 + 36x_2^2 > 0; \quad x_2 \neq 0$$

表明 $F(x) + F^T(x)$ 是负定的。 $x_c = 0$ 是渐近稳定的。

(4) 确定稳定范围

李雅普诺夫函数

$$\begin{aligned} V(x) &= f^T(x)f(x) = \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 & x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} \\ &= (-3x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \end{aligned}$$

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \nabla v_1 \\ \nabla v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

这里为计算方便设 $a_{11}=2$ 。

(3) 计算 $\dot{V}(x)$, 限制 $\dot{V}(x)$ 负定选取部分系数

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= (\nabla v)^T \dot{x} = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \quad a_{21}x_1 + 2x_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 - x_1^2 \end{bmatrix} \\ &= x_1x_2(a_{11} - a_{21} - 2x_1^2) + x_1^2(a_{12} - 2) - x_1^2a_{21} \end{aligned}$$

限制 $\dot{V}(x)$ 为负定, 选

$$\begin{cases} a_{11} - a_{21} - 2x_1^2 = 0 \\ a_{12} - 2 < 0 \\ -a_{21} < 0 \end{cases} ; \begin{cases} a_{11} = a_{21} + 2x_1^2 \\ a_{12} < 2 \\ a_{21} > 0 \end{cases}$$

由梯度的表达式为

$$\nabla v = \begin{bmatrix} (a_{21} + 2x_1^2)x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} a_{12} < 2 \\ a_{12} > 0 \end{cases}$$

(4) 由旋度方程确定部分系数关系

$$\frac{\partial \nabla v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla v_2}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial \nabla v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} [(a_{21} + 2x_1^2)x_1 + a_{12}x_2] = a_{12} < 2$$

$$\frac{\partial \nabla v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} [a_{21}x_1 + 2x_2] = a_{21} > 0$$

所以有

$$a_{21} = a_{12}, \quad 0 < a_{12} < 2.$$

$V(x)$ 的梯度

$$\nabla v = \begin{bmatrix} a_{21}x_1 + 2x_1^2 + a_{12}x_2 \\ a_{12}x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}; \quad 0 < a_{12} < 2.$$

(5) 由梯度 ∇v 做曲线积分计算 $V(x)$

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^{x_1(x_2=0)} \nabla v_1 dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1)} \nabla v_2 dx_2 \\ &= \int_0^{x_1} (a_{12}x_1 + 2x_1^2) dx_1 + \int_0^{x_2} (a_{12}x_1 + 2x_2) dx_2 \\ &= \frac{1}{2} a_{12} x_1^2 + \frac{1}{2} x_1^3 + a_{12} x_1 x_2 + x_2^2 \\ &= \frac{1}{2} x_1^3 + \frac{1}{2} (x_1, x_2) \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{12} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

为使 $V(x)$ 正定, 应使 $\begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{12} & 2 \end{bmatrix}$ 为正定矩阵, 即

$$\begin{cases} a_{12} > 0 \\ 2a_{12} - a_{12}^2 > 0 \end{cases}$$

而在 $0 < a_{12} < 2$ 的限制下, 上述条件满足。 $V(x)$ 是正定的。从而, 上述的 $V(x)$ 就是系统的李雅普诺夫函数。并且满足, 当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时, $V(x) \rightarrow \infty$ 。所以, $x_e = 0$ 是大范围内渐近稳定的。

例 5.5-3 如例 5.2-3 的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

试讨论其在原点的稳定性。

解 显然原点是系统的平衡态。

方法一:采用克拉索夫斯基方法。

计算系统的雅可比矩阵

$$F(x) = \frac{\partial f}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} -2 & 8x_2^3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

确定 $F(x) + F^T(x)$ 的负定性等价于确定 $-[F(x) + F^T(x)]$ 的正定性

$$-[F(x) + F^T(x)] = \begin{bmatrix} +4 & -8x_2^3 \\ -8x_2^3 & 2 \end{bmatrix}$$

顺序主子式

$$\Delta_1 = 4 > 0; \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 4 & -8x_2^3 \\ -8x_2^3 & 2 \end{bmatrix} = 8 - 64x_2^6$$

为保证 $F(x) + F^T(x)$ 负定, 应有 $\Delta_2 > 0$, 即 $x_2^6 < 8/64$,

因为

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

所以, 原点渐近稳定的范围是

$$|x_2| < \frac{1}{\sqrt{2}}, x_1 \text{ 任意。}$$

方法二: 直接采用李雅普诺夫方法。

取李雅普诺夫函数

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

则其导数

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= -4x_1^2 + 4x_1x_2^3 - 2x_2^2 \\ &= -(2x_1 - x_2^3)^2 - (2 - x_2^3)x_2^2 \end{aligned}$$

为保证 $\dot{V}(x)$ 的负定性, 应有 $2 - x_2^3 > 0$, 即

$$-\sqrt{2} < x_2 < \sqrt{2}$$

所以, 原点渐近稳定的范围是

$$|x_2| < \sqrt{2}, x_1 \text{ 任意。}$$

方法三: 采用变量梯度法。

设李雅普诺夫函数 $V(x)$ 的梯度

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \nabla v_1 \\ \nabla v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

为满足旋度方程

$$\frac{\partial \nabla v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla v_2}{\partial x_1}$$

令 $a_{12} = a_{21}$ 且为常数。

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= [\nabla v]^T \dot{\mathbf{x}} = \nabla v_1 \dot{x}_1 + \nabla v_2 \dot{x}_2 \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(-2x_1 + 2x_2^2) + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2)(-x_2)\end{aligned}$$

为计算方便,令 $a_{12} = a_{21} = 0$, 则

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -2a_{11}x_1^2 + 2a_{11}x_1x_2^2 - a_{22}x_2^2$$

为保证 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定, a_{11}, a_{22} 的选取方案很多, 但应当尽量保证大范围。先取 $a_{11} = 2$

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= -4x_1^2 + 4x_1x_2^2 - a_{22}x_2^2 \\ &= -(2x_1 - x_2^2)^2 - (a_{22} - x_2^2)x_2^2\end{aligned}$$

使 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定的条件为 $a_{22} - x_2^2 > 0$, 即 $|x_2| < \sqrt{a_{22}}$ 。选取 a_{22} 为任意大的正数, 则使 $\dot{V}(\mathbf{x})$ 负定的范围也任意大。

计算 $V(\mathbf{x})$

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1(x_2=0)} 2x_1 dx_1 \int_0^{x_2(x_2=x_1)} a_{22}x_2 dx_2 = x_1^2 + \frac{1}{2}a_{22}x_2^2 > 0$$

而且, 当 $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ 时, $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ 。

所以, 原点是大范围内渐近稳定的。

由本例看出: 由于采用方法不同, 选取的李雅普诺夫函数 $V(\mathbf{x})$ 不同, 所得到稳定性的范围会有不同。这是由于主稳定性定理及非线性系统的各种结论只具有充分性, 而不具有必要性所造成的。

习 题

5-1 判断下列二次型函数的定号性:

(I) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 5x_2x_3 - 2x_1x_3$;

(II) $V(\mathbf{x}) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 11x_3^2 + 2x_1x_2 - x_2x_3 - 2x_1x_3$;

(III) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$;

(IV) $V(\mathbf{x}) = 8.2x_1^2 + 6.8x_2^2 + 3x_3^2 + 4.8x_1x_3$;

(V) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 / (1 + x_3^2)$ 。

5-2 确定使下列二次型函数为正定时, 待定常数的取值范围:

(I) $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_3x_1$;

(II) $V(\mathbf{x}) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 - 2x_3x_1$ 。

5-3 试证明: (I) 对任意 $m \times n$ 矩阵 $C, C^T C$ 必为正半定;

(II) 对任意非异方阵 $A, A^T A$ 必为正定;

(III) 若 A 为正定阵, A^{-1} 也必是正定阵;

(IV) 若方阵 A 为正定, 则 A 的特征值均为正实数。

5-4 利用李雅普诺夫第二方法判定下列系统在 $\mathbf{x} = 0$ 点的稳定性:

(I) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; (II) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$;

(III) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$; (IV) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 - x_2 \end{cases}$;

(V) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -B/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

其中: k 为弹簧系数, B 为阻尼系数, x_1 是质量 m 的位移, x_2 是质量 m 的移动速度;

$$(VI) \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - x_2 \end{cases}$$

式中:当 $x_1=0$ 时, $g(x_1)=0$; 当 $x_1 \neq 0$ 时, $g(x_1)/x_1 \neq 0$ 。

5-5 用李雅普诺夫第二方法证明系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_1^2 x_2 \end{cases}$$

当 $a_1 < 0, a_2 < 0$ 时, 原点是大范围内渐近稳定的平衡态。

5-6 用李雅普诺夫第二方法讨论系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & 2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

在如下参数组合时, 原点的稳定性:

(I) $\zeta < 0, \omega_n > 0$; (II) $\zeta = 0, \omega_n > 0$; (III) ζ 和 ω_n 不同号。

5-7 确定下列离散系统平衡状态的稳定性:

$$(I) \begin{cases} x_1(k+1) = 0.368x_1(k) - 0.632x_2(k) \\ x_2(k+1) = 0.632x_1(k) + 0.632x_2(k) \end{cases}$$

$$(II) \begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + 4x_2(k) \\ x_2(k+1) = -3x_1(k) - 2x_2(k) - 3x_3(k) \\ x_3(k+1) = 2x_1(k) \end{cases}$$

5-8 用克拉索夫斯方法确定下述系统原点为大范围内渐近稳定时, 参数 a 和 b 的取值范围

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ax_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + bx_2^2 \end{cases}$$

5-9 用变量梯度法确定下述系统原点渐近稳定的范围

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

5-10 设 $x(k+1) = Gx(k)$ 为连续系统 $\dot{x} = Ax$ 的离散化系统, 即 $G = e^{AT}$, T 为采样周期。试证明当连续系统 $\dot{x} = Ax$ 为原点渐近稳定时, 其离散化系统 $x(k+1) = Gx(k)$ 原点必是渐近稳定的。

5-11 已知系统的方程式为

$$\ddot{y} + K_1 \dot{y} + K_2 (y)^5 + y = 0$$

试分析在下述情况下系统的稳定性。

(I) $K_1 > 0, K_2 > 0$; (II) $K_1 < 0, K_2 < 0$; (III) $K_1 > 0, K_2 < 0$ 。

5-12 应用变量梯度法确定下述时变系统原点稳定性:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{t+1}x_1 - 10x_2; \quad t \geq 0 \end{cases}$$

提示: 可选 $V(x) = \frac{1}{2}[x_1^2 + (t+1)x_2^2]$ 。

第六章 极点配置和观测器设计

§ 6-1 状态反馈和输出反馈

[内容提要]

一、状态反馈

开环受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C, D)$ 的状态模型是

$$\dot{x} = Ax - Bu \quad (6.1-1)$$

$$y = Cx + Du \quad (6.1-2)$$

式中, A, B, C, D 分别是 $n \times n, n \times r, m \times n, m \times m$ 的常数阵。

采用状态反馈的控制规律

$$u = V + Kx \quad (6.1-3)$$

式中: K 是 $r \times n$ 常数阵, $K = \{k_{ij}\}, i=1, 2, \dots, r; j=1, 2, \dots, n$ 。 V 是 r 维参考输入向量。

即

$$\begin{cases} u_1 = v_1 + k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + \dots + k_{1n}x_n \\ u_2 = v_2 + k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + \dots + k_{2n}x_n \\ \vdots \\ u_r = v_r + k_{r1}x_1 + k_{r2}x_2 + \dots + k_{rn}x_n \end{cases}$$

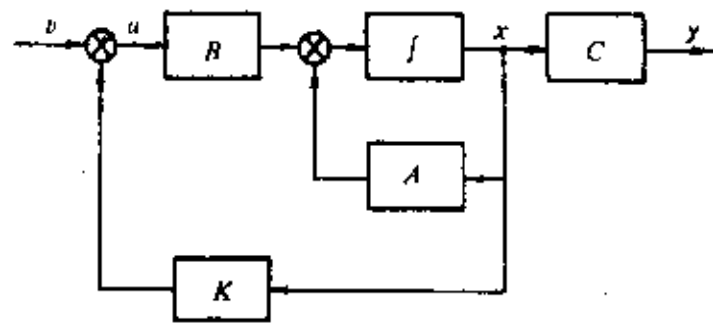


图 6-1 状态反馈示意图

状态反馈阵 K 共包括有 $r \times n$ 个反馈系数 k_{ij} 。式(6.1-3)的控制规律又称状态反馈(K)变换。其示意图如图 6-1 所示。

受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C, D)$ 经状态反馈变换所得闭环系统记为 $\Sigma_k = (A + BK, B, C + DK, D)$, 其状态模型如下:

$$\dot{x} = (A + BK)x + BV \quad (6.1-4)$$

$$y = (C + DK)x + DV \quad (6.1-5)$$

如果受控系统 Σ_0 中矩阵 $D=0$, 则闭环系统 Σ_k 的状态模型为

$$\dot{x} = (A + BK)x + BV \quad (6.1-6a)$$

$$y = Cx \quad (6.1-6b)$$

其传递函数阵为

$$G_k(s) = C(sI - A - BK)^{-1}B \quad (6.1-7)$$

二、输出反馈

对受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C, D)$ 采用输出反馈控制律

$$u = V - Hy \quad (6.1-8)$$

式中, H 是 $r \times m$ 常数阵。包含有 $r \times m$ 个反馈系数 $h_{ij}, i=1, 2, \dots, r; j=1, 2, \dots, m$ 。

受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C, D)$ 经输出反馈(H)变换所得的闭环系统记为 Σ_H , 其状态模型如下:

$$\dot{x} = [A + B(I - HD)^{-1}HC]x + B(I - HD)^{-1}V \quad (6.1-9)$$

$$y = [C + D(I - HD)^{-1}HC]x + D(I - HD)^{-1}V \quad (6.1-10)$$

当 Σ_0 中矩阵 $D=0$ 时, 则闭环 Σ_{II} 状态模型为

$$\dot{x} = (A + BHC)x + BV \quad (6.1-11)$$

$$y = cx \quad (6.1-12)$$

其传递函数阵为

$$G_{II}(s) = C(sI - A - BHC)^{-1}B \quad (6.1-13)$$

$D=0$ 时的输出反馈结构图如图 6-2 所示。

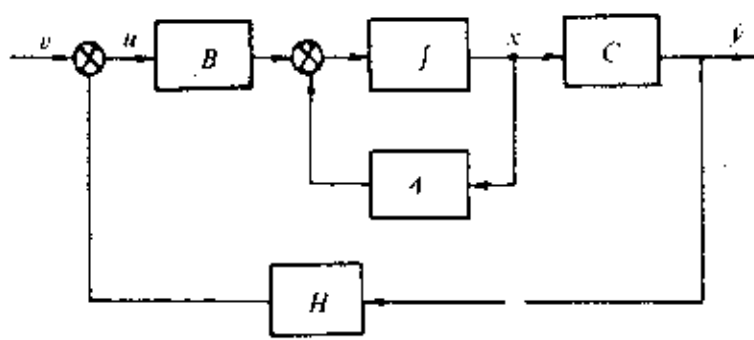


图 6-2 输出反馈示意图

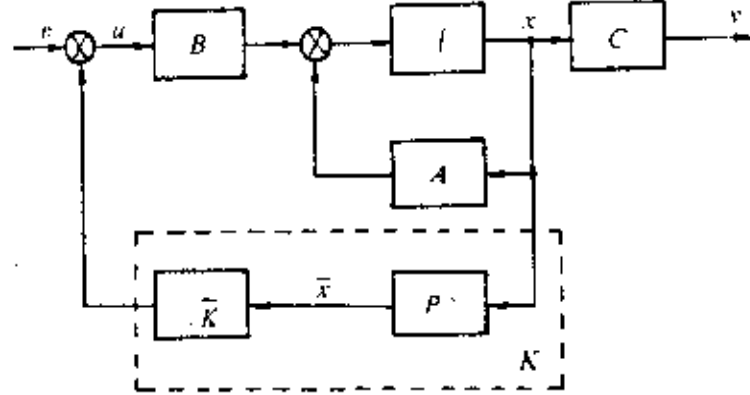


图 6-3 坐标变换下的状态反馈阵

比较两种反馈形式可以看出:

(1) 系统的输出 y 通常只是系统部分状态的信息, 所以输出反馈只能看成是部分状态反馈。

(2) 当 $D=0$ 时, 比较式 (6.1-4) 和式 (6.1-11) 知

$$K = HC \quad (6.1-14)$$

成立时, 输出反馈才和状态反馈等价。

(3) 如果输出反馈阵 H 存在, 则配置同样极点的状态反馈阵 K 必存在。由式 (6.1-14) 便可计算出。

(4) 反之, 如果状态反馈阵 K 存在, 那么完成同样任务的 (即等价的) 输出反馈阵 H 未必存在。

(5) 增加动态补偿器的输出反馈才能完成状态反馈所能完成的综合任务, 参看 § 6-5 (三)。

三、线性非奇异变换下反馈阵的变换关系

受控系统 Σ_0 经状态反馈 $\{K\}$ 变换成 Σ_K , 而 Σ_0 经非奇异坐标变换 $\tilde{x} = P^{-1}x$ 变换成 $\tilde{\Sigma}_0$, 后者又经状态反馈 $\{\tilde{K}\}$ 变换成 $\tilde{\Sigma}_K$ 。

结论 I: $\tilde{\Sigma}_K$ 和 Σ_K 仍保持原坐标变换关系的充分必要条件是

$$\tilde{K} = KP \quad (6.1-15)$$

(1) 式 (6.1-15) 还可以表达成 $K = \tilde{K}P^{-1}$, 其示意图如图 6-3 所示。

(2) 输出反馈的关系为 $\tilde{H} = H$ 。

四、反馈不改变系统的可控性

结论 I: 状态反馈和输出反馈都不改变系统的可控性。或者说, 反馈引向输入端, 不改变该输入端对状态的可控性。

几点说明:

(1) 反馈前后系统可控性矩阵的秩不变

$$\text{rank}[B \mid AB \mid \cdots \mid A^{n-1}B] = \text{rank}[B \mid (A+BK)B \mid \cdots \mid (A+BK)^{n-1}B]$$

说明系统的可控子空间的维数不变。

(2) 反馈前后, 存在等式

$$[\lambda I - A \mid B] \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -K & I_r \end{bmatrix} = [\lambda I - A - BK \mid B] \quad (6.1-16)$$

说明开环系统 Σ_0 中使 $[\lambda I - A, B]$ 降秩的极点 λ_i (形成开环的不可控模态), 必使闭环系统 Σ_k 中的 $[\lambda I - A - BK \mid B]$ 降秩。即状态反馈 $\{K\}$ 变换不改变系统的不可控模态。

(3) 将以上讨论中的 K 用等价的 HIC 替代, 说明输出反馈也具有以上性质。

五、反馈对可观测性的影响

结论 III: 输出反馈不改变系统的可观测性。或者说, 反馈引自输出端, 不改变该输出端对状态的可观测性。

几点讨论:

(1) 反馈前后系统的可观测性矩阵秩不变

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C(A+BHC) \\ \vdots \\ C(A+BHC)^{n-1} \end{bmatrix}$$

说明不可观测子空间的维数不变。

(2) 反馈前后, 系统存在等式

$$\begin{bmatrix} I_n & -BH \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda I - A - BHC \\ C \end{bmatrix} \quad (6.1-17)$$

说明 Σ_0 和 Σ_H 具有相同的不可观测模态。

(3) 值得注意的是, 对状态反馈结论 III 并不成立。请参看例 6.1-1 的反例。

(4) 状态反馈改变系统的可观测性, 不一定是坏事。在 § 7-2(二) 中就利用这条性质, 消除外扰对输出的影响。

六、多输入可控系统化为对第一个输入分量可控的方法

结论 N: 多输入完全可控的系统 $\Sigma_0 = (A, B)$ 必可以经由状态反馈 $\{K\}$ 变换使闭环系统 Σ_k 的全部状态对某一个输入分量 v_1 完全可控。

多输入完全可控系统化为对第一个输入分量完全可控的方法:

(1) 将 $\Sigma_0 = (A, B)$ 经非奇异坐标变换 $\{P\}$ 化成特定的多输入可控标准形 $\hat{\Sigma}_0 = (\hat{A}, \hat{B})$ 。对 $\hat{\Sigma}_0$ 找到状态反馈阵 \hat{K} , 使得由 v_1 完全可控。则 Σ_0 完成同样任务的状态反馈阵 $K = \hat{K}P^{-1}$ 。

(2) 将 Σ_0 化为特定的多输入可控标准形 $\hat{\Sigma}_0$ 的变换 P 是从 Σ_0 的可控性矩阵 Q_c 中依次选择 n 个线性无关的列向量组成。新选的列向量始终和已选出的所有列向量线性无关。设输入矩阵 $B = [b_1, b_2, \dots, b_r]$, 则变换阵为

$$P = [b_1, Ab_1, \dots, A^{\mu_1-1}b_1 \mid b_2, Ab_2, \dots, A^{\mu_2-1}b_2 \mid \dots \mid b_r, Ab_r, \dots, A^{\mu_r-1}b_r] \quad (6.1-18)$$

其中: $\sum_{i=1}^r \mu_i = n; l \leq r$ 。

如果在 P 阵中 b_l 不出现, 则令 $\mu_l = 0$ 。

(3) 多输入的可控标准形 $\hat{\Sigma}_0 = (\hat{A}, \hat{B})$ 形式如下:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & * & & & \\ I_{\mu_1-1} & \vdots & & & \\ & & 0 & * & \\ & & I_{\mu_2-1} & \vdots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & * \\ & & & & I_{\mu_l-1} & \vdots \\ & & & & & * \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} B_2$$

(6.1-19)

其中： \hat{A} 中的 $*$ 元素是某个具体的数值；当 $l < r$ 时， B_2 部分无特殊形式；当 $l = r$ 时， B_2 不存在。

(4) $\hat{\Sigma} = (\hat{A}, \hat{B})$ 实现对第一个输入分量 v_1 完全可控的状态反馈阵 \hat{K} ，应当使 $\hat{A} + \hat{B}\hat{K}$ 比 \hat{A} 多 $l-1$ 个元素 1，其位置使系统矩阵 $\hat{A} + \hat{B}\hat{K}$ 的对角线下首条斜线全为 1。即成为积分器串联形式，而 v_1 恰在积分器串联“链条”的首位置上，从而实现由 v_1 可以控制全部状态。则 \hat{K} 应当是

$$\hat{K} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \vdots \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad e_3 \quad \vdots \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad e_l \quad \vdots \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \quad (6.1-20)$$

其中： $e_i; i=2, 3, \dots, l$ 是 n 维单位阵的第 i 列。

(5) 则使 Σ_0 实现对 v_1 完全可控的状态反馈阵为

$$K = \hat{K}P^{-1} \quad (6.1-21)$$

(6) 显然 K 矩阵的第一行是全零行；第二行是 P^{-1} 阵的第 μ_1 行；第三行是 P^{-1} 阵的第 $\mu_1 + \mu_2$ 行；……；第 l 行是 P^{-1} 阵的第 $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{l-1}$ 行。第 $l+1$ 至第 n 行是全零行。

这样在计算 P^{-1} 时，不必计算全部 n 个行向量，只要计算上述的共 $l-1$ 行即可。

【例 题】

例 6.1-1 受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 状态模型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [3 \quad 1] x$$

试说明当状态反馈阵 K 取某些值时，会改变系统的可观性。

解 Σ_0 的可观测性矩阵

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

的秩为 2。 Σ_0 的状态是完全可观的。

令状态反馈阵 $K = [k_1 \quad k_2]$ ，则闭环系统 $\Sigma_k = (A + BK, B, C)$ 的可观测性矩阵

$$Q_{OK} = \begin{bmatrix} C \\ C(A+BK) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2+k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

显然,当取 $k_1 = 2 + 3k_2$ 时,其秩为 1。所以,状态反馈可能改变系统的可观测性。

讨论:(1) Σ_0 的可控性矩阵

$$Q_C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

秩为 2。 Σ_0 的状态是完全可控的。

而闭环的可控性矩阵

$$Q_{CK} = [B \quad (A+BK)B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & * \end{bmatrix}$$

不管状态反馈阵 K 的两个元素 k_1 和 k_2 如何选取, Q_{CK} 始终秩为 2。说明状态反馈不改变可控性。

(2) Σ_0 是第二种可控标准形。经状态反馈后闭环系统矩阵为

$$A+BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2+k_1 & -3-k_2 \end{bmatrix}$$

与 B 阵仍组成第二种可控标准形,可控性不变。

(3) Σ_0 的传递函数阵

$$G_0(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

没有零点和极点对消, Σ_0 状态完全可控又可观测。

闭环系统 Σ_K 的传递函数阵

$$G_K(s) = \frac{s+3}{s^2+(3-k_2)s+(2-k_1)}$$

当 $k_1 = 2 + 3k_2$ 时,化为

$$G_K(s) = \frac{s+3}{s^2+(3-k_2)s-3k_2} = \frac{s+3}{(s+3)(s-k_2)} = \frac{1}{s-k_2}$$

产生了零点和极点对消,所以 Σ_K 状态不完全可观测。即状态反馈改变可观测性是由于状态反馈阵参数选择得使闭环极点与零点对消,从而破坏了系统的完全可观测性。当状态反馈阵参数选择得使闭环无零极对消,则不会改变可观测性。

例 6.1-2 受控系统 $\Sigma_0 = (A, B)$ 状态方程是

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

试求状态反馈阵 K ,使闭环 Σ_K 状态由 v_1 可控。

解(1)判断系统的可控性

$$Q_C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

秩为 2。 Σ_0 状态完全可控,综合目标可以实现。

(2)构造变换阵 P ,确定参数 μ_i 及 l

$b_1 = [1 \quad 0]^T$ 非零,取之。 $Ab_1 = [1 \quad 0]^T$ 与 b_1 相关,弃之,所以 $\mu_1 = 1$ 。 $b_2 = [1 \quad 1]^T$ 与已取的 b_1 无关,取之。所以, $\mu_2 = 1, l = r = 2$ 。组成 Σ_0 化可控多输入标准形的变换阵

$$P = [b_1 \quad b_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 求 P^{-1} 的第 μ_1 行

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ * & * \end{bmatrix}$$

仅计算 $\mu_1=1$ 行就可以构成 K 阵。第 2 行不必计算。

(4) 确定实现综合目标的状态反馈阵 K

状态反馈阵 K 的第一行为全零行; 第二行是 P^{-1} 的第 $\mu_1=1$ 行:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(5) 校核

闭环系统 $\Sigma_K = (A+BK, B)$ 的状态方程是

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v$$

对第一个输入分量 v_1 的可控性矩阵

$$Q_{CK1} = [b_1 \quad (A+BK)b_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

秩为 2。闭环的两个状态由第一个输入分量 v_1 完全可控。

§ 6-2 闭环系统的极点配置与镇定

[内容提要]

一、极点配置定理及其讨论

结论 1: (极点配置定理) 线性定常系统 $\Sigma_0 = (A, B)$ 经状态反馈 $\{K\}$ 变换, 使闭环系统 $\Sigma_K = (A+BK, B)$ 的 n 个极点可以任意配置的充分必要条件是: $\Sigma_0 = (A, B)$ 状态完全可控。

几点讨论:

(1) 定理说明 Σ_0 状态完全可控和 Σ_K 可以任意配置 n 个极点是完全等价的。

(2) 当 Σ_0 状态不完全可控时, 显然 Σ_K 不能配置任意的 n 个极点。由 § 6-1(四) 中的讨论知道, 这时状态反馈不能改变不可控模态。如果给定的 n 个期望特征值中包括了 Σ_0 的不可控模态, 那么这组特征值还是可以由状态反馈 $\{K\}$ 变换进行配置的。即可以任意配置极点的个数与可控子空间的维数一致。

(3) 对于完全可控的单输入系统, 状态反馈阵 K 是一个 n 维行向量。当给定 n 个极点时, 实现闭环系统极点配置的行向量 K 是唯一的。

如果 Σ_0 是单输入第二可控标准形 $\tilde{\Sigma}_0$, 其特征多项式为

$$f_0(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (6.2-1)$$

并设期望的特征多项式为

$$f^*(\lambda) = \lambda^n + a_1^*\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}^*\lambda + a_n^* \quad (6.2-2)$$

则实现闭环极点配置, 即满足

$$\det(\lambda I - \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}) = f^*(\lambda) \quad (6.2-3)$$

的状态反馈阵

$$\tilde{K} = [a_n - a_n^* \quad a_{n-1} - a_{n-1}^* \quad \cdots \quad a_1 - a_1^*] \quad (6.2-4)$$

即 n 维行向量 \tilde{K} 的 n 个元素分别调整特征多项式中的 n 个系数, 以满足式(6.2-3)极点配置要求。所以, \tilde{K} 是唯一解。

值得注意的是, $\tilde{\Sigma}_0$ 是第二可控标准形, 经 $\{K\}$ 变换后, 闭环系统 $\tilde{\Sigma}_K$ 仍是第二可控标准形。

(4) 对于完全可控的多输入系统, 状态反馈阵 K 是 $r \times n$ 阶矩阵。当给定 n 个希望极点时, 实现闭环系统极点配置的 $r \times n$ 阶矩阵 K 的解答是不唯一的。

(5) 对单输出系统, 引入状态反馈 $\{K\}$ 变换任意配置闭环极点时, 不改变系统的零点, 除非故意制造零极对消。而且, 若有零极对消发生, 消去的是闭环系统不可观测的模式。

而对于多输出系统, 由于零点定义的不统一, 情况较为复杂, 应另行讨论。

二、单输入系统极点配置的方法

1. 解联立方程的方法

对阶次 n 较低的系统可以采用本方法。本方法直观, 尤其适用于手工计算。步骤如下: 将给定的期望极点 λ_i^* ; $i=1, 2, \dots, n$ 写成期望特征多项式

$$f^*(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i^*) = \lambda^n + a_1^* \lambda^{n-1} + \cdots + a_n^* \quad (6.2-5)$$

并设待求的状态反馈阵 K 的诸元素为未知数

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n]$$

则可写出含上述未知数的闭环特征多项式

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A - BK) = f(\lambda, k_1, \dots, k_n)$$

令其与期望特征多项式(6.2-5)相等, 则可以得到 n 个联立方程。求解 k_i ; $i=1, 2, \dots, n$ 。当 Σ_0 是完全可控的时候, 该解是唯一的。

2. 通过第二可控标准形求解的方法

将完全可控的 $\Sigma_0 = (A, B)$ 通过坐标变换 $\{R\}$ 变换到第二可控标准形 $\tilde{\Sigma}_0 = (\tilde{A}, \tilde{B})$ 。 $\tilde{\Sigma}_0$ 的状态反馈阵 \tilde{K} 可按式(6.2-4)求出, 再经 $\{R^{-1}\}$ 变换, 即可得 Σ_0 的状态反馈阵 $K = \tilde{K}R^{-1}$ 。

综合步骤如下:

- (1) 判断 $\Sigma_0 = (A, B)$ 的可控性。确定能否完成极点配置的综合任务。
- (2) 由给定的动态指标或极点要求, 确定期望特征多项式(6.2-5)的 n 个系数 a_i^* 。
- (3) 确定开环系统 Σ_0 的特征多项式系数

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n \quad (6.2-6)$$

- (4) 按式(6.2-4)确定 $\tilde{\Sigma}_0$ 的状态反馈阵 \tilde{K} 。
- (5) 确定 Σ_0 化为第二可控标准形 $\tilde{\Sigma}_0$ 的变换阵的逆矩阵 R^{-1} 。

可由 $\tilde{A}R^{-1} = R^{-1}A$ 和 $\tilde{B} = R^{-1}B$ 求出 R^{-1} 。或者按第四章介绍的变换阵 R 形态

$$R = [A^{n-1}B \quad \cdots \quad AB \quad B] \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

求逆, 获得 R^{-1} 。

(6) 确定 Σ_0 完成极点配置任务的状态反馈阵

$$K = \tilde{K}R^{-1}$$

3. 改进算法

基于化第二可控标准形的改进算法步骤如下:

(1) 计算 Σ_0 的可控性矩阵 Q_c , 判其完全可控性, 以确定极点配置任务能否完成。

(2) 按式(6.2-5)确定期望特征多项式 $f^*(\lambda)$ 。

(3) 求 Q_c 矩阵的逆矩阵的最后一行

$$a^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] Q_c^{-1} \quad (6.2-7)$$

(4) 确定完成极点配置任务的状态反馈阵

$$K = -a^T f^*(A) \quad (6.2-8)$$

改进算法比方法(2.)省了计算开环特征多项式(6.2-6)的步骤, 而且 $n \times n$ 矩阵求逆只计算一行; 增加了矩阵 A 自乘的乘法运算。

三、多输入系统的极点配置方法

(1) 利用 § 6-1(六)中的方法, 将 $\Sigma_0 = (A, B)$ 经状态反馈 $\hat{K}P^{-1}$ 化为对第一个输入分量完全可控的单输入系统 $\hat{\Sigma} = (A + B\hat{K}P^{-1}, b_1)$ 。

(2) 对 $\hat{\Sigma}$ 按本节(二)中的(2.)或(3.)方法求出极点配置的状态反馈行向量 k^T 。

(3) 将行向量 k^T 填在 $\hat{K}P^{-1}$ 的为零的第一行上。

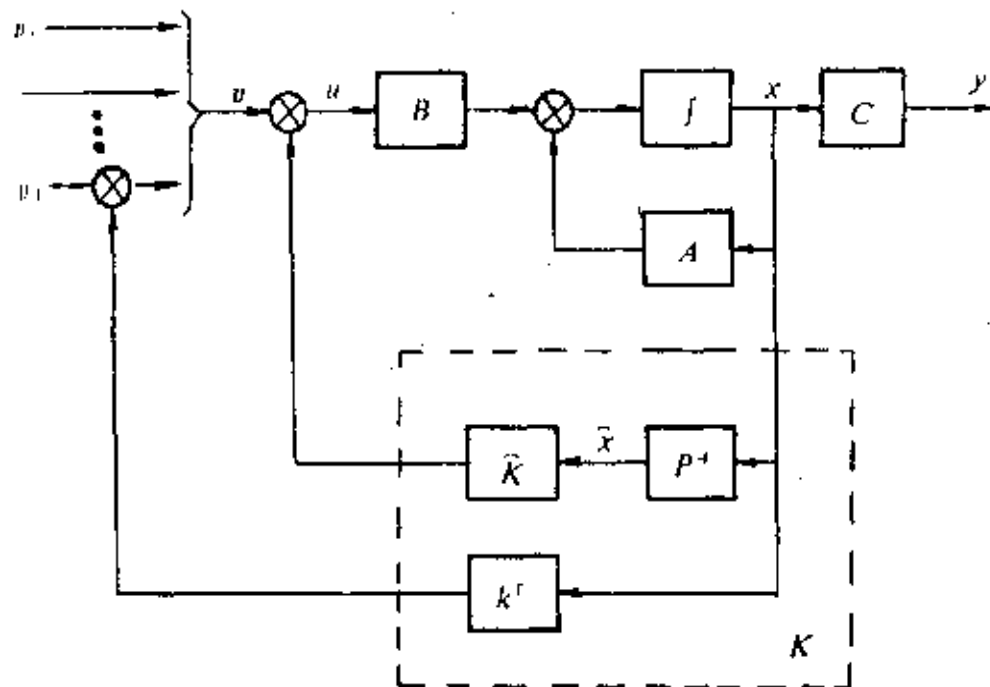


图 6-4 多输入系统的极点配置

上述方法的结构示意图见图 6-4。

当 Σ_0 的阶次 n 较低的时候, 进行手工计算时可以采用(二)中的方法(1.)进行。步骤如下:

(1) 确定期望特征多项式(6.2-5)。

(2) 设待求的 $r \times n$ 个状态反馈阵元素为未知数

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \dots & k_{rn} \end{bmatrix}$$

(3) 计算含未知数 k_i 的闭环特征多项式, 令其与期望特征多项式相等

$$\det(\lambda I - A - BK) = f^*(\lambda)$$

比较 λ 的同幂次系数, 得到 n 个联立方程。

(4) 解该联立方程组。当 Σ_0 完全可控时, k_i 有解。但是由 n 个方程解 $r \times n$ 个未知数, 解不唯一。如果 Σ_0 不完全可控, 期望极点组包含有 Σ_0 不可控模态的全部极点时, k_i 仍然有解, 也不唯一; 否则 k_i 无解。

四、闭环系统的镇定问题

1. 定义

对于线性定常系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$, 如果存在状态反馈阵 K (或者输出反馈阵 H), 使闭环系统 $\Sigma_K = (A + BK, B, C)$ (或者 $\Sigma_H = (A + BHC, B, C)$) 是渐近稳定的, 则称系统 Σ_0 是状态反馈可镇定的 (或者输出反馈可镇定的)

2. 可镇定的条件

结论 I: 一个线性定常系统状态反馈可镇定的充分必要条件是, 其不可控部分是渐近稳定的。

一个完全可控的系统一定是可镇定的; 但一个可镇定的系统不一定是可控的。镇定问题的综合方法与极点配置极为相似, 只要求闭环极点具有负的实部。具体步骤参看例 6.2-7。

结论 II: 一个线性定常系统输出反馈可镇定的充分必要条件是:

(1) 系统可控又可观测部分是可镇定的;

(2) 系统的其余三部分是渐近稳定的。

由于输出反馈至多可以改变系统可控又可观测部分的极点, 所以要求其是三部分是渐近稳定, 又由于输出反馈不能任意配置可控又可观测部分的极点, 所以要求其是可镇定的。实现可控又可观测部分可镇定的条件, 已经由决策的方法解决, 这里不论述了。

[例 题]

例 6.2-1 受控系统的状态模型如下:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

求状态反馈阵 K 使闭环极点 $\lambda_{1,2} = -1 \pm j2$ 。

解 (1) 判断系统的可控性

系统的可控性矩阵

$$Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

满秩。状态是完全可控的, 可以由状态反馈任意配置闭环的极点。

(2) 确定闭环系统的期望特征多项式

由闭环的期望极点 $\lambda_{1,2} = -1 \pm j2$, 可以确定闭环的期望特征多项式

$$f^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

(3) 确定极点配置的状态反馈阵

采用三种方法进行综合:

方法一: 设状态反馈阵为

$$K = [k_1 \quad k_2]$$

得闭环系统的特征多项式

$$\begin{aligned} f_K(\lambda) &= \det[\lambda I - A - BK] = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 - 3k_1 & 3 - 3k_2 \\ -4 - k_1 & \lambda + 9 - k_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + (11 - 3k_1 - k_2)\lambda + (30 - 24k_1 - 14k_2) \end{aligned}$$

令 $f_K(\lambda) = f^*(\lambda)$, 由 λ 的同次幂系数相等得

$$\begin{cases} 11 - 3k_1 - k_2 = 2 \\ 30 - 24k_1 - 14k_2 = 5 \end{cases}$$

解出, $k_1 \approx 5.6, k_2 \approx -7.8$ 。所以, 实现闭环极点配置的状态反馈阵

$$K = [k_1 \quad k_2] = [5.6 \quad -7.8]$$

方法二: 化第二种可控规范形。

计算开环系统 $\Sigma_0 = (A, B)$ 的特征多项式

$$f_0(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 & 3 \\ -4 & \lambda + 9 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 11\lambda + 30$$

确定 $\Sigma_0 = (A, B)$ 化第二可控规范形的变换阵

$$R = [AB \quad B] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 3 \\ 14 & 1 \end{bmatrix}$$

其逆矩阵

$$R^{-1} = -\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -14 & 24 \end{bmatrix}$$

所以, 实现闭环极点配置的状态反馈阵

$$\begin{aligned} K &= [a_2 - a_2^* \quad a_1 - a_1^*] R^{-1} \\ &= [30 - 5 \quad 11 - 2] \left(-\frac{1}{18}\right) \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -14 & 24 \end{bmatrix} = [5.6 \quad -7.8] \end{aligned}$$

方法三: 改进算法

计算可控性矩阵 Q_c 的逆矩阵的最后一行

$$\alpha^T = [0 \quad 1] Q_c^{-1} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{18} [-1 \quad 3]$$

将开环的系统矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$ 代入期望特征多项式

$$\begin{aligned} f^*(A) &= A^2 + 2A + 5I \\ &= \begin{bmatrix} -8 & 33 \\ -44 & 69 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 8 & -18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 27 \\ -36 & 56 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以, 实现闭环极点配置的状态反馈阵

$$K = -\alpha^T f^*(A) = -\frac{1}{18} [-1 \quad 3] = \begin{bmatrix} -7 & 27 \\ -36 & 56 \end{bmatrix} = [5.6 \quad -7.8]$$

三种方法的结果是一致的。

例 6.2-2 已知受控系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+2)}$$

试设计状态反馈阵 K , 使闭环系统的极点为 $-2, -1 \pm j$ 。

解 (1) 由于传递函数 $G(s)$ 没有零极对消现象, 所以该传递函数的三阶实现是可控且可观的。故可以直接写出第二可控规范形实现

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [10 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(2) 设反馈增益矩阵 \tilde{K} 为

$$\tilde{K} = [\tilde{k}_1 \ \tilde{k}_2 \ \tilde{k}_3]$$

其闭环系统的特征多项式为

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det[\lambda I - \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}] \\ &= \lambda^3 + (3 - \tilde{k}_1)\lambda^2 + (2 - \tilde{k}_2)\lambda - \tilde{k}_3 \end{aligned}$$

(3) 根据极点的期望值, 系统的期望特征多项式为

$$\begin{aligned} f^*(\lambda) &= (\lambda + 2)(\lambda + 1 - j)(\lambda + 1 + j) \\ &= \lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 \end{aligned}$$

(4) 使以上两个多项式对应系数相等, 得:

$$\tilde{k}_1 = -4, \quad \tilde{k}_2 = -4, \quad \tilde{k}_3 = -1$$

即状态反馈阵

$$K = [-4 \quad -4 \quad -1]$$

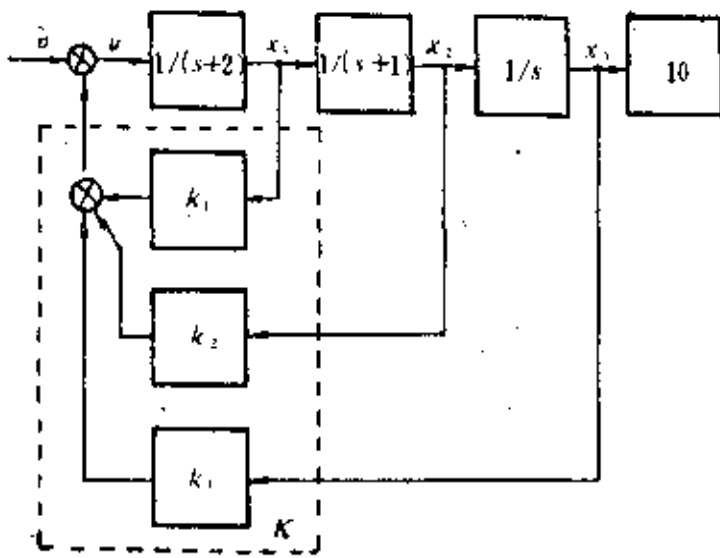


图 6-5 系统串联分解及状态反馈结构图

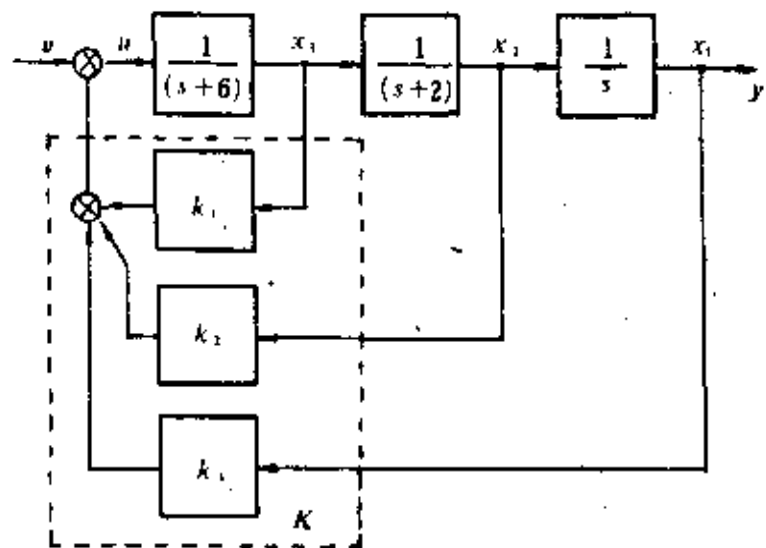


图 6-6 例 6.2-3 系统结构图

以上计算由于传递函数 $G(s)$ 的实现一开始就采用了可控规范形, 从而在计算反馈增益阵时可直接比较闭环系统的特征多项式 $f(\lambda)$ 和期望特征多项式 $f^*(\lambda)$ 的相同幂的系数而得结果, 不需要做状态变换。但是从工程实际上看, 可控规范形实现的状态变量信息在物理上是很难采集的。因此, 如果使所设计出来的反馈增益阵能在真实系统上方便地建立起来, 应当尽可能地选择那些状态变量易于采集的实现。对于本例来说, 选择按串联分解所得到的状态方程做为 $G(s)$ 的实现较为合理。

该系统按图 6-5 串联分解的结构选择状态变量, 得状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [10 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

状态变量 x_1, x_2, x_3 实际上是串联子系统 $1/s, 1/(s+1), 1/(s+2)$ 的输出, 其信息较为容易采集。图 6-5 已标示了闭环的结构, 其中反馈增益阵

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3]$$

则闭环特征多项式

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det[\lambda I - A - BK] \\ &= \lambda^3 + (3 - k_3)\lambda^2 + (2 - k_2 - k_3)\lambda - k_1 \end{aligned}$$

令 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$, 比较相应系数得

$$k_1 = -4, k_2 = -3, k_3 = -1.$$

即状态反馈阵

$$K = [-4 \quad -3 \quad -1]$$

注意到串联分解实现与可控规范形实现二者间是线性非奇异变换关系

$$x = R\tilde{x}$$

其中:

$$R = [A^2B \quad AB \quad B] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

它的逆矩阵

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

而有如下关系:

$$\tilde{K}R^{-1} = [-4 \quad -4 \quad -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [-4 \quad -3 \quad -1] = K$$

例 6.2-3 给定图 6-6 的受控系统, 试设计该系统的状态反馈阵 K , 使闭环系统满足下列动态指标:

- (1) 输出超调量 $\sigma \leq 5\%$;
- (2) 峰值时间 $t_p \leq 0.5s$ 。

解 (1) 将给定综合指标化为期望极点模型

由于本例无开环零点, 故闭环系统的动态性能完全由闭环极点决定。显然, 期望极点数 $n=3$ 。选择一对主导极点对和一个远离极点, 后者对闭环系统性能的影响很少。就是说, 把系统看做只有主导极点对的二阶系统。

主导极点对 $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ 。其中 ζ 和 ω_n 是二阶系统的阻尼系数和自振频率。

利用二阶模型的超调量和峰值时间的公式

$$\sigma = \exp(-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}) \leq 5\%$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \leq 0.5$$

得出

$$\zeta \leq 0.707 \quad \omega_n \geq 9$$

为计算方便,取 $\zeta = 0.707, \omega_n = 10$ 。主导极点对

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n = -7.07 \pm j7.07$$

而远离极点 λ_3 应选择得使其和原点距离远大于主导极点和原点的距离 $|\lambda_1| = \omega_n$ 。取 $|\lambda_3| = 10|\lambda_1|$, 则 $\lambda_3 = -100$ 于是期望特征多项式

$$\begin{aligned} f^*(\lambda) &= (\lambda + 100)(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2) \\ &= (\lambda + 100)(\lambda^2 + 14.2\lambda + 100) \\ &= \lambda^3 + 114.2\lambda^2 + 1510\lambda + 10000 \end{aligned}$$

(2) 确定系统的状态空间表达式

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

开环系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 特征多项式为

$$f_0(\lambda) = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 72\lambda$$

(3) 利用等价关系计算,化第二可控规范形的变换矩阵 R 的逆矩阵可控规范形 $\tilde{\Sigma}_0 = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 如下:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -72 & -18 \end{bmatrix}; \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \tilde{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

令变换阵的逆为

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

由 $\tilde{B} = R^{-1}B$ 知

$$r_{13} = 0, r_{23} = 0, r_{33} = 1$$

由 $C = \tilde{C}R^{-1}$ 知

$$r_{11} = 1 \quad r_{12} = 0$$

又由 $\tilde{A}R^{-1} = R^{-1}A$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -72 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

得出

$$r_{21} = 0 \quad r_{22} = 1 \quad r_{31} = 0 \quad r_{32} = -12$$

即

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) 确定对可控规范形 $\tilde{\Sigma}_0$ 的状态反馈阵

$$\tilde{K} = [0 \ -10000 \ 72 \ -1510 \ 18 \ -114.2] = [-10000 \ -1438 \ -96.1]$$

(5) 对 \tilde{K} 做反变换 R^{-1} , 确定原受控系统 Σ_0 的状态反馈阵

$$K = \tilde{K}R^{-1} = [-10000 \ -1438 \ -96.1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [-10000 \ -284.8 \ -96.1]$$

例 6.2-4 已知倒立摆杆系统的线性化模型 $\Sigma_0 = (A, B)$ 如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

试分析其稳定性, 并设计状态反馈阵 K 使闭环极点为 $-1, -2, -1 \pm j$.

解 (1) 稳定性分析

倒立摆杆系统线性化模型的特征多项式

$$f_c(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^4 - 11\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 11)$$

显然, 极点为 $0, 0, \sqrt{11}, -\sqrt{11}$, 是不稳定的。这和人们从物理上的预料是一致的。

(2) 验证可控性

可控性矩阵

$$Q_c = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -11 \\ -1 & 0 & -11 & 0 \end{bmatrix}$$

满秩。所以, 系统状态是完全可控, 任意配置闭环极点的状态反馈阵 K 是存在的。

(3) 计算状态反馈阵

采用控制律 $u = V + Kx$ 。令

$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$$

闭环的系统矩阵

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 - 1 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & 11 - k_3 & -k_4 \end{bmatrix}$$

其特征多项式

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A - BK)$$

$$= \lambda^4 + (k_1 - k_2)\lambda^3 + (k_3 - k_1 - 11)\lambda^2 + 10k_2\lambda + 10k_4$$

由给定极点可以确定期望的特征多项式

$$\begin{aligned} f^*(\lambda) &= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda+2) \\ &= \lambda^4 + 5\lambda^3 + 10\lambda^2 + 10\lambda + 4 \end{aligned}$$

令 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$, 计算对应系数相等得

$$\begin{aligned} k_1 &= 0.4 & k_3 &= 10 + 11 + k_1 = 21.4 \\ k_2 &= 1 & k_4 &= 5 + k_2 = 6 \end{aligned}$$

即, 状态反馈阵

$$K = [0.4 \quad 1 \quad 21.4 \quad 6]$$

例 6.2-5 给定多输入系统 $\Sigma_0 = (A, B)$ 如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试求状态反馈阵 K 使闭环极点配置在 $-1, -2$ 上。

解 在例 6.1-2 中已验证该系统是完全可控的。当采用如下控制策略

$$u = \bar{V} + \bar{K}x = \bar{V} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

使闭环系统 $\Sigma_{\bar{K}} = (A + B\bar{K}, B)$ 有

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \bar{V}$$

对第一个输入分量 \bar{v}_1 完全可控。

对 $\Sigma_{\bar{K}}$ 采用控制策略

$$\bar{V} = V + \hat{K}x = V + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

可以任意配置闭环的极点。闭环系统矩阵

$$A + B\bar{K} + B\hat{K} = \begin{bmatrix} 2+k_1 & k_2-1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

特征多项式

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(\lambda I - A - B\bar{K} - B\hat{K}) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 - k_1 & 1 - k_2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + (-2 - k_1)\lambda + 1 - k_2 \end{aligned}$$

由期望极点 $-1, -2$, 得期望的特征多项式

$$f^*(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

令 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$ 得

$$k_1 = -5 \quad k_2 = -1$$

即

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

完成任务总的反馈阵

$$K = \bar{K} + \hat{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

显见,实现对第一个输入可控的反馈阵 \tilde{K} 的第一行肯定是全零行;而实现单输入极点配置的反馈阵 \tilde{K} 仅在第一行可能取非零的数值。

校核:闭环系统 $\Sigma_k = (A+BK, B)$ 的系统矩阵

$$A+BK = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征多项式

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A - BK) = \det \begin{bmatrix} \lambda+3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = f^*(\lambda)$$

即,其极点配在期望的位置 $-1, -2$ 上了。

例 6.2-6 研究受控系统传递函数

$$G_o(s) = \frac{10(s+1)}{s(s+1)(s+2)}$$

采用状态反馈配置闭环极点 $-2, -1 \pm j$ 的可能性。

解 受控系统是一个单输入单输出系统,传递函数存在零极对消,其三阶实现不会是可控又可观测的。

(1) 如果选择可控实现,则状态是完全可控的,但不会是完全可观测的。可以任意配置其闭环极点。其可控规范形实现中的 \tilde{A}, \tilde{B} 阵在例 6.2-2 中已给出, $\tilde{C} = [10 \ 10 \ 0]$ 。实现闭环极点配置在 $-2, -1 \pm j$ 的反馈阵 $\tilde{K} = [-4 \ -4 \ -1]$ 。

(2) 而如果选择可观测实现

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \ 0 \ 1]$$

则状态不是完全可控的,则不能任意配置极点。

令反馈阵 $K = [k_1, k_2, k_3]$, 闭环特征多项式

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det[\lambda I - A - BK] \\ &= \lambda^3 + (10k_1 + 10k_2 + 3)\lambda^2 + (30k_1 + 40k_2 + 10k_3 + 2)\lambda \\ &\quad + (20k_1 + 30k_2 + 10k_3) \end{aligned}$$

而期望特征多项式

$$f^*(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4$$

令 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$, 比较相应系数

$$10k_1 + 10k_2 = 1 \quad \text{①}$$

$$30k_1 + 40k_2 + 10k_3 = 4 \quad \text{②}$$

$$20k_1 + 30k_2 + 10k_3 = 4 \quad \text{③}$$

由式②中减去式③,得 $10k_1 + 10k_2 = 0$, 与式①矛盾, K 无解。说明用状态反馈的方法不能将闭环极点配置在 $-2, -1 \pm j$ 上。

(3) 进一步的讨论

设传递函数 $G_o(s)$ 中有 $(s+1)$ 的相消因子。说明 $\lambda = -1$ 形成系统的不可控模态,它也是状态反馈不能改变的特征值。

对闭环特征多项式 $f(\lambda)$ 作因式分解:

$$f(\lambda) = (\lambda+1)[\lambda^2 + (10k_1 + 10k_2 + 2)\lambda + (20k_1 + 30k_2 + 10k_3)]$$

说明不论 k_1, k_2, k_3 如何选择, 闭环系统始终有一个 $\lambda = -1$ 的极点。

如果期望极点中包括有 $\lambda = -1$, 则这组期望极点可由状态反馈阵 K 进行配置。

例如, 使闭环极点为 $-1, -1 \pm j$, 则期望特征之项式为

$$f^*(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda + 2$$

令 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$, 相应系数相等, 得

$$\begin{aligned} 10k_1 + 10k_2 &= 0 \\ 30k_1 + 40k_2 + 10k_3 &= 2 \\ 20k_1 + 30k_2 + 10k_3 &= 2 \end{aligned}$$

解出

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 0 \\ k_2 + k_3 &= 0.2 \end{aligned}$$

解不唯一。所以, 实现闭环极点 $-1, -1 \pm j$ 配置的状态反馈阵

$$K = [a \quad -a \quad 0.2 + a]$$

其中, a 为任意常数。

例 6.2-7 已知双输入单输出系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

检查其可控性, 可观测性及输出反馈可镇定性。

解 系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 中矩阵对 (A, C) 组成可观测规范形。所以, 系统 Σ_0 是完全可观测的。

下面分别检查系统由每个输入分量 u_1, u_2 的可控性。

$$\begin{aligned} Q_{c1} &= [b_1 \quad Ab_1 \quad A^2b_1] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \\ Q_{c2} &= [b_2 \quad Ab_2 \quad A^2b_2] = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -25 \\ -2 & -1 & 10 \\ 1 & -5 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

都是非奇异矩阵。这样, 由每个输入分量看, 系统都是独立可控的。

系统 Σ_0 的特征多项式

$$f_0(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 5$$

显然是不稳定的。

对 Σ_0 采用输出反馈控制策略

$$u = V + Hy$$

其中: $H = [h_1 \quad h_2]^T$ 。则闭环系统 $\Sigma_H = (A + BHC, B, C)$ 的系统矩阵

$$A + BHC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5-2h_1 \\ 1 & 0 & h_1-2h_2-1 \\ 0 & 1 & h_2-3 \end{bmatrix}$$

则闭环特征多项式

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (3-h_2)\lambda^2 + (1-h_1+2h_2)\lambda + (2h_1-5)$$

如果选择输出反馈的两个增益系数为

$$h_1=3 \quad h_2=2$$

则闭环特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

应用劳斯判据知道闭环是渐近稳定的。实际上闭环极点是 $\lambda_1 = -0.57, \lambda_{2,3} = -0.22 \pm j1.3$ 。

所以,系统是输出反馈可镇定的。

进一步的讨论:

(1) 不管怎样选择 h_1 和 h_2 不可能使闭环特征多项式 $f(\lambda)$ 的三个系数为任意值。所以,本例中输出反馈不能任意配置闭环极点。

(2) 如果只反馈到第一个输入端,即 $h_2=0$ 。则闭环特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + (1-h_1)\lambda + (2h_1-5)$$

显然找不到合适的实数 h_1 , 使 $(1-h_1)$ 和 $(2h_1-5)$ 均为正数。则闭环系统不可能镇定。

(3) 如果只反馈到第二个输入端,即 $h_1=0$

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (3-h_2)\lambda^2 + (1+2h_2)\lambda - 5$$

常数项为负,闭环不可能镇定。

§ 6-3 输入变换阵和稳态特性

[内容提要]

对单输入单输出受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$, 其传递函数 $G_0(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 。当输入 u 为单位阶跃函数 $1(t)$ 时, 其跟踪误差

$$\begin{aligned} e_p &= \lim_{t \rightarrow \infty} [1(t) - y(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} s \left[\frac{1}{s} - \frac{G(s)}{s} \right] \\ &= 1 - \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) = 1 - C(-A)^{-1}B \end{aligned}$$

当取控制律 $u = V + Kx$ 时, 闭环对单位阶跃输入的跟踪误差为

$$e_p = 1 - C(-A - BK)^{-1}B \quad (6.3-1)$$

式中, 状态反馈阵 K 是 n 维行向量, 由 n 个期望极点唯一确定。随之, 跟踪误差就确定了, 没有调整的余地。

当采用如下控制律

$$u = FV + Kx \quad (6.3-2)$$

闭环状态空间模型为

$$\dot{x} = (A + BK)x + BFV \quad (6.3-3)$$

$$y = Cx \quad (6.3-4)$$

传递函数为

$$G_K(s) = C(sI - A - BK)^{-1}BF \quad (6.3-5)$$

对单位阶跃输入的跟踪误差为

$$e_p = 1 - C(-A - BK)^{-1}BF \quad (6.3-6)$$

可以由输入变换系数 F 来调整。

闭环对单位阶跃输入的跟踪误差还可以表示为

$$e_p = 1 - \frac{\beta_0}{a_0^*} F \quad (6.3-7)$$

式中: a_0^* 是闭环期望特征多项式的常数项;

β_0 是传递函数分子多项式的常数项。

[例 题]

例 6.3-1 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 1]$$

试设计状态反馈阵 K 和输入变换系数 F , 使闭环极点为 $-0.1 \pm j2$, 并使 $|e_p| \leq 0.1$ 。

解 可计算出满足极点配置的反馈阵

$$K = [6.96 \quad -10.07]$$

而期望特征多项式 $f^*(\lambda)$ 的常数项

$$a_0^* = 4.01$$

系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 化第二可控标准形 $\tilde{\Sigma}_0 = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 的变换矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 24 & 3 \\ 14 & 1 \end{bmatrix}$$

则第二可控标准形 $\tilde{\Sigma}_0$ 的输出矩阵

$$\tilde{C} = CR = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 24 & 3 \\ 14 & 1 \end{bmatrix} = [38 \quad 4]$$

即传递函数的分子多项式是 $4s + 38$ 。所以, 其常数项

$$\beta_0 = 38$$

跟踪误差由式(6.3-7)知

$$|e_p| = \left| 1 - \frac{\beta_0}{a_0^*} F \right| = \left| 1 - \frac{38}{4.01} F \right| \leq 0.1$$

解出输入变换系数

$$0.095 \leq F \leq 0.116$$

选择状态反馈阵 K 及输入变换系数 F 为

$$K = [6.96 \quad -10.07] \quad F = 0.1$$

可以使闭环极点为 $-0.1 \pm j2$, 而且稳态跟踪误差

$$e_p = \left| 1 - \frac{38}{4.01} \times 0.1 \right| = 0.095 < 0.1$$

满足要求。

§ 6-4 状态观测器的设计

[内容提要]

状态反馈需要取出系统的全部状态变量,而在实际系统中,往往不是所有状态变量都可以测量取出的。这就要求用系统可以测量取出的输入量 u 和输出量 y 重新构造全部状态。

一、状态观测器的定义

对受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$, 用其输入 u 和输出 y 做为输入量重新构造动态系统 Σ_1 , 使 Σ_1 的状态或者输出量 \hat{x} 与原系统状态 x 间满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x(t) - \hat{x}(t)] = 0 \quad (6.4-1)$$

则称 \hat{x} 是状态 x 的渐近估计, 又称重构状态; 称 Σ_1 是受控系统 Σ_0 的状态观测器, 简称观测器。

二、全维观测器的结构

全维观测器的状态模型如下:

$$\dot{\hat{x}} = (A - K_0 C)\hat{x} + Bu + K_0 y \quad (6.4-2)$$

式中: \hat{x} 是观测器的 n 维重构状态;

K_0 是观测误差输出反馈阵, 为 $n \times m$ 阶。

全维观测器的结构特点是:

(1) 与受控系统 Σ_0 的维数相同。

(2) 由受控系统状态模型类似的模型 $\dot{x} = Ax + Bu$ 加上观测误差 $x - \hat{x}$ 的反馈构成。加入观测误差反馈的目的是加快观测误差的衰减速率。为了便于实现, 反馈采用 $K_0(y - \hat{y}) = K_0 y - K_0 C \hat{x}$ 的形式实现。参见图 6-7 所示。

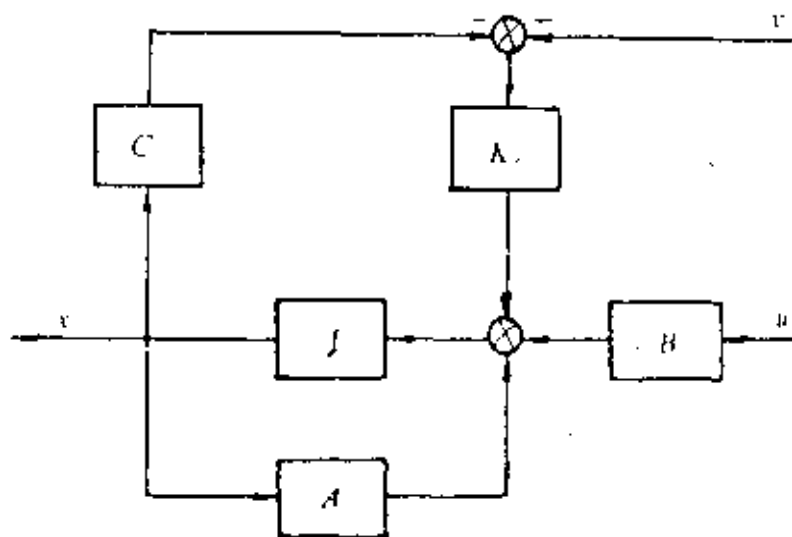


图 6-7 全维观测器的结构

(3) 观测误差的方程为

$$\dot{x} - \hat{x} = (A - K_0 C)(x - \hat{x}) \quad (6.4-3)$$

当 Σ_0 是完全可观测时, 通过观测误差输出反馈 K_0 , 可以任意配置矩阵 $A - K_0 C$ 的 n 个极点。从而使观测误差具有任意快的衰减速率。但是为防止观测器频带过宽而引入不必要的噪声干扰, 通常使 $A - K_0 C$ 的极点比 A 或者 $A + BK$ 的极点实部略负即可。

三、观测误差输出反馈阵 K_0 的计算方法

1. 令含有待设计参数 K_e 的观测器特征多项式与期望特征多项式 $f^*(\lambda)$ 相等

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A + K_e C) = f^*(\lambda) \quad (6.4-4)$$

由 λ 同次幂系数相等解出含待设计参数阵 K_e 。

2. 对于高阶系统,上述方法不便计算。可以把系统 Σ_0 经坐标变换阵 T 化为第二可观测标准形 $\tilde{\Sigma}_0$ 。先计算 $\tilde{\Sigma}_0$ 下的观测误差输出反馈阵 \tilde{K}_e , 然后再做反变换,得 Σ_0 观测器 Σ_e 的 K_e 阵

$$K_e = T \tilde{K}_e \quad (6.4-5)$$

3. 利用对偶原理。当 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 完全可观测时,其对偶系统观测器 $\Sigma_0^* = (A^T, C^T, B^T)$ 必完全可控。后者可以任意配置闭环 $A^T + C^T K$ 的极点,可按 § 6-2 中方法求出 K 。则 Σ_0 观测器的系统矩阵 $A - K_e C$ 中配置同样极点需 $K_e = -K^T$ 。

四、降维观测器的设计步骤

1. 当 $\text{rank} C = m$ 时, m 个输出变量彼此间是独立的,可由它们组合成 m 个状态变量的信息。这样只要重构其余的 $n - m$ 个状态变量就够了。所以降维观测器的最小维数是 $n - \text{rank} C$ 。

2. 系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 按输出分解。坐标变换阵的逆矩阵的前 m 行为满秩的输出矩阵 C , 后 $n - m$ 行使其为非奇异矩阵即可:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ * \end{bmatrix} \quad (6.4-6)$$

变换后系统的状态

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \dots \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = T^{-1} x = \begin{bmatrix} C \\ \dots \\ * \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} Cx \\ \dots \\ *x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \quad (6.4-7)$$

即 m 维分状态 $\tilde{x}_1 = y$, 只要重构 $n - m$ 维分状态 \tilde{x}_2 。

变换后系统分解为两个子系统

$$\Sigma_1: \begin{cases} y = \tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_1 = A_{11} \tilde{x}_1 + A_{12} \tilde{x}_2 + B_1 u \end{cases}$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_2 = A_{21} \tilde{x}_1 + A_{22} \tilde{x}_2 + B_2 u = A_{22} \tilde{x}_2 + (B_2 u + A_{21} y) \\ \eta = A_{12} \tilde{x}_2 = y - A_{11} y - B_1 u \end{cases}$$

3. 对 Σ_2 构造全维 $(n - m)$ 观测器。其输入包括两部分: $B_2 u + A_{21} y$; 输出是 $\eta = A_{12} \tilde{x}_2$ 。 Σ_2 为

$$\dot{Z}_2 = (A_{22} - H A_{12}) Z_2 + (B_2 u + A_{21} y) + H(y - A_{11} y - B_1 u) \quad (6.4-8)$$

4. 消去式(6.4-8)右端 y 的导数, 令

$$\tilde{Z}_2 = Z_2 - H y \quad (6.4-9)$$

则(6.4-8)式化为

$$\dot{\tilde{Z}}_2 = (A_{22} - H A_{12}) Z_2 + (B_2 - H B_1) u + (A_{21} - H A_{11}) y \quad (6.4-10)$$

变量 Z_2 是分状态 \tilde{x}_2 的重构值。

5. 原系统状态 x 的重构值

$$\hat{x} = T = \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (6.4-11)$$

[例 题]

例 6.4-1 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

试设计观测器, 使极点为 -3 两重根。

解 (1) 判断可观测性

可观测矩阵

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

满秩。状态完全可观测, 观测器极点可任意配置。

(2) 由期望极点确定期望特征多项式

$$f^*(\lambda) = (\lambda + 3)^2 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

(3) 确定观测误差输出反馈阵 K_e

令 $K_e = [a \quad b]^T$, 则

$$A - K_e C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} -2-a & 1 \\ -b & -1 \end{bmatrix}$$

观测器的特征多项式

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det[\lambda I - A + K_e C] = \det \begin{bmatrix} \lambda + 2 + a & -1 \\ b & \lambda + 1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + (3+a)\lambda + (2+a+b) \end{aligned}$$

令 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$, 可以解出

$$K_e = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(4) 写出观测器的状态方程

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - K_e C)\hat{x} + Bu + Hy \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

例 6.4-2 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

试设计观测器, 使极点配置在 $-3, -4, -5$ 上。

解 (1) 判断可观测性

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

满秩, 状态完全可观测。观测器的极点可以任意配置。

(2) 由期望极点确定期望特征多项式

$$f^*(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda+5) = \lambda^3 + 12\lambda^2 + 47\lambda + 60$$

(3) 确定化第二可观标准形的变换阵 T

受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 的特征多项式

$$f_0(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \lambda^3 - 3\lambda + 2$$

化第二可观标准形的变换阵 T 的逆

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA^2 \\ CA \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则变换阵

$$T = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) 在规范形下的 \tilde{K}_c 矩阵

$$\tilde{K}_c = \begin{bmatrix} a_1^* - a_1 \\ a_2^* - a_2 \\ a_3^* - a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 - 2 \\ 47 + 3 \\ 12 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 \\ 50 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(5) 原系统下的 K_c 矩阵

$$K_c = T\tilde{K}_c = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 58 \\ 50 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 12 \end{bmatrix}$$

(6) 观测器的模型

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - K_c C)\hat{x} + Bu + K_c y \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -20 \\ 3 & -1 & -24 \\ 0 & 2 & -12 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 12 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

(7) 校核

$$\begin{aligned} f_{K_c}(\lambda) &= \det[\lambda I - A + K_c C] = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 20 \\ -3 & \lambda + 1 & 24 \\ 0 & -2 & \lambda + 12 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda + 12)(\lambda^2 - 1) + 2(24\lambda - 24 + 60) \\ &= \lambda^3 + 12\lambda^2 + 47\lambda + 60 = f^*(\lambda) \end{aligned}$$

例 6.4-3 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1]$$

试设计降维观测器使极点为 -10 。

解 (1) 判断可观测性

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

满秩,系统完全可观测,可以构造观测器。

(2)确定 Σ_0 按输出的分解形式

由于 $\Sigma_0=(A,B,C)$ 中 $C=[0 \ 1]$,即输出 $y=x_2$ 。不必重构 x_2 。而且系统已按输出分解

$$\begin{aligned}\Sigma_2: \dot{x}_2 &= x_1 = \dot{y} \\ \Sigma_1: \dot{x}_1 &= -5x_1 + 100u \\ \eta &= x_1 = \dot{y}\end{aligned}$$

(3)构造 x_1 的观测器

极点要求配置在 -10 上,所以, $-10 = -5 - H$ 。即有误差输出反馈系数 $H=5$ 。状态 x_1 的观测器为:

$$\dot{\hat{x}}_1 = -10\hat{x}_1 + 100u + 5\dot{y}$$

(4)去除输出 y 的导数项

$$\frac{d}{dt}(\hat{x}_1 - 5y) = -10\hat{x}_1 + 100u$$

(5)系统的重构状态

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ y \end{bmatrix}$$

例 6.4-4 已知受控系统 $\Sigma_0=(A,B,C)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -11 & -12 & -12 \\ 13 & 14 & 13 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 1 \ 1]$$

试设计降维观测器,使极点为 $-3, -4$ 。

解 (1)判断系统状态的可观测性

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 5 \\ 23 & 22 & 17 \end{bmatrix}$$

满秩, Σ_0 是完全可观测的。观测器存在。

(2)确定 Σ_0 按输出分解的形式

Σ_0 按输出分解的变换阵 T 及其逆 T^{-1}

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则系统的状态变换结果为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= T \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \\ \tilde{A} &= T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ -1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = [1 \quad 0 \quad 0]$$

其中, $\tilde{x}_1 = y$ 不必重构。

(3) 确定应重构的状态 \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 的子系统 Σ_2

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -11 \\ 3 \end{bmatrix} y \\ \eta = [0 \quad -1] \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \dot{y} - 6y \end{cases}$$

\tilde{x}_2 和 \tilde{x}_3 由中间变量 η 肯定是可观测的。

子系统的特征多项式

$$f_2(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 1 \\ -9 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 9$$

其极点实部为 $-1/2$, 期望极点 $-3, -4$ 位于其左边, 是合理的。

(4) 由期望极点确定期望多项式

$$f^*(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda+4) \\ = \lambda^2 + 7\lambda + 12$$

(5) 确定子系统 Σ_2 基本观测器

令 $H = [h_1 \quad h_2]^T$, 观测器特征多项式

$$f(\lambda) = \det \left[\begin{bmatrix} \lambda+1 & 1 \\ -9 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} (0 \quad -1) \right] = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & 1-h_1 \\ -9 & \lambda-h_2 \end{bmatrix} \\ = \lambda^2 + (1-h_2)\lambda + (9-h_2-9h_1)$$

令 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$, 得

$$H = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

则 Σ_2 的基本观测器

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2/3 \\ 9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -9 \\ 19 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -6 \end{bmatrix} \dot{y}$$

(6) 去除输出 y 的导数项

Σ_2 的观测器方程为

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_2 - \frac{1}{3}y \\ z_3 + 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \\ 9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -9 \\ 19 \end{bmatrix} y$$

其中, z_2, z_3 是状态 \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 的重构值。

(7) 原系统的重构状态

由

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$

知原系统的重构状态 \hat{x} 为

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - z_2 - z_3 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

§ 6-5 带有观测器的反馈控制系统

[内容提要]

一、结构形式与闭环方程

受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 可控又可观。

$$\Sigma_0: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (6.5-1)$$

构造基本观测器

$$\Sigma_1: \dot{\hat{x}} = (A - K_c C)\hat{x} + Bu + K_c y \quad (6.5-2)$$

反馈控制律为重构状态 \hat{x} 的线性反馈律

$$u = V + K\hat{x} \quad (6.5-3)$$

构成闭环系统, 结构参见图 6-8。方程如下

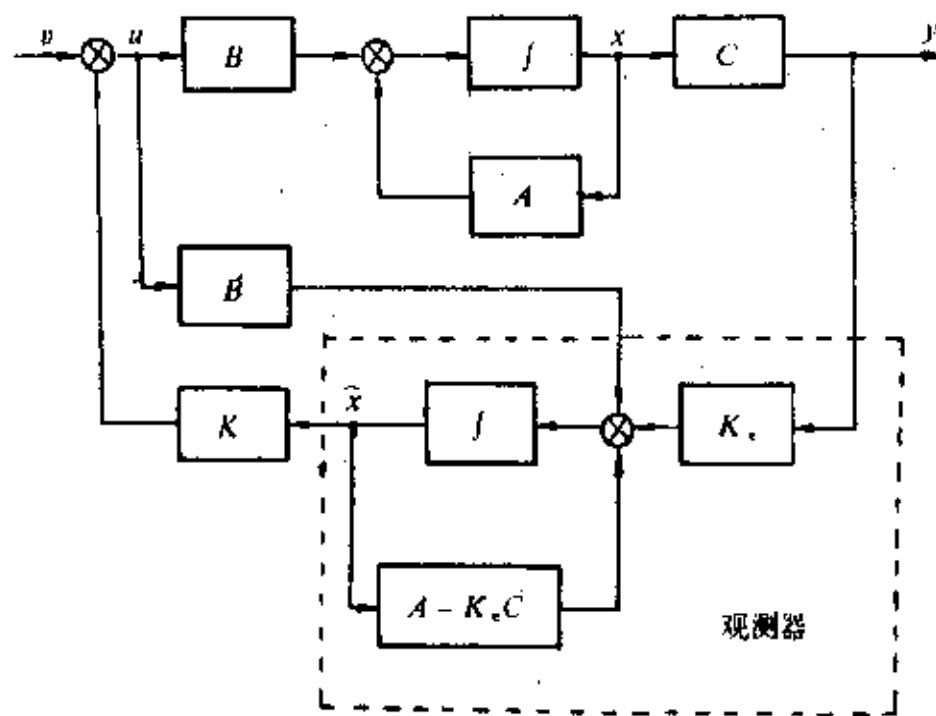


图 6-8 重构状态反馈闭环系统结构图

$$\Sigma_{0-K}: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ K_c C & A + BK - K_c C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} V \\ y = [C \ 0] \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.5-4)$$

二、闭环极点具有分离性

对式(6.5-4)闭环方程做如下坐标变换

$$\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x - \hat{x} \end{bmatrix} \quad (6.5-5)$$

式中, $\tilde{x} = x - \hat{x}$ 是观测误差向量。闭环方程化为如下形式:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BK & BK \\ 0 & A-K_0C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} V \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.5-6)$$

有如下几点结论:

- (1) 闭环系统的维数是 $2n$ 维。
- (2) 闭环系统的特征多项式

$$f_{\Sigma_{-K}}(\lambda) = \det[\lambda I_n - A - BK] \cdot \det[\lambda I_n - A + K_0C] \quad (6.5-7)$$

等于 $(A+BK)$ 的特征多项式和 $(A-K_0C)$ 的特征多项式之积。说明直接状态反馈下闭环 $\Sigma_K = (A+BK, B, C)$ 的极点与观测器 Σ_0 的极点具有分离性。

极点的分离特性说明闭环系统中的状态反馈阵 K 和观测误差输出反馈阵 K_0 可以分别独立地进行设计。

- (3) 当 $\tilde{x}(0) = 0$, 即 $\hat{x}(0) = x(0)$ 时, 有 $\tilde{x}(t) = 0$ 。所以式(6.5-6)蜕化为

$$\dot{x} = (A+BK)x + BV \quad (6.5-8)$$

即带有观测器的反馈控制系统 Σ_{-K} 与直接状态反馈系统 Σ_K 等价。当 $\tilde{x}(0) \neq 0$ 时, $\tilde{x}(t)$ 将以某一衰减速率趋向零。所以, 当时间 t 足够长时(时间长短由 $A-K_0C$ 决定), Σ_{-K} 与 Σ_K 才等价。

(4) 式(6.5-6)是闭环系统按可控性分解形式。观测误差向量 \tilde{x} 对输入 V 是不可控的。所以, 不能靠输入控制的方法调整 $\tilde{x}(t)$ 的衰减速率, 而只能依靠 K_0 阵设计, 配置 $A-K_0C$ 的极点位置来改善 $\tilde{x}(t)$ 的衰减速率。

(5) 由于 \tilde{x} 是不可控的, 闭环传递函数阵中一定发生零极对消, 消去不可控部分 $A-K_0C$ 的极点, 闭环传递函数阵

$$G_{\Sigma_{-K}}(s) = C(sI - A - BK)^{-1}B = G_{\Sigma_K}(s) \quad (6.5-9)$$

与直接状态反馈系统 Σ_K 一致。

三、重构状态反馈和带补偿器输出反馈间的等价性

重构状态反馈闭环系统的结构图如图 6-8 所示。由于观测器是两部分输入 u 和 y 。所以, 其传递函数阵写成两部分 $G_1(s)$ 和 $G_2(s)$, 如图 6-9(a) 所示, 对其做结构图变换可得到图 6-9(b) 或 (c) 的等效系统结构图。图 6-9 中

$$G_0(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (6.5-10)$$

$$G_1(s) = K(sI - A + K_0C)^{-1}B \quad (6.5-11)$$

$$G_2(s) = K(sI - A + K_0C)^{-1}K_0 \quad (6.5-12)$$

$$G_3(s) = I_r + K(sI - A + K_0C - BK)^{-1}B \quad (6.5-13)$$

$$G_4(s) = K(sI - A + K_0C - BK)^{-1}K_0 \quad (6.5-14)$$

由图 6-9 知, 重构状态反馈系统和带补偿器输出反馈系统是等价的, 后者的补偿器有两部分: 象图 6-9(c) 中的反馈校正 $G_2(s)$ 及串联校正 $G_3(s)$; 象图 6-9(b) 中的反馈校正 $G_4(s)$ 及

输入补偿 $G_3(s)$ 。当参考输入 $V=0$ 时, 图 6-9(b)蜕化为只有反馈校正 $G_1(s)$ 。

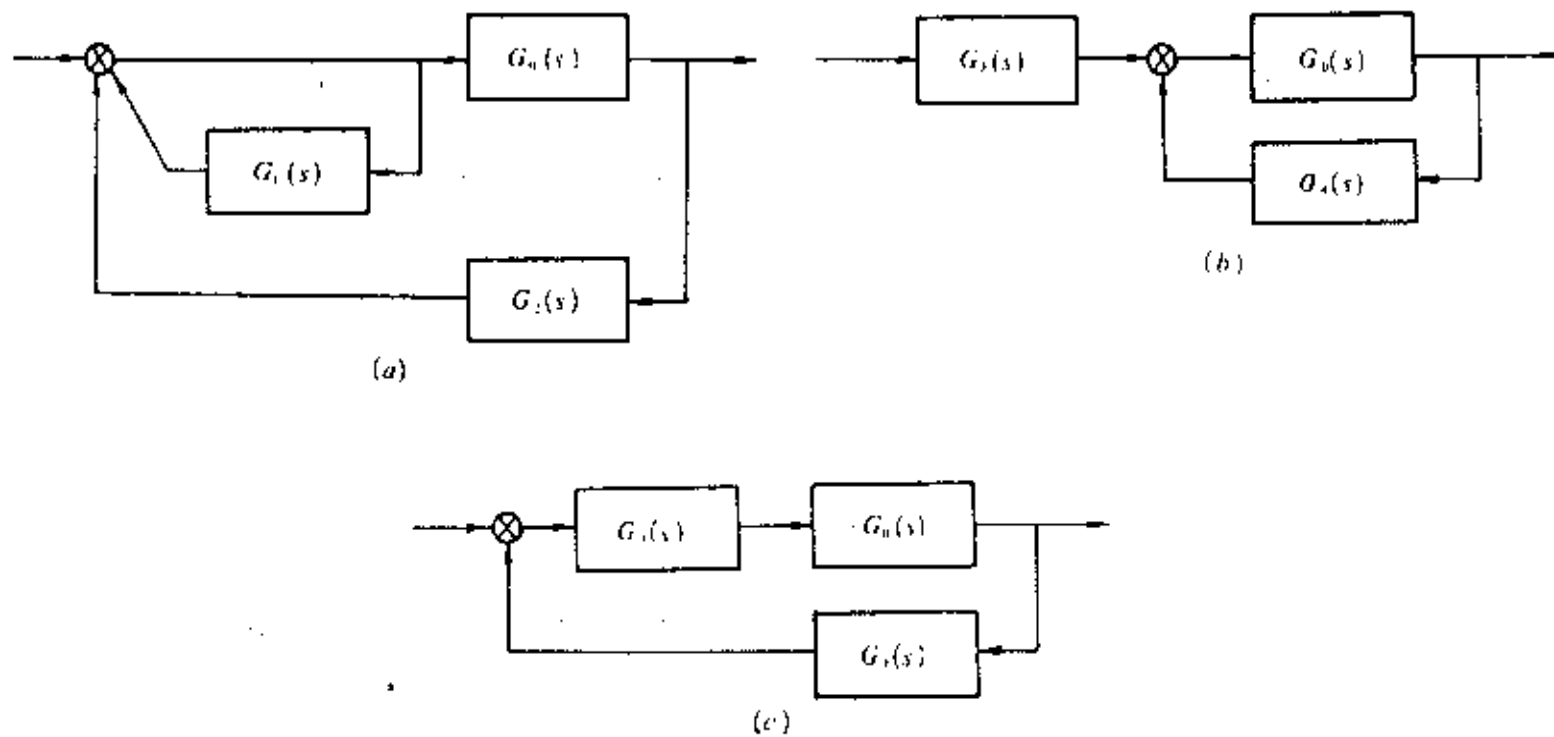


图 6-9 等效闭环系统

[例 题]

例 6.5-1 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0]$$

要求实现闭环阻尼比 $\zeta = 0.707$, 无阻尼自然振荡频率 $\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ 。

- (I) 采用重构二维状态反馈的方案;
- (II) 采用输出反馈加重构一维状态反馈方案。

解 (1) 验证系统的可控性和可观测性

$$Q_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 100 & -500 \end{bmatrix}$$

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

均满秩。状态完全可控且可观测。闭环极点任意配置的反馈阵 K 及观测器极点能任意配置的阵 K , 均存在。由极点分离性原理, 可以分别独立地进行设计。

(2) 确定闭环极点配置的反馈阵

由闭环极点要求: $\zeta = 0.707, \omega_n = 10$ 知闭环期望极点为 $\lambda_{1,2} = -7.07 \pm j7.07$, 则期望特征多项式为

$$f^*(\lambda) = \lambda^2 + 14.14\lambda + 100$$

令反馈阵 $K = [k_1, k_2]$, 则闭环特征多项式

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det[\lambda I - A - BK] \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -100k_1 & \lambda + 5 - 100k_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + (5 - 100k_2)\lambda - 100k_1 \end{aligned}$$

令 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$ 得:

$$k_1 = -1 \quad k_2 = -0.0914$$

(3) 设计基本观测器构成重构状态反馈系统

取观测器的期望极点比 $A+BK$ 的极点略负, 如取为 $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = -10$, 以保证观测误差有较快的衰减速度又不致引入更多的噪声干扰。则期望特征多项式

$$\bar{f}(\lambda) = (\lambda + 10)^2 = \lambda^2 + 20\lambda + 100$$

令观测器的观测误差反馈阵 $K_c = [a \quad b]^T$, 则观测器的特征多项式

$$\begin{aligned} \bar{f}(\lambda) &= \det[\lambda I - A + K_c C] \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda + a & -1 \\ b & \lambda + 5 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 + (5+a)\lambda + (5a+b) \end{aligned}$$

令 $\bar{f}(\lambda) = \bar{f}^*(\lambda)$ 得

$$a = 15 \quad b = 25$$

即观测器方程

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ -25 & -5 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 15 \\ 25 \end{bmatrix} y$$

控制律为:

$$u = K\hat{x} = -\hat{x}_1 - 0.0914\hat{x}_2$$

(4) 设计降维观测器构成闭环控制系统

已知输出矩阵 $C = [1 \quad 0]$, 即输出 $y = x_1$ 。只须重构 x_2 即可。由 $\Sigma_0(A, B, C)$ 按输出分解:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -5x_2 + 100u \\ y = x_2 = x_1 = \dot{y} \end{cases}$$

由期望极点 $\lambda = -10$ 知降维观测器的反馈阵 H 满足 $-5 - H = -10$, 即 $H = 5$ 。所以降维观测器

$$\dot{z}_2 = -10z_2 + 100u + 5\dot{y}$$

去除输出导数项

$$\frac{d}{dt}(z_2 - 5y) = -10z_2 + 100u$$

式中, z_2 是状态 x_2 的重构值, 则控制律

$$u = k_1 x_1 + k_2 \hat{x}_2 = -y - 0.0914z_2$$

§ 6-6 极点配置与观测器的计算机辅助计算软件流程图

本软件是用FORTRAN语言编写, 在IBM-PC与PDP11/23上通过运行的。软件具有下述功能:

- (1) 计算予解矩阵 $(sI - A)^{-1}$;
- (2) 计算系统的传递函数矩阵 $C(sI - A)^{-1}B$;
- (3) 判断可控性及计算极点配置的状态反馈阵 K ;
- (4) 按对偶原理, 应用同样算法判断可观测性及计算观测器的输出反馈阵 K_c ;
- (5) 验算 $A+BK$ 或 $A-K_c C$ 的特征多项式是否正确。

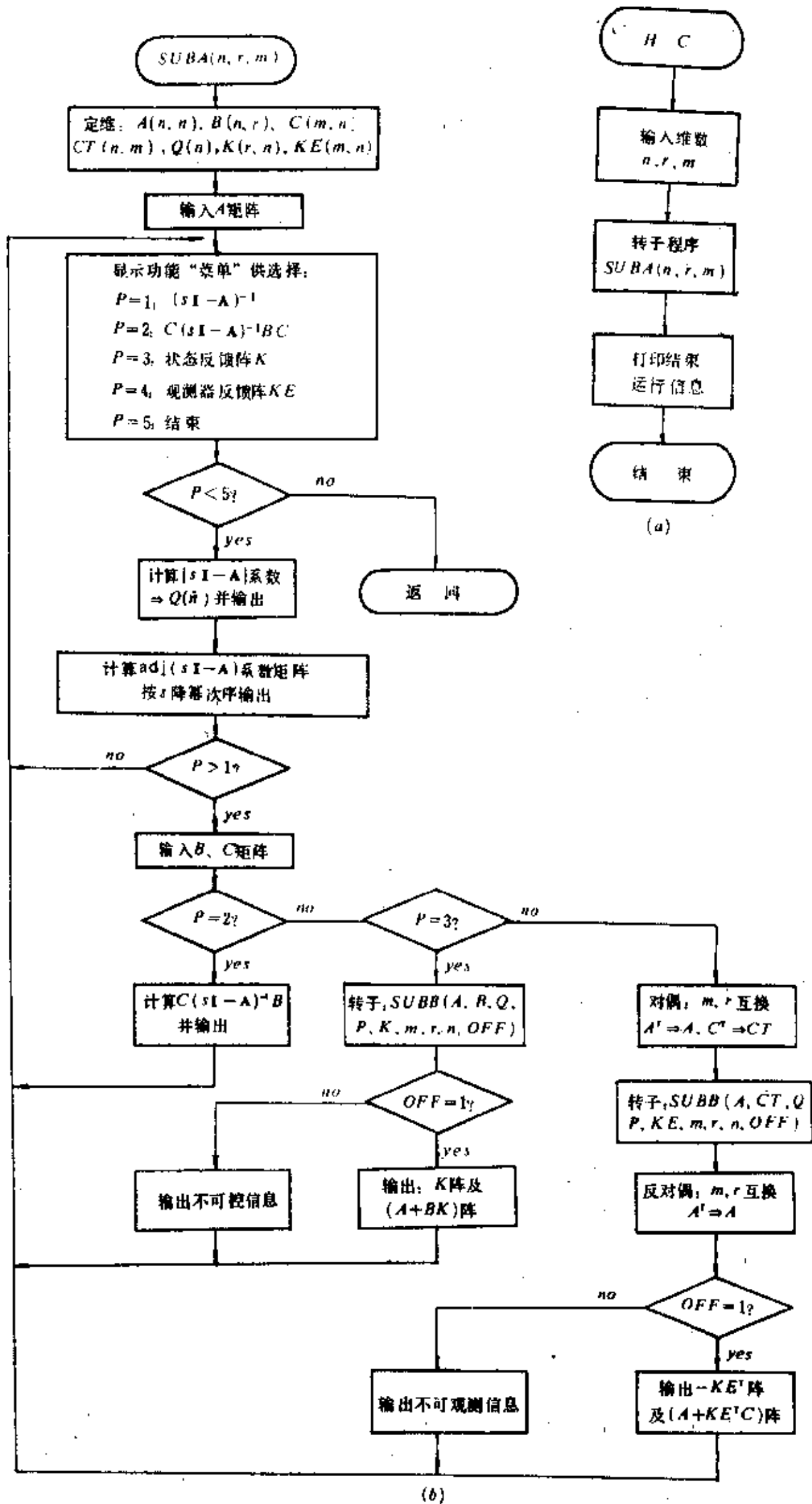


图 6-10 HC 软件流程图

软件流程图参看图 6-10。

主程序的功能是输入系统状态、输入、输出维数 n, r, m 。参见图 6-10(a)。

子程序 SUBA 的功能是,输入系统 A, B, C 矩阵;显示功能“菜单”供操作者选择;按法捷耶娃递推算法计算 $(sI - A)^{-1}$;计算传递函数阵;以及对偶的系统转换等。参见图 6-10(b)。

子程序 SUBB 的功能是:判别可控性矩阵的满秩性;按多输入系统极点配置方法 § 6-2(三)计算状态反馈阵;将 $A + BK$ 重新装入 $A(n, n)$ 数组以备验算。参见图 6-10(c)。

习 题

6-1 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试设计状态反馈阵 K , 使闭环极点为 $-2, -3$ 并做出结构图。

6-2 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

设计状态反馈阵 K , 使闭环极点为 $-10, -1 \pm j\sqrt{3}$ 。并做出结构图。

6-3 已知系统的传递函数

$$G_0(s) = \frac{20}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

写出其状态方程,设计状态反馈阵 K , 使闭环极点为 $-5, -2 \pm j2$ 。并做出结构图。

6-4 已知受控系统是由下列三个传递函数串联而成

$$G_1(s) = \frac{0.1}{0.1s+1}, G_2(s) = \frac{0.5}{0.5s+1}, G_3(s) = \frac{1}{s}$$

试以 $G_1(s), G_2(s), G_3(s)$ 的输出为状态变量列写状态方程。设计状态反馈阵 K , 使闭环极点为 $-3, -2 \pm j2$ 。并做出结构图。

6-5 试确定下列几组时域指标下的闭环主导极点对。其中, σ 为超调量, t_p 为峰值时间。

$$(I) \sigma \leq 30\%, t_p \leq 1s; (II) \sigma \leq 5\%, t_p \leq 1s;$$

$$(III) \sigma \leq 30\%, t_p \leq 0.5s; (IV) \sigma \leq 5\%, t_p \leq 0.5s。$$

6-6 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B)$ 如下述。试判别采用状态反馈的可镇定性。若是可镇定

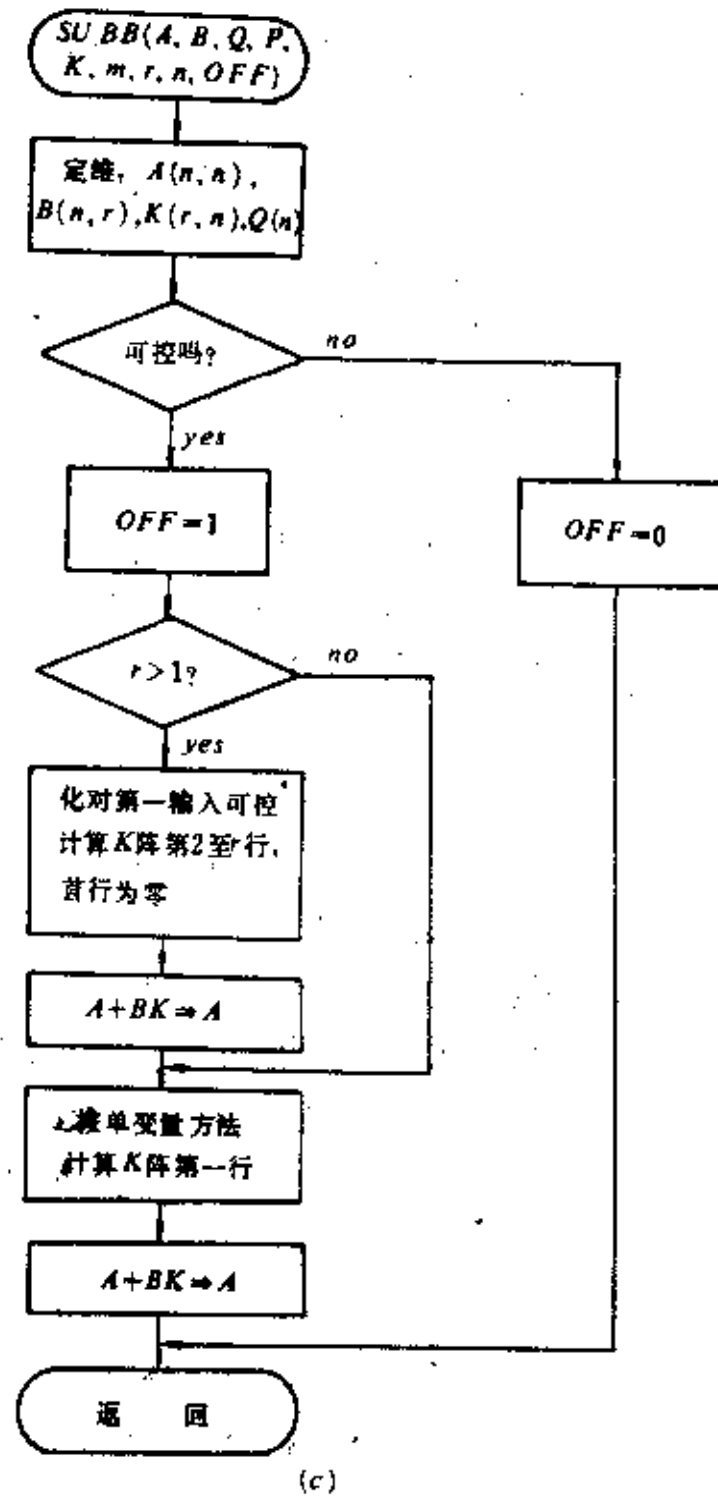


图 6-10 续

的,试求状态反馈 $u=kx$ 使闭环渐近稳定的条件。

$$(I) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (II) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6-7 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(I) 证实 A 为非稳定阵, (A, B) 可控, (A, C) 可观测。

(II) 证明采用输出反馈 $u = [h_1 \ h_2]y$, 不管如何选择 h_1 和 h_2 , 均不能使闭环渐近稳定。

6-8 已知系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = [0 \ 0 \ 1]$$

(I) 重复做上题的(I);

(II) 采用输出反馈 $u = [h_1 \ h_2]^T y$, 使闭环稳定。求 h_1 及 h_2 。

(III) 利用(I)的结果,说明采用输出反馈不能任意配置闭环的极点。

6-9 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(I) 试求状态反馈阵 K , 使闭环对第一个输入分量完全可控。

(II) 试求状态反馈阵 K , 使用环极点为 $-2, -1 \pm j2$ 。

6-10 已知受控系统的传递函数

$$G_0(s) = \frac{10}{s(s+2)^2}$$

试设计状态反馈阵 K 及输入变换增益 F , 满足闭环极点为 $-0.1, -0.3, -2$; 静态跟踪误差 $e_s = 0$ 。

6-11 对例 6.2-3 如果进一步要求静态跟踪误差 $e_s = 0$, 求输入变换增益 F , 并进一步校核静态速度误差 $|e_v| \leq 0.2$ 。

6-12 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [2, -1]$$

求其状态观测器, 极点为重根 -1 。

6-13 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, B = [0 \ 1], C = [2 \ 0]$$

试求状态观测器, 极点为 $-10, -10$ 。

6-14 已知系统传递函数

$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

试求状态观测器,极点为 $-8, -10$ 。

6-15 求下列受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 的降维观测器,并使极点 λ 为给定值。

(I) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0, 1], \lambda = -3;$

(I) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0], \lambda = -1, -2;$

(II) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0], \lambda = -5$

6-16 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0]$$

(I) 试构造其观测器,极点为 $-r$ 和 $-2r(r > 0)$ 。

(II) 将 u 和 y 作为观测器的输入,重构状态 \hat{x} 作为观测器的输出,求观测器的传递函数阵 $W_r(s)$ 。 $(r$ 作为一个参变量对待)。

(III) 求极宽频带观测器(即 $r \rightarrow \infty$)的传递函数阵

$$W_\infty(s) = \lim_{r \rightarrow \infty} W_r(s)$$

此时观测器完成的是什么运算? 从原系统的观点看,这种运算合理吗?

(IV) 如果原受控系统的输出 y 被高频干扰恶化,结果在(III)的观测器输入端信号为 $y(t) + 10^{-3} \sin 10^3 t$,而不是 $y(t)$ 。试求此时的重构状态估值 $\hat{x}(t)$ 。

(V) 如果将(IV)中的信号作用到(I)的观测器上,当 r 取多大时可将高频干扰基本滤除(衰减在 $1/100$ 以下)。

(VI) 比较(IV)和(V)的结果,你有何结论。

6-17 伺服电机的传递函数为

$$G_0(s) = \frac{50}{s(s+2)}$$

(I) 设计降维观测器重构速度量(极点为 -15)。

(II) 采用全状态反馈(位置及速度反馈)使闭环传递函数为

$$G_0(s) = \frac{50}{s^2 + 10s + 50}$$

(III) 做出全部结构图。

6-18 受控对象是三阶积分环节,传递函数 $G_0(s) = 1/s^3$ 。

(I) 设计全状态反馈阵 K ,使闭环极点为 $-3, -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(II) 设计降维观测器,极点均在 -5 。

(III) 做出结构图。

(IV) 由以上结果求出受控系统反馈校正及串联校正的传递函数,并做出结构图。

6-19 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0, 1]$$

(I) 证实其开环极点在虚轴上。由于无阻尼,故称之为谐波振荡器。

(II) 证实纯输出反馈 $u=ky$ 不能镇定。

(III) 若参考输入 $V=0$,设计一个输出二阶动态补偿器使闭环极点为 $-1, -2$; 补偿器极点为重根 -3 。

6-20* 设线性定常连续系统的传递函数

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+0.5)(s+2)}$$

试确定状态反馈阵 K , 使闭环系统的极点配置在 $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = -1 \pm j$ 位置上, 并作出状态反馈系统的状态变量图。

6-21* 某系统的传递函数

$$G(s) = \frac{5}{2s^3 + 4s^2 - 10s - 12}$$

希望的闭环系统阶跃响应的超调量 $\sigma = 4.3\%$, 过渡过程时间 $t_s = 5s$, 且已知其中一个闭环极点为 -7 。

试设计一个状态反馈系统满足上述要求, 求出反馈系数, 并画出系统的模拟结构图。

6-22* 设系统动态方程为:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [10 \ 0 \ 0] x$$

设计一个状态反馈闭环系统, 使得闭环极点配置在 $-2, -1 \pm j$; 并画出闭环系统的信号流图 (节点如下示)。

$$r \quad u \quad \dot{x}_3 \quad x_3 \quad x_2 \quad x_1 \quad y$$

6-23* 已知系统结构图如图 6-11 所示。

(I) 取状态向量 $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, 输入向量 $u = [u_1 \ u_2]^T$, 写出系统的状态方程。

(II) 判断系统的可控性。

(III) 对系统引入状态反馈 $u = Kx$, 试确定反馈阵 K 。反馈后闭环系统的特征值为 $-1, -2, -3$

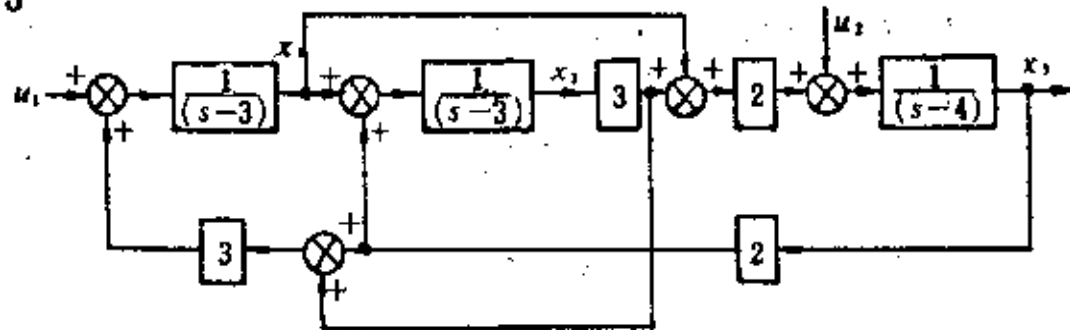


图 6-11 习题 6-23 结构图

6-24* 线性时不变系统的状态方程和输出方程为:

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] z(t)$$

(I) 试设计一个该系统的状态观测器, 极点配置在 $-1 \pm j$ 上。

(II) 用观测器所得状态估计值 $\hat{Z}(t)$, 构成系统的反馈。若反馈增益阵 $K = [1.5 \quad 1]$ (注意: $u = v - K\hat{Z}$), 画出整个系统的实际方块图, 并把各参数的实际值标在图中。

6-25* 已知系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1 \quad 0]x$$

其状态 x 无法直接测量。问:

(I) 能否设计状态观测器并通过重构状态反馈的方法实现任意极点配置?

(II) 若要使闭环极点均为 -2 , 状态反馈阵各元素应如何设置?

6-26* 判别状态方程为

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

是系统是否稳定? 如果不稳定, 能否设计状态反馈阵使之稳定? 要求算出参数。

6-27* 试回答下列三个问题:

(I) 在用全维状态观测器实现全状态反馈的闭环系统中, 什么是“分离性原理”? 请扼要回答, 不必推公式。当 $\{A, B, C\}$ 的参数发生摄动时, 闭环系统的根有几个将随着反馈增益阵 K 的变化而变化? (设 A 为 $n \times n$ 阶矩阵), 为什么?

(II) 已知单输入单输出系统 $\Sigma = (A, B, C)$ 是可控又可观测的。试问能否用状态反馈使之成为不可控或不可观测的? 为什么? 并给出条件。

如果 $\Sigma = (A, B, C)$ 是不可控且不可观测的, 那么经过状态反馈能否使系统成为可控的或可观测的? 试说明理由并给出条件。

(III) 有一系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

试判定该系统的可控性, 并给出可控子空间的维数。

试选择状态变换阵 Q , 使其在 $\hat{x}(t) = Qx(t)$ 下, 可将系统分解为可控及不可控两个子系统, 给出相应的矩阵 $\hat{A} = QAQ^{-1}$, $\hat{B} = QB$, 并加以必要的说明。

第七章 解耦控制和有外扰的综合

§ 7-1 多变量控制系统的解耦问题

[内容提要]

一、解耦问题的描述

1. 定义 若一个 m 维输入, m 维输出的系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (7.1-1)$$

其传递函数阵

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

是一个非奇异的对角形有理多项式矩阵

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & & & 0 \\ & G_{22}(s) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & G_{mm}(s) \end{bmatrix} \quad (7.1-2)$$

则称该多变量系统是解耦的。

显然, 实现了解耦的系统可以看做是 m 个彼此独立的单输入单输出子系统的组合。

2. 实现系统解耦的途径

(1) 在待解耦的系统中串接一个前馈控制器。

(2) 采用状态反馈和输入变换控制律(即 $\{K, F\}$ 变换)

$$u = FV + Kx \quad (7.1-3)$$

使闭环系统 $\Sigma_{KF} = (A + BK, BF, C)$ 的传递函数阵

$$G_{KF}(s) = C(sI - A - BK)^{-1}BF \quad (7.1-4)$$

成为非奇异对角阵, 此称 Σ_0 是状态反馈和输入变换可解耦的, 又称 $\{K, F\}$ 可解耦的。

二、用前馈串联控制器实现解耦控制

若受控系统传递函数 $G_0(s)$ 的逆 $G_0^{-1}(s)$ 存在, 可采用此法。见示意图 7-1。

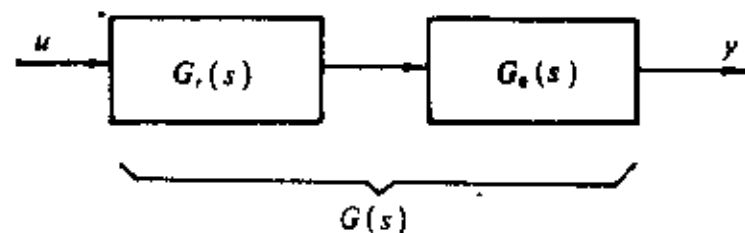


图 7-1

串联组合系统的传递函数阵

$$G(s) = G_0(s)G_r(s) \quad (7.1-5)$$

只要控制器按下述公式设计就可实现解耦控制

$$G_r(s) = G_0^{-1}(s)G^*(s) \quad (7.1-6)$$

式中, $G^*(s)$ 是对角线形式的期望传递函数阵。

三、解耦问题的两个基本参量

1. 定义: 一个正数:

$$d_i(0, I) = \begin{cases} \min\{k \mid C_i^T A^k B \neq 0, 0 \leq k \leq n-1\} \\ n-1; \text{ 当 } C_i^T A^k B = 0, k=0, 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (7.1-7)$$

和一个非零的行向量:

$$r_i^T(0, I) = C_i^T A^{d_i} B \quad (7.1-8)$$

式中, C_i^T 是输出矩阵 C 的第 i 行行向量。

2. 两个基本参量和传递函数阵行向量的关系

开环传递函数 $G_0(s)$ 的第 i 行行向量为

$$\begin{aligned} g_i^T(0, I, s) &= C_i^T (sI + A)^{-1} B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_i A^i B}{s^{i+1}} \\ &= \frac{C_i A^{d_i} B}{s^{d_i+1}} + \frac{C_i A^{d_i+1} B}{s^{d_i+2}} + \dots \end{aligned} \quad (7.1-9)$$

所以, d_i+1 是 $g_i^T(0, I, s)$ 行向量的 m 个元素中分母多项式与分子多项式 s 次数之差的最小值; 而向量 $r_i^T(0, I)$ 是 $g_i^T(0, I, s)$ 诸元素分子多项式中 s 最高幂次系数组成的行向量。

3. 开环与闭环间两个基本参量的关系

$$d_i(K, F) = d_i(0, I) \quad (7.1-10)$$

$$r_i^T(K, F) = r_i^T(0, F) = r_i^T(0, I)F \quad (7.1-11)$$

即, 参量 d_i 是 (K, F) 变换下的不变量, 以下书写中可省去括号中的下标, 直接写成 d_i ; 参量 r_i^T 是状态反馈变换下的不变量, 对输入变换 F 是变换关系。

四、积分型解耦系统和可解耦判据

1. 积分型解耦系统的定义: 定常系统 $\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ 称之为积分解耦系统 (Integrator Decoupled System) 简称 ID 系统, 满足下述两个条件:

(I) 由 r_1^T, \dots, r_m^T 构成非异的对角线矩阵

$$E = \begin{bmatrix} r_1^T \\ \vdots \\ r_m^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \tilde{A}^{d_1} \tilde{B} \\ \vdots \\ \tilde{C}_m \tilde{A}^{d_m} \tilde{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_m \end{bmatrix} \quad (7.1-12)$$

式中: 常数 r_1, \dots, r_m 均不为零。

(II) 对不变量 d_1, \dots, d_m 成立

$$\left. \begin{aligned} \tilde{C}_1 \tilde{A}^{d_1+1} &= 0 \\ \tilde{C}_m \tilde{A}^{d_m+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.1-13)$$

2. ID 系统的特点:

$$(1) \quad \tilde{C}_i^T \tilde{A}^k \tilde{B} = \begin{cases} 0, & k \neq d_i \\ [0 \ \dots \ 0 \ r_i \ 0 \ \dots] = r_i e_i^T, & k = d_i \end{cases} \quad (7.1-14)$$

式中: e_i^T 是 m 阶单位阵 I_m 的第 i 行行向量。

(2) 其传递函数 $\tilde{G}(s)$ 的第 i 行为

$$g_i^T(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{C}_i \tilde{A}^k \tilde{B}}{s^{k+1}} = \frac{r_i}{s^{d_i+1}} e_i^T \quad (7.1-15)$$

即 ID 系统实现了解耦,而且 $\tilde{G}(s)$ 对角线上的元素是 d_i+1 个积分器串联的子系统。

3. 可解耦判据及化 ID 系统的方法

结论 I: 受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 通过 $\{K, F\}$ 变换可解耦的充分必要条件是: 其判别矩阵

$$E_0 = \begin{bmatrix} r_1^T(0, I) \\ \vdots \\ r_m^T(0, I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^T A^{d_1} B \\ \vdots \\ C_m^T A^{d_m} B \end{bmatrix} \quad (7.1-16)$$

是非奇异的。

结论 I: 受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 当 $|E_0| \neq 0$ 时, 令矩阵

$$L = \begin{bmatrix} C_1^T A^{d_1+1} B \\ \vdots \\ C_m^T A^{d_m+1} B \end{bmatrix} \quad (7.1-17)$$

当取如下 $\{K, F\}$ 变换时,

$$\begin{cases} K = -E_0^{-1} L \\ F = E_0^{-1} \end{cases} \quad (7.1-18)$$

闭环系统 $\Sigma_{K,F} = (A - BE_0^{-1}L, BE_0^{-1}, C)$ 实现解耦且是一个积分型解耦系统。且 $r_i^T(K, F) = e_i^T$, 即式(7.1-13)中的 $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 1$ 。

五、解耦系统的极点配置

结论 II: 受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 当 $|E_0| \neq 0$ 时, 而且希望闭环解耦系统的第 i 个子系统传递函数为

$$g_i^*(K, F, S) = \frac{1}{s^{d_i+1} + a_{i,1}s^{d_i} + \dots + a_{i,d_i+1}} \quad (7.1-19)$$

则可令矩阵 L 的第 i 行 L_i^T 为

$$L_i^T = C_i^T A^{d_i+1} + a_{i,1} C_i^T A^{d_i} + \dots + a_{i,d_i+1} C_i^T \quad (7.1-20)$$

当取如式(7.1-18)的 $\{K, F\}$ 变换时, 闭环系统 $\Sigma_{K,F}$ 实现解耦且第 i 个系统实现式(7.1-19)的极点配置。

几点讨论:

(1) 结论 II 包括了结论 I 的情况。

(2) 按结论 II, 实现闭环解耦及期望极点配置除要求 E_0 非奇异外, 还对每个解耦子系统的极点数目有限制, 即 d_i+1 个。

(3) 这 d_i+1 个极点数目与受控系统 Σ_0 化成的 ID 系统 $\tilde{\Sigma}$ 中, 由 u_i 可控且由 y_i 可观测子系统的维数一致。

(4) 结论 II 中对各子系统的期望传递函数的分子不允许有零点。所以, 在极点配置的同时可能产生零极对消情况, 那么在子系统中会出现由 u_i 可控但由 y_i 不可观测的部分。

六、解耦系统极点配置时的零点

结论 IV: 受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 采用 $\{K, F\}$ 变换实现解耦的同时, 使闭环传递函数 $G_{K,F}(s)$ 第 i 行分子多项式是 $n_i(s)$ 的充分必要条件是: 开环系统 Σ_0 的传递函数 $G_0(s)$ 的第 i

行的分子公因子是 $n_i(s)$, 即

$$g_i^T(0, I, S) = C_i^T (sI - A)^{-1} B = n_i(s) C_i^{*T} (sI + A)^{-1} B \quad (7.1-21)$$

并且 $\Sigma_i^* = (A, B, C^*)$ 可以 $\{K, F\}$ 变换实现解耦。

几点讨论:

(1) 实现闭环第 i 个子系统具有分子多项式 $n_i(s)$ 的前提条件是开环第 i 行传递函数的分子公因子就是 $n_i(s)$, 经 $\{K, F\}$ 变换后, $n_i(s)$ 不变。

(2) 应用结论 N 进行解耦, 实际上是把 Σ_0 分解成 Σ_i^* 与对角传递函数阵 $\{n_i(s)\}$ 两个子系统的串联。如果 Σ_i^* 可以 $\{K, F\}$ 解耦, 并按结论 III 配置极点。那么 Σ_0 经同样的 $\{K, F\}$ 变换, 必实现解耦且闭环仍有 $n_i(s)$ 分子多项式。

(3) Σ_0 和 Σ_i^* 中的不变量存在如下关系:

$$d_i^* \leq d_i \quad (7.1-22)$$

而且 $n_i(s)$ 的次数必等于 $d_i^* - \bar{d}_i$ 。

(4) 一般情况下, 采用结论 N 的方法也不一定能配置全部 n 个极点。因为

$$\sum_{i=1}^m (d_i^* + 1) \leq n \quad (7.1-23)$$

[例 题]

例 7.1-1 已知受控系统的传递函数阵

$$G_0(s) = \begin{bmatrix} 1/s & -1/(s+1) \\ (s-1)/s(s+1) & 1/(s+1) \end{bmatrix}$$

求一个串联补偿器 $G_r(s)$ 使系统解耦, 且期望的系统传递函数阵

$$G^*(s) = \begin{bmatrix} 1/(s+1)^2 & 0 \\ 0 & 1/(s+1)(s+2) \end{bmatrix}$$

解 先求 $G_0(s)$ 的逆矩阵

$$G_0^{-1}(s) = \frac{(s+1)^2}{2} \begin{bmatrix} 1/(s+1) & 1/(s+1) \\ -(s-1)/s(s+1) & 1/s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (s+1)/2 & (s+1)/2 \\ -(s^2-1)/2s & (s+1)^2/2s \end{bmatrix}$$

则根据式(7.1-6)串联补偿器为

$$\begin{aligned} G_r(s) &= G_0^{-1}(s) G^*(s) \\ &= \begin{bmatrix} (s+1)/2 & (s+1)/2 \\ -(s^2-1)/2s & (s+1)^2/2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/(s+1)^2 & 0 \\ 0 & 1/(s+1)(s+2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2(s+1) & 1/2(s+2) \\ -(s-1)/2s(s+1) & (s+1)/2s(s+2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例 7.1-2 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

试判断 $\{K, F\}$ 变换可解耦性, 并选择 K, F 阵化为积分型解耦系统。

解 (1) 计算两个基本参量

$$C_1^T = [1 \ 0 \ 0 \ 0]; \quad C_1^T B = [0 \ 0]; \quad C_1^T A B = [1 \ 0].$$

所以

$$d_1 = 1, \quad r_1^T = C_1^T A B = [1 \ 0].$$

$C_1^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$; $C_1^T B = [0 \ 0]$; $C_2^T A B = [0 \ 1]$,
 所以 $d_2 = 1$; $r_2^T = C_2^T A B = [0 \ 1]$.

(2) 判断可解耦性

$$E_0 = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

非奇异。可以用 $\{K, F\}$ 变换实现解耦。

(3) 化积分型解耦系统

$$L = \begin{bmatrix} C_1^T A^2 \\ C_2^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1^T A \\ C_2^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

取反馈阵 K 和输入变换阵 F 为:

$$K = -E_0^{-1} L = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = E_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) 闭环系统 $\Sigma_{K,F} = (A+BK, BF, C)$ 的校核

$$A+BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad BF = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

所以, 闭环系统的传递函数

$$G_{K,F}(s) = \begin{bmatrix} 1/s^2 & 0 \\ 0 & 1/s^2 \end{bmatrix}$$

实现了解耦。而且每个子系统都是两个积分器串联形式。

(5) 讨论

本例中共有四个状态变量。它们全都分解在两个子系统中。每个子系统两个状态都是由子系统的输入 u_i 完全可控的, 而且由子系统的输出 y_i 完全可观测的。这样在极点配置时, 可以配置全部四个极点, 同时不会发生零极对消。

例 7.1-3 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试寻找 $\{K, F\}$ 变换实现闭环解耦及相应的极点配置。

解 (1) 计算两个基本参量

$$C_1^T = [1 \ 1 \ 0]; \quad C_1^T B = [1 \ 0] = r_1^T; \quad d_1 = 0.$$

$$C_2^T = [0 \ 0 \ 1]; \quad C_2^T B = [0 \ 1] = r_2^T; \quad d_2 = 0.$$

(2) 判断 $\{K, F\}$ 可解耦性

$$E_0 = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

非奇异。故可以用 $\{K, F\}$ 变换实现闭环解耦。

(3) 可配置的极点数目

由于 $a_1=0$, 第一个子系统可以配置 $a_1+1=1$ 个极点。同样, 由于 $a_2=0$, 第二个子系统也只能配置 1 个极点。系统的维数是三维, 第三个极点会由于 $\{K, F\}$ 变换和子系统的零点对消而被消去。则可令期望的闭环传递函数为

$$G_{k,r}(s) = \begin{bmatrix} 1/(s+a_1) & 0 \\ 0 & 1/(s+a_2) \end{bmatrix}$$

(4) 求实现解耦及极点配置的 K, F 阵

输入变换阵 $F = E_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

令矩阵

$$L = \begin{bmatrix} C_1 A + a_1 C_1 \\ C_2 A + a_2 C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & 1 \\ -1 & -2 & a_2 - 3 \end{bmatrix}$$

则状态反馈阵

$$K = -E_0^{-1} L = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 - a_2 \end{bmatrix}$$

(5) 闭环系统 $\Sigma_{k,r} = (A+BK, BF, C)$ 的校核

$$A+BK = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad BF = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则闭环传递函数

$$G_{k,r}(s) = C(sI - A - BK)^{-1} B$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(s+a_1) & -a_1(s+a_2) & -(s+a_1) \\ 0 & (s+a_1)(s+a_2) & s+a_1 \\ 0 & 0 & s(s+a_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} s(s+a_1) & -a_1(s+a_2) & -(s+a_1) \\ 0 & (s+a_1)(s+a_2) & s+a_1 \\ 0 & 0 & s(s+a_1) \end{bmatrix}}{s(s+a_1)(s+a_2)} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} s(s+a_1) & s(s+a_2) & 0 \\ 0 & 0 & s(s+a_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s(s+a_1)(s+a_2)} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} s+a_2 & s+a_2 & 0 \\ 0 & 0 & s+a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{(s+a_1)(s+a_2)} = \begin{bmatrix} 1/(s+a_1) & 0 \\ 0 & 1/(s+a_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

实现了闭环的解耦及极点配置。

(6) 讨论

注意到在计算闭环传递函数 $G_{k,r}(s)$ 时, 在 $C(sI - A)^{-1}$ 中发生了零极对消, 说明输出 y 不可观测部分是一维的。被消去的零点多项式是 s 。

例 7.1-4 对于例 7.3-3 系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$, 试寻找 $\{K, F\}$ 变换使其解耦。并在极点配置的同时, 保留相应的零点。

解 (1) 计算开环传递函数 $G_0(s)$ 并确定其行向量的分子多项式

$$G_0(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s^2 + 3s + 1 & s \\ -s & s^2 \end{bmatrix}$$

其第二行向量 $g_2^T(s)$ 有分子公因子 s 可与特征多项式的极点对消。即由 y_2 不可观测全部状态。由其可观测性矩阵 Q_{02} 降秩也可判别之。

$$Q_{02} = \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^T A \\ C_2^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

其秩为 2, 由 y_2 可观测两维。

(2) 提取 $G_0(s)$ 各行向量的分子公因子, 进行系统的串联分解。

由开环传递函数分解

$$\begin{aligned} G_0(s) &= N(s) \cdot G^*(s) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s^2 + 3s + 1 & s \\ -1 & s \end{bmatrix}}{s(s+2)(s+1)} \end{aligned}$$

确定子系统 $\Sigma^* = (A, B, C^*)$ 的输出矩阵 C^* , 子系统的输出设为 y^* , 则与原系统输出 y 满足

$$y(s) = N(s)y^*(s)$$

即

$$\begin{cases} y_1 = y_1^* = x_1 + x_2 \\ y_2 = \frac{d}{dt} y_2^* = x_3 = \dot{x}_2 \end{cases}$$

从而得到 Σ^* 的输出矩阵

$$C^* = \begin{bmatrix} C_1^T \\ C_2^{*T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) 确定子系统 Σ^* 的可解耦性

$$C_1^{*T} = [1 \ 1 \ 0]; \quad C_1^{*T}B = [1 \ 0] = r_1^{*T}; \quad d_1^* = 0.$$

$$C_2^{*T} = [0 \ 1 \ 0]; \quad C_2^{*T}B = [0 \ 0]; \quad C_2^{*T}AB = [0 \ 1] = r_2^{*T}; \quad d_2^* = 1.$$

则判别阵

$$E^* = \begin{bmatrix} r_1^{*T} \\ r_2^{*T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

非奇异, 可以实现解耦。

(4) 确定闭环的期望传递函数

$$G_{k,f}^*(s) = \begin{bmatrix} 1/(s+\alpha_1) & 0 \\ 0 & 1/(s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3) \end{bmatrix}$$

(5) 求实现闭环解耦及极点配置的 K, F 阵

$$\text{输入变换阵 } F = E^{*-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由闭环期望传递函数阵的形式, 令矩阵

$$L = \begin{bmatrix} C_1^{*T}A + \alpha_1 C_1^{*T} \\ C_2^{*T}A^2 + \alpha_2 C_2^{*T}A + \alpha_3 C_2^{*T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & 1 \\ -1 & a_3 - 2 & a_2 - 3 \end{bmatrix}$$

则状态反馈阵

$$K = -E^{-1}L = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_1 & -1 \\ 1 & 2-a_3 & 3-a_2 \end{bmatrix}$$

(6) 闭环系统 $\Sigma_{K,F} = (A+BK, BF, C)$ 的校核

$$A+BK = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_3 & -a_2 \end{bmatrix}; \quad BF = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

闭环传递函数

$$\begin{aligned} G_{K,F}(s) &= C(sI - A - BK)^{-1}B \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + a_2s + a_3 & a_3 - a_1(s+a_2) & -(s+a_1) \\ 0 & (s+a_1)(s+a_2) & s+a_1 \\ 0 & -a_3(s+a_1) & s(s+a_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{s(s+a_1)(s+a_2)} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 + a_2s + a_3 & -(s+a_1) \\ 0 & s+a_1 \\ 0 & s(s+a_1) \end{bmatrix}}{(s+a_1)(s^2 + a_2s + a_3)} \\ &= \begin{bmatrix} 1/(s+a_1) & 0 \\ 0 & s/(s^2 + a_2s + a_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

实现了解耦, 并对全部三个极点都可进行极点配置, 同时保留了第二行的零点。

§ 7-2 消除扰动影响的综合

[内容提要]

一、受控系统有外扰时的模型

受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 有外扰向量 w 作用下的受扰模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = Cx \end{cases} \quad (7.2-1)$$

式中: w 是 p 维外扰向量, 可以看做是另外一个动态系统(外扰模型)的状态

$$\dot{w} = Fw \quad (7.2-2)$$

为讨论方便, 设受控系统 Σ_0 的状态是 u 完全可控的, 即 (A, B) 可控; 由 y 完全可观测的, 即 (A, C) 可观测。

控制规律是系统 Σ_0 的状态 x 和外扰状态 w 的线性反馈律

$$u = Kx + Lw \quad (7.2-3)$$

综合的目标是选择反馈阵 K, L 使闭环系统 $\Sigma_{K,L}$ 具有满意的动态性能且输出 y 不受扰动 w 的影响。

二、消除扰动影响的方法

对受控系统 Σ_0 的受扰模型式(7.2-1)采用如式(7.2-3)的反馈控制及扰动补偿规律。则闭环系统 $\Sigma_{K,L}$ 为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+BK)x + (E+BL)w \\ y = Cx \end{cases}$$

由扰动 w 到输出 y 的传递函数阵为

$$G_{w-y}(s) = C(sI - A - BK)^{-1}(E + BL) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C(A+BK)^i(E+BL)}{s^{i+1}} \quad (7.2-4)$$

为了使输出 y 不受扰动 w 的影响,只需要使上式为零。于是有如下结论:

结论 1: 系统 Σ_0 采用式(7.2-3)所示控制律实现输出 y 不受扰动影响的充分必要条件是:

$$C(A+BK)^i(E+BL) = 0; \quad i=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (7.2-5)$$

几点讨论:

(1) 当外扰状态 w 可以测量到时,可以采用满足条件(7.2-5)的状态反馈加外扰补偿规律(7.2-3)实现输出 y 不受扰动的影响。同时反馈阵 K 应使闭环渐近稳定且有满意的动态性能。

(2) 进一步,如果 $E+BL=0$ 中 L 有解,则只靠外扰测量值的反馈就可实现输出 y 不受装置扰动的影响。 K 阵只要满足闭环极点配置的要求即可。

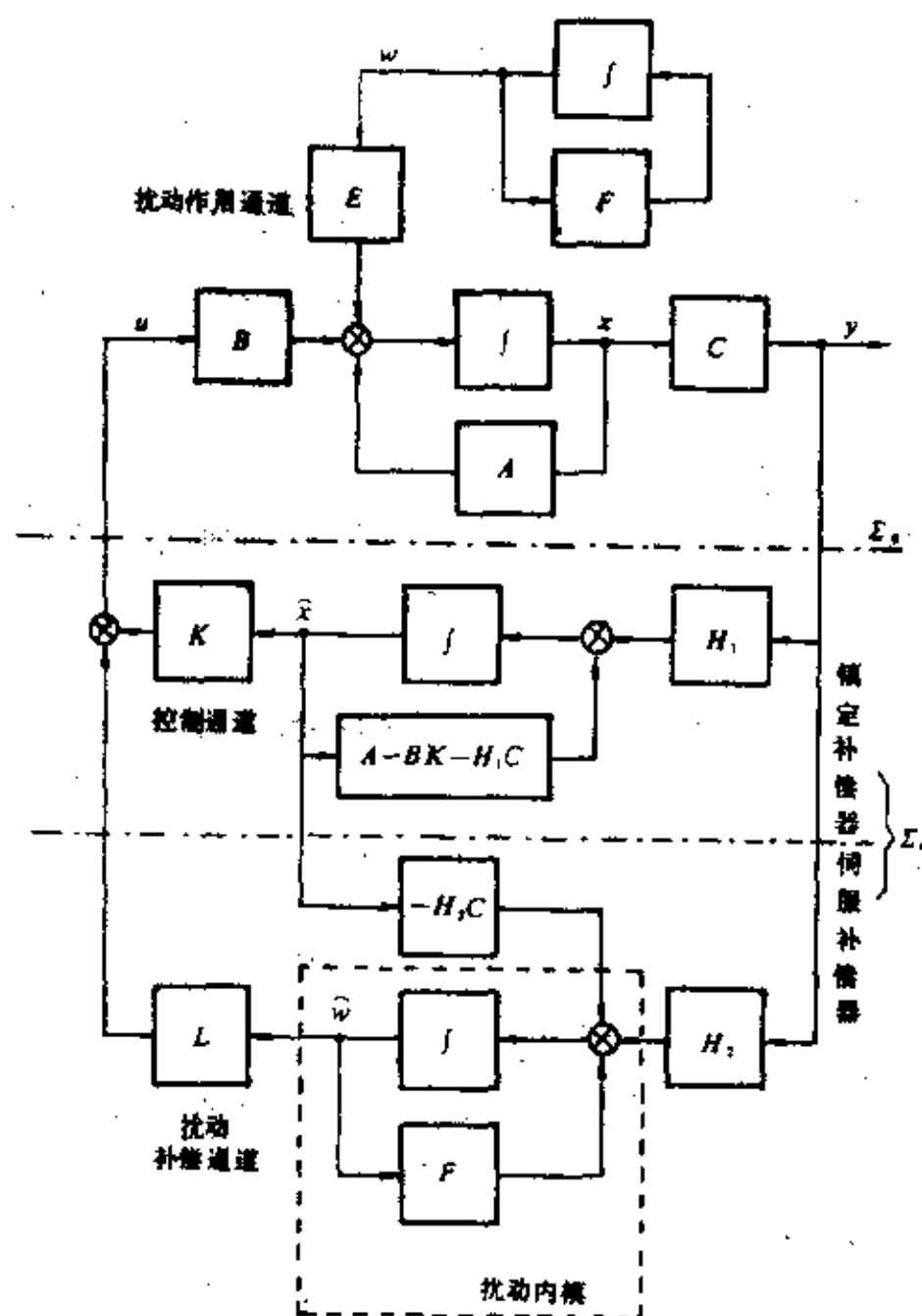


图 7-2 用外扰观测器消除扰动的综合

(3) 当外扰 w 测量不到时, 式(7.2-3)所示控制律可以令 $L=0$ 。这时条件(7.2-5)强化为

$$C(A+BK)^i E=0; \quad i=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (7.2-6)$$

(4) 应用结论 I 进行综合, 并不需要对外扰函数形式有认识, 即外扰模型 F 可以不知道。

(5) 当状态 x 不能直接测量时, 可以构造观测器。同样对外扰状态 w 也可以通过外扰观测器进行重构。这时要求外扰模型 F 已知, 而且增广系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \end{cases}$$

应当是完全可观的。

这时全部综合的结构图如图 7-2 所示。其 H_1 和 H_2 是状态观测器和外扰观测器的极点配置反馈阵 $H=[H_1 \quad H_2]^T$ 。

当采用外扰观测器方案时, 扰动对输出 y 还是有影响的。只有当外扰观测误差 $w-\hat{w}$ 趋向零时, 其影响才会消除。

(6) 强化条件, 式(7.2-6)可以表示为

$$C[E \quad (A+BK)E \quad \dots \quad (A+BK)^{n-1}E]=0 \quad (7.2-7)$$

其意义是, 通过状态反馈阵改变了系统的可观测性。使得由 w 可控子空间的状态(即 $[E \quad (A+BK)E \quad \dots \quad (A+BK)^{n-1}E]$ 中列向量的组合)由 y 不可观测。从而实现由 w 到 y 的传递函数阵为零。

[例 题]

例 7.2-1 已知受控系统 Σ_0 的受扰模型如式(7.2-1)所示, 外扰 w 是标量, 各阵如下:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [2 \quad 1]; \quad E = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

试寻找适当的控制律, 使闭环渐近稳定且实现输出 y 不受扰动 w 的影响。

解 (1) 先尝试只用扰动补偿的方法

这是应满足等式 $E+BL=0$ 的 L , 有解条件是 $\text{rank} B = \text{rank}[B \quad -E]$ 。代入数据

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [B \quad -E] = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$$

显然, L 阵无解。

(2) 再采用只进行状态反馈的方法

按强化条件式(7.2-6), 反馈阵 $K=[k_1 \quad k_2]$ 应满足下列条件

$$\begin{cases} CE=0 \\ C(A+BK)E=0 \end{cases}$$

其中:

$$CE = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix} = 0$$

$$C(A+BK)E = [2 \quad 1] \left[\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (k_1 \quad k_2) \right] \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= [2 \quad 1] \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4+k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix} \\
&= [-10+k_1 \quad 10+k_2] \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 150 - 5k_1 + 10k_2
\end{aligned}$$

即,应满足

$$30 - k_1 + 2k_2 = 0 \quad \textcircled{1}$$

同时, K 阵应使闭环系统渐近稳定。闭环特征多项式

$$\begin{aligned}
\det[sI - A - BK] &= \det \begin{bmatrix} s+3 & -5 \\ 4-k_1 & s-k_2 \end{bmatrix} \\
&= s^2 + (3-k_2)s + (20-5k_1-3k_2)
\end{aligned}$$

为保证其极点具有负的实部,则要求

$$\begin{cases} k_2 < 3 & \textcircled{2} \\ 20 - 5k_1 - 3k_2 > 0 & \textcircled{3} \end{cases}$$

取 $k_1 = 0, k_2 = -15$ 满足式①、②、③。闭环特征多项式为 $s^2 + 18s + 65 = (s+5)(s+13)$ 。

(3)校核

$$(sI - A - BK)^{-1} = \begin{bmatrix} s+3 & -5 \\ 4 & s+15 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + 18s + 65} \begin{bmatrix} s+15 & 5 \\ -4 & s+3 \end{bmatrix}$$

外扰 w 至输出 y 的传递函数应为零。

$$\begin{aligned}
C(sI - A - BK)^{-1}E &= \frac{[2 \quad 1] \begin{bmatrix} s+15 & 5 \\ -4 & s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}}{s^2 + 18s + 65} \\
&= \frac{[2 \quad 1] \begin{bmatrix} -5s & 25 \\ 10s & 50 \end{bmatrix}}{s^2 + 18s + 65} = 0
\end{aligned}$$

§ 7-3 线性多变量调节器

[内容提要]

一、调节器问题的状态空间模型

线性多变量调节器问题把加在受控系统上的干扰和参考输入统一考虑,看成是外部输入,是另外一个系统对受控系统的作用,统一称为外扰。受控系统 Σ_0 的受扰模型如下:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew \quad (7.3-1)$$

$$\dot{w} = Fw \quad (7.3-2)$$

$$z = Cx + Mw \quad (7.3-3)$$

其中;式(7.3-1)称为装置方程, Ew 称为装置扰动;式(7.3-2)称为外扰模型, w 是 p 维外扰状态;式(7.3-3)称为误差输出方程, z 是系统的误差输出,仍是 m 维; Mw 是输出的参考信号,又称为输出扰动。

综合的目的是寻找一个合适的设计方案,使闭环系统渐近稳定,并使稳态误差输出趋向零。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0 \quad (7.3-4)$$

这时,我们称闭环系统达到输出调节;所寻找到的设计方案称为调节器。调节器分两大类:

(1)纯增益反馈控制器

如果寻找到的设计方案是反馈控制规律

$$u = Kx + Lw \quad (7.3-5)$$

则称之为纯增益反馈控制器, 参见图 7-3。

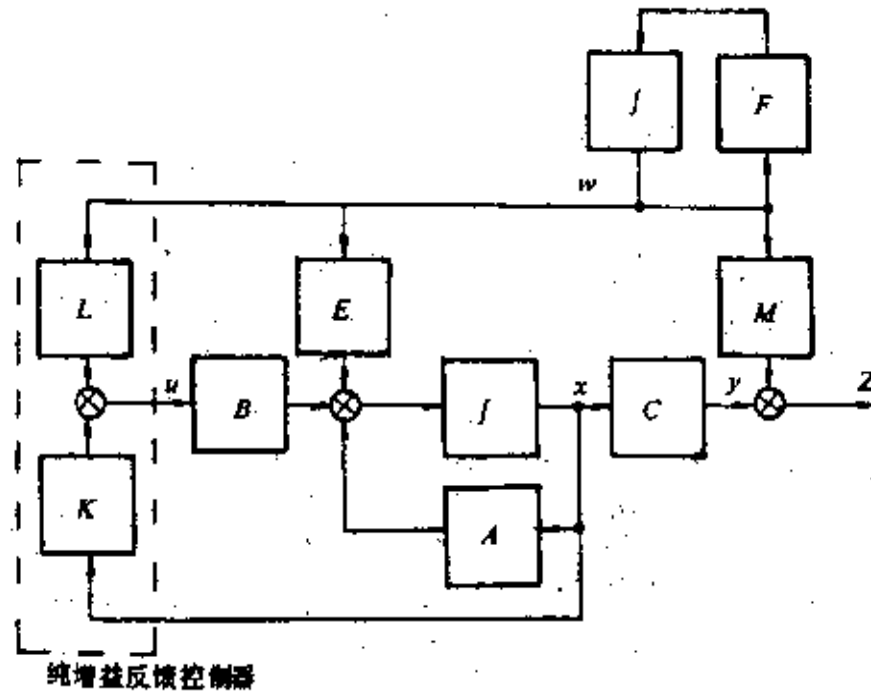


图 7-3 纯增益反馈控制器

(2) 带动态外补偿器的输出反馈调节器

当系统状态和外扰状态均不能直接测量时, 可以通过状态观测器和外扰观测器进行重构, 再用以反馈。这样得到线性多变量调节器

$$\dot{x}_c = A_c x_c + H z \quad (7.3-6)$$

$$u = K_c x_c + K_z z \quad (7.3-7)$$

是一个带动态补偿器的输出反馈调节器。式中 x_c 是补偿器的状态, 设为 q 维。显然 $q \leq n + p$ 。当状态和外扰的观测器均采用全维观测器时, $q = n + p$, 而且式 (7.3-7) 中的 $K_z = 0$, 式 (7.3-6) 中的 $x_c = [\hat{x}, \hat{w}]^T$ 。采用降维观测器时, $q < n + p$ 。

其结构图见图 7-4。

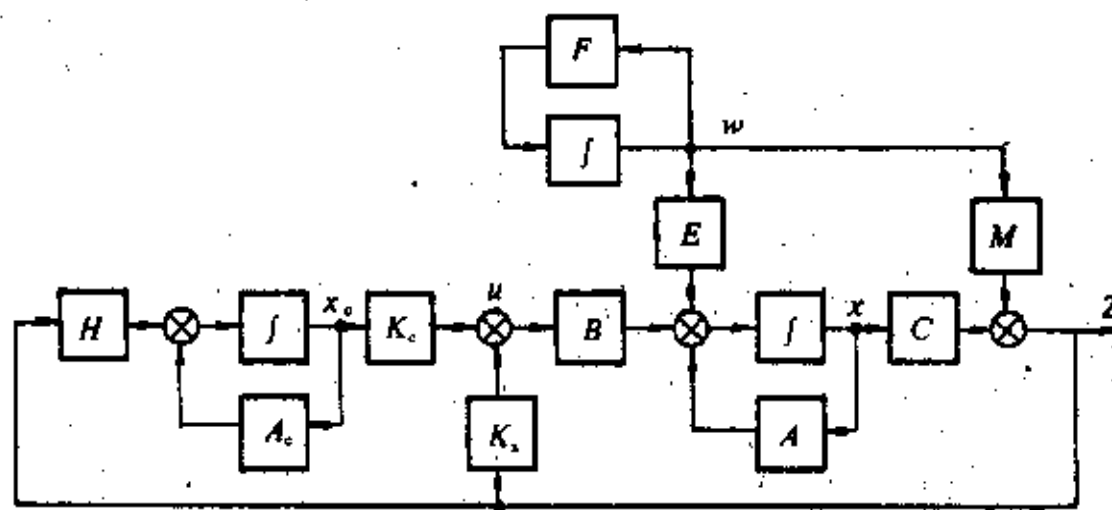


图 7-4 带动态补偿器的输出反馈调节器

二、闭环系统达到输出调节的判据

结论 I: 对于闭环系统 $\Sigma_L = (A_L, E_L, C_L, M_L)$

$$\dot{x}_L = A_L x_L + E_L w \quad (7.3-8)$$

$$z = C_L x_L + M_L w \quad (7.3-9)$$

$$\dot{w} = F w \quad (7.3-10)$$

如果 A_L 是渐近稳定的; F 的特征值都具有非负的实部。则矩阵方程

$$A_L P - P F = E_L \quad (7.3-11)$$

有唯一解阵 P 。并且实现输出调节式(7.3-4)的充分必要条件是

$$C_L P = M_L \quad (7.3-12)$$

几点讨论:

(1) 结论 I 提供了判断闭环系统达到输出调节的判据。其中式(7.3-11)称为装置条件; 式(7.3-12)称为输出条件。

(2) 结论 I 还提供了求解系统 Σ_L 的状态解 $x_L(t)$ 中对 $w(t)$ 的强迫响应的稳态解 $\bar{x}_L(t)$ 的方法。由于 A_L 是渐近稳定的, 所以, 闭环系统的状态解 $x_L(t)$ 中的初值响应稳态趋向零。设 $\bar{x}_L(t) = -P w(t)$, 则可以推导出装置条件式(7.3-11)和输出条件式(7.3-12)。所以, 矩阵 P 可以看成是外扰状态轨线 $w(t)$ 变换到状态空间中强迫轨线 $\bar{x}_L(t)$ 的一个变换。利用 P 可以求解强迫响应稳态解 $\bar{x}_L(t)$, 详见例 7.3-1。

(3) 当外扰 w 各分量均为常值时, 即外扰模型式(7.3-10)中 $F=0$ 。由装置条件式(7.3-11)可解出 P 阵, $P = A_L^{-1} E_L$ 。代入输出条件式(7.3-12)有 $C_L A_L^{-1} E_L = M_L$ 。说明系统 Σ_L 从 w 到 z 的稳态增益矩阵

$$G_L(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} G_L(s) = M_L - C_L A_L^{-1} E_L \quad (7.3-13)$$

为零, 即达到输出调节式(7.3-4)。

三、纯增益反馈控制器的设计

结论 I: 设受控系统 Σ_0 的受扰模型如式(7.3-1)至式(7.3-3)所示。其中, 矩阵对 (A, B) 完全可控, 矩阵 F 的特征均具有非负的实部, 则 Σ_0 存在纯增益反馈控制器式(7.3-5)的充分必要条件是: 存在 $n \times p$ 矩阵 P 和 $r \times p$ 矩阵 S 满足下述两个条件

$$AP - PF + BS = E \quad (7.3-14)$$

$$CP = M \quad (7.3-15)$$

式中: $S = KP - L$, 且 K 使 $A + BK$ 渐近稳定。

纯增益反馈控制器的设计步骤:

- (1) 确定状态反馈阵 K , 使 $A + BK$ 渐近稳定, 且其极点在指定位置上。
- (2) 解矩阵联立方程(7.3-14)和(7.3-15), 得 P 和 S 。
- (3) 计算外扰补偿阵 L

$$L = KP - S \quad (7.3-16)$$

则得到式(7.3-5)所示的纯增益反馈控制器。

四、带动态补偿器输出反馈调节器的设计

当受控系统 Σ_0 的纯增益反馈控制器式(7.3-5)中的状态反馈阵 K 和外扰补偿阵 L 均已算出。如果状态 x 和外扰 w 均不能直接测量, 无法用作反馈, 则考虑构造全维观测器。

设复合系统

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z = [C \quad M] \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \end{cases}$$

完全可观测,可以设计全维观测器

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-H_1C & E-H_1M \\ -H_2C & F-H_2M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} z \quad (7.3-17)$$

和控制律

$$u = K\hat{x} + L\hat{w} \quad (7.3-18)$$

实现闭环渐近稳定和输出调节。

则线性多变量调节器式(7.3-6)和式(7.3-7)中

$$\begin{aligned} x_c &= \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix}; \quad A_c = \begin{bmatrix} A+BK-H_1C & E-H_1M \\ -H_2C & F+BL-H_2M \end{bmatrix} \\ H &= [H_1 \quad H_2]^T; \quad K_c = [K \quad L]; \quad K_z = 0 \end{aligned}$$

[例 题]

例 7.3-1 系统 Σ_L 及外扰模型

$$\begin{cases} \dot{x}_L = A_L x_L + E_L w \\ \dot{w} = F w \end{cases}$$

中的各系数矩阵如下:

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}; \quad E_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

求当 $w(0) = [0 \quad 1]^T$ 时,适合 $w(t)$ 的系统 Σ_L 的一个稳态解 $\bar{x}_L(t)$ 。

解 适合要求的 $\bar{x}_L(t)$

$$\begin{aligned} \bar{x}_L(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \exp[A_L(t-\tau)] E_L w(\tau) d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \exp[A_L(t-\tau)] E_L \exp[F(\tau)] w(0) d\tau \end{aligned}$$

式中, T 是足够长的时间值。上式计算很繁,下面采用结论 I 提供的方法。

$$\det[\lambda I - A_L] = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \Rightarrow \lambda(A_L) = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

$$\det[\lambda I - F] = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda(F) = \pm j$$

所以矩阵方程 $A_L P - P F = E$ 有唯一解 P 。由

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} P - P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

可以解出 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

外扰 w 的解

$$w(t) = e^{Ft} w(0) = \begin{bmatrix} * & \sin t \\ * & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

所以,状态的稳态解

$$\bar{x}_L(t) = -Pw(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}$$

校核:代入原方程右端

$$\begin{aligned} A_L \bar{x}_L + E_L w &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \bar{x}_L(t) \end{aligned}$$

所以, $\bar{x}_L(t)$ 是原方程的一个稳态解。

例 7.3-2 已知系统

$$\begin{cases} \dot{x}_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x_L + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ x = [1 \ 0] x_L + w \end{cases}$$

中外部输入 w 是常值输入,试判别系统是否实现输出调节。

解 外部输入是常值,其方程 $w = Fw$ 中, $F=0$,且

$$A_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad C_L = [1 \ 0]; \quad M_L = 1; \quad E_L = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A_L 的特征值是重根 -1 ,是渐近稳定的。矩阵方程 $A_L P - P F = E_L$ 有唯一解

$$P = A_L^{-1} E_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

而且

$$C_L P = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 = M_L$$

所以,该系统必实现输出调节。

校核:输出 z 的拉氏变换式

$$z(s) = [M_L + C_L(sI - A_L)^{-1} E_L] w(s)$$

所以,稳态输入误差

$$\begin{aligned} z(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} [M_L + C_L(sI - A_L)^{-1} E_L] \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} M_L + \frac{[1 \ 0] \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{s^2 + 2s + 1} \\ &= 1 + [1 \ 0] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

满足输出调节。

即该系统由 w 到 z 的稳态增益

$$M_L - C_L A_L^{-1} E_L = 0$$

例 7.3-3 已知受控系统 Σ_0 如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w \end{cases}$$

外扰及参考输入均为常值。试设计纯增益反馈控制器 $[K \ L]$ 使闭环极点配置在 -1 , 并使其实现输出调节。

解 (1) 输入矩阵为单位阵, 系统 Σ_0 状态完全可控。

(2) 设计状态反馈阵 K , 满足极点配置要求。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad F = 0$$

要求闭环极点为 -1 ,

$$A + BK = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{即 } BK = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(3) 计算满足装置条件及输出条件的 P, S 阵。由输出条件, $CP = M$ 及 C 是单位阵知

$$P = M = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

代入装置条件, $AP - PF + BS = E$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 0 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

得出 $S = [0 \ 1]^T$ 。

(4) 由 P, S 阵计算外扰补偿阵 L

$$L = KP - S = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(5) 确定纯增益反馈控制器

$$\begin{aligned} u &= Kx + Lw \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} w \end{aligned}$$

(6) 闭环的校核

闭环系统的方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK)x + (E + BL)w \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} w \\ z &= Cx + Mw \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w \end{aligned}$$

其稳态增益

$$M_L - C_L A_L^{-1} E_L = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$

肯定对常值 w 实现输出调节。

(7) 只有装置扰动 Bw 的综合的讨论

本例中,令 $M=0$,则只存在装置扰动。

极点配置的 K 阵同前

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

扰动补偿阵 L 的设计应修改。

由于 $M=0$,由输出条件 $CP=M$ 知 $P=0$ 。则装置条件蜕化为 $BS=E$ 。又由于 $S=KP-L$,所以,装置条件变为 $-BL=E$ 。满足 § 7-2 中结论 1 的条件式 (7.2-5)。实现了输出不受扰动 w 的影响。这时闭环方程是

$$\begin{cases} \dot{x} = (A+BK)x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x \\ z = Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

例 7.3-4 在上例中,试设计带动态补偿器的输出反馈调节器实现输出调节。

解 由于 C 是单位矩阵,则输出方程化为

$$x = z - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

所以,状态 x 可以不必重构。只需重构外扰状态 \hat{w} ,则

$$\dot{\hat{x}} = z - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{w}$$

上例已算出状态反馈阵和外扰补偿阵

$$K = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

则控制律为

$$\begin{cases} u_1 = -2\hat{x}_1 - 2\hat{w} = -2(z_1 - \hat{w}) - 2\hat{w} = -2z_1 \\ u_2 = -2\hat{x}_2 - 3\hat{w} = -2(z_2 - \hat{w}) - 3\hat{w} = -2z_2 - \hat{w} \end{cases}$$

而复合系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w \end{bmatrix}$$

是完全可观的。可以构造降维观测器重构外扰 \hat{w} 。

对复合系统按输出进行结构分解,变换阵

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

变换后的状态方程与输出方程为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ z = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases}$$

$$\text{式中: } \tilde{x} = T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + w \\ x_2 + w \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ w \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = T^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_1 + u_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + u_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = 0 \end{cases}$$

由第二个方程得

$$w = \tilde{x}_3 = \dot{\tilde{x}}_2 - \tilde{x}_2 - u_2$$

代入 $\tilde{x}_2 = z_2$ 及 $u_2 = -2z_2 - \dot{w}$ 得

$$w = \tilde{x}_3 = z_2 + z_2 + \dot{w}$$

做第三个方程的基本观测器,极点配置在闭环 $A+BK$ 极点 -1 的左边,取为 -5 。则

$$\dot{w} = -5w + 5\tilde{x}_3 = -5w + 5z_2 + 5z_2 + 5\dot{w}$$

令 $q = \dot{w} - 5z_2$, 则化为

$$\dot{q} = 5z_2$$

同时控制律化为

$$\begin{cases} u_1 = -2z_1 \\ u_2 = -2z_2 - \dot{w} = -7z_2 - q \end{cases}$$

得出线性多变量调节器的解为

$$\begin{cases} \dot{q} = 5z_2 \\ u_1 = -2z_1 \\ u_2 = -7z_2 - q \end{cases}$$

闭环的校核:将上述调节器代入开环方程,有

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2(x_1 + w) \\ -7(x_2 + w) - q \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} q \end{aligned}$$

则包括调节器状态的闭环方程是

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} w$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w$$

由稳态判据的装置条件 $A_L P - P F = E_L$, 及 $F=0$ 得

$$P = A_L^{-1} E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & -1 & -6/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

而输出条件 $C_L P = M_L$,

$$C_L P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} M_L$$

满足。所以,上述线性多变量调节器的解可以使闭环系统实现稳态无差。而且闭环的三个极点 $-1, -1, -5$, 分别是两个极点配置结果和一个降维观测器极点配置的结果。

§ 7-4 鲁棒调节器的设计

[内容提要]

一、鲁棒性的概念

1. 鲁棒性定义: 受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 的一个设计具有某种性质。如果参数矩阵的元素值发生波动时, 该设计仍然保持这种性质。则称这种性质具有鲁棒性, 也称该设计具有鲁棒性。

2. 具有鲁棒性的例子: 对受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 采用状态反馈 $u = V + Kx$ 使闭环系统 $\Sigma_k = (A + BK, B, C)$ 渐近稳定。当参数矩阵 A, B, C, K 的元素值在一定范围内变化时, 闭环系统 Σ_k 仍然是渐近稳定的。所以, 采用状态反馈使闭环渐近稳定的设计具有鲁棒性, 闭环渐近稳定也具有鲁棒性。

3. 不具有鲁棒性的例子: 对受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 采用 $u = FV + Kx$ 控制律实现闭环解耦的设计, 在一般情况下, 就不具有鲁棒性。

4. 鲁棒调节器: 对受扰系统 Σ_0 :

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew \quad (7.4-1)$$

$$z = Cx + Mw \quad (7.4-2)$$

$$\dot{w} = Fw \quad (7.4-3)$$

寻找合适的调节器使闭环系统渐近稳定并实现输出调节。如果调节器选择的合适, 使输出调节具有鲁棒性, 则称该调节器为鲁棒调节器。

二、常值干扰下的鲁棒调节器

结论 1 受扰系统(7.4-1)至(7.4-3)中, 状态 x 由控制输入 u 完全可控, 当外扰 w 是常值, 即 $F=0$ 时, 存在鲁棒调节器的充分必要条件是:

① 输入维数大于等于输出维数 $r \geq m$

②下列矩阵具有最大秩

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m \quad (7.4-4)$$

结论 I 完全可控的受扰系统 Σ_0 满足条件(7.4-4)时,其鲁棒调节器的形式为

$$\dot{q} = z \quad (7.4-5)$$

$$u = K_1 x + K_2 q \quad (7.4-6)$$

式中状态反馈阵 K_1 和 K_2 保证闭环系统渐近稳定和期望的极点配置。当状态 x 不可直接测量时,可采用重构状态 \hat{x} 代替。

几点讨论:

(1)常值干扰下鲁棒调节器存在条件(7.4-4)和 Σ_0 完全可控是保证复合系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} E \\ M \end{bmatrix} \omega \quad (7.4-7)$$

由 u 的完全可控性,以保证 $n+m$ 个极点的任意配置。

(2)受扰系统 Σ_0 和鲁棒调节器(7.4-6),(7.4-7)形成闭环系统 $\Sigma_L = (A_L, E_L, C_L, M_L)$, 其中

$$A_L = \begin{bmatrix} A+BK_1 & BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix}; \quad E_L = \begin{bmatrix} E \\ M \end{bmatrix}; \quad C_L = [C \ 0]; \quad M_L = M$$

实现输出调节的装置条件(7.3-11)为

$$\begin{bmatrix} A+BK_1 & BK_2 \\ C & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} E \\ M \end{bmatrix} \quad (7.4-8)$$

只要 A_L 是渐近稳定,上式就存在解阵 P 。而且输出条件(7.3-12)就隐含在上式的第二行块中 $[C \ 0]P = M$ 。说明只要 A_L 是渐近稳定的,就必然实现输出调节。由于前者具有鲁棒性,所以输出调节也具有鲁棒性。式(7.4-5)是鲁棒调节器。

(3)鲁棒调节器的式(7.4-5)表明在受常值扰动的系统 Σ_0 的每个输出误差分量 z_i 后面都串联一个积分器。当稳态时,每个积分器的输入(即每个输出误差分量 z_i)为零;积分器输出一些恰当常值以抵消常值扰动的影响。这种方法实质上是单变量系统中采用比例积分(PI)调节器的推广。

(4)鲁棒调节器式(7.4-5)中的 m 个积分器的传递函数阵是 I_m/s ,这个为零的极点在外扰 w 到误差输出 z 的传递函数阵 $G(s)$ 中形成一个为零的零点多项式 s 。由于闭环系统是渐近稳定的,该零点不会与闭环特征多项式的极点对消,而在 $z(s) = G(s)w(s)$ 中和常值外扰象函数 $w(s)$ 中为零的极点 $1/s$ 对消,保证稳态无差,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s z(s) = 0$$

三、鲁棒调节器的一般形式

当外扰 w 是非常值时,可以由 $w(t)$ 的函数形式获得 F 阵的最小多项式 $\phi(s)$;

$$\phi(s) = s^r + \alpha_1 s^{r-1} + \dots + \alpha_r \quad (7.4-9)$$

在受扰系统 Σ_0 的第 i 个误差输出分量 z_i 后面串联一个外扰模型最小多项式 $\phi(s)$ 的可控实现 $(A_i, B_i) i=1, 2, \dots, m$;

$$\dot{q}_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{i-1} \\ -a_i & \dots -a_1 \end{bmatrix} q_i + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z_i \quad (7.4-10)$$

则 m 维的鲁棒调节器为

$$\dot{q} = A_c q + B_c z \quad (7.4-11)$$

$$u = K_1 x + K_2 q \quad (7.4-12)$$

式中:

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}; \quad A_c = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & A_m \end{bmatrix}; \quad B_c = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & B_m \end{bmatrix}$$

K_1 和 K_2 使闭环渐近稳定且配置在期望极点上。

结论 III: 受扰系统式(7.4-1)至(7.4-3)是完全可控的, 而且对外扰模型最小多项式 $\phi(s)$ 的所有特征值 λ 均满足

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m \quad (7.4-13)$$

则必存在如式(7.4-11)和式(7.4-12)形式的鲁棒调节器。

几点结论:

(1) 结论 III 是一般外扰下的鲁棒调节器的存在条件和构造方法。结论 I 和 II 只是它在外扰为常值的特例。条件式(7.4-13)中令 $\lambda=0$ 则蜕化为结论 I 中的条件式(7.4-4)。

(2) 鲁棒调节器式(7.4-12)中的状态 x 不可直接测量时, 可用重构状态 \hat{x} 代替。

[例 题]

例 7.4-1 在例 6.2-4 的例立摆系统中, 状态 $x = [y \ \dot{y} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$, 其中 y 是小车的位置, θ 是摆杆偏离平衡态的角度。现在假定: 风以水平力 w 加到摆杆上, 以 $5w$ 加到小车上。

又给定小车的参考位置是 y_r 。则方程如下

$$\dot{x} = Ax + Bu + Ew = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} w$$

$$z = Cx - y_r = [1 \ 0 \ 0 \ 0]x - y_r$$

式中, z 是小车位置的误差。

设 w 和 y_r 都是阶跃函数, 试设计鲁棒调节器。

解: (1) 验证鲁棒调节器的存在条件

由存在条件(7.4-2)

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 5 = n + m$$

所以,存在如式(7.4-3)形式的鲁棒调节器。

(2)对误差输出每个分量串接积分器

本例输出维数 $m=1$,所以只串接一维积分

$$q=z$$

(3)写出复合系统方程

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 4w \\ 0 \\ 5w \\ -y_r \end{bmatrix} \\ z = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} \end{cases}$$

存在条件式(7.4-2)满足,说明上述复合系统由控制输入 u 完全可以控制全部状态 $[x \ q]^T$ 。

(4)配置复合系统的极点。

复合系统共5个极点,前4个极点仍要求在 $-1, -2, -1 \pm j$ 。第5个也配置在 -2 上,则期望特征多项式

$$f^*(\lambda) = \lambda^5 + 7\lambda^4 + 20\lambda^3 + 30\lambda^2 + 24\lambda + 8$$

令复合系统的状态反馈阵

$$\tilde{K} = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5]$$

则闭环 $\tilde{\Sigma}_K$ 的系统矩阵

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 - 1 & k_4 & k_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & 11 - k_3 & -k_4 & -k_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征多项式

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}) = \lambda^5 + (k_4 - k_2)\lambda^4 + (k_3 - k_1 - 11)\lambda^3 + (10k_2 - k_5)\lambda^2 + 10k_1\lambda + 10k_5$$

令 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$ 得

$$k_1 = 2.4$$

$$k_3 = 20 + k_1 + 11 = 33.4$$

$$k_2 = \frac{30 + k_5}{10} = 3.08$$

$$k_4 = 7 + k_2 = 10.08$$

$$k_5 = 0.8$$

(5)鲁棒调节器的方程

$$\begin{cases} \dot{q} = z \\ u = [2.4 \quad 3.08 \quad 33.4 \quad 10.08]x + 0.8q \end{cases}$$

(6) 闭环系统稳态的讨论

闭环系统的方程如下:

$$\begin{cases} \dot{y} = y \\ \dot{\bar{y}} = 2.4 + 3.08\bar{y} + 32.4\theta + 10.08\dot{\theta} + 0.8q + 4w \\ \dot{\theta} = \theta \\ \dot{\bar{\theta}} = -2.4y - 3.08\bar{y} - 22.4\theta - 10.08\dot{\theta} - 0.8q + 6w \\ \dot{q} = y - y_r = z \end{cases}$$

稳态时, $z = y - y_r = 0$, 即 $y = y_r$; 而且 $\dot{y} = \dot{\theta} = \dot{\bar{y}} = \dot{\bar{\theta}} = 0$ 。则上述方程只剩下两个

$$\begin{cases} 0 = 2.4y_r + 32.4\theta + 0.8q + 4w \\ 0 = -2.4y_r - 22.4\theta - 0.8q + 6w \end{cases}$$

解之, 得

$$\begin{cases} \theta = -w \\ q = 35.5w - 3y_r \end{cases}$$

结果的意义很明显。 $\theta = -w$ 说明摆杆必须有一个偏角以抵抗风力的恒定作用才能维持平衡。 q 的稳态值不为零, 才能产生必要的控制作用 u 使得系统稳态保持 $y = y_r$ 和 $\theta = -w$ 。

例 7.4-2 已知受控系统的受扰模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \frac{1}{2}w_1 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + u + \frac{1}{5}w_2 \\ z = x_1 - w_2 + 2w_3 \end{cases}$$

式中: $w_1 = \sin t, w_2 = \cos t, w_3 = 1(t)$ 。试设计其鲁棒调节器, 使闭环极点的实部均小于或等于 $-1/2$ 。

解 (1) 判定系统的可控及可观测性

从系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 0]$$

容易看出 Σ_0 是可控且可观测的, 且 (A, B) 是第二种可控规范形; (A, C) 是第二种可观测规范形。

(2) 确定外扰模型

外扰函数共三种形式, 它们的拉氏变换式分别是

$$w_1(s) = \frac{s}{s^2+1}; \quad w_2(s) = \frac{1}{s^2+1}; \quad w_3(s) = \frac{1}{s}$$

所以, 外扰的最小多项式为

$$\Phi(s) = s(s^2+1) = s^3+s$$

外扰系统的状态方程是

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

(3)判断是否存在鲁棒调节器

由存在条件式(7.4-8)得

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A-\lambda I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 = n+m$$

所以,存在鲁棒调节器。

(4)设计伺服调节器。

在每个误差输出分量后面串接一个外扰模型最小多项式的可控实现。本例 $m=1$, 外扰最小多项式次数 $l=3$, 所以伺服调节器 $ml=3$ 维, (A_c, B_c) 。

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z$$

(5)确定闭环的期望特征多项式

复合系统如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} w$$

可以配置 5 个极点。取为 $-1, -\frac{1}{2} \pm j, -2 \pm j$, 均满足实部 $\leq -1/2$ 。则期望特征多项式为

令 $f(\lambda) = f^*(\lambda)$ 有

$$K_1 = \begin{bmatrix} -\frac{61}{4} & -7 \end{bmatrix}; \quad K_2 = \begin{bmatrix} -\frac{25}{4} & -2 & -\frac{57}{4} \end{bmatrix}$$

(7) 对 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 构造其基本观测器重构状态 \hat{x}_1 和 \hat{x}_2

令基本观测器的反馈阵 $H = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$, 有

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} (1 \ 0) \right] \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} z \\ &= \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix} z \end{aligned}$$

其极点为重根 -3 , 均小于 5 个极点的实部。

(8) 作出全部结构图

在前述结果中, 令

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix};$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}; \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

做出结构图如图 7-5 所示。

(9) 仿真结果

对图 7-5 的结构图用模拟机 (或数字机) 进行仿真研究。

取初值如下:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{x}(0) = q(0) = 0$$

仿真结果表明: 大约在外扰正余弦函数的两个周期, 即约 2 秒后进入稳态。并实现误差输出 $z=0$, 即 $x_1(t) = -2 - \cos t$ 。

仿真中, 还进一步验证调节器的鲁棒性。为此令系统矩阵 A 的一个元素有波动, 即令

$$A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1+\epsilon & 1 \end{bmatrix}$$

式中, ϵ 取值由 0 至 1, 变动最大达 1 倍。其误差 $z(t)$ 的稳态值均为零。为便于比较, 表 7-1 列出误差绝对值 $|z|$ 的最大值及其发生时间:

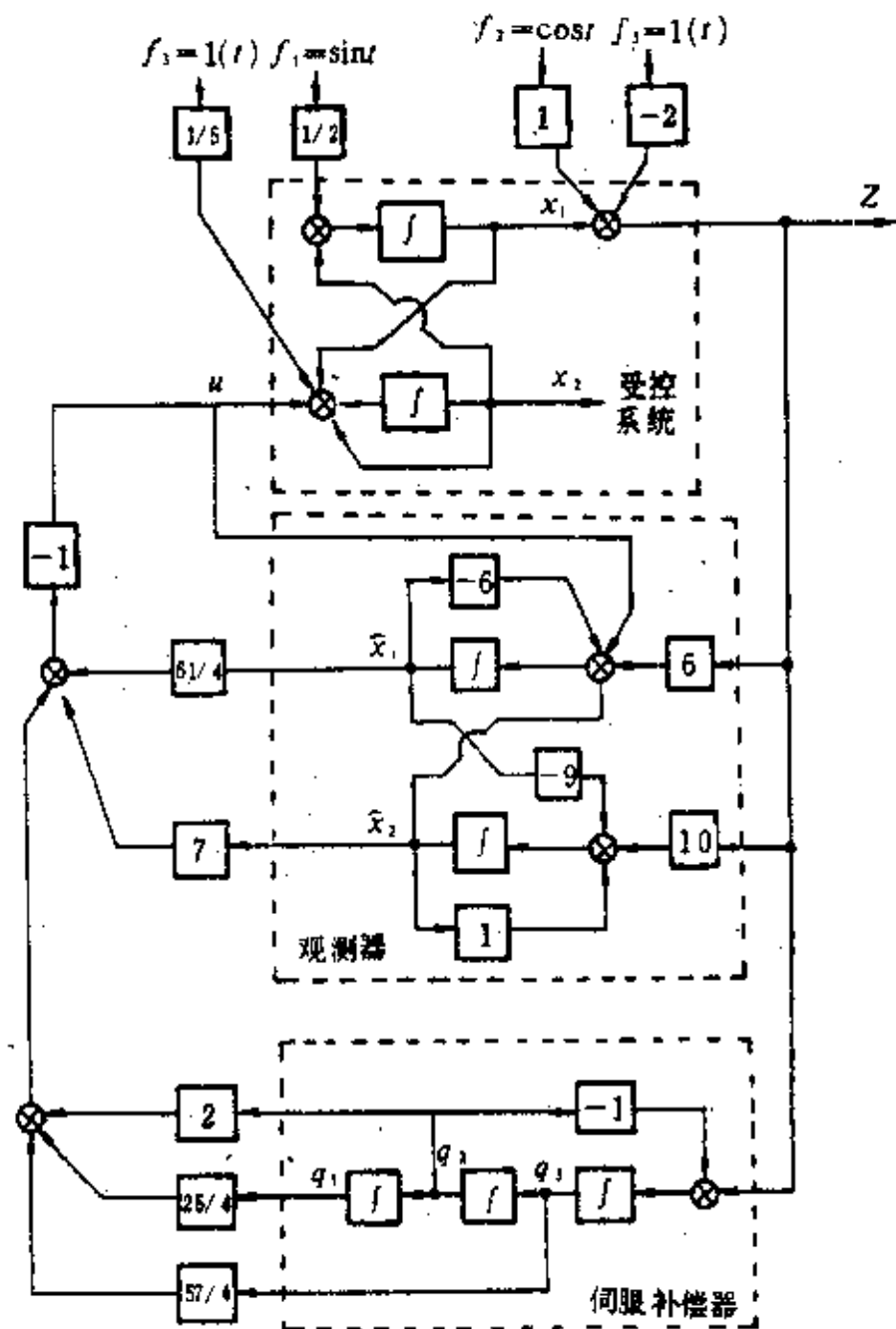


图 7-5 例 7.4-2 的结构图

表 7-1

波动值 ϵ	0	0.2	0.5	1.0
$ z _{\max}$	3.1	3.07	3.03	2.95
发生时间(s)	0.9	0.85	0.9	0.95

而进入稳态的时间相差不多。

习 题

7-1 已知受控系统 Σ_0 的传递函数阵

$$G_0(s) = \begin{bmatrix} 1/(s+1) & 1/(s+2) \\ 1/s(s+1) & 1/s \end{bmatrix}$$

试求一前馈串联补偿器 $G_c(s)$ 使系统实现解耦。并使两个已解耦子系统的极点分别是 -1 两重根和 -2 根。

7-2 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

试求一控制规律(如果存在)使系统解耦。

7-3 已知受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

① 试判断可解耦否?

② 试求一个状态反馈 K 加输入变换 F 使其闭环为积分型解耦系统。

7-4 对例 7.1-2 系统寻找状态反馈阵 K 和输入变换阵 F 使闭环解耦,并使闭环的四个极点都是 -1。

7-5 检查下列系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 是否可以利用 (K, F) 变换实现闭环的解耦。若可以,试求化为积分解耦系统的状态反馈阵 K 和输入变换阵 F 。

$$\textcircled{1} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\textcircled{2} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

7-6 两个连通的贮液槽系统方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

试求一控制规律 u_1, u_2 使对两个液面 y_1, y_2 实现解耦控制,并使闭环极点分别为 μ_1, μ_2 。

7-7 控制地球赤道平面做圆周运动的卫星,其运动的线性方程 $\Sigma_0 = (A \ B \ C)$ 如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

式中, ω 是卫星的角速度。状态 $x = [r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}]^T$, 输出 $y = [r \ \theta]^T$, 控制输入 $u = [u_r \ u_\theta]^T$ 都是半径方向 r 和切线方向 θ 的。

- ① 求其传递函数阵 $G_0(s)$, 证实在切向和径向间是耦合的。
- ② 由 $G_0(s)$ 确定基本参量 d_i 和 r_i^* , 说明该系统是可以 (K, F) 解耦的。
- ③ 求化积分型解耦系统的 (K, F) 变换。
- ④ 按③的结果进一步求状态反馈 \bar{K} , 使闭环保持解耦, 并使全部极点都为 -1 。

7-8 对习题7-1给定的传递函数阵 $G_0(s)$, 计算解耦的基本参量 d_i 和 r_i^* 。从而判断 $G_0(s)$ 的最小实现 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 是否可以采用 (K, F) 变换实现闭环解耦。

7-9 $\Sigma = (A, B, C)$ 传递函数阵 $G(s)$ 是方阵。定义 $\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$, 称为 Σ 的稳态增益矩阵。如果 Σ 渐近稳定, 而且稳态增益阵 $G(0)$ 是对角化的非奇异方阵, 则称 Σ 是稳态解耦的。

① 试证明: Σ 存在 (K, F) 变换使闭环系统 $\Sigma_{K, F} = (A + BK, BF, C)$ 实现稳态解耦的充分必要条件是: Σ 状态反馈可镇定, 且有

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

② 试求使习题7-2闭环实现稳态解耦的 (K, F) 变换。

提示: 对①先证明 $G(0) = -CA^{-1}B$, 以及有等式

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + \text{rank} G(0) \quad \text{和} \quad \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & CA^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

7-10 控制系统的状态模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_2 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 + f_2 \end{cases}$$

当外部输入分别为阶跃和斜坡函数, 即 $f_1 = 1(t)$, $f_2 = t$ 时, 求状态 x_1 和 x_2 的稳态解。

7-11 控制系统的状态模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w \end{cases}$$

其中, w 为常值外扰。试判断该系统是否实现输出调节。

7-12 控制系统状态模型及外扰模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w \\ \dot{z} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w \end{cases}$$

问是否实现输出调节?

7-13 受控系统及外扰模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} w \end{cases}$$

①设计纯增反馈控制器 $[K, L]$,使闭环极点配置在 $-2, -3$ 上,而且达到输出调节。

②当上述系统只有装置扰动时,即输出方程为

$$z = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} x$$

时,还能达到输出调节吗?

7-14 受控系统的状态模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 6 & 3 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

试选择状态反馈阵 K ,使闭环输出 y 不受扰动 w 的影响,即实现从 w 到 y 的传递函数为零。

7-15 如果受控系统 Σ_0 包括有控制输入对输出的直接作用,以及外扰和参考输出项,即其方程与外扰模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ z = Cx + Du + Mw \\ \dot{w} = Fw \end{cases}$$

那么,在§7-3的结论I中,式(7.3-9)应当做何种修改,才能使闭环实现输出调节。

7-16 生产库存控制系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\theta & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{cases}$$

式中: $x_1(t)$ 是实际的生产率; $x_2(t)$ 是库存量与给定常值的偏差; $u(t)$ 是控制要求,即要求的生产率; θ 是满足第一个状态方程 $\dot{x}_1 = \theta(u - x_1)$ 的正常数,说明实际生产率达到要求的生产率有一个过渡过程;输出 z_1 是生产率的误差;而 $z_2 = x_2; w$ 是销售速率,可以经调查获知。

当销售速率是阶跃扰动时,试设计由实际生产率、库存量误差和销售速度确定的控制策

略 $u = Kx + Lw$, 使闭环极点为重根 -0 , 且达到生产率和库存量输出稳态误差为零。

7-17 有外扰的受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$ 如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} w \\ \dot{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} w \end{cases}$$

当外扰 w 的两个分量均为单位阶跃函数时, 求其鲁棒调节器, 使闭环极点为 $-1, -1, -2, -2$ 。

7-18 有装置外扰的受控系统 $\Sigma_0 = (A, B, C)$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ \dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \\ \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} w \end{cases}$$

试问存在鲁棒调节器吗? 若存在, 请设计之。且使闭环极点实部均小于 -2 。

7-19 单输入单输出系统 Σ_0 上作用有如下所述的外扰 w 。求最简的伺服补偿器方程, 并做出结构图。

$$\textcircled{1} \quad \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} w \quad \textcircled{2} \quad \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} w$$

7-20 对习题 7-6 连通贮液槽系统, 如果存在有常值干扰 w , 试设计其鲁棒调节器, 使闭环的极点均为 -4 。

第八章 变分法求泛函极值问题

§ 8-1 泛函与变分的基本概念

[内容提要]

一、泛函

1. 定义 如果对某一类函数 $\{x(t)\}$ 中的每个函数 $x(t)$, 有一个 J 值与之对应, 则变量 J 称为依赖于函数 $x(t)$ 的泛函, 记作 $J[x(t)]$ 。

J 的自变量是函数, 有时简称泛函为函数的函数。

2. $J[x(t), x(t)]$, 式中 $x(t) = [x_1(t) \cdots x_n(t)]^T$, 表示依赖于多变量的多个函数的泛函, 即依赖于

$$x_1(t), \dots, x_n(t); \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)$$

的泛函。

3. J 是纯(标)量函数。

4. 最优控制理论中常用如下形式的泛函作为性能指标:

$$\text{积分型} \quad J = \int_{t_0}^{t_f} F[x(t), u(t), t] dt \quad (8.1-1)$$

$$\text{终端型} \quad J = \Theta[x(t_f), t_f] \quad (8.1-2)$$

$$\text{综合型} \quad J = \Theta[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[x(t), u(t), t] dt \quad (8.1-3)$$

这里的 x 为 n 维状态向量, u 为 r 维控制向量, t_0 为始端时间, t_f 为终端时间, Θ, F 为具有二阶导数的标量函数。

泛函 J 的自变量有 $x, u, x(t_f)$; 当终端时间可变时, t_f 也是自变量。 F 中的 t 表示时变, 不是泛函自变量。

二、泛函自变量及泛函的变分

1. 泛函 $J[x(t)]$, 其自变量 $x(t)$ 的变分记作 $\delta x(t)$ 或 δx , 定义为:

$$\delta x = x(t) - x^*(t) \quad (8.1-4)$$

式中, $x^*(t)$ 为一标称函数(最优控制中即最优轨线), $x(t)$ 为 $x^*(t)$ 邻域的任一函数。

2. 泛函 $J[x(t)]$ 的一阶变分记作 δJ , 定义为:

$$\delta J = \left. \frac{dJ}{dx} \right|_{x=x^*} \cdot \delta x \quad (8.1-5)$$

它是下列泛函增量

$$\Delta J = J[x(t)] - J[x^*(t)] = \left. \frac{dJ}{dx} \right|_{x=x^*} \cdot \delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 J}{dx^2} \right|_{x=x^*} \cdot (\delta x)^2 + \varepsilon \quad (8.1-6)$$

的线性主部。

3. 泛函 $J[x(t)]$ 的二阶变分记作 $\delta^2 J$, 定义为:

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \frac{d^2 J}{dx^2} \Big|_{x=x^*} \cdot (\delta x)^2 \quad (8.1-7)$$

它是泛函增量的二次式。

4. 设泛函 $J = F[x(t), \dot{x}(t), t]$, 则

$$\delta J = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \quad (8.1-8)$$

$$\delta^2 J = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (\delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x} \partial x} \delta x \cdot \delta \dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} (\delta \dot{x})^2 \right] \quad (8.1-9)$$

5. 设泛函 $J = F[x(t), \dot{x}(t), t]$, 则

$$\delta J = \delta x^T \frac{\partial F}{\partial x} + \delta \dot{x}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \quad (8.1-10)$$

式中

$$\begin{aligned} \delta x^T &= [\delta x_1 \ \cdots \ \delta x_n], \quad \delta \dot{x}^T = [\delta \dot{x}_1 \ \cdots \ \delta \dot{x}_n] \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \left[\frac{\partial F}{\partial x_1} \ \cdots \ \frac{\partial F}{\partial x_n} \right]^T, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} \ \cdots \ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_n} \right]^T \\ \delta^2 J &= \frac{1}{2} \left[\delta x^T \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + 2 \delta x^T \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \delta \dot{x}^T \frac{\partial}{\partial \dot{x}^T} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} \right] \end{aligned} \quad (8.1-11)$$

不难证明其二阶偏导数阵有:

$$\frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial x} \quad (8.1-12)$$

$$\delta x^T \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial x} \delta x = \delta x^T \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial x} \delta x \quad (8.1-13)$$

6. 设泛函 $J = F[x(t), u(t), t]$, 则

$$\delta J = \delta x^T \frac{\partial F}{\partial x} + \delta u^T \frac{\partial F}{\partial u} \quad (8.1-14)$$

式中

$$\begin{aligned} \delta u^T &= [\delta u_1 \ \cdots \ \delta u_r], \quad \frac{\partial F}{\partial u} = \left[\frac{\partial F}{\partial u_1} \ \cdots \ \frac{\partial F}{\partial u_r} \right]^T \\ \delta^2 J &= \frac{1}{2} \left[\delta x^T \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + 2 \delta x^T \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \delta u^T \frac{\partial}{\partial u^T} \frac{\partial F}{\partial u} \delta u \right] \end{aligned} \quad (8.1-15)$$

不难证明其二阶偏导数阵有:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^T} \frac{\partial F}{\partial x} \right)^T = \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial u} \quad (8.1-16)$$

$$\delta x^T \frac{\partial}{\partial u^T} \frac{\partial F}{\partial x} \delta u = \delta u^T \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial u} \delta x \quad (8.1-17)$$

7. 设泛函 $f = \lambda^T B u(t)$ (8.1-18)

式中 λ 为 n 维常值向量, B 为 $(n \times r)$ 常值矩阵, 泛函自变量 u 为 r 维向量, 则泛函的一阶变分为:

$$\begin{aligned} \delta f &= \delta u^T \frac{d}{du} [\lambda^T B u(t)] = \delta u^T \frac{d}{du} [\lambda^T B u(t)]^T \\ &= \delta u^T \frac{du^T(t)}{du} \cdot B^T \lambda = \delta u^T \cdot B^T \lambda \end{aligned} \quad (8.1-19)$$

注意到标量函数 $\lambda^T B u(t)$ 对向量 u 求导运算, 按规则需先将其转置, 使求导函数在形式上处于最左面, 并利用 $du^T(t)/du = I$ 的性质, 便可获得结果。读者运用维数分析并不难明了。

8. 设泛函 $f = a^T(x) b(x)$ (8.1-20)

式中 $a(x)$ 、 $b(x)$ 均为 $(m \times 1)$ 维向量函数, 则

$$\delta f = \delta x^T \frac{d}{dx} [a^T(x)b(x)] = \delta x^T \left[\frac{da^T(x)}{dx} b(x) + \frac{db^T(x)}{dx} \cdot a(x) \right] \quad (8.1-21)$$

注意 $\delta f \neq \delta x^T \left[\frac{da^T(x)}{dx} b(x) + a^T(x) \frac{db(x)}{dx} \right]$

由维数分析可知, 该式右端第二项不符矩阵乘法规则, 是无意义的。等式右端的变分结果一定应为标量函数。

三、变分运算规则

设 F_1, F_2 是 x, \dot{x}, t 的函数, t_0, t_f 固定不变, 则有:

$$\delta(F_1 + F_2) = \delta F_1 + \delta F_2 \quad (8.1-22)$$

$$\delta(F_1 F_2) = \delta F_1 \cdot F_2 + F_1 \cdot \delta F_2 \quad (8.1-23)$$

$$\delta \left[\int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt \right] = \int_{t_0}^{t_f} [\delta F(x, \dot{x}, t)] dt \quad (8.1-24)$$

$$\delta \dot{x} = \frac{d}{dt} (\delta x) \quad (8.1-25)$$

[例 题]

例 8.1-1 设泛函为

$$J = \Theta[x(t_f) + t_f] + v^T M[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{F(x, u, t) + \lambda^T [f(x, u(t) - \dot{x})]\} dt$$

式中 t_f 固定, 泛函自变量有 $x(t_f)$ 、 $x, \dot{x}, u, v, \lambda$; Θ, F 为标量函数; M, v 为 $(q \times 1)$ 维, x, \dot{x}, λ 为 $(n \times 1)$ 维, u 为 $(r \times 1)$ 维向量函数, 试求 δJ 。

解
$$\begin{aligned} \delta J = & \delta x^T(t_f) \frac{\partial \Theta[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} + \delta v^T \frac{\partial v^T M[x(t_f), t_f]}{\partial v} \\ & + \delta x^T(t_f) \frac{\partial M^T[x(t_f), t_f]}{\partial x(t_f)} v \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[\delta x^T \frac{\partial F}{\partial x} + \delta u^T \frac{\partial F}{\partial u} + \delta \lambda^T \frac{\partial \lambda^T}{\partial \lambda} f(x, u, t) + \delta x^T \frac{\partial f^T(x, u, t)}{\partial x} \lambda \right. \\ & \left. + \delta u^T \frac{\partial f^T(x, u, t)}{\partial u} \lambda - \delta \lambda^T \frac{\partial \lambda^T}{\partial \lambda} \dot{x} - \delta x^T \frac{\partial \dot{x}^T}{\partial x} \lambda \right] dt \end{aligned}$$

式中, $\frac{\partial v^T}{\partial v} = I_q, \frac{\partial \lambda^T}{\partial \lambda} = I_n, \frac{\partial \dot{x}^T}{\partial x} = I_n$; 整理简记为

$$\begin{aligned} \delta J = & \delta x^T(t_f) \left[\frac{\partial \Theta}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial M^T}{\partial x(t_f)} v \right] + \delta v^T M \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \left[\delta x^T \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} \lambda \right) + \delta \lambda^T (f - \dot{x}) + \delta u^T \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial f^T}{\partial u} \lambda \right) - \delta \dot{x} \lambda \right] dt \end{aligned}$$

例 8.1-2 设泛函为

$$J = \Theta[x(t_f), t_f] + v^T M[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{H(x, u, \lambda, t) + \lambda^T \dot{x}\} dt$$

式中 t_0 固定; $t_f = t_f^* + \delta t_f$, 表示终端时间可变, 且已知 $\delta x(t_f) = \delta x(t_f^*) + \dot{x}(t_f^*) \delta t_f$, 试求 δJ 。

解 t_f 可变, 故 $\delta t_f \neq 0$, 此时 t_f 也是泛函自变量。

$$\delta J = \delta x^T(t_f) \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial x(t_f)} + \delta t_f \frac{\partial \Theta}{\partial t_f} + \delta v^T \cdot M + \delta x^T \frac{\partial M^T}{\partial x(t_f)} v + \delta t_f \cdot \frac{\partial M^T}{\partial t_f} \cdot v$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^{t_f^*} \delta(H - \lambda^T \dot{x}) dt + \int_{t_f^*}^{t_f^* + \delta t_f} (H - \lambda^T \cdot \dot{x}) dt \\
& = \delta x^T(t_f) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x(t_f)} + \delta t_f \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t_f} + \delta v^T M + \delta x^T(t_f) \cdot \frac{\partial M^T}{\partial x(t_f)} v + \delta t_f \frac{\partial M^T}{\partial t_f} v \\
& + \int_{t_0}^{t_f^*} (\delta x^T \frac{\partial H}{\partial x} + \delta u^T \cdot \frac{\partial H}{\partial u} + \delta \lambda^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} - \delta \lambda^T \cdot \dot{x} - \delta \dot{x}^T \cdot \lambda) dt \\
& + \{H[x(t_f^*), u(t_f^*), \lambda(t_f^*), t_f^*] - \lambda^T(t_f^*) \dot{x}(t_f^*)\} \delta t_f
\end{aligned}$$

由已知 $\delta x(t_f) = \delta x(t_f^*) + \dot{x}(t_f^*) \delta t_f$

两端左乘 $\lambda^T(t_f^*)$; $\lambda^T(t_f^*) \delta x(t_f) = \lambda^T(t_f^*) \delta x(t_f^*) + \lambda^T(t_f^*) \dot{x}(t_f^*) \delta t_f$

故 $\lambda^T(t_f^*) \dot{x}(t_f^*) \delta t_f = \lambda^T(t_f^*) \delta x(t_f) - \lambda^T(t_f^*) \delta x(t_f^*) = \delta x^T(t_f) \lambda(t_f^*) - \delta x^T(t_f^*) \lambda(t_f^*)$

式中 $\int_{t_0}^{t_f^*} \delta \dot{x}^T \lambda dt = \int_{t_0}^{t_f^*} d(\delta x^T) \lambda = (\delta x^T \cdot \lambda) \Big|_{t_0}^{t_f^*} - \int_{t_0}^{t_f^*} \delta x^T \dot{\lambda} dt = \delta x^T(t_f^*) \lambda(t_f^*) - \int_{t_0}^{t_f^*} \delta x^T \dot{\lambda} dt$

故 δJ 整理为

$$\begin{aligned}
\delta J & = \delta x^T(t_f) \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial M^T}{\partial x(t_f)} \cdot v - \lambda(t_f^*) \right] + \delta v^T \cdot M \\
& + \delta t_f \left\{ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t_f} + \frac{\partial M^T}{\partial t_f} \cdot v + H[x(t_f^*), u(t_f^*), \lambda(t_f^*), t_f^*] \right\} \\
& + \int_{t_0}^{t_f^*} \left[\delta x^T \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} \right) + \delta u^T \cdot \frac{\partial H}{\partial u} + \delta \lambda^T \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \dot{x} \right) \right] dt
\end{aligned}$$

例 8.1-3 设泛函 $J = \int_{t_0}^{t_f} (t^2 + x^2 + \dot{x}^2) dt$, t_0 固定, 试求 t_f 固定及 t_f 可变时的 δJ .

解 t_f 固定时有

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} (2x\delta x + 2\dot{x}\delta \dot{x}) dt$$

式中
$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_f} \dot{x}\delta \dot{x} dt & = \int_{t_0}^{t_f} \dot{x} d(\delta x) = (\dot{x}\delta x) \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \delta x \cdot \ddot{x} dt \\
& = \dot{x}(t_f)\delta x(t_f) - \dot{x}(t_0)\delta x(t_0) - \int_{t_0}^{t_f} \delta x \cdot \ddot{x} dt
\end{aligned}$$

当两端状态固定时, 有 $\delta x(t_0) = 0, \delta x(t_f) = 0$; 故

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} (2x\delta x - 2\ddot{x}\delta x) dt$$

t_f 可变时有:

$$\begin{aligned}
\delta J & = \int_{t_0}^{t_f^*} (2x\delta x + 2\dot{x}\delta \dot{x}) dt + \int_{t_f^*}^{t_f^* + \delta t_f} (t^2 + x^2 + \dot{x}^2) dt \\
& = \int_{t_0}^{t_f^*} (2x\delta x - 2\ddot{x}\delta x) dt + [t_f^2 + x^2(t_f^*) + \dot{x}^2(t_f^*)] \delta t_f
\end{aligned}$$

§ 8-2. 泛函极值问题

[内容提要]

求泛函极值问题需用变分法, 其原理和步骤与用微分法求函数极值问题相同。

一、函数极值条件的向量矩阵形式

1. 二元函数

设 $f(x) = f(x_1, x_2)$, 式中 $x = [x_1 \ x_2]$, 有二阶连续偏导数, 若在点 (x_1^*, x_2^*) 处有极值, 便可在该点处展成泰勒级数, 其极值必要条件为展开式中的一次项为零, 即

$$\frac{df}{dx} = 0 \text{ 或 } \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = 0 \quad (8.2-1)$$

极小(大)值充分条件为:

$$\frac{df}{dx} = 0; \quad \frac{d^2f}{dx^2} \text{ 正(负)定} \quad (8.2-2)$$

式中

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{df}{dx^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \quad (8.2-3)$$

2. n 元函数

$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的极值必要条件为:

$$\frac{df}{dx} = 0 \text{ 或 } \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 0 \quad (8.2-4)$$

极小(大)值充分条件为:

$$\frac{df}{dx} = 0; \quad \frac{d^2f}{dx^2} \text{ 正(负)定} \quad (8.2-5)$$

式中

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (8.2-6)$$

式(8.2-3)、式(8.2-6)所示二阶偏导数阵称海赛(Hesse)阵。

3. 拉格朗日乘子法

这是一种寻求满足等式约束方程极值条件的方法, 也称条件极值求法。

(1) 设 $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ 的极值点需满足下列 m 个约束方程

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (8.2-7)$$

且 $m < n$, 则引入 m 维拉格朗日乘子向 λ , 构成下列拉格朗日函数 L

$$L = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda^T g(x_1, \dots, x_n) = L(x, \lambda) \quad (8.2-8)$$

转化为寻求 $(n+m)$ 元拉格朗日函数的极值问题。

(2) L 函数的极值必要条件为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g^T}{\partial x} \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= g(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.2-9)$$

L 函数极小(大)充分条件为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0; \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x^T} \left(\frac{\partial g^T}{\partial x} \cdot \lambda \right) & \frac{\partial g^T}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial x^T} & 0 \end{bmatrix} \text{正(负)定} \end{aligned} \right\} \quad (8.2-10)$$

式中 $\frac{\partial g}{\partial x^T}$ 为 $(m \times n)$ 矩阵, $\frac{\partial g^T}{\partial x}$ 为 $(n \times m)$ 矩阵, 0 为 m 阶零矩阵。

(3) 由式(8.2-9)可见, 约束方程是极值必要条件之一, 所求极值显然满足约束方程。

(4) 极值点处有 $g(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0$, 则

$$L^* = f(x_1^*, \dots, x_n^*) \quad (8.2-11)$$

即 L 函数与 f 函数具有相同极值。

(5) 拉格朗日乘子法的实质是: 将有等式约束的函数极值问题, 转化为无约束的函数极值问题。

(6) 要求 $m < n$, 即约束方程一定要少于函数变量的个数。这是由于当 $m = n$ 时, 满足约束方程的解是唯一确定的。不再能利用导数条件来寻求极值点了。当 $m > n$ 时, 则无解。

(7) 拉格朗日乘子法又称为增元法。

4. 嵌入法

这是又一种寻求满足等式约束下函数极值条件的方法。

(1) 先根据 m 个约束条件解出 m 个变量, 代入函数表达式, 便得到一个考虑约束条件在内的但消去了 m 个变量、余下 $(n-m)$ 个变量的新的函数表达式。

(2) 利用此新的函数表达式, 按无约束函数极值条件求出极值点, 并判断极值性质。所求的极值无疑会满足约束条件。

(3) 本方法在约束方程个数少的简单情况下极为有效; 当约束方程多时, 解出变量关系并不容易, 因而在数学应用中不及拉格朗日乘子法普遍。

(4) 嵌入法又称为消元法。

二、无约束泛函极值问题

设 $J = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt$, 欲寻求一条极值曲线 $x(t)$ 使 J 取极值。

1. 终端时间 t_f 固定的情况

(1) 极值必要条件为:

$$\text{欧拉方程} \quad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (8.2-12)$$

$$\text{横截条件} \quad \left(\delta x^T \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \quad (8.2-13)$$

它们是由

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left(\delta x^T \frac{\partial F}{\partial x} + \delta \dot{x}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) dt = \int_{t_0}^{t_f} \delta x^T \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right] dt + \left(\delta x^T \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t_0}^{t_f} = 0$$

且考虑 $\delta x \neq 0$ 导出的。

(2) 欧拉方程的其它表达式

将式(8.2-12)左端第二项按全导数展开有

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{x} - \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \ddot{x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (8.2-14)$$

这是 n 个二阶微分方程。

当 F 不显含 t 时, 还有

$$\frac{d}{dt} \left(F - \dot{x}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (8.2-15)$$

分别计算 $\frac{dF}{dt}$ 、 $\frac{d}{dt} \left(\dot{x}^T \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)$ 且考虑式(8.2-14), 可验证。

(3) 横截条件指明极值曲线在起点、终点处应满足的条件, 提供欧拉方程解的边界条件。展开式(8.2-13)有:

$$\delta x^T(t_f) \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} - \delta x^T(t_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0 \quad (8.2-16)$$

初始状态通常是给定的, $x(t_0) = x_0$, 故 $\delta x^T(t_0) \equiv 0$; 给定终端状态时, $x(t_f) = x_f$, 也有 $\delta x^T(t_f) \equiv 0$; 终端状态自由时, 则 $\delta x^T(t_f) \neq 0$, 横截条件化为:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} = 0 \quad (8.2-17)$$

对于始端、终端状态都给定的情况, 则由

$$x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f \quad (8.2-18)$$

提供欧拉方程解的边界条件。

(4) 通常处理泛函极值问题, 一般不去考虑充分条件, 而是从实际问题的性质出发, 间接地判断泛函极值问题的存在性, 直接利用欧拉方程及横截条件求出极值曲线的唯一解。

2. 终端时间 t_f 可变的情况

(1) 当终端状态自由时, 极值必要条件为:

$$\text{欧拉方程} \quad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (8.2-19)$$

$$\text{横截条件} \quad \delta x^T(t_f) \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} - \delta x^T(t_0) \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0 \quad (8.2-20)$$

$$F[x(t_f^*), \dot{x}(t_f^*), t_f^*] = 0 \quad (8.2-21)$$

式中 t_f^* 为最优终端时间。

(2) 当终端状态沿规定规线 $c(t)$ 时, 见图 8-1, 极值必要条件为:

$$\text{欧拉方程} \quad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (8.2-22)$$

$$\text{横截条件} \quad [c(t_f) - \dot{x}(t_f)]^T \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_f} + F[x(t_f^*), \dot{x}(t_f^*), t_f^*] = 0 \quad (8.2-23)$$

$$\delta x^T(t_0) \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_0} = 0 \quad (8.2-24)$$

注意到 t_f 可变时, $\delta x(t_f)$ 与 δt_f 不是相互独立的, 满足

$$\delta x(t_f) = \delta x(t_f^*) + \dot{x}(t_f^*) \cdot \delta t_f \quad (8.2-25)$$

$$\delta x(t_f) = \dot{c}(t_f^*) \delta t_f \quad (8.2-26)$$

(3) 当终端状态给定时, 极值必要条件同式(8.2-22)~式(8.2-24), 唯需令 $\dot{c}(t_f^*) = 0$ 。

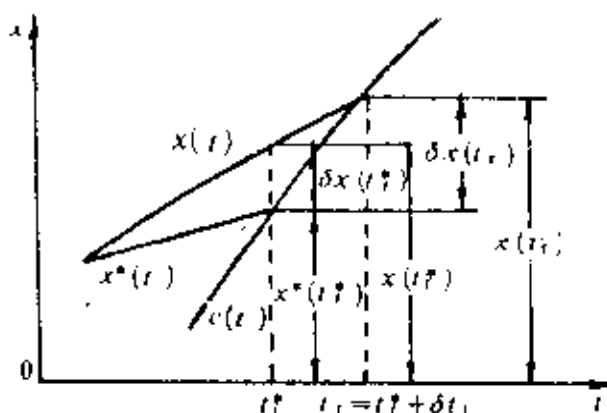


图 8-1 可变终端时间问题

三、条件泛函极值问题

1. 设 $J = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt$, 式中 t_f 固定。欲寻求受下列代数方程

$$f(x, t) = [f_1(x, t) \cdots f_n(x, t)]^T = 0 \quad (8.2-27)$$

约束的极值曲线 $x(t)$ 使 J 取极值。

(1) 引入 $(m \times 1)$ 维拉格朗日乘子 λ , 构造拉格朗日函数 L :

$$L = F(x, \dot{x}, t) + \lambda^T f(x, t) = L(x, \dot{x}, \lambda, t) \quad (8.2-28)$$

(2) 转化为寻求无约束的增广泛函 J_* 的极值

$$J_* = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, \lambda, t) dt \quad (8.2-29)$$

(3) J_* 与 J 有相同的极值点, 且 $J_* = J$ 的极值必要条件为:

欧拉方程
$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (8.2-30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f(x, t) = 0 \quad (8.2-31)$$

横截条件
$$\left(\delta x^T \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \quad (8.2-32)$$

式中
$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} \cdot \lambda \quad (8.2-33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \quad (8.2-34)$$

2. 设 $J = \int_{t_0}^{t_f} F(x, \dot{x}, t) dt$, 式中 t_f 固定, 欲求受下列微分方程

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x \in R^n \quad (8.2-35)$$

约束的极值曲线使 J 取极值。

(1) 引入 $(n \times 1)$ 维拉格朗日乘子 λ 构造 L 函数:

$$L(x, \dot{x}, \lambda, t) = F(x, \dot{x}, t) + \lambda^T [f(x, t) - \dot{x}] \quad (8.2-36)$$

(2) 转化为寻求无约束增广泛函 J_* 的极值

$$J_* = \int_{t_0}^{t_f} L(x, \dot{x}, \lambda, t) dt \quad (8.2-37)$$

(3) J_* 与 J 有相同极值点且 $J_* = J^*$ 的极值必要条件为:

欧拉方程
$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (8.2-38)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f - \dot{x} = 0 \quad (8.2-39)$$

横截条件
$$\left[\delta x^T \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda \right) \right] \Big|_{t_0}^{t_f} = 0 \quad (8.2-40)$$

式中
$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} \cdot \lambda \quad (8.2-41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \lambda \quad (8.2-42)$$

3. 当约束方程为下列积分等式

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t_f} f(x, t) dt = c \quad (8.2-43)$$

只需将两端微分, 则有

$$\dot{\psi}(t) = f(x, t) \text{ 及 } \psi(t_0) = 0, \psi(t_f) = c$$

便可按微分方程等式约束来处理。此时, 欧拉方程尚包括:

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) = 0 \quad (8.2-45)$$

4. 当状态变量、控制变量为下列不等式约束时, 如

$$|x_i| \leq x_{i\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (8.2-46)$$

$$u_{i\min} \leq u_i \leq u_{i\max} \quad i = 1, \dots, r \quad (8.2-47)$$

则可分别写成:

$$x_i + x_{i\max} \geq 0, \quad x_{i\max} - x_i \geq 0;$$

即

$$(x_i + x_{i\max})(x_{i\max} - x_i) \geq 0 \quad (8.2-48)$$

引入松弛变量 a^2 , a 为任意实常数, 便可变换为代数方程等式约束:

$$(x_i + x_{i\max})(x_{i\max} - x_i) - a^2 = 0 \quad (8.2-49)$$

同理有

$$u_i - u_{i\min} \geq 0, \quad u_{i\max} - u_i \geq 0;$$

即

$$(u_i - u_{i\min})(u_{i\max} - u_i) \geq 0 \quad (8.2-50)$$

引入松弛变量 b^2 , b 为任意实常数, 便可变换为代数方程等式约束:

$$(u_i - u_{i\min})(u_{i\max} - u_i) - b^2 = 0 \quad (8.2-51)$$

需指出, 处理具有不等式约束条件的最优控制问题, 用极小值原理或动态规划法更为有效, 或在积分指标中引入一个更容易处理的关于 u, x 的惩罚项, 保证 J 取极小时 u, x 不致超出容许范围。

5. (t_f) 可变的情况

欧拉方程
$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (8.2-52)$$

横截条件更改为

有代数方程约束时 $\left. \delta x^T \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_{t_0}^{t_f} + L[x(t_f^*), \dot{x}(t_f^*), \lambda(t_f^*), t_f^*] \delta t_f = 0$ (8.2-53)

有微分方程约束时 $\left[\delta x^T \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} - \lambda \right) \right] \Big|_{t_0}^{t_f} + L[x(t_f^*), \dot{x}(t_f^*), \lambda(t_f^*), t_f^*] \delta t_f = 0$ (8.2-54)

[例 题]

例 8.2-1 在 $x-t$ 平面上, 试求从 $x(0)=0$ 至 $x(1)=1$ 之间距离最短的曲线方程 $x(t)$ 。

解 点 $(0,0)$ 至点 (t,x) 之间的线段为最短距离, 其直线方程为 $x^*(t)=t$ 。现用泛函极值理论导出该结论。

显然, 这是一个两端固定问题。两点之间的曲线有无穷多条, 见图 8-2。首先建立表示曲线长度的性能指标:

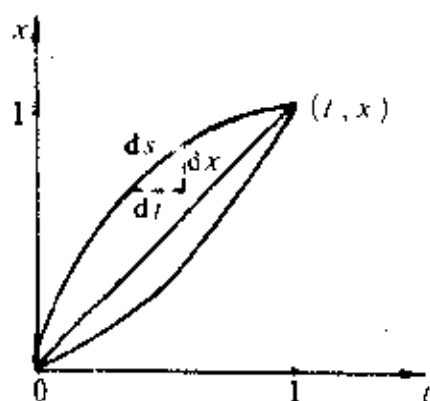


图 8-2 两点之间的曲线

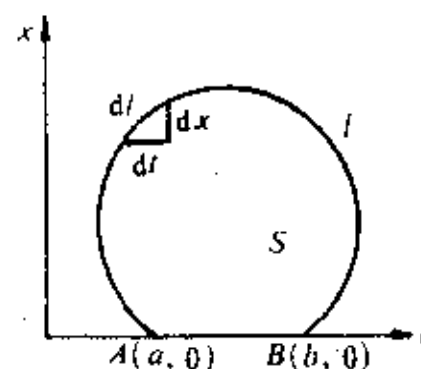


图 8-3 例 8.2-2 曲线

$$J = \int_0^1 ds = \int_0^1 \sqrt{(dx)^2 + (dt)^2} = \int_0^1 \sqrt{(x \dot{t})^2 + (dt)^2} = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1^2} dt$$

问题转化为选择 $x(t)$ 使 J 取极值。

$$F = (x^2 + 1)^{1/2}, \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot x$$

代入欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

本例有

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = c$$

化简为

$$x^2 = c^2 x^2 + c^2 \quad \dot{x} = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}$$

积分可得

$$x(t) = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} t + c_1$$

由边界条件确定积分常数 c, c_1 :

$$x(0) = c_1 = 0$$

$$x(1) = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} = 1$$

故 $x^*(t) = t$ 。

例 8.2-2 在 $t-x$ 平面上有曲线 AB 如图 8-3 所示, 曲线长度为 l , 试问该曲线为什么形状时, 它和线段 AB 所围成的面积 s 为最大?

解 曲线长度为 $l = \int_a^b dt = \int_a^b \sqrt{(dt)^2 + (dx)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$

曲线所围面积为 $S = \int_a^b x dt$

边界条件为: $x(a) = 0$; $x(b) = 0$.

本问题属在积分等式约束条件下的泛函极值问题。积分等式约束可经微分化为微分方程等式约束: $l = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$

拉格朗日函数 $L = x + \lambda \sqrt{1 + \dot{x}^2}$

由于 L 不显含 t , 可采用式(8.2-15)所示欧拉方程较方便: $\frac{d}{dt}(L - \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) = 0$

即 $x + \lambda \sqrt{1 + \dot{x}^2} - \frac{\lambda \dot{x}^2}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = c_1$

整理为: $(x - c_1)^2 = \frac{\lambda^2}{1 + \dot{x}^2}$, 故 $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm \frac{\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2}}{x - c_1}$,

分离变量: $dt = \pm \frac{x - c_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2}} d(x - c_1)$

解得: $t = \pm \sqrt{\lambda^2 - (x - c_1)^2} + c_2$

故 $(t - c_2)^2 + (x - c_1)^2 = \lambda^2$

即给定周长时, 面积最大的图形是圆。式中 c_1, c_2, λ 由边界条件及 l 决定。

例 8.2-3 假定初始状态和终端状态均未给定, 试求使下列性能指标为极值的曲线 $x(t)$ 。

$$J = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + x\dot{x} + \dot{x} + x \right) dt.$$

解 属两端时间固定问题

$$F = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + x\dot{x} + \dot{x} + x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \dot{x} + 1; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = x + \dot{x} + 1$$

代入欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0$$

有

$$\ddot{x} = 1$$

积分得

$$\dot{x} = t + c_1$$

$$x = \frac{1}{2} t^2 + c_1 t + c_2$$

$t = 0$ 时, 有

$$\dot{x}(0) = c_1; \quad x(0) = c_2$$

$t = 2$ 时, 有

$$\dot{x}(2) = 2 + c_1; \quad x(2) = 2 + 2c_1 + c_2$$

考虑横截条件

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right|_0 = 0$$

本例有

$$\dot{x}(0) + x(0) + 1 = 0$$

$$\dot{x}(2) + x(2) + 1 = 0$$

即

$$c_1 + c_2 = -1$$

解得

$$3c_1 + c_2 = -5$$

$$c_1 = -2 \quad ; \quad c_2 = 1$$

故

$$x^*(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 1$$

例 8.2-4 已知性能指标

$$J = \int_0^R \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt$$

试确定在约束条件

$$t^2 + x_1^2 = R^2$$

及边界条件 $x_1(0) = -R, x_2(0) = 0; x_1(R) = 0, x_2(R) = \pi$ 下的极值 J^* 。

解 属两端固定、有等式约束的泛函极值问题。注意到指标及约束均未含控制量,考虑运用拉格朗日乘子法求解。构造 L 函数:

$$L = (1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{1/2} + \lambda(t^2 + x_1^2 - R^2)$$

由于只有一个约束方程,故拉格朗日乘子 λ 是标量。由于指标含 x_1, x_2 两个变量,故欧拉方程可分别为:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

本例有

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2\lambda x_1; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{-1/2} \cdot \dot{x}_1;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = (1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{-1/2} \cdot \dot{x}_2;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = t^2 + x_1^2 - R^2 = 0$$

故由 $-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = 0$

有

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = c_2 = (1 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{-1/2} \cdot \dot{x}_2$$

即

$$\dot{x}_2^2 = \frac{c_2^2}{1 - c_2^2} (1 + \dot{x}_1^2) \tag{1}$$

由约束条件

$$x_1 = \pm \sqrt{R^2 - t^2}$$

及边界条件

$$x_1(0) = -R$$

故

$$x_1 = x_1^*(t) = -\sqrt{R^2 - t^2} \tag{2}$$

微分约束条件有

$$x_1 \dot{x}_1 = -t$$

故

$$\dot{x}_1^2 = \frac{t^2}{x_1^2} = \frac{t^2}{R^2 - t^2} \tag{3}$$

代入①:

$$\dot{x}_2 = \frac{c_2}{\sqrt{1 - c_2^2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - t^2}} \tag{4}$$

积分得

$$x_2(t) = \frac{c_2 R}{\sqrt{1 - c_2^2}} \cdot \int \frac{1}{\sqrt{1 - (t/R)^2}} d\left(\frac{t}{R}\right) = \frac{c_2 R}{\sqrt{1 - c_2^2}} \cdot \sin^{-1} \frac{t}{R} + c$$

由边界条件

$$x_2(0) = c = 0$$

$$x_2(R) = \pi = \frac{c_2 R}{\sqrt{1 - c_2^2}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

故

$$\frac{c_2 R}{\sqrt{1-c_2^2}} = 2, \quad \dot{x}_1^2 = \frac{4}{R^2-t^2}$$

则

$$x_2 = x_2^*(t) = 2 \sin^{-1} \frac{t}{R} \quad (5)$$

将极值曲线 $x_1^*(t)$ 、 $x_2^*(t)$ 代入 J 可得极值 J^* ：

$$\begin{aligned} J^* &= \int_0^R \sqrt{1 + \dot{x}_1^2 + x_2} dt = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{t^2}{R^2-t^2} + \frac{4}{R^2-t^2}} dt \\ &= \int_0^R \sqrt{R^2+4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(t/R)^2}} \cdot d\left(\frac{t}{R}\right) \\ &= \sqrt{R^2+4} \cdot \sin^{-1} \frac{t}{R} \Big|_0^R = \frac{\pi \sqrt{R^2+4}}{2} \end{aligned}$$

§ 8-3 应用变分法求解最优控制问题

[内容提要]

一、应用变分法求最优控制问题的提法

1. 设受控系统状态方程为

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (8.3-1)$$

式中 x 为 n 维状态向量, u 为 r 维控制向量; 要求选择不受约束的控制向量, 使初始状态

$$x(t_0) = x_0 \quad (8.3-2)$$

在时间间隔 $[t_0, t_f]$ 内转移到 $x(t_f)$ 且满足等式约束

$$M[x(t_f), t_f] = 0 \quad (8.3-3)$$

式中 M 为 q 维向量函数; 并使下列指标取极值

$$J = \Theta[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(x, u, t) dt \quad (8.3-4)$$

2. 问题解的存在条件: 受控系统状态可控。

3. u 不受约束, 意味着在物理上可实现。

4. 状态方程是对系统运动的约束。本问题含状态方程、终端约束两个约束条件, 需分别构造拉格朗日函数 L 及 L_1 ：

$$\left. \begin{aligned} L &= F(x, u, t) + \lambda^T [f(x, u, t) - \dot{x}] \\ L_1 &= \Theta[x(t_f), t_f] + \nu^T \cdot M[x(t_f), t_f] \end{aligned} \right\} \quad (8.3-5)$$

式中 λ 为 n 维、 ν 为 q 维拉格朗日乘子向量。

5. t_f 可固定可变动。 $x(t_f)$ 可给定可自由, 或部分给定、部分自由, 因问题而异。

6. 增广泛函 J_0 。

$$J_0 = \Theta[x(t_f), t_f] + \nu^T M[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, \lambda, t) dt \quad (8.3-6)$$

由 J_0 的极值条件求得极值, 便是问题的解。

7. 满足式 (8.3-1)~式 (8.3-4) 的解 $u^*(t)$ 及 $x^*(t)$, 分别称为最优控制及最优状态轨线。按 $u^*(t)$ 、 $x^*(t)$ 计得的 J^* , 称为最优性能指标。

8. 在某指标下的最优控制系统, 在另指标下便不是最优的。

二、哈密尔顿函数法

1. 哈密尔顿函数记为 H , 其定义式为:

$$H = F(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) = H(x, u, \lambda, t) \quad (8.3-7)$$

2. 最优控制理论中惯用哈密尔顿函数分析解决问题, 它能揭示出最优系统的若干重要性质。

3. H 与 L 的关系:

由 H, L 的定义式有

$$L = H - \lambda^T \dot{x} \quad (8.3-8)$$

且有

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f^T}{\partial x} \cdot \lambda = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (8.3-9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -\lambda; \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = 0 \quad (8.3-10)$$

故欧拉方程

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda} = 0 \quad (8.3-11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial f^T}{\partial u} \cdot \lambda = \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (8.3-12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f(x, u, t) - \dot{x} = 0; \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x, u, t) = \dot{x} \quad (8.3-13)$$

4. 增广泛函 J_* :

$$J_* = \theta[x(t_f), t_f] + v^T M[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T \dot{x}] dt \quad (8.3-14)$$

三、用 H 函数研究 t_f 固定时 J 的极值条件

1. 由 $\delta J_* = 0$ 导出的极值必要条件为:

$$\text{伴随方程} \quad \dot{\lambda} = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (8.3-15)$$

$$\text{状态方程} \quad \dot{x} = f(x, u, t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (8.3-16)$$

式(8.3-15)、(8.3-16)又称为哈密尔顿正则方程, 是 $2n$ 个一阶微分方程。

$$\text{控制方程} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (8.3-17)$$

$$\text{终端约束} \quad M[x(t_f), t_f] = 0 \quad (8.3-18)$$

式(8.3-17)、(8.3-18)分别为 r, q 个代数方程。

$$\text{横截条件} \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial M^T}{\partial x(t_f)} v \quad (8.3-19)$$

通常联立上述五个方程求解最优控制问题需用计算机, 只有简单问题可获得解析解。

$$2. \text{由初始条件 } x(t_0) = x_0 \quad (8.3-20)$$

及横截条件提供了 $2n$ 个边界条件, 它们可唯一确定正则方程的解。式(8.3-15)~式(8.3-18)为 $2n+r+q$ 个方程, 含 x, λ, v, u 共 $2n+r+q$ 个未知数, 故可唯一确定 x, λ, v, u 。

3. 解正则方程的边界条件一半处于初始时刻, 一半处于终端时刻, 称求解微分方程的

两点边值问题。

4. 当不存在终端约束条件时,式(8.3-18)不存在,式(8.3-19)不含右端第二项。
5. 当终端状态给定时, $x(t_f) = x_f$, 式(8.3-19)无意义。
6. 注意到推导 δJ 时,也可不对伴随变量 λ, v 取变分,因为对 λ, v 取变分的结果,只是导出状态方程和终端约束方程。只要把该两方程作为极值必要条件,便可简化变分过程。
7. 若不考虑约束方程,则伴随方程及控制方程同欧拉方程相对应。
8. 泛函存在极小(大)值的充分条件尚需满足下列两个矩阵

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2(t_f)} + \frac{\partial}{\partial x(t_f)} \left[\frac{\partial M^T}{\partial x(t_f)} \cdot v \right]; \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial u^T} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x^T} \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \end{bmatrix} \quad (8.3-21)$$

一个为正(负)定,另一个为非负(正)定。通常根据问题的物理性质直接对极值性质作出判断,免去充分条件的校验。

四、用 H 函数研究 t_f 可变时 J 的极值条件

1. t_f 的变分不为零,即 $\delta t_f \neq 0$ 。其必要条件除含有式(8.3-15)~(8.3-19)五个方程以外,尚需增加一个最优终端时间条件:

$$H = [x^*(t_f^*), u^*(t_f^*), \lambda^*(t_f^*), t_f^*] + \frac{\partial \theta}{\partial t_f} + \frac{\partial M^T}{\partial t_f} v = 0 \quad (8.3-22)$$

2. 泛函存在极小(大)值的充分条件除满足(8.3-21)以外,尚需增加一项:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t_f^2} + \frac{\partial}{\partial t_f} \left(\frac{\partial M}{\partial t_f} \cdot v \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (8.3-23)$$

为大(小)于零。

五、最优系统哈密顿函数的性质

1. 由 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 说明 H^* 对最优控制而言,具有极值或稳定值。

由极小值原理还可知道,在最优轨线 x^* 及最优伴随变量 λ^* 条件下,若以最优控制函数 u^* 来计算 H 函数时,可取得绝对极小的 H^* 值,即

$$H^* = H[x^*, u^*, \lambda^*, t] \leq H[x^*, u, \lambda^*, t] \quad (8.3-24)$$

2. 由 H 对时间的全导数有:

$$\frac{d}{dt} H(x, u, \lambda, t) = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^T \dot{x} + \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)^T \dot{u} + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)^T \dot{\lambda} + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (8.3-25)$$

考虑到最优系统满足

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0; \lambda = - \frac{\partial H}{\partial x}; \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{x};$$

故

$$\frac{d}{dt} H^* = \frac{\partial H^*}{\partial t} \quad (8.3-26)$$

即 H 在最优系统中,对时间的全导数等于对时间的偏导数。 H^* 变化规律可由如下积分求得:

$$H^*(t) = H^*(t_f) - \int_t^{t_f} \frac{\partial H^*}{\partial \tau} d\tau \quad (8.3-27)$$

当 H^* 不显含 t 时,有

$$\frac{\partial H^*}{\partial \alpha} = 0 \quad (8.3-28)$$

则最优系统的 H^* 是不依赖于时间的常数,且

$$H^*(t) = H^*(t_f) \quad (8.3-29)$$

3. 对于 t_f 可变、终端指标及终端约束含 t_f 的情况,由式(8.3-22)有:

$$H^*(t_f) = H[x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f] = -\frac{\partial \theta}{\partial t_f} - \frac{\partial M^T}{\partial t_f} v \quad (8.3-30)$$

4. 当 t_f 可变,但是终端指标及终端约束不含 t_f 时,

$$H^*(t_f) = 0 \quad (8.3-31)$$

六、离散系统的最优控制

1. 问题提法:

设离散状态方程为

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8.3-32)$$

初始状态为 x_0 , 试求不受约束的、分段恒值的最优控制序列 u_1, \dots, u_{N-1} , 使下列性能指标

$$J = \theta(x_N, N) + \sum_{k=0}^{N-1} F(x_k, u_k, k) \quad (8.3-33)$$

取极值。这里假定终端状态 x_N 自由, 终端时刻 N 固定。

2. 引入拉格朗日乘子 λ_{k+1} , 构造增广泛函 J_* :

$$J_* = \theta(x_N, N) + \sum_{k=0}^{N-1} \{F(x_k, u_k, k) + \lambda_{k+1}^T [f(x_k, u_k, k) - x_{k+1}]\} \quad (8.3-34)$$

3. 离散哈密顿函数 H_k 的定义式:

$$H_k = F(x_k, u_k, k) + \lambda_{k+1}^T f(x_k, u_k, k) = H(x_k, u_k, \lambda_{k+1}, k) \quad (8.3-35)$$

于是

$$\begin{aligned} J_* &= \theta(x_N, N) + \sum_{k=0}^{N-1} [H(x_k, u_k, \lambda_{k+1}, k) - \lambda_{k+1}^T x_{k+1}] \\ &= \theta(x_N, N) + \sum_{k=0}^{N-1} [H(x_k, u_k, \lambda_{k+1}, k) - \lambda_k^T x_k] - (\lambda_N x_N) \Big|_{k=0}^{k=N} \end{aligned}$$

4. 由 $\delta J_* = 0$ 导出的泛函极值必要条件:

$$\text{伴随方程} \quad \lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial x_k} \quad (8.3-36)$$

$$\text{状态方程} \quad x_{k+1} = \frac{\partial H_k}{\partial \lambda_{k+1}} = f(x_k, u_k, k) \quad (8.3-37)$$

$$\text{控制方程} \quad \frac{\partial H_k}{\partial u_k} = 0 \quad (8.3-38)$$

$$\text{横截条件} \quad \lambda_N = \frac{\partial \theta}{\partial x_N} \quad (8.3-39)$$

5. 当存在终端约束条件 $M(x_N, N) = 0$ 时, 需再引入拉格朗日乘子向量 Γ 与 M 同维数。此时唯横截条件改为:

$$\lambda_N = \frac{\partial \theta}{\partial x_N} + \frac{\partial M^T}{\partial x_N} \Gamma \quad (8.3-40)$$

6. 引入 λ_{k+1} 而不是 λ_k , 是为了与 x_{k+1} 相匹配, 以便导出 λ_k 关系式。

7. 离散系统最优控制问题的存在性条件是具有状态可达性。

[例 题]

例 8.3-1 已知系统状态方程及边界条件为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

试用向量形式求下列性能指标的极小值:

$$J = \int_0^2 \frac{1}{2} u^2(t) dt$$

解 列写哈密尔顿函数

$$H = P + \lambda^T f = \frac{1}{2} u^2 + [\lambda_1 \quad \lambda_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

伴随方程
$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H}{\partial x_2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \triangleq A_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

故伴随方程是齐次方程。

控制方程
$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0 \quad u(t) = -\lambda_2(t)$$

伴随方程的解
$$\lambda(t) = \Phi_1(t) \lambda(0)$$

式中 $\Phi_1(t)$ 为状态转移矩阵。

$$\Phi_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A_1)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} 1/s & 0 \\ -1/s^2 & 1/s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix}$$

故
$$\lambda(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(0) \\ \lambda_2(0) \end{bmatrix}$$

状态方程的解
$$x(t) = \Phi_2(t)x(0) + \int_0^t \Phi_2(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

式中

$$\Phi_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} 1/s & 1/s \\ 0 & -\frac{1}{s^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t \Phi_2(t-\tau)Bu(\tau)d\tau = \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_2(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} t-\tau \\ 1 \end{bmatrix} [-\lambda_1(0)\tau + \lambda_2(0)]d\tau$$

$$= - \begin{bmatrix} -(\frac{t^3}{6}) \cdot \lambda_1(0) + (\frac{t^2}{2}) \cdot \lambda_2(0) \\ -(\frac{t^2}{2}) \cdot \lambda_1(0) + t \cdot \lambda_2(0) \end{bmatrix}$$

故
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(\frac{t^3}{6}) \cdot \lambda_1(0) + (\frac{t^2}{2}) \cdot \lambda_2(0) \\ -(\frac{t^2}{2}) \cdot \lambda_1(0) + t \cdot \lambda_2(0) \end{bmatrix}$$

代入初始条件
$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

则
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(t^2/6) \cdot \lambda_1(0) + (t^2/2) \cdot \lambda_2(0) \\ -(t^2/2) \cdot \lambda_1(0) + t \cdot \lambda_2(0) \end{bmatrix}$$

由终端条件确定 $\lambda_1(0), \lambda_2(0)$:

$$\begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(4/3) \cdot \lambda_1(0) + 2 \cdot \lambda_2(0) \\ -2 \cdot \lambda_1(0) + 2 \cdot \lambda_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得

$$\lambda_1(0) = 3, \quad \lambda_2(0) = 7/2$$

最终结果为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^*(t) \\ \lambda_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3t + 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1/2)t^2 - (7/4)t^2 + t + 1 \\ (3/2)t^2 - (7/2)t + 1 \end{bmatrix}$$

$$u^*(t) = -\lambda_2^*(t) = 3t - 7/2$$

$$J^* = \int_0^2 \frac{1}{2} u^{*2}(t) dt = \frac{13}{4}$$

例 8.3-2 设系统状态方程及边界条件为:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 16, \quad x(t_f) = 0.$$

试求最优控制 $u(t)$, 使下列性能指标

$$J = t_f^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$$

取极小值。

解 属终端状态固定但终端时间未固定的最优控制问题。指标的物理意义是以最小的能量消耗尽快地完成状态转移过程。

哈密尔顿函数为:

$$H = F + \lambda f = \frac{1}{2} u^2 + \lambda u$$

伴随方程

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad \lambda = c$$

控制方程

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0; \quad u = -\lambda = -c$$

状态方程

$$\dot{x} = u = -c \quad x(t) = -ct + D$$

由 $x(0) = 16$ 有

$$D = 16$$

由 $x(t_f) = 0$ 有:

$$c(t_f) = D = 16$$

式中 C, D 均为积分常数。由最优终端时间条件:

$$H[x(t_f), u(t_f), \lambda(t_f), t_f] + \frac{\partial \Phi[x(t_f), t_f]}{\partial t_f} = 0$$

$$\text{有 } \frac{1}{2} u^2(t_f) + \lambda(t_f) u(t_f) + 2t_f = 0$$

考虑 $u(t_f) = -c, \lambda(t_f) = c$

$$-\frac{1}{2} c^2 + \frac{32}{c} = 0$$

故

$$c = 4, \quad t_f = 4, \quad \lambda = 4$$

$$u(t) = -4$$

$$x(t) = -4t + 16$$

例 8.3-3 设系统状态方程及初始条件为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1, & x_1(0) &= 0 \\ \dot{x}_2 &= u, & x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

终端状态受如下约束 $M = x_1(1) + x_2(1) - 1 = 0$

试求最优控制使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$$

取极小值,且求出最优轨线。

解 本例为有状态方程等式约束、终端状态等式约束、终端状态自由,终端时间固定的最优控制问题。指标的物理意义为在给定时间(1秒)内,以最小的能量消耗将初始状态转移到终端状态轨线上。

哈密尔顿函数为:

$$H = F + \lambda^T f = \frac{1}{2} u^2 + [\lambda_1 \quad \lambda_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ u \end{bmatrix} = \frac{1}{2} u^2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 u$$

伴随方程 $\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \text{故 } \lambda_1 = c_1$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 = -c_1, \text{故 } \lambda_2 = -c_1 t + c_2$$

控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0, \text{故 } u = -\lambda_2$

横截条件 $\lambda(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial M^T}{\partial x(t_f)} v$

由于终端约束条件方程只有一个,故伴随变量 v 是标量。本例 $\theta=0$ 。当 $t_f=1$ 时有:

$$\lambda_1(1) = \frac{\partial M}{\partial x_1(1)} v = v \quad \text{故 } c_1 = v$$

$$\lambda_2(1) = \frac{\partial M}{\partial x_2(1)} v = v \quad \text{故 } c_2 = 2v$$

则 $\lambda_2(t) = -vt + 2v \quad u(t) = -\lambda_2(t) = vt - 2v$

代入状态方程

$$x_2(t) = \frac{1}{2} vt^2 - 2vt \quad x_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} vt^3 - vt^2$$

由终端状态约束方程

$$\left(\frac{1}{6}v - v\right) + \left(\frac{1}{2}v - 2v\right) - 1 = 0$$

解得 $v = -\frac{3}{7}$

故 $u^*(t) = -\frac{3}{7}t + \frac{6}{7}$

$$x_1^*(t) = -\frac{1}{14}t^3 + \frac{3}{7}t^2 \quad x_2^*(t) = -\frac{3}{14}t^2 + \frac{6}{7}t$$

例 8.3-4 设一阶离散系统状态方程为

$$x(k+1) = x(k) + au(k)$$

边界条件为: $x(0)=1, x(10)=0$ 。试求最优控制序列, 使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 u^2(k)$$

取极小值, 并求出最优状态序列。

解 $H_k = \frac{1}{2}u^2(k) + \lambda(k+1)[x(k) + au(k)], \quad k=0, 1, \dots, 9$

伴随方程 $\lambda(k) = \frac{\partial H_k}{\partial x_k} = \lambda(k+1), \text{ 有 } \lambda(k) = c$

状态方程 $\frac{\partial H_k}{\partial \lambda(k+1)} = x(k) + au(k) = x(k+1)$

控制方程 $\frac{\partial H_k}{\partial u_k} = u(k) + a\lambda(k+1) = 0, \text{ 有 } u(k) = -ac$

式中 c 为常数, 故

$$x(k+1) = x(k) - a^2c$$

用递推法求解且考虑初始条件 $x(0)=1$:

$$\begin{aligned} k=0 & \quad x(1) = x(0) - a^2c \\ k=1 & \quad x(2) = x(1) - a^2c = 1 - 2a^2c \\ k=2 & \quad x(3) = x(2) - a^2c = 1 - 3a^2c \\ & \quad \vdots \\ k=k & \quad x(k) = 1 - ka^2c \end{aligned}$$

代入 $x(10)=0, 1 - 10a^2c = 0, c = \frac{1}{10a^2}$

故 $u^*(k) = -ac = -\frac{1}{10a}$

$$x^*(k) = 1 - \frac{k}{10}$$

习 题

8-1 用薄铁皮做一个有盖的圆柱形水桶, 其表面积为 A_0 , 希望水桶的容量为最大。试用拉格朗日乘子法及嵌入法决定水桶的高度及底面半径。

8-2 试用拉格朗日乘子法及嵌入法求从原点 $(0, 0, 0)$ 至下列平面的最短距离。

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

8-3 设边界条件为: $x(0)=1, x(\pi/2)=2$ 。试求使下列指标为极值的极值曲线 $x(t)$ 。

$$J = \int_0^{\pi/2} (\dot{x}^2 - x^2) dt$$

8-4 设边界条件为: $x(1)=1, x(2)=2$ 。试求使下列指标为极值的极值曲线 $x(t)$ 。

$$J = \int_1^2 (\dot{x} + x^2 t^2) dt$$

8-5 设边界条件为: $u(0)=0, x(0)=0, \dot{x}(\pi/2)=1, x(\pi/2)=-1$ 。试求使下列指标为极值的极值曲线 $x(t)$ 。

$$J = \int_0^{x/2} (2u^2 + 2x^2 + 4ux) dt$$

8-6 试求从 $x(0)=1$ 到直线 $x(t)=2-t$ 之间距离最短的曲线及最优终端时间。

8-7 设边界条件为: $x(0)=0, x(1)$ 自由。试求使下列指标为极值的极值曲线 $x(t)$ 。

$$J = \int_0^1 (\dot{x}^2 + 1) dt$$

8-8 设边界条件为: $x(0)=1/2, x(1)$ 自由。试求使下列泛函极值的 $x(t)$ 。

$$J = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + x\dot{x} + \dot{x} + x \right) dt$$

8-9 设系统状态方程及边界条件为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_1(1) = 0 \\ x_2(1) = 0 \end{cases}$$

试求最优控制使下列指标取极值并求最优轨线。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dt$$

8-10 设系统状态方程及边界条件为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x_1(1) = 0 \\ x_2(1) \text{ 自由} \end{cases}$$

试求最优控制使下列指标取极值并求最优轨线。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 dt$$

8-11 设系统状态方程及初始条件为:

$$\dot{x} = u, x(0) = 1$$

试确定最优控制使下列指标取极值。

$$J = \int_0^1 (x^2 + u^2) e^{2t} dt$$

8-12 设系统状态方程及边界条件为:

$$\dot{x} = u; x(0) = 1, x(t_f) = 0$$

t_f 未给定, 试求最优控制及 t_f 使下列指标取极值, 并求出最优轨线。

$$J = t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} u^2 dt$$

8-13 已知系统状态方程及初始条件为:

$$\dot{x} = u; \quad \dot{x}(t_0) = x_0$$

试求最优控制使下列指标取极值, 并求最优轨线及最优性能指标。

$$J = \frac{1}{2} cx_T^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^2 dt$$

式中常数 $c > 0; t_0, T, x_T$ 均给定。

8-14 设系统状态方程及边界条件为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = x_2(0) = 0 \\ x_1(1) = x_2(1) = 1 \end{cases}$$

试确定最优控制及最优轨线使下列指标取极值。

$$J = \int_0^1 (x_1 + u_1^2 + u_2^2) dt$$

8-15 设系统状态方程及边界条件为:

$$\dot{x} = -x + u; \quad x(0) = 1, x(t_f) = 0$$

t_f 固定。试求最优控制及最优轨线使下列指标取极值。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^2 + u^2) dt$$

8-16 设伺服电动机运动方程为:

$$J \frac{d\omega}{dt} + M_f = C_m I_a$$

式中 $C_m I_a$ 为电磁力矩, M_f 为恒定负载力矩, $J \frac{d\omega}{dt}$ 为电动机轴上的惯性力矩。电动机初始转速为零, $\omega(0) = 0$; 经时间 t_1 转过一定角度 α 以后停止, 即 $\omega(t_1) = 0, \alpha = \int_0^{t_1} \omega dt$ 。试用嵌入法求在 $[0, t_1]$ 区间使电枢绕组上的损耗 $J = \int_0^{t_1} I_a^2 dt$ 为极小的电流 $I_a(t)$; 并确定转速变化规律 $\omega(t)$ 。

8-17 设系统状态方程及边界条件为:

$$\dot{x} = u; \quad x(t_0) = x_0, x(T) = 0$$

试求最优控制使指标 $J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T u^2 dt$ 取极值, 并求出最优轨线及最优性能指标。

8-18 设系统状态方程及边界条件为:

$$\dot{x} = u; \quad x(0) = x_0, x(t_f) = x_f$$

t_f 固定。试求最优控制使指标 $J = \int_0^{t_f} (x^2 + u^2) dt$ 为极值。

8-19 设系统状态方程及边界条件为:

$$\dot{x} = u; \quad x(0) = 1, x(t_f) = 0$$

试求最优控制及 t_f 使 $J = t_f^2 + \int_0^{t_f} u^2(t) dt$ 取极值。

8-20

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试求使 $x(2) = 0$ 的具有最小范数的输入控制信号序列 $u(0), u(1)$ 。

第九章 极小值原理及应用

§ 9-1 连续系统极小值原理及应用

[内容提要]

一、变分法的局限性

1. 用变分法研究最优控制问题时,均假定控制量变分 δu 是任意的,即 u 在一开集内取值, $-\infty < u_i < \infty, i=1, \dots, r$, 且存在唯一的偏导数 $\partial H / \partial u$, 从而导出控制方程 $\partial H / \partial u = 0$ 。

2. 任何实际的控制量均限制或约束在容许范围内变化,即 u 在一闭集内取值,记 $u \in \Omega$ 或 $|u_i| \leq a_i, i=1, \dots, r$ 。许多问题的控制量在界值上分段变化时才是最优的,而从控制域边界向界内变化时才存在 $\delta u \neq 0$, 不可能向界外变化,这时恒有 $\delta u = 0$, 故 δu 不是任意的。

3. 有些问题其哈密尔顿函数含 $|u|$, 则 $\partial H / \partial u$ 不存在; 当 H 与 u 呈直线关系、单调关系时, 则 $\partial H / \partial u = 0$ 不成立。

二、极小值原理的一个重要结论

1. 使性能指标取极小(大)的最优控制, 必定是容许控制中使 H 取极小(大)的控制, 即满足

$$H(x^*, \lambda^*, u^*, t) \leq H(x^*, \lambda^*, u, t) \quad (9.1-1)$$

$$\text{式中 } H(x^*, \lambda^*, u^*, t) = \min_{u \in \Omega} H(x^*, \lambda^*, u, t) \quad (9.1-2)$$

意为按 x^*, λ^*, u^* 计算得到的 H^* 一定不大于按 x^*, λ^*, u 计算得到的 H 。

2. 该结论是使泛函 J 取极值的必要条件之一, 是取代 $\partial H / \partial u = 0$ 的控制方程。

3. 应用该结论时, 不管 x, λ 如何(意味着对任意 x, λ), 只考虑 H 同 u 的关系, 按照使 H 极小(这里是全局极小, 不是局部极小)的原则预选 u , 得到 u 的可能变化范围, 即获得一组 u 的候选函数。

4. 利用 u 的候选函数, 与正则方程、横截条件、初始条件联立, 确定最优解。

5. 极小值原理比变分法的适用范围宽。当 u 不受约束时, 所得结论与变分法相同。

三、连续系统极小值原理

1. 问题提法: 设系统状态方程为

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (9.1-3)$$

初始状态

$$x(t_0) = x_0 \quad (9.1-4)$$

终端状态

$$M[x(t_f), t_f] = 0 \quad (9.1-5)$$

求容许最优控制

$$u \in \Omega \text{ 或 } |u_i| \leq a_i, i=1, \dots, r \quad (9.1-6)$$

使性能指标

$$J = \theta[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(x, u, t) dt \quad (9.1-7)$$

取极小值。

2. t_f 固定时的极值必要条件及 H^* :

定义 $H = F + \lambda^T f$ (9.1-8)

正则方程 $\dot{\lambda} = - \frac{\partial H}{\partial x}$ (9.1-9)

$\dot{x} = f$ (9.1-10)

控制方程 $H(x^*, \lambda^*, u^*, t) \leq H(x^*, \lambda, u^*, t)$ (9.1-11)

横截条件 $\lambda(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial x(t_f)} + \frac{\partial M^T}{\partial x(t_f)} \cdot v$ (9.1-12)

初始条件 $x(t_0) = x_0$ (9.1-13)

终端约束 $M[x(t_f), t_f] = 0$ (9.1-14)

联立求解式(9.1-9)~(9.1-14),可得最优控制问题的唯一解。

沿最优轨线的哈密尔顿函数随时间的变化规律为:

$$H(x^*, \lambda^*, u^*, t) = H(x^*, \lambda^*, u^*, t_f) - \int_{t_f}^t \left. \frac{\partial H}{\partial \tau} \right|_{x^*, \lambda^*, u^*} \cdot d\tau$$
 (9.1-15)

当 H 不显含 t 时有:

$$H(x^*, \lambda^*, u^*, t) = H(x^*, \lambda^*, u^*, t_f) = \text{常数}$$
 (9.1-16)

3. t_f 可变时的极值必要条件及 H^* :

除了满足式(9.1-9)~(9.1-14)以外,还要增加终端时间条件

$$H(x^*, \lambda^*, u^*, t_f^*) + \left. \frac{\partial \theta}{\partial t_f} \right|_{t_f^*} + \left(\left. \frac{\partial M^T}{\partial t_f} \right|_{t_f^*} \cdot v \right) \Big|_{t_f^*} = 0$$
 (9.1-17)

当 θ, M 不显含 t 时有:

$$H(x^*, \lambda^*, u^*, t_f^*) = 0$$
 (9.1-18)

4. 典型 $H(u)$ 曲线的 u^* 选择:

设在容许控制范围内,有如图 9-1 所示的典型 $H(u)$ 曲线。(a)示出 $H(u)$ 为非线性函数,用变分法则选择 $u^* = u_1$,而用极小值原理则选择界值, $u^* = u_0$ 。(b)示出 $H(u)$ 为线性函数或单调函数,因不存在极值,变分法无解,而用极小值原理则选择界值, $u^* = u_0$ 。(c)示出 $H(u)$ 有极值且唯一,变分法与极小值原理均选择 $u^* = u_1$ 。

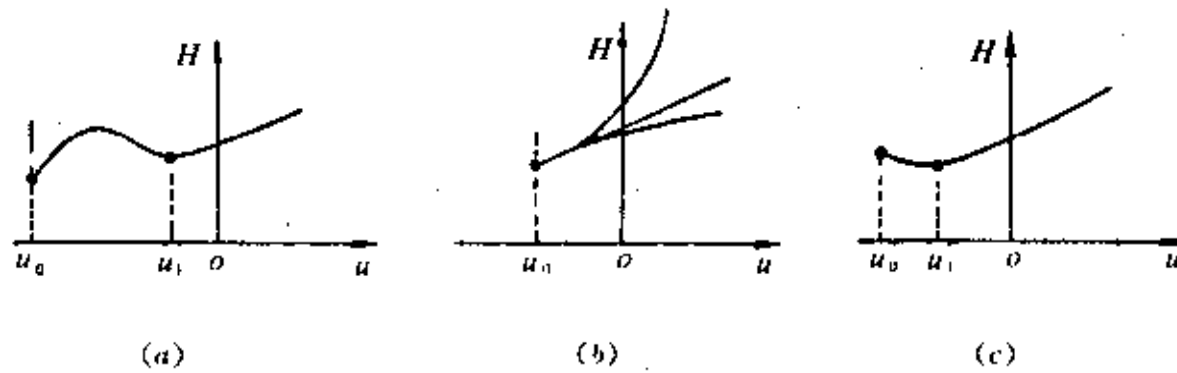


图 9-1 典型 $H(u)$ 曲线

5. 终端情况不同时,极值必要条件的特点

- (1) 终端状态固定时,用 $x(t_f) = x_f$ 取代横截条件。
- (2) 终端状态自由时,由横截条件提供终端边界条件。
- (3) 无终端指标项时,消除所有含 θ 的项。

- (4) 无终端约束时, 消去所有含 M 的项。
 (5) t_f 可变时, 需应用最优终端时间条件。

四、几种典型 $H(u)$ 的最优控制候选函数

(1) $H(u) = \lambda u, |u| \leq 1$

则
$$u = \begin{cases} +1 & \lambda < 0 \\ -1 & \lambda > 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0$ 时切换控制。某些问题只具有 $+1$ 或 -1 的控制, 某些则是 $\{+1, -1\}$ 的组合函数, 有两位控制之称。

(2) $H(u) = |u| + \lambda u, |u| \leq 1$

则
$$u = \begin{cases} +1 & \lambda < -1 \\ 0 & -1 < \lambda < 1 \\ -1 & \lambda > 1 \end{cases}$$

$\lambda = +1$ 及 $\lambda = -1$ 时切换控制。当控制为 $\{+1, 0, -1\}$ 或 $\{-1, 0, +1\}$ 的组合函数时, 有三位控制之称。

(3) $H(u) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda u, |u| \leq 1$

则
$$u = \begin{cases} +1 & \lambda < -1 \\ -\lambda & -1 < \lambda < 1 \\ -1 & \lambda > 1 \end{cases}$$

$\lambda = 1$ 及 $\lambda = -1$ 时切换控制。在 $\lambda < -1$ 或 $\lambda > 1$ 条件下, 含有饱和及线性两种控制方式。

五、一般解题步骤及注意事项

1. 简单情况下, 最优控制候选函数通常是伴随变量 λ 的函数, 且 λ 能用横截条件确定, 于是可按伴随变量切换控制, 求得按时间分段连续的控制规律。

2. 状态轨迹的确定:

① 利用初始条件及初始段控制规律, 解状态方程, 获得第一段轨迹。

② 计算切换控制时刻的状态, 作为第二段状态轨迹的起始条件, 以便与第二段轨迹相衔接。

③ 按切换后的控制规律解状态方程, 获得第二段轨迹, 注意这时状态方程解中的时间变量 t 应替换为 $(t - \tau)$, τ 为切换时刻值, 这时 t 是从起始时刻计量的。

3. 当伴随方程的解不能由横截条件唯一确定时 (其积分常数难以确定, 或伴随变量与控制变量、状态变量均有关), 便不能首先确定伴随变量的变化规律, 可按下列试探法研究。

① 假定以某种最优控制候选函数 $u(t)$, 计算其由初始状态出发的 $x(t)$ 、 $\lambda(t)$, 校验 $\lambda(t)$ 所对应的 $u(t)$ 是否与预选的 $u(t)$ 一致, 若一致则可利用该 $u(t)$ 作为第一段控制, 若矛盾则需重选。接着便根据 $\lambda(t)$ 确定切换控制时刻、计算第二段轨迹, 重复上述方法。对于终端状态自由的情况, 这种试探方法较为方便。

② 一般情况下可假定一个 $\lambda(0)$, 求得 $\lambda(t)$ 的变化规律, 按图 9-2 所示步骤, 检查是否能达到终端给定状态, 若能够, 则所求得的 $\lambda(t)$ 及对应的 $u(t)$ 、 $x(t)$ 便是两点边值问题的解。图中控制函数可能是理想继电器型、带非灵敏区的继电器型、饱和非线性型的静特性曲线, 随问题而定。

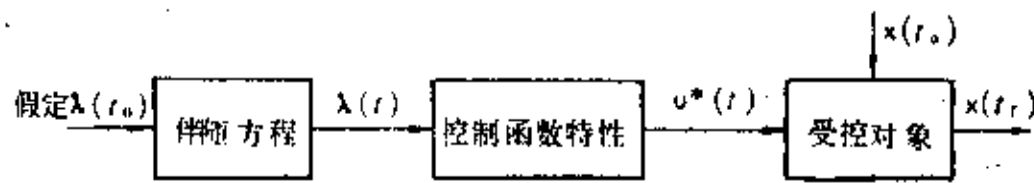


图 9-2 试探法求最优解框图

六、解最小能量控制问题的特点

1. 性能指标形如 $J = \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt$, t_f 固定, $|u(t)| \leq 1$ 。
2. 从节省能量观点出发, 边值控制并不一定有利, 通常先考虑选择线性段控制规律, 使给定初态到达终态。
3. 注意校验在 $[t_0, t_f]$ 间隔内, $|u(t)| \leq 1$ 是否始终满足, 否则, 便有切换控制问题。

七、解时间最优控制问题的特点

1. 性能指标形如 $J = \int_{t_0}^{t_f} dt$, t_f 不固定, $|u(t)| \leq 1$ 。
2. 当系统状态方程不高于二阶时, 用建立不同控制函数(不外+1、-1两种情况)在不同初始条件下的相轨迹族(均为抛物线)的方法, 有系统地解决了时间最优控制问题。
3. 从相轨迹族中眩蒸可以转移到终态(通常以相平面原点作为终态)的轨迹, 该轨迹构成一条切换控制的开关线, 建立起该轨迹的方程即开关线方程, 它表为系统状态的函数。
4. 开关线将相平面分割为不同控制的区域, 由任意初态出发的轨迹, 均对应一定的控制函数, 并将实际状态按一定规律向开关线上转动。当测知状态满足开关线方程时, 便切换控制, 最终沿开关线到达终态。
5. 线性定常系统状态可控且系统矩阵 A 的特征值具有非正实部, $|u(t)| \leq 1$, 则时间最优控制存在。
6. 时间最优系统按最大加速、最大减速方式控制, 称继电控制或“砰-砰”(Bang-Bang)控制。

7. 开关次数定理

- ① 设系统状态方程为 $\dot{x} = Ax + bu$, $x(t_0) = x_0$, $|u(t)| \leq 1$, 欲实现时间最优控制。若系统矩阵 A 的特征值全为实数, 则其开关次数至多为 $(n-1)$ 次, 式中 n 为系统的阶数。
- ② 当 $u(t)$ 为向量函数时, 定理修改为: $u(t)$ 的每一分量 $u_i(t)$ 的开关次数至多为 $(n-1)$ 次。
- ③ 当 A 的特征值为复数时, 能出现任意多次的开关, 不存在前述的上限。开关次数与初始状态、系统特性及 t_f 有关。

八、解最小燃料控制问题的特点

- ① 性能指标形如: $J = \int_{t_0}^{t_f} |u(t)| dt$, t_f 固定, $|u(t)| \leq 1$ 。
- ② 建立三种控制函数(+1、0、-1)在不同初始条件下的相轨迹族(为抛物线及水平线)。
- ③ 过相平面原点的轨迹方程为开关线方程, 任何轨迹将最终沿此开关线到达终态。
- ④ 从任意初态出发的轨迹, 对应确定的控制函数+1或-1。
- ⑤ 存在一水平的轨迹段, 对应 $u(t) = 0$, 系统以恒速运行, 此时不消耗燃料。
- ⑥ 最小燃料控制系统按最大加速、恒速、最大减速方式运行, 称“砰-零-砰”(Bang-Off-

Bang)控制。

⑦控制切换时刻由终点条件决定,故与终端时间、初始条件有关。

九、处理控制受不等式约束的问题

比控制不受约束的问题复杂得多。当状态方程维数增高时,计算量显著增加。

十、奇异最优控制

1. 不能用极小值原理的必要条件 $H^* \leq H$ 或 $\partial H/\partial u = 0$ 来获得最优控制函数 $u(t)$ 与 λ, x 的确切关系式时,称为奇异情况。这时在某时间区间 $t \in [t_1, t_2]$ 内, $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ 中不含 u , $\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial u^T \partial u}\right) = 0$, 从而哈密顿函数不是 u 的函数, $\frac{\partial^2 H}{\partial u^T \partial u}$ 是奇异矩阵。

2. 出现奇异情况的时间区间称奇异区间。奇异区间内存在的最优控制称奇异控制,对应的状态轨线称奇异轨线,或奇异弧。

3. 单输入线性定常系统的最短时间控制问题,存在奇异情况的必要条件是系统状态不可控。当状态可控时,不会存在奇异情况。

4. 奇异最优控制的一种解法:

① 由于 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, 必存在 $\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial u}\right] = 0, \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial H}{\partial u}\right] = 0, \dots$, 直至结合正则方程后能得到 u 和 λ, x 的确切关系即奇异控制方程为止。显见奇异最优控制仍满足极小值原理的必要条件,只是增加了补充条件。

② 将奇异控制方程与正则方程联立,求解奇异弧。

③ 含奇异情况的最优轨线,由正常弧段(砰-砰弧段)及奇异弧段组合而成。

[例 题]

例 9.1-1 设系统状态方程为

$$\dot{x} = -x + u; \quad x(0) = 10$$

在 $u(t)$ 不受约束及 $|u(t)| \leq 0.3$ 两种情况下,求使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + u^2) dt$$

为极小的最优控制 $u(t)$ 。

解 属 t_f 固定、终端状态自由问题。

(1) $u(t)$ 不受约束时

哈密顿函数 $H = F + \lambda f = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + \lambda(-x + u)$

控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0 \quad u = -\lambda$

伴随方程 $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(x - \lambda) \quad \text{有 } x = -\dot{\lambda} + \lambda \quad \text{①}$

横截条件 $\lambda(t_f) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{t_f} = 0 \quad \text{即 } \lambda(1) = 0$

将式①代入状态方程有 $\lambda - 2\dot{\lambda} = 0$

特征根 $s^2 - 2 = 0, s_{1,2} = \pm \sqrt{2}$

故 $\lambda(t) = c_1 \exp(\sqrt{2}t) + c_2 \exp(-\sqrt{2}t)$

$$x(t) = (1 - \sqrt{2})c_1 \exp(\sqrt{2}t) + (1 + \sqrt{2})c_2 \exp(-\sqrt{2}t)$$

由初始条件 $(1 - \sqrt{2})c_1 + (1 + \sqrt{2})c_2 = 10$

由横截条件 $c_1 \exp(\sqrt{2}) + c_2 \exp(-\sqrt{2}) = 0$

解得积分常数 $c_1 = -c_2 \exp(-2\sqrt{2})$

$$c_2 = \frac{10}{(\sqrt{2} - 1)\exp(-2\sqrt{2}) + \sqrt{2} + 1} = 4.1 \quad ; \quad c_1 = -0.242.$$

故 $\lambda^*(t) = -0.242\exp(\sqrt{2}t) + 4.1\exp(-\sqrt{2}t)$

$$x^*(t) = 0.1\exp(\sqrt{2}t) + 9.9\exp(-\sqrt{2}t)$$

$$u^*(t) = -\lambda(t) = 0.242\exp(\sqrt{2}t) - 4.1\exp(-\sqrt{2}t)$$

(2) $|u(t)| \leq 0.3$ 时

由于 H 与 $(u^2/2 + \lambda u)$ 满足极值条件, 令 $\partial H(u)/\partial u = 0$, 可知 $u = -\lambda$. 因 $|u(t)| \leq 0.3$, 故

$$u = \begin{cases} +0.3 & \lambda < -0.3 \\ -\lambda & -0.3 < \lambda < 0.3 \\ -0.3 & \lambda > 0.3 \end{cases}$$

当 $\lambda = 0.3$ 及 -0.3 时, 切换控制。

u^* 的候选函数含有三种函数及其组合, 只能预选某种 $u(t)$, 计算其对应的 $x(t)$ 、 $\lambda(t)$, 校验 $\lambda(t)$ 所对应的 u 是否与预选 u 一致; 否则, 重选 u 重复这一过程, 直至取得一致结果。

① 设 $u = -0.3$

正则方程
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u = -x - 0.3 \\ \dot{\lambda} &= -x + \lambda \end{aligned}$$

解得
$$x(t) = -0.3 + ce^{-t}$$

由 $x(0) = 10$, 有 $c = 10.3$, 故

$$x(t) = -0.3 + 10.3e^{-t}$$

$$\lambda(t) = c_1 e^t + 0.3 - 10.3e^{-t}$$

由横截条件 $\lambda(1) = c_1 e + 0.3 - 10.3e^{-1} = 0$, 有 $c_1 = 1.284$.

故
$$\lambda(t) = 1.284e^t + 0.3 - 10.3e^{-t}$$

$$\lambda(0) = -8.716, \lambda(1) = 0.$$

对于 $t \in [0, 1]$, $\lambda < 0$, 最优候选函数应有 $u > 0$, 与假定矛盾, 应予重选。

② 设 $u = +0.3$

正则方程
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 0.3 \\ \dot{\lambda} &= -x + \lambda \end{aligned}$$

解得
$$x(t) = 0.3 + c'e^{-t}$$

由 $x(0) = 10$, 有 $c' = 9.7$, 故

$$x(t) = 0.3 + 9.7e^{-t}; \lambda(t) = c'_1 e^t - 0.3 - 9.7e^{-t}$$

由 $\lambda(1) = 0$, 有 $c'_1 = 1.424$, 故 $\lambda(t) = 1.424e^t - 0.3 - 9.7e^{-t}$. 对于 $t \in [0, 1]$, $\lambda < 0$, 应有 $u > 0$, 与假定一致了. $\lambda(0) = -8.576, \lambda(1) = 0$.

令 $\lambda(t) = -0.3, e^{2t} = 9.7/1.424, t = 0.96$ 为切换控制时刻, 且有 $x(0.96) = 4.014$, 它是下一段轨线的起始条件。

$$\textcircled{3} t \in [0.96, 1], u = -\lambda$$

正则方程
$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u = -x - \lambda \\ \dot{\lambda} &= -x + \lambda \end{aligned}$$

消元有 $\lambda = 2x$, 特征根为 $\pm\sqrt{2}$ 。

$$\lambda(t) = b_1 \exp[\sqrt{2}(t - 0.96)] + b_2 \exp[-\sqrt{2}(t - 0.96)]$$

由 $\lambda(0.96) = -0.3$ 有 $-0.3 = b_1 + b_2$

由 $\lambda(1) = 0$ 有 $0 = 1.0582b_1 + 0.945b_2$

解得 $b_1 = 2.5, b_2 = -2.8$

故
$$\lambda(t) = 2.5 \exp[\sqrt{2}(t - 0.96)] - 2.8 \exp[-\sqrt{2}(t - 0.96)]$$

$$u(t) = -\lambda(t) = -2.5 \exp[\sqrt{2}(t - 0.96)] + 2.8 \exp[-\sqrt{2}(t - 0.96)]$$

由于 $\dot{x} = \lambda - 2\lambda$

$$= 2.5\sqrt{2} \exp[\sqrt{2}(t - 0.96)] + 2.8\sqrt{2} \exp[-\sqrt{2}(t - 0.96)]$$

$$- 5\sqrt{2} \exp[\sqrt{2}(t - 0.96)] + 5.6 \exp[-\sqrt{2}(t - 0.96)]$$

$$= -1.464 \exp[\sqrt{2}(t - 0.96)] + 9.56 \exp[-\sqrt{2}(t - 0.96)]$$

$$x(t) = -\frac{1.464}{\sqrt{2}} \exp[\sqrt{2}(t - 0.96)] - \frac{9.56}{\sqrt{2}} \exp[-\sqrt{2}(t - 0.96)] + c$$

由 $x(0.96) = 4.014$, 有 $c = 11.81; x(1) = 4.327$ 。

由本例显见, $u(t)$ 不受约束及受有界约束两种情况下, 其最优控制规律及最优状态轨迹是显然不同的。其 $\lambda^*(t), u^*(t), x^*(t)$ 的示意曲线见图 9-3, 其中虚线为 u 无约束情况, 实线为 $|u(t)| \leq 0.3$ 。

例 9.1-2 已知状态方程及初始条件为

$$\dot{x} = -0.1x + u \quad x(0) = x_0$$

$0 \leq u \leq M, M$ 为常数。试求最优控制使下列指标

$$J = \int_0^{10} -x dt$$

取极小; 并求哈密顿函数随时间的变化规律。

解
$$\begin{aligned} H &= P + \lambda^T f = -x + \lambda(-0.1x + u) \\ &= -(1 + 0.1\lambda)x + \lambda u \end{aligned}$$

最优控制候选函数
$$u = \begin{cases} 0 & \lambda > 0 \\ M & \lambda < 0 \end{cases}$$

$\lambda = 0$ 时切换控制。

伴随方程
$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 1 + 0.1\lambda$$

解得
$$\lambda(t) = c_1 e^{1.1t} - 10$$

由横截条件 $\lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)}$, 故 $\lambda(10) = 0$,

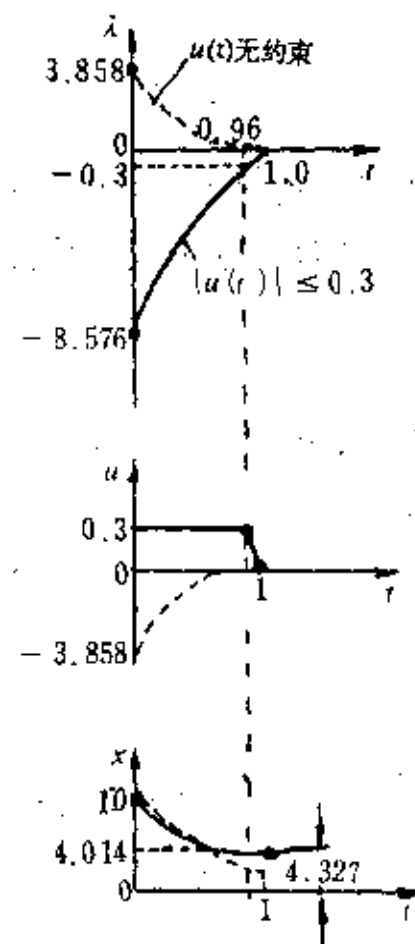


图 9-3 例 9.1-1 的最优解

有 $c_1 = 10e^{-1} = 3.68$

则 $\lambda^*(t) = -10 + 3.68e^{-0.1t}$ 有 $\lambda(0) = -6.32$ 。

由 $\lambda(t) = 0$, 解得 $t_{opt} = 10$, 鉴于本例 $t_f = 10$, 故 $t \in [0, 10]$, $\lambda(t) < 0$, 则 $u^* = M$ 。

状态方程 $\dot{x} = -0.1x + M$

其解 $x(t) = c_2 e^{-0.1t} + 10M$

由 $x(0) = x_0$, 求得 $c_2 = x_0 - 10M$

故 $x^*(t) = 10M + (x_0 - 10M)e^{-0.1t}$

由于 H 不显含 t , 有

$$H(x^*, \lambda^*, u^*, t_f) = -x^*(t_f) = -x^*(10) = -10M - (x_0 - 10M)e^{-1}$$

例 9.1-3 设系统状态方程及边界条件为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & x_1(0) &= x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_2 &= u & x_1(t_f) &= x_2(t_f) = 1/4 \end{aligned}$$

t_f 可变, $|u(t)| \leq 1$ 。确定使下列指标取极小值的最优控制。 $J = \int_0^{t_f} u^2 dt$ 。

解 $H = F + \lambda^T f = u^2 + [\lambda_1 \quad \lambda_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

由于 $H(u) = u^2 + \lambda_2 u$, 可由 $\frac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda_2 = 0$, 得 $u = -\frac{1}{2}\lambda_2$ 。该 u 必须满足 $|u| = |-\frac{1}{2}\lambda_2| \leq 1$, 即 $|\lambda_2| \leq 2$, 则最优控制候选函数为:

$$u = \begin{cases} 1 & \lambda_2 < -2 \\ -\frac{1}{2}\lambda_2 & -2 < \lambda_2 < 2 \\ -1 & \lambda_2 > 2 \end{cases}$$

伴随方程 $\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$, 故 $\lambda_1 = c_1$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 = -c_1 \quad \text{故 } \lambda_2 = -c_1 t + c_2$$

由于终端状态固定, 不能由横截条件确定 c_1, c_2 , 需试探确定。通常最小能量控制问题的控制量较小, 可首先选择线性段控制函数。设

$$u(t) = -\frac{1}{2}(c_2 - c_1 t)$$

对状态方程积分有 $x_2(t) = -\frac{1}{2}c_2 t + \frac{c_1}{4}t^2$ $x_1(t) = -\frac{1}{4}c_2 t^2 + \frac{c_1}{12}t^3$

考虑终端条件:

$$x_2(t_f) = -\frac{c_2}{2}t_f + \frac{c_1}{4}t_f^2 = \frac{1}{4} \quad \text{①}$$

$$x_1(t_f) = -\frac{c_2}{4}t_f^2 + \frac{c_1}{12}t_f^3 = \frac{1}{4} \quad \text{②}$$

因为 t_f 不固定, 利用 $\Theta = 0, M = 0$ 条件下的最优终端时间条件: $H|_{t_f} = 0$

$$H|_{t_f} = \frac{1}{4}(c_2 - c_1 t_f)^2 + c_1 x_2(t_f)^2 + (c_2 - c_1 t_f)^2 \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

即 $-(c_2 - c_1 t_f)^2 + c_1 = 0$ ③

联立解①、②、③有：

$$c_1 = \frac{3(t_f - 2)}{t_f^3}, \quad c_2 = \frac{t_f - 3}{t_f^3}, \quad t_f = 3$$

故

$$c_1 = 1/9, \quad c_2 = 0.$$

于是最优控制为：

$$u(t) = -(c_2 - c_1 t)/2 = t/18$$

应校验在 $[0, t_f]$ 区间是否满足 $|u(t)| \leq 1$ 的约束条件。显然， $u(t_f) = t_f/18 = 1/6 < 1$ ， $\lambda(t_f) = -1/3$ ，故所作选择是正确的。

最优轨线为：

$$x_2(t) = \frac{c_1}{4} t^2 = \frac{1}{36} t^2$$

$$x_1(t) = \frac{c_1}{12} t^3 = \frac{1}{108} t^3$$

最优性能指标为：

$$J = \int_0^{t_f} u^2 dt = \int_0^3 \left(\frac{1}{18} t \right)^2 dt = \frac{1}{36}$$

例 9.1-4 设系统状态方程

$$\dot{x}_1 = x_1 \quad \dot{x}_2 = u$$

$|u| \leq 1$ ，试求最优控制使状态由 $x_1(0) = x_2(0) = 1$ 转移到 $x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$ ，且使性能指标

$$J = \int_0^{t_f} 1 dt$$

最小。

解 这是时间最优控制问题。

(1) 最优控制候选函数的确定

由

$$H = F + \lambda^T f = 1 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 u$$

最优控制候选函数为：

$$u = \begin{cases} +1 & \lambda_2 < 0 \\ -1 & \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

即 $u = -\text{sign} \lambda_2(t)$ ，且 $\lambda_2 = 0$ 时切换控制。

伴随方程

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad \lambda_1 = c_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 = -c_1 \quad \lambda_2 = -c_1 t + c_2$$

由于终端状态固定，不能由横截条件确定 c_1, c_2 ，需从假定控制作用下的状态轨迹入手研究。

(2) 状态轨迹方程的建立

假定 $u = +1, \dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = 1$

$$x_2(t) = t + x_2(0) = t + 1$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2} t^2 + t + x_1(0) = \frac{1}{2} t^2 + t + 1$$

消去 t ，得 $u = +1$ 时的状态轨迹方程：

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{1}{2}$$

这是一条抛物线, 见图 9-4。

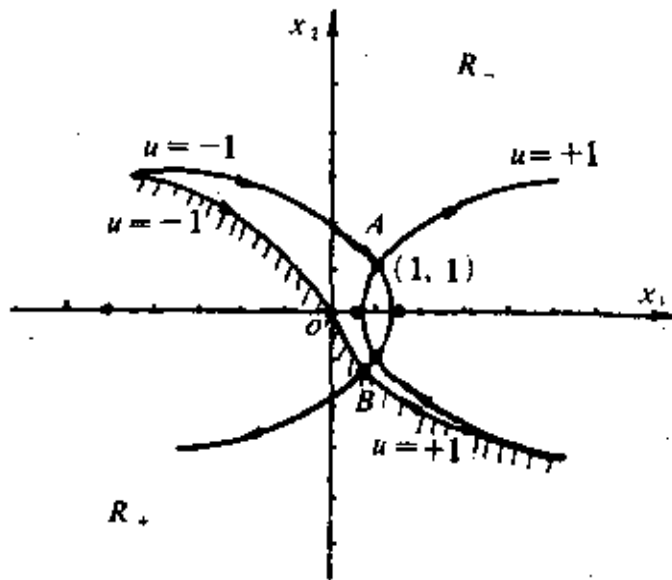


图 9-4 例 9.1-4 状态轨迹和开关线

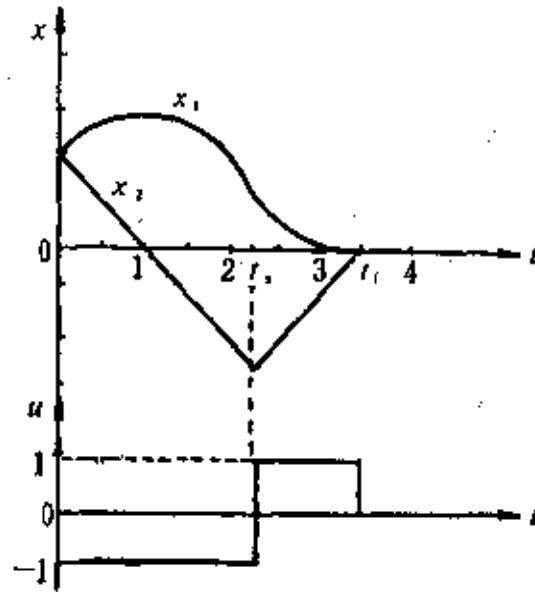


图 9-5 例 9.1-4 的最优解

假定 $u = -1, x_1 = x_2, x_2 = -1$

$$x_2(t) = -t + x_2(0) = -t + 1$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + x_1(0) = -\frac{1}{2}t^2 + t + 1$$

得 $u = -1$ 时的状态轨迹方程:

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}$$

也是一条抛物线, 见图 9-4。

(3) 开关线的确定

令状态轨迹方程常数项为零, 则 $x_1 = x_2^2/2$ (对应 $u = +1$) 及 $x_1 = -x_2^2/2$ (对应 $u = -1$), 各有半支抛物线可收敛至零。任何初始状态出发的轨迹, 转移到半支抛物线后, 才可能到达原点, 故半支抛物线部分是状态轨迹的最后部分, 见图 9-4。

描述控制与状态之间关系的开关线方程为:

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2|x_2|$$

开关线将整个相平面分为两个控制域, 阴影区 R_+ 的控制量 $u = +1$, R_- 区的控制量 $u = -1$ 。

(4) 由初态 $A(1, 1)$ 出发的相迹, 应选择 $u = -1$, 运行至 B 点与下半支开关线相交, 切换控制, $u = +1$, 沿 BO 转移至零。 ABO 为最优轨迹, 所运行时间最短。

(5) 运行时间计算:

AB 段: $u = -1$

$$x_1(0) = x_2(0) = 1$$

状态方程的解

$$x_2(t) = -t + 1$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + 1$$

设到达 B 点, 运行时间为 t_1 , 则 t_1 时刻的状态为:

$$x_2(t_1) = -t_1 + 1$$

$$x_1(t_1) = -\frac{1}{2}t_1^2 + t_1 + 1$$

BO 段: $u = +1$

状态方程的解

$$x_2(t) = t + a_2$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 + a_2t + a_1$$

按要求, $t=t_f$ 时转移至原点, 注意 t_f 从时刻零起量。

$$x_2(t_f) = t_f + a_2 = 0 \quad a_2 = -t_f$$

$$x_1(t_f) = \frac{1}{2}t_f^2 - t_f^2 + a_1 = 0 \quad a_1 = \frac{1}{2}t_f^2$$

故

$$x_2(t) = t - t_f$$

$$x_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - t_f t + \frac{1}{2}t_f^2$$

当 $t=t_0$ 时

$$x_2(t_0) = t_0 - t_f$$

$$x_1(t_0) = \frac{1}{2}t_0^2 - t_f t_0 + \frac{1}{2}t_f^2$$

由交点性质

$$t_0 - t_f = -t_0 + 1$$

$$\frac{1}{2}t_0^2 - t_f t_0 + \frac{1}{2}t_f^2 = -\frac{1}{2}t_0^2 + t_0 + 1$$

化简

$$t_f = 2t_0 - 1$$

$$t_0^2 - (t_f + 1)t_0 + \left(\frac{1}{2}t_f^2 - 1\right) = 0 \text{ 即 } t_0^2 - 2t_0 - \frac{1}{2} = 0$$

解得

$$t_0 = 1 + \sqrt{3/2}; (1 - \sqrt{3/2}) \text{ 舍去}$$

故

$$t_f = 1 + 2\sqrt{3/2}$$

$u^*(t), x_1^*(t), x_2^*(t)$ 变化曲线见图 9-5。

例 9.1-5 设二阶系统状态方程及边界条件为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & \begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases} & \begin{cases} x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases} \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + u \end{aligned}$$

$|u(t)| \leq 1$, 试求最优控制使下列性能指标

$$J = \int_0^{t_f} dt$$

取极小值。

解 这是时间最优控制问题。

(1) 最优控制候选函数的确定

$$\text{由 } H = 1 + [\lambda_1 \quad \lambda_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + u \end{bmatrix} = 1 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1 + \lambda_2 u$$

最优控制候选函数为:

$$u = \begin{cases} 1 & \lambda_2 < 0 \\ -1 & \lambda_2 > 0 \end{cases}$$

即 $u = -\text{sign} \lambda_2(t)$; 当 $\lambda_2 = 0$ 时切换控制。

由伴随方程:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_2 \quad \dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1$$

消元有

$$\ddot{\lambda}_2 + \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} = 2 \sqrt{c_1 c_2} \sin(t + \varphi)$$

式中 $\varphi = \sin^{-1}[(c_1 + c_2)/2 \sqrt{c_1 c_2}]$ 。横截条件在给定边界情况下,给不出任何信息,故 c_1, c_2 难于确定。

$$u^* = -\text{sign}[\sin(t + \varphi)]$$

由于 $\sin(t + \varphi)$ 每隔 π 时间改换符号一次,则 u^* 每隔 π 时间换接一次,且 u^* 值只可能有 +1 和 -1。

(2) 相迹(状态轨迹)方程的建立

① 当 $u = +1$ 时,状态方程的解:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -x_1 + 1$$

消元有

$$\ddot{x}_1 + x_1 - 1 = 0$$

$$x_1(t) = 1 + b_1 e^t + b_2 e^{-t} = 1 + 2 \sqrt{b_1 b_2} \sin(t + \beta)$$

式中 $\beta = \sin^{-1}[(b_1 + b_2)/2 \sqrt{b_1 b_2}]$; b_1, b_2 由初始条件决定;且有 $b_1 b_2 > 0, 0 \leq \beta \leq 2\pi$ 。

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = 2 \sqrt{b_1 b_2} \cos(t + \beta)$$

消去 t 可获得相迹方程:

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = (2 \sqrt{b_1 b_2})^2$$

这是一个圆方程,半径为 $2 \sqrt{b_1 b_2}$,圆心位于 $(1, 0)$ 。

② 当 $u = -1$ 时,状态方程的解:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -x_1 - 1$$

消元有 $\ddot{x}_1 + x_1 + 1 = 0$

$$x_1(t) = -1 + d_1 e^t + d_2 e^{-t} = -1 + 2 \sqrt{d_1 d_2} \sin(t + \gamma)$$

式中 $\gamma = \sin^{-1}[(d_1 + d_2)/2 \sqrt{d_1 d_2}]$; d_1, d_2 由初始条件决定; $d_1 d_2 > 0, 0 \leq \gamma \leq 2\pi$ 。

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = 2 \sqrt{d_1 d_2} \cos(t + \gamma)$$

消去 t 也可获得相迹方程:

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = (2 \sqrt{d_1 d_2})^2$$

它也是圆方程,半径为 $2 \sqrt{d_1 d_2}$,圆心位于 $(-1, 0)$ 。

③ 当初始条件不同时,半径不同,圆心位置不变,故圆方程描述了一族圆。

④ 相迹运行方向是顺时针的。

(3) 开关线的确定

① $u = +1$ 及 $u = -1$ 的两族圆,只有当圆半径为 $2 \sqrt{b_1 b_2} = 1$ 及 $2 \sqrt{d_1 d_2} = 1$ 时,才能通过原点。即只有 $M_1 O$ 和 $N_1 O$ 两个半圆轨迹可收敛至原点,见图 9-6。显然由任何初始状态出发的轨迹必须与这两个半圆相遇以后才能收敛至原点,这两个半圆是状态轨线的最后一段,是开关线的一部分。两半圆对原点斜对称。

② 由于控制量每隔 π 时间换接一次,而在 π 时间内相迹运行半周。

③ 图解分析表明(证略),圆心在 $3, 5, \dots$ 及圆心在 $-3, -5, \dots$, 半径为 1 的两族半圆作为开关线,能使任意状态迅速转移至最终轨迹上。故开关线为 $\dots M_3 M_2 M_1 O$ 及 $\dots N_3 N_2 N_1 O$ 。

④ 开关线将状态平面划分为两个控制域,阴影一侧 $u = -1$, 见图 9-6。所有 $u = -1$ 的相迹均为圆心在 $(-1, 0)$ 的圆,所有 $u = +1$ 的相迹均为圆心在 $(1, 0)$ 的圆。圆半径取决于初态至圆心的距离。相迹运行至与开关线相交时,切换控制。

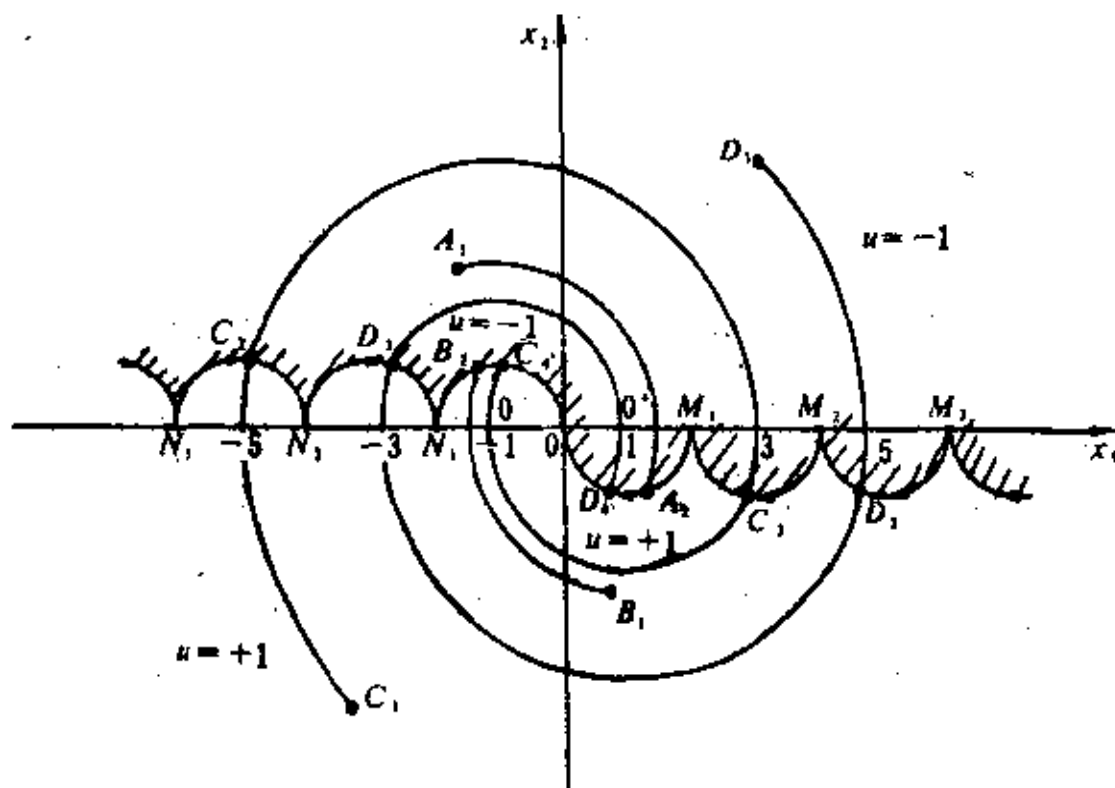


图 9-6 例 9.1-5 状态轨线及开关线

⑤图 9-6 示出几种初态出发的相迹,它们是最优状态轨线,其转移时间最短。

初态位于 D_1 , 则 $u = -1$, 以 O^-D_1 为半径作圆交于 D_2 , 换接 $u = +1$; 以 O^+D_2 为半径作圆交于 D_3 , 换接 $u = -1$; 以 O^-D_3 为半径作圆交于 D_4 , 换接 $u = +1$; 沿终段轨迹 D_4O 收敛至原点。共换接三次。 $D_1D_2D_3D_4O$ 为最优轨线, 其余类推。

⑥换接次数与系统特性、初始状态有关。

⑦各圆弧所对的中心角(以弧度计)之和即为总运行时间。

例 9.1-6 已知系统状态方程及初始条件:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}$$

$|u(t)| \leq 1$; 试求最优控制 $u(t)$, 使下列性能指标

$$J = x_1(t_f) - x_2(t_f) + \int_0^{t_f} |u| dt$$

取极小值, 并分段求出最优轨线。

解 属终端状态自由、有末值指标要求的最小燃料消耗问题。

哈密尔顿函数为:

$$H = P + \lambda^T f = |u| + [\lambda_1 \quad \lambda_2] \begin{bmatrix} x_2 \\ u \end{bmatrix} = |u| + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

确定最优控制候选函数使 $|u| + \lambda_2 u$ 取极小:

$$u = \begin{cases} +1 & \lambda_2 < -1 \\ 0 & -1 < \lambda_2 < 1 \\ -1 & \lambda_2 > 1 \end{cases}$$

当 $\lambda_2 = +1, -1$ 时切换控制。

伴随方程:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \quad \lambda_1 = c_1$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\lambda_1 = -c_1 \quad \lambda_2 = -c_1 t + c_2$$

由横截条件:

$$\lambda_1(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial x_1(t_f)} = \frac{\partial}{\partial x_1(t_f)} [x_1(t_f) - x_2(t_f)] = 1$$

$$\lambda_2(t_f) = \frac{\partial \theta}{\partial x_2(t_f)} = \frac{\partial}{\partial x_2(t_f)} [x_1(t_f) - x_2(t_f)] = -1$$

故 $\lambda_1 = \lambda(t_f) = c_1 = 1$

$$-t_f + c_2 = -1 \quad c_2 = t_f - 1 = 3$$

故 $\lambda_2 = -t + 3$ 。

解状态方程:

$$t \in [0, 2]; \dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -1$$

$$x_2(t) = -t + x_2(0) = -t + 1$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + x_1(0) = -\frac{1}{2}t^2 + t + 1$$

$$x_1(2) = 1; \quad x_2(2) = -1$$

$$t \in [2, 4]; \dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = 0$$

$$x_2(t) = \text{常数} = x_2(2) = -1$$

$$x_1(t) = -(t-2) + x_1(2) = -t + 3$$

$$x_1(4) = -1; \quad x_2(4) = -1$$

$\lambda_1^*(t), u^*(t), x_1^*(t), x_2^*(t)$ 曲线见图 9-7。

例 9.1-7 已知系统状态方程及边界条件:

$$\dot{x} = u; \quad x(0) = x_0, x(t_f) = x_f$$

t_f 给定, $|u(t)| \leq 1$, 试求最优控制及奇异最优控制使下列指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} x^2 dt$$

取极小值。

解 构造哈密尔顿函数: $H = \frac{1}{2}x^2 + \lambda u$

u 的候选函数:

$$u = \begin{cases} +1 & \lambda < 0 \\ -1 & \lambda > 0 \end{cases}$$

(1) 正常情况

若在某瞬间有 $\partial H / \partial u = \lambda = 0$, 则实现切换控制, 最优控制为砰-砰形式, $u^* = -\text{sign}(\lambda)$, 由正则方程:

$$\dot{x} = -\text{sign}(\lambda) \quad \dot{\lambda} = -\partial H / \partial x = -x$$

求得最优轨迹方程即砰-砰弧。

若在一定时间间隔内存在 $\partial H / \partial u = \lambda = 0$, $\partial H / \partial u$ 与 u 无关, $\partial^2 H / \partial u^2 = 0$, 则 $\partial^2 H / \partial u^2$ 为奇异矩阵, 便存在奇异情况。

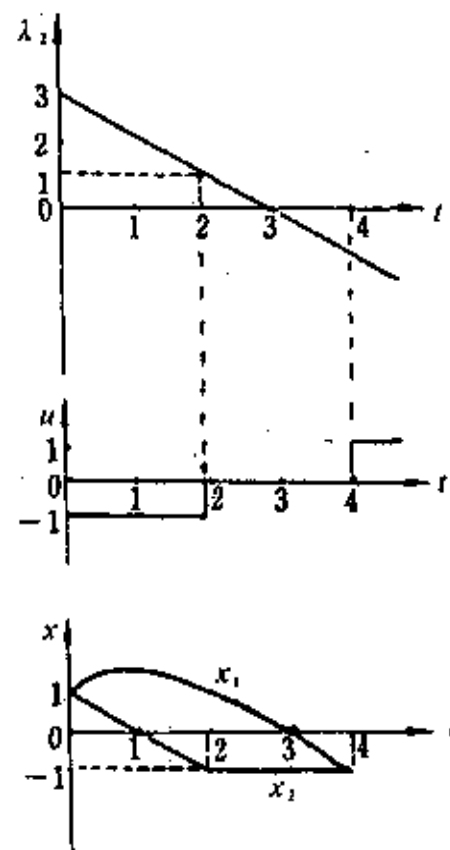


图 9-7 例 9.1-6 的最优解

(2)求奇异控制及奇异弧

按下列补充条件 $\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial H}{\partial u} \right] = 0, \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\partial H}{\partial u} \right] = 0$, 且考虑正则方程有:

$$\dot{\lambda} = -x = 0 \quad -\dot{x} = -u = 0$$

求得奇异最优控制及奇异弧为:

$$u^* = 0, x = 0, \lambda = 0.$$

(3)砰-砰弧与奇异弧的连接

奇异弧有 $x=0$, 显然不满足边界条件, 它是最优轨迹的中间段。

①第一段轨迹由砰-砰弧进入奇异弧

假定 $\lambda(t) > 0$, 则 $\dot{x} = -1$

$$x(t) = -t + x_0$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}t^2 - x_0t + \lambda(0)$$

设 t_1 为砰-砰弧进入奇异弧的时刻, 则

$$x(t_1) = x_0 - t_1 = 0$$

$$\lambda(t_1) = \frac{1}{2}t_1^2 - x_0(t_1) + \lambda(0) = 0$$

求得 $t_1 = x_0, \lambda(0) = \frac{1}{2}x_0^2$ 。

故第一段最优轨迹方程为:

$$x(t) = -t + x_0$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{2}(x_0 - t)^2$$

验证了 $\lambda(t) > 0$ 的假定是正确的。

②第三段轨迹由奇异弧进入砰-砰弧

设 t_2 为奇异弧进入砰-砰弧的时刻, 故该段起始条件为: $x(t_2) = 0, \lambda(t_2) = 0$ 。

假定 $\lambda(t) < 0$, 则 $\dot{x} = 1$

$$x(t) = \int_{t_2}^t 1 dt = t - t_2$$

$$\lambda(t) = \int_{t_2}^t -x dt = \int_{t_2}^t -(t - t_2) dt = -\frac{1}{2}(t - t_2)^2$$

由终端条件 $x(t_f) = x_f$ 求得:

$$x(t_f) = t_f - t_2 = x_f, \text{ 故 } t_2 = t_f - x_f$$

$$\lambda(t_f) = -\frac{1}{2}(t_f - t_2)^2 = -\frac{1}{2}x_f^2$$

故第三段最优轨迹方程为:

$$x(t) = t - t_f + x_f$$

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2}(t - t_f + x_f)^2$$

验证了 $\lambda(t) < 0$ 的假定是正确的

(4)完整的最优解曲线见图 9-8。

(5) 奇异时间间隔 $t_2 - t_1 = t_f - x_f - x_0$, 显见与边界条件及终端时刻有关。当 t_f, x_f 给定时, 只有当 $x_0 < t_f - x_f$ 才存在奇异区间; 只有当 $x_0 = t_f - x_f$ 才能按极小值原理的必要条件求解最优控制问题。

§ 9-2 离散系统极小值原理及应用

[内容提要]

一、问题提法

1. 设离散系统状态方程为

$$x(k+1) = f[x(k), u(k), k] \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9.2-1)$$

或

$$x_{i+1} = f(x_i, u_i, k) \quad (9.2-2)$$

$$|u(k)| \leq u_k \quad (9.2-3)$$

求分段恒值的最优控制序列 u_0, u_1, \dots, u_{N-1} 使性能指标

$$J = \Theta(x_N, N) + \sum_{k=0}^{N-1} F(x_k, u_k, k) \quad (9.2-4)$$

取极小值。式中 Θ, F 均为连续可微的标量函数, f 为连续可微的 n 维向量函数, x_N 为终端状态。

2. 离散系统的控制, 在时间上按采样周期划分为 N 段, 每段在一常值控制向量作用下, 使状态逐段转移, 但状态只在离散时刻取值。

二、离散最优控制问题的极值必要条件

定义离散哈密尔顿函数:

$$H[x_k(k), u(k), \lambda(k+1), k] = F[x(k), u(k), k] + \lambda^T(k+1)f[x(k), u(k), k] \quad (9.2-5)$$

简记为: $H_k = F(x_k, u_k, k) + \lambda_{k+1}^T f(x_k, u_k, k)$, 注意伴随变量为 λ_{k+1} , 而不是 λ_k 。

1. 终端状态自由、无终端约束时的极值必要条件为:

$$\text{伴随方程} \quad \lambda_k = \frac{\partial H_k}{\partial x_k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (9.2-6)$$

$$\text{状态方程} \quad x_{i+1} = f(x_i, u_i, k) \quad (9.2-7)$$

$$\text{控制方程} \quad H[x_k^*, \lambda_{k+1}^*, u_k^*, k] \leq H[x_k^*, \lambda_{k+1}^*, u_k, k] \quad (9.2-8)$$

$$\text{横截条件} \quad \lambda_N = \partial \Theta / \partial x_N \quad (9.2-9)$$

$$\text{边界条件} \quad x(0) = x_0 \quad (9.2-10)$$

联立解上述五个方程, 可获得最优问题的解。

$$2. \text{若含有终端状态约束条件: } M(x_N, N) = 0 \quad (9.2-11)$$

$$\text{则} \quad \lambda_N = \frac{\partial \Theta}{\partial x_N} + \frac{\partial M^T}{\partial x_N} \Gamma_k \quad (9.2-12)$$

Γ_k 为伴随向量, 与 M 同维数。

3. 若终端状态固定: $x(N) = x_N$, 则取代横截条件。

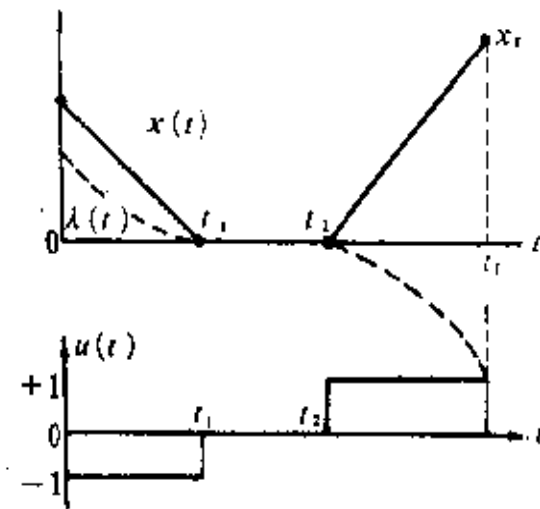


图 9-8 例 9.1-7 的最优解

4. 若 u_k 不受约束, 可使用 $\partial H_k / \partial u_k = 0$ 。

5. 对于连续系统最优控制问题, 需用数字计算机求解时, 可将连续状态方程及性能指标离散化, 采用离散极小值原理求解。在采样周期取得足够小的情况下, 其结果与连续极小值原理的数字解非常接近。

三、离散系统时间最优控制问题的特点及其解

1. 一个线性 n 阶离散系统, 在具有状态可控性及控制变量不受约束的条件下, 至多以 n 个采样周期使任意初态转移到给定终态。

2. 采样周期变小, 转移时间缩短, 但控制量增大。

3. 并非在任意条件下都能以少于 n 个采样周期完成转移。其具体条件与初始状态、系统特性有关。

4. 控制受约束时, 转移时间增大。

5. 求解离散问题时, 从 $k=0$ 开始递推列写状态方程, 直至第 N 段到达终态。利用给定的终端条件, 反向递推确定控制序列和状态序列。

[例 题]

例 9.2-1 设二阶离散系统状态方程及初始条件为:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-T} + T - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} u(k); \quad \begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

试求: 1. 使系统在两个采样周期内转移到零态的最优控制序列 $u(0), u(1)$;

2. 计算 $T=1$ 及 $T=0.5$ 的控制序列;

3. 研究在一个采样周期内完成状态转移的可能性;

4. 研究 $|u(k)| \leq 1$ 时对状态转移的影响。

解 本例属典型的离散系统时间最优控制问题。

(1) 由递推法解状态方程, 求控制序列及状态序列:

$$\begin{aligned} \text{令} \quad x_0 &= \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \quad x_1 = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} e^{-T} + T - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} \quad u(k) = u_k \end{aligned}$$

$k=0$, 状态方程为: $x_1 = Ax_0 + Bu_0$

$k=1$, $x_2 = Ax_1 + Bu_1 = A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1$

由题意, $x_2 = 0$, 故 $x_0 = -A^{-1}Bu_0 - A^{-2}Bu_1$

$$\begin{aligned} x_1 &= -A^{-1}Bu_1 \\ \text{由于} \quad A^{-1} &= e^T \begin{bmatrix} e^{-T} & e^{-T} - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{则} \quad -A^{-1}B = -e^T \begin{bmatrix} e^{-T} & e^{-T} - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-T} + T - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^T - T - 1 \\ 1 - e^T \end{bmatrix}$$

$$-A^{-2}B = A^{-1}(-A^{-1}B) \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^T \\ 0 & e^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^T - T - 1 \\ 1 - e^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2T} - e^T - T \\ e^T - e^{2T} \end{bmatrix}$$

$$\text{由于} \quad [x_0 \vdots x_1] = [-A^{-1}B \vdots -A^{-2}B] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

展开有
$$\begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^T - T - 1 & e^{2T} - e^T - T \\ 1 - e^T & e^T - e^{2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) & u(1) \\ u(1) & 0 \end{bmatrix}$$

则
$$\begin{bmatrix} u(0) & u(1) \\ u(1) & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{T(1 - e^T)^2} \begin{bmatrix} e^T - e^{2T} & T + e^T - e^{2T} \\ e^T - 1 & e^T - T - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix}$$

由给定初态可确定出 $u(0), u(1)$; 随之可解出 $x_1(1), x_2(1)$ 。

(2) 计算控制序列:

① 当 $T=1$ 时

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u(0) & u(1) \\ u(1) & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2.952} \begin{bmatrix} -4.670 & -3.670 \\ 1.718 & 0.718 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1.58 & -1.24 \\ 0.58 & 0.24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由(1,1)、(1,2)元素有:

$$u(0) = -1.58x_1(0) - 1.24x_2(0) \quad u(1) = -1.58x_1(1) - 1.24x_2(1)$$

综合得最优控制规律为

$$u(k) = -1.58x_1(k) - 1.24x_2(k) \quad k = 0, 1$$

说明采用这种控制规律, 该系统从任意初态转移到原点所需时间不超过 2 秒 ($2T$)。最优系统状态方程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-1} \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{-1} \\ 1 - e^{-1} \end{bmatrix} [1.58x_1(k) + 1.24x_2(k)] \\ &= \begin{bmatrix} 0.419x_1(k) + 0.364x_2(k) \\ -1.157x_1(k) - 0.540x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

② 当 $T=0.5$ 时

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u(0) & u(1) \\ u(1) & 0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{0.21} \begin{bmatrix} -1.070 & -0.570 \\ 0.649 & 0.149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5.09 & -2.71 \\ 3.09 & 0.71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) & x_1(1) \\ x_2(0) & x_2(1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

由(1,1)、(1,2)元素有:

$$u(0) = -5.09x_1(0) - 2.71x_2(0)$$

$$u(1) = -5.09x_1(1) - 2.71x_2(1)$$

综合得最优控制规律为

$$u(k) = -5.09x_1(k) - 2.71x_2(k) \quad k = 0, 1$$

据此控制规律, 该系统从任意初态转移到原点所需时间不超过 1 秒 ($2T$)。显见, 当采样周期 T 减半时, 所需的控制作用将增强一倍以上。由于 $u(k)$ 幅值总是有限的, 故采样周期并不能任意缩短, 即快速控制的速度也总是有限的。

最优系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-0.5} \\ 0 & e^{-0.5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{-0.5} - 0.5 \\ 1 - e^{-0.5} \end{bmatrix} [5.09x_1(k) + 2.71x_2(k)]$$

$$= \begin{bmatrix} 0.455x_1(k) + 0.104x_2(k) \\ -2x_1(k) - 0.454x_2(k) \end{bmatrix}$$

(3) 研究在一个采样周期内完成状态转移的可能性：
在一个采样周期内使状态到达原点，即要求

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = Ax_0 + Bu_0 = 0$$

则
$$x_0 = -A^{-1}Bu_0 = \begin{bmatrix} e^T - T - 1 \\ 1 - e^T \end{bmatrix} u_0$$

故可由初态解出 u_0
$$x_1(0) = (e^T - T - 1)u(0)$$

$$x_2(0) = (1 - e^T)u(0)$$

显见两个初态分量均与 $u(0)$ 成正比，即存在

$$\frac{x_1(0)}{x_2(0)} = \frac{e^T - T - 1}{1 - e^T} \triangleq \frac{1}{k}$$

当 $T=1$ 时, $k=x_2(0)/x_1(0)=-1.72/0.72=-2.39$, 意为在 x_1, x_2 状态平面上, 斜率为 k 的直线上的各点, 才可能在一个采样周期内转移至原点。

(4) 当 $|u(k)| \leq 1$ 时, 即 $|u(0)| \leq 1, |u(1)| \leq 1$ 。

① 对于 $x(2)=0, T=1$ 的情况, 由于

$$u(0) = -1.58x_1(0) - 1.24x_2(0)$$

$$u(1) = -1.58x_1(1) - 1.24x_2(1) = 0.58x_1(0) + 0.24x_2(0)$$

则可得到以下四个关系式:

$$1.58x_1(0) + 1.24x_2(0) \leq 1 \quad 1.58x_1(0) + 1.24x_2(0) \geq -1$$

$$0.58x_1(0) + 0.24x_2(0) \leq 1 \quad 0.58x_1(0) + 0.24x_2(0) \geq -1$$

这组方程所包围的范围见图 9-9。只要初始状态处于该范围, 就可在两个采样周期内转移至零。

② 对于 $x(1)=0, T=1$ 的情况, 则有以下两个关系式:

$$|x_1(0)| \leq 0.72 \quad |x_2(0)| \leq 1.72$$

在此有限线段上可在一个采样周期内转移至零。

例 9.2-2 设离散状态方程及边界条件为:

$$x(k+1) = Gx(k) + hu(k)$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

试用离散极小值原理求最优控制序列使下列性能指标

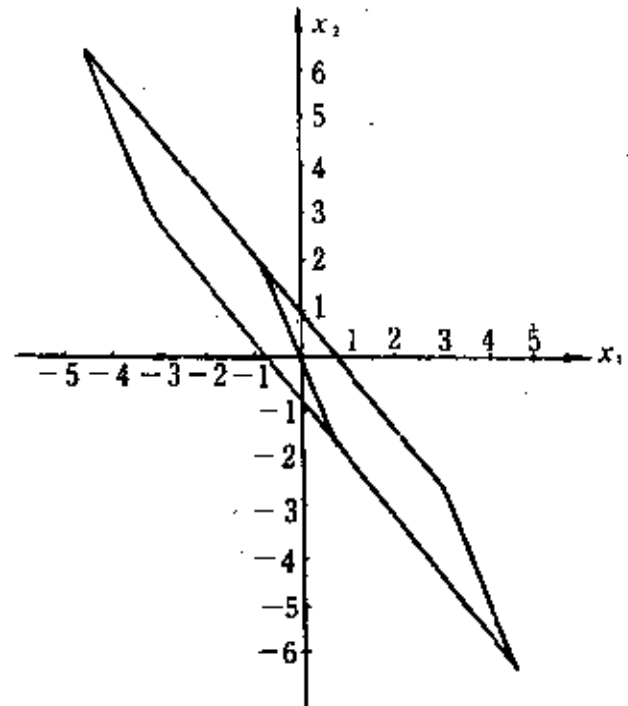


图 9-9 例 9.2-1 的图解表示 $|u(k)| \leq 1$

$$J = 0.05 \sum_{i=0}^1 u_i^2$$

取极小值,并求出最优状态序列。

解 列写离散哈密顿函数

$$H_k = 0.05u_k^2 + \lambda_{k+1}^T [Gx_k + hu_k]$$

伴随方程

$$\lambda(k) = \frac{\partial H_k}{\partial x_k} = G^T \lambda_{k+1} \quad (1)$$

控制方程

$$\frac{\partial H_k}{\partial u_k} = 0.1u_k + h^T \lambda_{k+1} = 0$$

故

$$u_k = -10h^T \lambda_{k+1} = -10h^T G^{-T} \lambda(k) \quad (2)$$

代入状态方程

$$x_{k+1} = Gx_k - 10hh^T G^{-T} \lambda(k) \quad (3)$$

式①、③是两点边值问题的差分方程。

当 $k=0$ 时, $\lambda_0 = G^T \lambda_1$

$$x_1 = Gx_0 - 10hh^T G^{-T} \lambda_0 = Gx_0 - 10hh^T \lambda_1$$

当 $k=1$ 时, $\lambda_1 = G^T \lambda_2$

$$x_2 = Gx_1 - 10hh^T G^{-T} \lambda_1 = G^2 x_0 - 10Ghh^T \lambda_1 - 10hh^T G^{-T} \lambda_1$$

由此方程可求得 λ_1 , 随之确定 λ_0 。式中

$$10Ghh^T = 10 \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \\ 0 & 0.10 \end{bmatrix}$$

$$10hh^T G^{-T} = 10 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.01 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$G^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0.01 \\ -0.01 & 0.20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(1) \\ \lambda_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解得 $\lambda_1(1) = 2000, \lambda_2(1) = 100$ 。

$$\lambda_0 = G^T \lambda_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \\ 300 \end{bmatrix}$$

故

$$u_0 = -10h^T G^{-T} \lambda_0 = -100$$

$$u_1 = -10h^T G^{-T} \lambda_1 = +100$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2000 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}$$

列写结果如下:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda_0 = \begin{bmatrix} 2000 \\ 300 \end{bmatrix}, \lambda_1 = \begin{bmatrix} 2000 \\ 100 \end{bmatrix}, u_0 = -100, u_1 = 100.$$

习 题

9-1 设系统状态方程及初始条件为

$$\dot{x} = x - u \quad x(0) = 5$$

$1/2 \leq u \leq 1$, 试选择最优控制, 使性能指标

$$J = \int_0^1 (x + u) dt$$

为极小,且求出最优轨线。

9-2 设系统状态方程及初始条件为:

$$\dot{x} = -x + 4u \quad x(0) = x_0$$

$|u| \leq 10, x(t_f)$ 自由, t_f 未固定。试求最优控制,使下列性能指标

$$J = \int_0^{t_f} (u + x^2) dt$$

取极小,并求出最优轨线及 t_f 。

9-3 设系统状态方程及初始条件为:

$$\dot{x} = a(t)x(t) + b(t)u(t) \quad x(t_0) = x_0$$

$|u| \leq U_m$, 试求最优控制,使下列性能指标

$$J = x_r - x(t_f)$$

为极小。式中 x_r 为指令值。

9-4 设系统状态方程及边界条件为:

$$\dot{x} = u, x(0) = x_0, x(t_f) = 0$$

$|u(t)| \leq 1$, 试求最优控制使转移时间最短。

9-5 设系统状态方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$|u(t)| \leq 1$, 试确定从 $x(0) = x_0$ 转移至 $x(t_f) = 0$ 的最优时间控制规律,并写出开关线方程。

9-6 设系统状态方程为:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + u$$

$|u(t)| \leq 2$, 试求从 $x(0)$ 转移至 $x(t_f) = 0$ 使下列指标

$$J = \int_0^{t_f} dt$$

为极小的最优控制及开关线。

9-7 设系统状态方程及边界条件为:

$$\dot{x} = -x + u \quad x(0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f$$

$|u(t)| \leq 1$, 试求最优控制,使

$$J = \int_0^{t_f} |u(t)| dt$$

取极小。 t_f 为固定。

9-8 设离散系统状态方程及初始条件为:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

u_k 不受约束,试确定在两个采样周期内使初始状态转移到原点的控制序列。欲在一个采样周期内完成转移,需满足什么条件?

9-9 设已知质量为 m 的质点,受到一个大小为 ma 的推力作用, a 为常值,使质点在 zoy

平面内运动,见图 9-10,质点沿 ox, oy 轴的速度分量分别为 u, v ; 控制变量为推力方向角 β , 这里假定 β 不受约束。要求将静止在坐标原点的质点,在给定时间 T 内转移到与 ox 轴平行并相距 h 的轨线上,要求抵达新轨线时的速度 $u(T)$ 为最大。

试建立该最优控制问题的数学模型;并用极小值原理(这时与变分法一致)求出最优控制规律 $\beta(t)$ 及最优轨线 $u(t), v(t), x(t), y(t)$ 。

9-10 设一条船相对水以常值速度 V 、相对固定参考系以航向角 θ 航行,船的直角坐标位置以 (x, y) 表示。船必须穿过一个强大水流区域,水流速度的大小和方向是已知的坐标位置 (x, y) 的函数:

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

式中 u, v 分别为水流在 x, y 方向的速度分量。要求确定如何驾驶船(即确定船的航向角 $\theta(t)$)才能使船从 A 点到 B 点所需的时间最短。

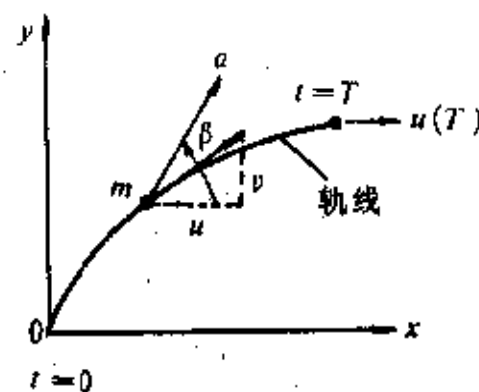


图 9-10 习题 9-9 运动关系

试建立该时间最优控制问题的数学模型;并用极小值原理

(或变分法)列出该问题的极值必要条件;导出最优控制规律 $\theta(t)$ 的表达式。(解最优轨线需在数字计算机上解偏微分方程)

9-11 设系统状态方程及边界条件为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & \begin{cases} x_1(0) = \zeta_0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases} \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

t_f 固定, u 无约束,试用极小值原理确定最优控制 $u(t)$,使下列性能指标

$$J = \int_0^{t_f} u^2(t) dt$$

取极小值,并求出最优轨线和最优性能指标。

9-12 设一阶系统状态方程及边界条件为:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 8, x(t_f) = 0$$

t_f 可变。试确定控制变量不受约束及 $|u(t)| \leq 1$ 时,使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} t_f^2 + \int_0^{t_f} u^2(t) dt$$

为极小值的最优控制、最优轨迹及最优终端时间。

9-13 设系统状态方程及边界条件为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & \begin{cases} x_1(0) = -1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} & \begin{cases} x_1(t_f) = 1 \\ x_2(t_f) = 0 \end{cases} \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

$|u(t)| \leq 1$ 。试求时间最优控制规律、最优轨线及最优时间。

9-14 设系统状态方程及初始条件为:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 & \begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned}$$

$|u(t)| \leq 1$,试确定最优控制使下列性能指标

$$J = x_1(t_f) - 2x_2(t_f) + \int_0^{t_f} |u| dt$$

取极小值。

第十章 线性二次型问题的最优控制

§ 10-1 状态调节器

[内容提要]

一、问题的提出

1. 有限时间状态调节器

(1) 线性定常受控系统状态方程及初始条件为:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \quad (10.1-1)$$

t_f 为有限值, u 不受约束, 确定最优控制 u^* 使下列二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) P x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (10.1-2)$$

取极小值。式中 P 、 Q 为非负定、 R 为正定的对称常值加权矩阵。

(2) 使该型指标取极小的实质是: 在 $[t_0, t_f]$ 间隔内, 消耗不大的能量, 使状态误差特别是使终端状态误差接近于零, 故有状态调节器之称。

(3) 通过 Q 、 R 分别对较大误差分量及较大控制量加较大的权系数, 以限制其值过大, 并可取消对控制量的约束条件。

(4) 最优控制规律是线性时变反馈规律。

2. 无限时间状态调节器

(1) 与有限时间状态调节器的不同点在于: $t_f = \infty$ 及 $P = 0$ 。性能指标为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (10.1-3)$$

(2) 人们实际上只关心有限时间内系统的性能, 但在 $[0, t_f]$ 进行的物理过程, 其系统受控的过渡过程比 t_f 小得多时, 可将 t_f 看作 ∞ , 经这种数学处理, 不必考虑到达系统稳态的具体 t_f 值。

(3) 最优控制规律是线性定常反馈规律。

3. 若系统是线性时变的, 其 $A(t)$ 、 $B(t)$ 均为时间函数, 时间函数 $Q(t)$ 、 $R(t)$ 可对不同时刻的状态误差、控制量加不同的权系数, 通常在接近终端时间区间加较大的权。

二、状态调节器问题的解

1. 有限时间状态调节器的解

(1) 最优控制规律 $u^*(t) = -R^{-1} B^T K(t) x(t)$ (10.1-4)

式中 $K(t)$ 满足下列黎卡提 (Riccati) 矩阵微分方程

$$\dot{K}(t) = -KA - A^T K + KBR^{-1} B^T K - Q \quad (10.1-5)$$

$$K(t_f) = P \quad (10.1-6)$$

显见 $u^*(t)$ 是状态的线性函数; $K(t)$ 是时间函数, 故最优反馈系统是时变系统。

(2) 黎卡提方程是非线性微分方程, 难于得到闭合形式的解析解, 需由数字计算机求数

值解。鉴于 A, B, Q, R 均已知,故 $K(t)$ 可预先计算。

(3) $K(t)$ 是 $n \times n$ 维对称、正定矩阵。其正定性可保证最优闭环系统的稳定性。

(4) 在 t_f 附近, $K(t)$ 才有较大变化。当 t_f 足够大时,在远离 t_f 的时间区间内, $K(t)$ 变化缓慢,工程上当作常值矩阵 \hat{K} 处理可获得满意结果。

(5) 状态调节器闭环状态方程为:

$$\dot{x} = [A - BR^{-1}B^TK(t)]x \quad (10.1-7)$$

其特征方程为

$$|\lambda I - (A - BR^{-1}B^TK(t))| = 0 \quad (10.1-8)$$

(6) 最优轨线:为闭环状态方程在 x_0 作用下的解。

$$(7) \text{最优性能指标: } J^* = \frac{1}{2}x^T(t_0)K(t_0)x(t_0) \quad (10.1-9)$$

$$\text{或 } J^* = \frac{1}{2}x^T(t)K(t)x(t) \quad (10.1-10)$$

2. 无限时间状态调节器的解

$$(1) \quad u^*(t) = -R^{-1}B^T\hat{K}x(t) \quad (10.1-11)$$

式中 \hat{K} 满足下列黎卡提矩阵代数方程

$$-\hat{K}A - A^T\hat{K} + \hat{K}BR^{-1}B^T\hat{K} - Q = 0 \quad (10.1-12)$$

(2) 卡尔曼已证明:对于状态可控系统,当 $t_f \rightarrow \infty$ 时, $K(t)$ 的极限存在,且是唯一的,即

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} K(t) = \hat{K} \quad (10.1-13)$$

\hat{K} 为常值矩阵,又称黎卡提微分方程的稳态解。

(3) \hat{K} 为反馈增益矩阵。对于状态可控系统,控制规律与全部状态反馈有关。线性定常受控系统构成的最优闭环系统仍是线性定常的,这是二次型最优控制问题的重要结论。

$$(4) \text{闭环状态方程为: } \dot{x} = (A - BR^{-1}B^T\hat{K})x \quad (10.1-14)$$

(5) 最优轨线:为闭环状态方程在 x_0 作用下的解。

$$(6) \text{最优性能指标: } J^* = \frac{1}{2}x^T(0)\hat{K}x(0) \quad (10.1-15)$$

三、受控系统可控性、稳定性与最优解的关系

1. 不论有限时间还是无限时间状态调节器,只要受控系统具有状态可控性,则不论受控系统特征值如何,一定存在正定的 $K(t)$ 或 \hat{K} ,存在最优控制使 J 收敛达极小,使闭环系统渐近稳定,并且闭环极点可任意配置。

2. 当受控系统状态不完全可控,但系统不可控部分渐近稳定时,同样存在正定的 $K(t)$ 或 \hat{K} ,存在最优控制使 J 收敛达极小,使闭环系统渐近稳定,不过,其闭环极点不能任意配置。

3. 有限时间状态调节器,当受控系统状态不完全可控,但系统不可控部分非渐近稳定,则不存在正定的 $K(t)$ 或 \hat{K} ,但在数学上能求得最优控制使 J 在有限时间内达到极小值,不致使 J 变为无穷。不过在工程上毕竟不采用这种系统,一个闭环不稳定系统连调试都困难了。

4. 无限时间状态调节器,当受控系统不具状态可控性且不可控部分非渐近稳定时,闭环系统不稳定,在无限时间必使 J 变为无穷,便无法比较谁为最优控制,故不存在最优控制。

5. 设无限时间状态调节器,其受控系统可控,当给定 Q 为非负定矩阵时,若矩阵对 $[A \quad D]$ 是可观测对,则最优控制存在且闭环系统渐近稳定。这里的 D 是对 Q 进行分解得到

的任意一个使 $DD^T = Q$ 成立的矩阵。

四、无限时间状态调节器的系统矩阵参数最优化

1. 问题的提出: 设系统齐次状态方程为

$$\dot{x} = Ax, x(0) = x_0 \quad (10.1-16)$$

式中 A 是稳定矩阵, 即 A 的特征值具有负实部。状态不具可控性, 但系统是渐近稳定的。要求确定 A 阵的最优参数值 a_{ij} , 使下列性能指标取极小:

$$J = \int_0^{\infty} x^T x dt \quad (10.1-17)$$

2. 解法: (1) 由于 $u=0$ 及 $R=0, Q=I_2$, 黎卡提矩阵代数方程蜕变为:

$$A^T \hat{K} + \hat{K} A = -Q \quad (10.1-18)$$

该式是李雅普诺夫方程, 但 Q 阵由指标中的权矩阵确定。式(10.1-18)的解 \hat{K} 含有 A 的待定参数。

(2) 利用线性二次型问题性能指标性质:

$$J = x^T(0) \hat{K} x(0) \quad (10.1-19)$$

由 $\partial J / \partial a_{ij} = 0 \quad (10.1-20)$

确定优化参数 a_{ij} 。

(3) 通常情况下, 系统矩阵的优化参数与初始条件有关。

3. 对于系统状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (10.1-21)$$

给定控制规律

$$u = -Kx \quad (10.1-22)$$

要求确定 K 阵的最优参数值 k_{ij} ; 使式(10.1-17)所示指标为极小的问题, 可以转化为下列闭环系统

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (10.1-23)$$

矩阵 $(A - BK)$ 参数的优化问题。此时, 黎卡提矩阵代数方程蜕变为下列李雅普诺夫方程:

$$(A - BK)^T \hat{K} + \hat{K} (A - BK) = -Q \quad (10.1-24)$$

式中 Q 由指标中的权矩阵确定。

\hat{K} 含有 k_{ij} , 仍有 $J = x^T(0) \hat{K} x(0)$;

令 $\partial J / \partial k_{ij} = 0 \quad (10.1-25)$

确定优化参数 k_{ij} 。

五、无限时间状态调节器的控制器参数最优化

1. 问题的提出: 设系统状态方程及控制规律为:

$$\dot{x} = Ax + Bu; \quad u = -Kx$$

选择控制器最优参数 k_{ij} 使下列指标取极小:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

2. 解法: (1) 求黎卡提矩阵代数方程的解 \hat{K} ; (2) 令最优控制规律与给定控制规律相等, 即,

$$u = -R^{-1} B^T \hat{K} x = -Kx \quad (10.1-26)$$

由对应项系数相等, 可确定最优的控制器参数值 k_{ij} ; (3) 最优控制规律与初始条件无关, 故优化参数也与初始条件无关。

六、离散的状态调节器

设离散系统状态方程及初始条件为：

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (10.1-27)$$

$$x(0) = x_0 \quad (10.1-28)$$

要求最优控制序列 u_k , 使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} x_N^T P_N x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k) \quad (10.1-29)$$

取极小值。

应用离散极小值原理求得最优控制为：

$$u_k^* = -R_k^{-1} B_k^T A_k^{-1} (K_k - Q_k) x_k \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (10.1-30)$$

式中 K_k 满足下列黎卡提差分方程：

$$K_k = Q_k + A_k^T (K_{k+1} + B_k R_k^{-1} B_k^T)^{-1} A_k \quad (10.1-31)$$

或

$$K_k = Q_k + A_k^T K_{k+1} (I + B_k R_k^{-1} B_k^T K_{k+1})^{-1} A_k \quad (10.1-32)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$K_N = P_N \quad (10.1-33)$$

[例 题]

例 10.1-1 设系统状态方程及初始条件为：

$$\dot{x} = -(x/2) + u, x(0) = x_0$$

试求最优控制, 使下列指标

$$J = \frac{1}{2} p x^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [2x^2(t) + u^2(t)] dt$$

取极小。 t_f, p 均给定。当 $p=0, t_f=1$ 时, 试比较采用黎卡提微分方程与代数方程解的结果。

解(一) 由题意, $A=-1/2, B=1, Q=2, R=1$ 。

黎卡提微分方程为: $\dot{k} = k^2 + k - 2 = (k+2)(k-1), k(t_f) = p$. 用分离变量法解此非线性微分方程:

$$\frac{dk}{(k+2)(k-1)} = \frac{1}{3} \left[\frac{dk}{k-1} - \frac{dk}{k+2} \right] = dt$$

求积分: $\int_{k(t)}^{k(t_f)} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+2} \right] dk = \int_t^{t_f} 3dt$

其解为: $\ln \left[\frac{p-1}{p+2} \cdot \frac{k(t)+2}{k(t)-1} \right] = 3(t_f - t)$

$$k(t) + 2 = \frac{p+2}{p-1} [k(t) - 1] \exp[3(t_f - t)]$$

设

$$y = \frac{p+2}{p-1} \exp[3(t_f - t)]$$

则

$$k(t) + 2 = [k(t) - 1]y$$

$$k(t) = \frac{y+2}{y-1} = \frac{\frac{p+2}{p-1} \cdot \exp[3(t_f - t)] + 2}{\frac{p+2}{p-1} \cdot \exp[3(t_f - t)] - 1} = \frac{(p+2) \cdot \exp[3(t_f - t)] + 2(p-1)}{(p+2) \cdot \exp[3(t_f - t)] - (p-1)}$$

最优控制为: $u^*(t) = -R^{-1} B^T K(t) x(t) = -k(t)x(t)$

最优轨线为: $\dot{x} = -\frac{1}{2}x + u = [-\frac{1}{2} - k(t)]x$

$$x(t) = \exp\left\{\int_0^t \left[-\frac{1}{2} - k(t)\right] dt\right\} \cdot x_0$$

式中指数函数为状态转移函数, 为标量。

(二) 当 $p=0, t_f=1$ 时, $k(t) = \frac{2e^{3(1-t)} - 2}{2e^{3(1-t)} + 1} = 1 - \frac{3}{2e^{3(1-t)} + 1}$, $k(t)$ 曲线见图 10-1。

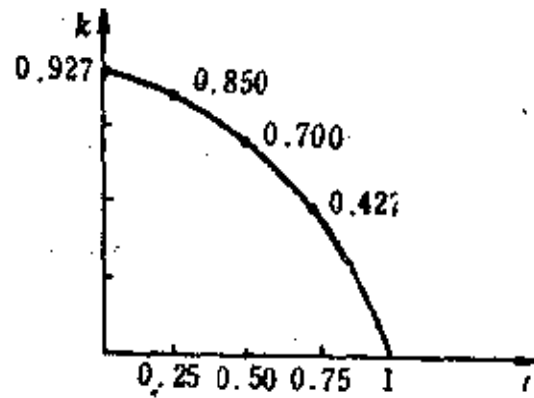


图 10-1 $k(t)$ 曲线

故
$$u^*(t) = -\left[1 - \frac{3}{2e^{3(1-t)} + 1}\right]x(t)$$

由于
$$\int_0^1 \left[-\frac{1}{2} - k(t)\right] dt = \int_0^1 \frac{3}{2} \left[-1 + \frac{1}{e^{3(1-t)} + 0.5}\right] dt = -1.12$$

故
$$x^*(t) = e^{-1.12} \cdot x_0$$

若用黎卡提代数方程, 则 $k = (k+2)(k-1) = 0$, 得 $k=1; k=-2$ (舍去, 因不正定)。 $u^*(t) = -x(t); \dot{x} = -(3/2)x, x^*(t) = e^{-1.5} \cdot x_0$ 。当 t_f 较大时, 两种解法的结果将更接近些。

例 10.1-2 设系统状态方程及初始条件为:

$$\dot{x} = ax + u, \quad x(0) = x_0$$

试求最优控制使下列二次型性能指标

$$J = \frac{1}{2}fx^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} (qx^2 + ru^2) dt$$

取极小值; 当 $a=-1, f=0, t_f=1, x(0)=1, q=1$ 时, 绘出 $x(t), u(t), k(t)$ 曲线, 取 r 分别为 0.02, 0.2, 1; 当 $a=-1, q=r=1, f=0$ 及 $f=1$, 取 t_f 分别为 1, 3, 5, 10 时, 给出 $K(t)$ 曲线。

解 与典型的二次型性能指标公式相比, 本例有: $P=f, Q=q, R=r, A=a, B=1$ 。

已知控制量为状态的线性函数:

$$u(t) = -R^{-1}B^TKx$$

本例有: $u(t) = -\frac{1}{r}Kx$

式中 K 为如下黎卡提方程

$$\dot{K} = -KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - Q$$

在边界条件 $K(t_f) = P$

下的解。本例有:

$$\dot{K} = -Ka - aK + \frac{1}{r}K^2 - q = \frac{K^2}{r} - 2aK - q$$

$$K(t_f) = f$$

可用分离变量法求解 $K(t)$ ：

$$\int_0^t \frac{dK}{K^2/r - 2aK - q} = \int_0^t dt$$

$$r \int_K^t \left(\frac{1/2\beta r}{K - (a + \beta)r} - \frac{1/2\beta r}{K - (a - \beta)r} \right) dK = t_f - t$$

$$\{\ln[K - (a + \beta)r] - \ln[K - (a - \beta)r]\} \Big|_K^t = 2\beta(t_f - t)$$

$$\ln \left\{ \frac{[f - (a - \beta)r][K - (a + \beta)r]}{[f - (a + \beta)r][K - (a - \beta)r]} \right\} = 2\beta(t_f - t)$$

解得
$$K(t) = r \cdot \frac{a + \beta - \frac{(f/r) - a - \beta}{(f/r) - a + \beta} \cdot (a - \beta) \exp[-2\beta(t_f - t)]}{1 - \frac{(f/r) - a - \beta}{(f/r) - a + \beta} \exp[-2\beta(t_f - t)]} \quad (2)$$

式中
$$\beta = \sqrt{a^2 + q/r} \quad (3)$$

最优轨线为：

$$\dot{x} = ax - \frac{1}{r}Kx = \left(a - \frac{K}{r}\right)x$$

则时变齐次状态方程的解有：

$$x(t) = \exp \left\{ \int_0^t \left[a - \frac{1}{r}K(\tau) \right] d\tau \right\} \cdot x(0) \quad (4)$$

当 $a = -1, f = 0, t_f = 1, x(0) = 1, q = 1$ 时

$$\dot{x} = -x + u$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + ru^2) dt$$

$$\beta = \sqrt{1 + 1/r}$$

$$K(t) = r \cdot \frac{(a + \beta)[1 - e^{-2\beta(1-t)}]}{1 + \frac{a + \beta}{-a + \beta} e^{-2\beta(1-t)}}$$

$$u(t) = -\frac{1}{r}K(t)x$$

$$x(t) = \exp \left\{ \int_0^t \left[a - \frac{1}{r}K(\tau) \right] d\tau \right\}$$

$K(t), u(t), x(t)$ 曲线见图 10-2。

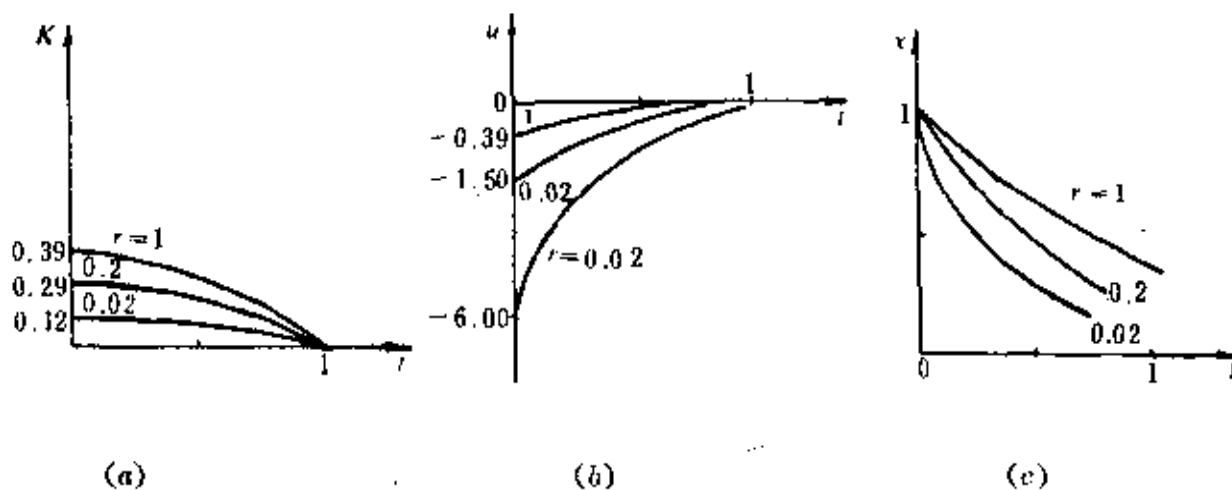


图 10-2 $K(t), u(t), x(t)$ 曲线

由图形可看出:加权系数 r 小时, $K(t)$ 在起始段几乎是常数, 在临近终端时刻, 才具有时变性质; 在起始段控制量大, 状态较快地转移到给定值。

当 $a=-1, q=r=1, f=0$ 及 $f=1, t_f=1, 3, 5, 10$ 时, $K(t)$ 曲线见图 10-3。

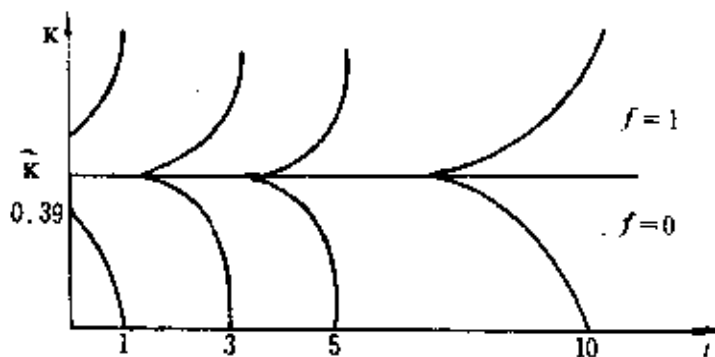


图 10-3 $K(t)$ 曲线

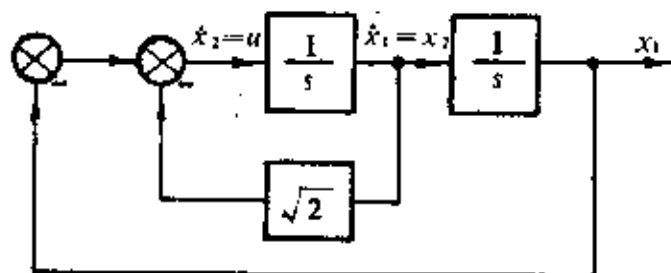


图 10-4 最优系统结构图

显见当 t_f 大时, 起始段 K 值变化平缓, $\dot{K} \approx 0$ 。

例 10.1-3 设系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = u$$

试确定最优控制 $u(t)$, 使下列性能指标

$$J = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} (x_1^2 + u^2) dt$$

取极小值。

解 已知 $t_f = \infty$, 是具有二次型指标的无限时间状态调节器问题。受控系统传递函数含一对零重极点。

1. 校验受控系统状态可控性:

可控性矩阵 $Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\text{rank} Q_c = 2$, 故可控。

2. 列写 A, B, Q, R 矩阵: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $R = 1$ 。

3. 求解黎卡提矩阵代数方程: $-\dot{K}A - A^T \dot{K} + \dot{K}BR^{-1}B^T \dot{K} - Q = 0$

解得

$$\dot{k}_{12}^2 - 1 = 0, \quad \dot{k}_{12} = \pm 1$$

$$-\dot{k}_{11} + \dot{k}_{12}\dot{k}_{22} = 0$$

$$-2\dot{k}_{12} + \dot{k}_{22} = 0, \quad \dot{k}_{22} = \pm \sqrt{2\dot{k}_{12}}$$

由 \dot{K} 的正定性有: $\dot{k}_{11} > 0$; $\dot{k}_{11}\dot{k}_{22} - \dot{k}_{12}^2 > 0$ 。

故 $\dot{k}_{22} > 0$ 及 $\dot{k}_{12} > 0$

于是 $\dot{k}_{12} = 1, \dot{k}_{22} = \sqrt{2}, \dot{k}_{11} = \sqrt{2}$

$$\dot{K} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

4. 最优控制规律:

$$u(t) = -R^{-1}B^T \dot{K}x(t)$$

$$= -[0 \quad 1] \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -x_1(t) - \sqrt{2}x_2(t)$$

5. 最优控制系统结构图见图 10.4。

6. 最优控制系统的稳定性校验：计算下列最优系统闭环特征多项式

$$|\lambda I - (A - BR^{-1}B^TK)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + \sqrt{2} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1$$

特征值为： $(-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}j)/2$ ，故系统稳定。

当 $t_f = \infty$ 时，必首先校验受控系统状态可控性；可控时，必存在最优解；至于受控系统是否具有零极点或右极点，是没有关系的。

或如下校验闭环稳定性：将 Q 分解为 $D^T D = Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 得 $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ；由于 $[D \mid A^T D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，其秩为 2，故 $[A \mid D]$ 是可观测对，则闭环渐近稳定。当更改 J 为： $J = \int_0^\infty \frac{1}{2}(x_2^2 + u^2)dt$ 时，有 $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，分解 Q 可得 $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，由于 $[D \mid A^T D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，其秩为 1，故 $[A \mid D]$ 是不可观测对，则闭环非渐近稳定。

例 10.1-4 设有下列受控系统状态方程：

$$1. \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$2. \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad 3. \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

试分别研究有无最优控制使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt$$

取极小值？是否存在正定的矩阵 K ？分析受控系统状态可控性、稳定性与最优解的关系。

解 本例属无限时间状态调节器问题。由性能指标有：

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 1$$

1. 可控性矩阵 Q_{c1} ：

$$Q_{c1}[b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{rank} Q_{c1} = 1 < 2.$$

故受控系统不完全可控；状态变量 x_1 不可控。

特征方程：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

特征值为 $-1, -2$ ，故受控系统渐近稳定。

黎卡提矩阵代数方程：

$$-KA - A^TK + KbR^{-1}b^TK - Q = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

展开有代数方程组：

$$2k_{11} + k_{12}^2 - 1 = 0 \quad \text{①}$$

$$3k_{12} + k_{12}k_{22} = 0 \quad \text{②}$$

$$4k_{22} + k_{22}^2 - 1 = 0 \quad \text{③}$$

据 \hat{K} 正定性要求有: $k_{11} > 0; k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0$, 故 $k_{22} > 0$ 。

由③: $k_{22} = -2 + \sqrt{5}$ (舍去 $-2 - \sqrt{5}$);

由②: $k_{12} = 0$;

由①: $k_{11} = 1/2$ 。

故
$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -2 + \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

最优控制规律: $u(t) = -R^{-1}b^T \hat{K}x = -[0 \ 1] \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -2 + \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -(\sqrt{5} - 2)x_2$

最优系统闭环状态阵:

$$G = A - bR^{-1}b^T \hat{K} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

闭环特征值为 $-1, -\sqrt{5}$, 故闭环系统渐近稳定。

分析: 受控系统状态不完全可控, 但不可控部分渐近稳定时 (与 x_1 对应的系统极点为 -1), 则仍存在正定的 \hat{K} 阵; 可求得最优控制规律, 它仅与可控状态变量有关, 实现局部状态反馈; 闭环系统是渐近稳定的; 性能指标为有限值。

2. 可控性矩阵 Q_{c2} :

$$Q_{c2} = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank} Q_{c2} = 1 < 2.$$

故受控系统不完全可控, 状态变量 x_1 不可控。

特征方程:

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 1)^2 = 0$$

有重特征值 $+1$ 。故受控系统不稳定。

黎卡提矩阵代数方程:

$$\begin{aligned} & - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

展开有代数方程组:

$$-2k_{11} + k_{12}^2 - 1 = 0 \quad \text{④}$$

$$-3k_{12} + k_{12}k_{22} = 0 \quad \text{⑤}$$

$$-4k_{22} + k_{22}^2 - 1 = 0 \quad \text{⑥}$$

由⑥解得: $k_{22} = -2 + \sqrt{5}$ (舍去 $-2 - \sqrt{5}$);

由⑤解得: $k_{12} = 0$;

由④解得: $k_{11} = -1/2$;

故 \hat{K} 非正定。

闭环系统状态阵:

$$G = A - bR^{-1}b^TK = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

闭环特征值为 $+1, 1 - \sqrt{5}$, 闭环系统不稳定。

分析: 受控系统状态不完全可控, 且不可控部分非渐近稳定时(与 x_1 对应的系统极点为 $+1$), 不存在正定的 K 阵; 闭环系统不稳定; 性能指标为无穷大, 因而不存在最优控制。

3. 可控性矩阵 Q_{cs} :

$$Q_{cs} = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank} Q_{cs} = 2$$

故受控系统可控。

特征方程:

$$|\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 1) = 0$$

特征值为 $0, +1$, 故受控系统不稳定。

黎卡提矩阵代数方程:

$$\begin{aligned} & - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

展开有代数方程组:

$$k_{12}^2 = 1 \quad (7)$$

$$-k_{11} - k_{12} + k_{12}k_{22} = 0 \quad (8)$$

$$-2k_{12} - 2k_{22} + k_{22}^2 = 1 \quad (9)$$

求得 $K = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

最优控制规律: $u(t) = -x_1 - 3x_2$

最优系统闭环状态阵: $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

闭环特征方程:

$$|\lambda I - G| = (\lambda + 1)^2 = 0$$

有重特征值 -1 , 故闭环系统渐近稳定。

分析: 当受控系统状态可控时, 即使受控对象有零根、不稳定根, 仍存在正定 K 阵, 可求得最优控制, 实现全状态反馈, 能保证使闭环系统稳定, 性能指标为有限值。

例 10.1-5 设系统方程及初始条件为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad a > 0; \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

试确定参数 a 的值, 使下列性能指标取极小:

$$J = \int_0^{\infty} x^T x dt$$

解 属无限时间状态调节器的系统矩阵参数最优化问题。由黎卡提矩阵代数方程的蜕变方程——李雅普诺夫方程：

$$A^T \hat{K} + \hat{K} A = -Q \quad (1)$$

式中 Q 由性能指标中权矩阵决定, 有

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

展开式①有 $n(n+1)/2$ 个方程, $n=3$:

$$\left. \begin{aligned} k_{13} &= \frac{1}{2} \\ k_{11} - k_{23} - 2k_{13} &= 0 \\ k_{12} - k_{33} + ak_{13} &= 0 \\ 2k_{12} - 4k_{23} &= -1 \\ k_{13} + k_{22} - 2k_{33} + ak_{23} &= 0 \\ 2(k_{23} + ak_{33}) &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

解得

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \frac{-2a^2 + 6a}{2(2a+1)} & \frac{-2a^2 - 3}{2(2a+1)} & \frac{1}{2} \\ \frac{-2a^2 - 3}{2(2a+1)} & \frac{2a^3 - 2a^2 + 2a - 7}{2(2a+1)} & \frac{-2a^2 + 6a}{2(2a+1)} \\ \frac{1}{2} & \frac{-2a^2 + 6a}{2(2a+1)} & \frac{a-3}{2(2a+1)} \end{bmatrix}$$

由于 $J = x^T(0) \hat{K} x(0) = \frac{-2a^2 + 6a}{2(2a+1)} c_1^2$

$$\frac{\partial J}{\partial a} = c_1^2 \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{-a^2 + 3a}{2a+1} \right) = 0$$

有 $2a^2 + 2a - 3 = 0$, 故 $a^* = (-1 + \sqrt{7})/2$

J 的极小值为: $J^* = (-14 + 8\sqrt{7})/4\sqrt{7}$

例 10.1-6 设系统状态方程及控制规律为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ u &= -Kx = -k_1 x_1 - k_2 x_2 \end{aligned}$$

试确定 k_1, k_2 使下列性能指标为极小:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T x + u^2) dt$$

解 属无限时间状态调节器的控制器参数最优化问题

由题意, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $R = 1$.

由黎卡提矩阵代数方程:

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

展开有

$$\begin{aligned} k_{12}^2 &= 1 \\ -k_{11} + k_{12}k_{22} &= 0 \\ -2k_{12} + k_{22}^2 &= 1 \end{aligned}$$

解得

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

由 $u = -R^{-1}B^T\hat{K}x = -[0 \ 1] \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_1 - \sqrt{3}x_2 = -k_1x_1 - k_2x_2$

故 $k_1^* = 1$; $k_2^* = \sqrt{3}$ 。

例 10.1-7 设系统状态方程及初始条件为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

控制规律为: $u = -Kx = -k_1x_1 - k_2x_2$

试确定 k_1, k_2 使系统的无阻尼自然频率为 2rad/s, 且使下列性能指标取极小:

$$J = \int_0^{\infty} x^T x dt$$

解 属转化为闭环系统矩阵参数最优化问题。闭环系统矩阵为:

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

系统特征方程:

$$|\lambda I - (A - BK)| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ k_1 & \lambda + k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + k_2\lambda + k_1 = 0$$

由于系统无阻尼自然频率 ω_n 满足:

$$k_1 = \omega_n^2 \quad (2)$$

故

$$k_1^* = 4$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -k_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

由黎卡提矩阵代数方程蜕变的李雅普诺夫方程:

$$(A - BK)^T \hat{K} + \hat{K}(A - BK) = -Q \quad (4)$$

式中 Q 由性能指标中的权矩阵决定, 本例 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

展开式 (4) 有:

$$\left. \begin{aligned} 2k_1k_{12} &= 1 \\ k_{11} - k_1k_{22} - k_2k_{12} &= 0 \\ 2(k_{12} - k_2k_{22}) &= -1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

解得

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2k_2} + \frac{k_2}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{8k_2} \end{bmatrix} \quad (6)$$

由于

$$J = \mathbf{x}^T(0) \hat{K} \mathbf{x}(0) = \left(\frac{5}{2k_2} + \frac{k_2}{8} \right) c^2$$

$$\frac{\partial J}{\partial k_2} = c^2 \left(\frac{-5}{2k_2^2} + \frac{1}{8} \right) = 0, \text{ 故 } k_2^* = \sqrt{20}.$$

于是

$$u^* = -4x_1 - \sqrt{20}x_2$$

$$J^* = \sqrt{5} c^2 / 2$$

例 10.1-8 设离散系统状态方程为:

$$x(k+1) = x(k) + u(k) \quad x(0) = 1$$

试确定最优控制序列 u_0, u_1, u_2, u_3 , 使下列性能指标

$$J = \sum_{i=0}^3 (x_i^2 + u_i^2)$$

取极小值, 且计算 J_{\min} .

解 与下列离散状态方程及二次型性能指标的典型形式:

$$\mathbf{x}(k+1) = A(k)\mathbf{x}(k) + B(k)\mathbf{u}(k)$$

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(N)P(N)\mathbf{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}^T(k)Q(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)R(k)\mathbf{u}(k)]$$

相比, 本例有:

$$A(k) = 1, B(k) = 1, P(N) = 0, Q(k) = 2, R(k) = 2$$

最优控制规律中的 $K(k)$ 阵满足下列离散系统黎卡提方程:

$$K(k) = Q(k) + A^T(k)[K^{-1}(k+1)B(k)R^{-1}(k)B^T(k)]^{-1}A(k)$$

$$K(N) = P(N)$$

本例有:

$$K(k) = 2 + \left[K^{-1}(k+1) + \frac{1}{2} \right]^{-1}$$

$$= 2 + \frac{2K(k+1)}{K(k+1) + 2}$$

$$K(N) = 0 \text{ 及 } N-1 = 3, \text{ 即 } K(4) = 0$$

用递推法可解得 $K(k)$:

$$\text{令 } k=3 \quad K(3) = 2 + \frac{2K(4)}{K(4) + 2} = 2$$

$$\text{令 } k=2 \quad K(2) = 2 + \frac{2K(3)}{K(3) + 2} = 3$$

$$\text{令 } k=1 \quad K(1) = 2 + \frac{2K(2)}{K(2) + 2} = \frac{16}{5}$$

$$\text{令 } k=0 \quad K(0) = 2 + \frac{2K(1)}{K(1) + 2} = \frac{42}{13}$$

最优控制规律为:

$$\mathbf{u}(k) = -R^{-1}(k)B^T(k)A^{-T}(k)[K(k) - Q(k)]\mathbf{x}(k)$$

$$\text{本例有: } u(k) = -\frac{1}{2}[K(k) - 2]x(k)$$

用递推法可解得 $u(k)$:

$$u(0) = -\frac{1}{2}[K(0) - 2]x(0) = -\frac{8}{13}$$

$$u(1) = -\frac{1}{2}[K(1) - 2]x(1) = -\frac{3}{5}x(1)$$

式中 $x(1)$ 可由递推法解状态方程确定:

$$x(1) = x(0) + u(0) = 1 - 8/13 = 5/13$$

故

$$u(1) = -3/13$$

$$x(2) = x(1) + u(1) = 2/13$$

$$u(2) = -1/2[K(2) - 2]x(2) = -x(2)/2 = -1/13$$

$$x(3) = x(2) + u(2) = 1/13$$

$$u(3) = -\frac{1}{2}[K(3) - 2]x(3) = 0$$

$$x(4) = x(3) + u(3) = 1/13$$

$$\text{计算 } J_{\min} = \sum_{i=0}^3 (x_i^2 + u_i^2) = \frac{273}{169} = 1.615$$

§ 10-2 输出调节器及跟踪器

[内容提要]

一、问题的提出

1. 设可观线性定常系统状态空间表达式及初始条件为:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (10.2-1)$$

$$y = Cx \quad (10.2-2)$$

$$x(0) = x_0 \quad (10.2-3)$$

u 不受约束; t_f 固定; 希望输出向量为 z , 它可以是时间函数或常数。要求确定最优控制, 使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2}[y(t_f) - z(t_f)]^T P [y(t_f) - z(t_f)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [(y - z)^T Q (y - z) + u^T R u] dt \quad (10.2-4)$$

取极小值。

2. 该指标表示以较小的能量消耗, 使实际输出跟踪希望输出, 从而使跟踪误差向量 $e = y - z$, 特别使终端时刻的跟踪误差向量为极小的跟踪问题。

3. 当希望输出 $z = 0$ 时, 则称为输出调节器问题。其性能指标再明确地列写如下:

$$J = \frac{1}{2} y(t_f)^T P y(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (y^T Q y + u^T R u) dt \quad (10.2-5)$$

且当 $t_f \rightarrow \infty$ 时, 无终端指标项。

二、输出调节器问题的解

1. 只要将 $y = Cx$ 代入性能指标, 便可转化为状态调节器问题, 这时有:

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) C^T P C x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (x^T C^T Q C x + u^T R u) dt \quad (10.2-6)$$

2. 应用极小值原理, 可获得 t_f 有限时的最优控制规律

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T K(t) x(t) \quad (10.2-7)$$

仍然是 x 的线性函数, 并非是 y 的函数。式中 $K(t)$ 满足下列黎卡提矩阵微分方程及边界条

件:

$$\dot{K}(t) = -KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - C^TQC \quad (10.2-8)$$

$$K(t_f) = C^T(t_f)PC(t_f) \quad (10.2-9)$$

3. 当 $t_f \rightarrow \infty$ 时, 则有

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TKx(t) \quad (10.2-10)$$

式中 K 满足下列黎卡提矩阵代数方程:

$$-KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - C^TQC = 0 \quad (10.2-11)$$

4. 最优输出调节器闭环状态方程为:

$$\dot{x} = [A - BR^{-1}B^TK(t)]x \quad (10.2-12)$$

或

$$\dot{x} = [A - BR^{-1}B^TK]x \quad (10.2-13)$$

5. 最优轨线为闭环状态方程在 x_0 作用下的解。

6. 最优性能指标为:

$$J^* = \frac{1}{2}x^T(t)K(t)x(t) \quad (10.2-14)$$

或

$$J^* = \frac{1}{2}x^T(0)Kx(0) \quad (10.2-15)$$

7. 显见输出调节器的解中唯有 C^TQC 、 $C^T(t_f)PC(t_f)$ 两项与状态调节器有差别。

8. 输出调节器的受控系统要求具有状态可观测性, 其意义在于对 $t \in [t_0, t_f]$ 有 $C^T(t) \neq 0$ 。这样, 当 Q 正半定时, 才会存在正半定的 $C^T(t)QC(t)$, 这对于保证 $K(t)$ 的正定性从而保证闭环系统渐近稳定性是至关重要的。

三、跟踪器问题的解

1. 将 $y=Cx$ 代入性能指标, 有

$$J = \frac{1}{2}[Cx(t_f) - z(t_f)]^T P [Cx(t_f) - z(t_f)] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [(Cx - z)^T Q (Cx - z) + u^T R u] dt \quad (10.2-16)$$

2. 应用极小值原理, 可得 t_f 有限时, 最优控制规律:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T[K(t)x - g] \quad (10.2-17)$$

它不仅与 x 有关, 还与 g 有关。式中 $K(t)$ 、 g 满足下列两个微分方程及边界条件:

$$\dot{K}(t) = -KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - C^TQC \quad (10.2-18)$$

$$K(t_f) = C^T(t_f)PC(t_f) \quad (10.2-19)$$

$$\dot{g}(t) = -[A - BR^{-1}B^TK(t)]^T g - C^TQZ \quad (10.2-20)$$

$$g(t_f) = C^T(t_f)Pz(t_f) \quad (10.2-21)$$

3. 式(10.2-18)是跟踪器黎卡提方程, 与输出调节器形式相同, 与 $z(t)$ 无关, 可以预先计算。其解 $K(t)$ 决定最优跟踪器的反馈结构。

4. 式(10.2-20)称伴随系统方程, 它将 $z(t)$ 变换为强制的驱动函数 $g(t)$, 以构成最优控制规律。为求 $g(t)$ 必须预知 $z(t)$, 这在程序控制或熟知目标运动规律时并无困难, 对于随动系统、拦截目标问题, 只能按统计规律给出 $z(t)$ 。

5. 最优跟踪器闭环状态方程为:

$$\dot{x} = [A - BR^{-1}B^TK(t)]x + BR^{-1}B^Tg \quad (10.2-22)$$

$$\text{闭环状态阵为: } G = A - BR^{-1}B^TK(t) \quad (10.2-23)$$

与输出及状态调节器均相同,因而特征值相同,其动态性能与 $z(t)$ 无关。

6. 伴随系统的状态阵为 $-G^T$, 具有正特征值, 鉴于只起 $z(t)$ 变换为 $g(t)$ 的作用, 不影响跟踪器动态性能。

7. 最优轨迹为闭环状态方程在 x_0 作用下的解。

8. t_f 足够大时, 数学上可按 $t_f \rightarrow \infty$ 处理。又当 z 为常向量 \hat{z} 时, 最优控制为:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T(\hat{K}x - \hat{g}) \quad (10.2-24)$$

式中 \hat{K}, \hat{g} 满足下列两个代数方程:

$$-\hat{K}A - A^T\hat{K} + \hat{K}BR^{-1}B^T\hat{K} - C^TQC = 0 \quad (10.2-25)$$

$$\hat{g} = -G^{-T}C^TQ\hat{z} \quad (10.2-26)$$

[例 题]

例 10.2-1 设系统状态空间表达式为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

试求最优控制规律 $u(t)$, 使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (y^2 + ru^2) dt \quad (r > 0)$$

取极小值。

解

解法(一) 指标示出实际输出 y 跟踪希望的零输出值, 此为输出调节器问题。其黎卡提矩阵代数方程为:

$$-KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - C^TQC = 0$$

式中 $Q=1, R=r$

考虑 A, B, C 有:

$$-\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & k_{11} \\ 0 & k_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{r} \begin{bmatrix} k_{12}^2 & k_{12}k_{22} \\ k_{12}k_{22} & k_{22}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k_{12}^2/r = 1, k_{12} = \pm \sqrt{r};$$

$$-k_{11} + k_{12}k_{22}/r = 0;$$

$$-2k_{12} + k_{22}^2/r = 0 \quad k_{22} = \pm \sqrt{2k_{12}r}$$

由于 K 阵的正定性, 有

$$k_{11} > 0 \quad ; \quad k_{11}k_{22} - k_{12}^2 > 0.$$

故 $k_{22} > 0$.

则 $k_{12} = \sqrt{r}; k_{22} = (2r\sqrt{r})^{1/2} = \sqrt{r}(4r)^{1/4}; k_{11} = (4r)^{1/4}$

$$K = \begin{bmatrix} (4r)^{1/4} & \sqrt{r} \\ \sqrt{r} & \sqrt{r} (4r)^{1/4} \end{bmatrix}$$

最优控制规律为:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -R^{-1}B^TKx(t) \\ &= -(1/r)[0 \quad 1] \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= -(1/r)(k_{12}x_1 + k_{22}x_2) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{r}}[x_1 + (4r)^{1/4}x_2] \end{aligned}$$

解法(二) 将 $y=x_1$ 代入 J , 于是便将输出调节器问题转化为状态调节器问题, 此时 J 为:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + ru^2) dt$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R = r$$

黎卡提矩阵代数方程为:

$$-KA - A^TK + KBR^{-1}B^TK - Q = 0$$

其展开方程与上述相同, 求解结果一样。

例 10.2-2 设一阶系统状态空间表达式为:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= az + u & z(0) &= z_0 \\ y &= z \end{aligned}$$

u 不受约束, 希望输出 $z(t)$, 误差为: $e(t) = z(t) - y(t) = z - x$

试求最优控制, 使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} fe^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [qe^2(t) + ru^2(t)] dt$$

取极小值。式中 $f \geq 0, q > 0, r > 0$ 。

解 由题意有:

$$A = a, B = 1, C = 1, P = f, Q = q, R = r.$$

本例的黎卡提方程及边界条件:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= -ka - ak + k \frac{1}{r} k - q = \frac{k^2}{r} - 2ak - q \\ k(t_f) &= f \end{aligned}$$

其解为:

$$k(t) = r \cdot \frac{a + \beta - \frac{f/r - a - \beta}{f/r - a + \beta} \cdot (a - \beta) \exp[2\beta(t - t_f)]}{1 - \frac{f/r - a - \beta}{f/r - a + \beta} \exp[2\beta(t - t_f)]}$$

式中, $\beta = \sqrt{a^2 + \frac{q}{r}}$ 。

本例的伴随系统方程及边界条件:

$$g(t) = - [a - k(t)/r]g - qz(t)$$

$$g(t_f) = fz(t_f)$$

最优控制规律为:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T[K(t)x(t) - g(t)] = -\frac{1}{r}[k(t)x(t) - g(t)]$$

最优轨线为闭环状态方程

$$\dot{x} = \left(a - \frac{k(t)}{r} \right) x + \frac{1}{r}g$$

在 x_0 作用下的解。

当取参数值为: $x_0=0, f=0, q=1, t_f=1, z(t)=1(t), a=-1$, 而 r 分别取 0.01、0.1、1 时, 其 $x(t), g(t), u(t)$ 的计算结果见图 10-5。 $k(t)$ 曲线见图 10-2。

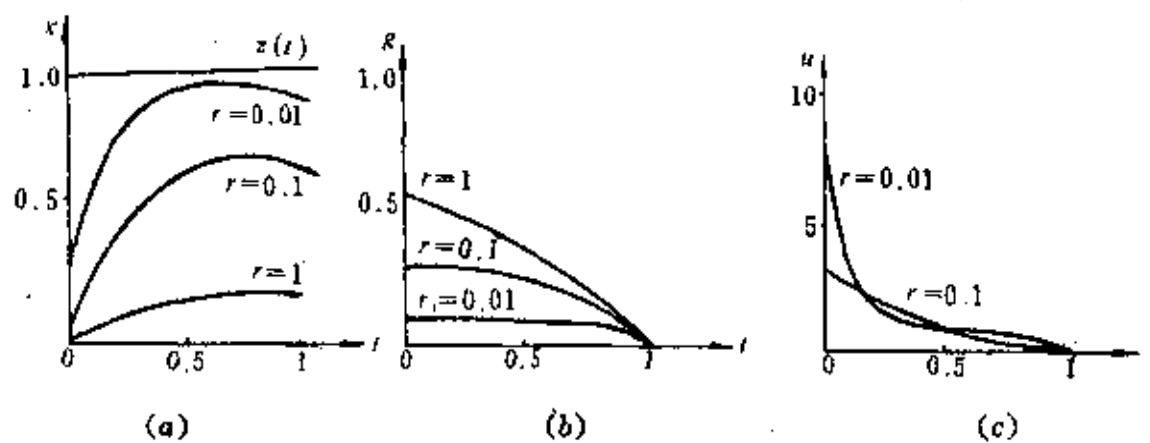


图 10-5 最优跟踪器响应曲线 ($a=-1$)

由图 10-5(a) 可见, r 减小时, 跟踪能力增强; 接近 t_f 阶段, 误差重新回升, 这是由于 $f=0$ 及 $u(t)$ 减小至零造成的。 $u(t)$ 的减小至零则是因 t_f 阶段 k, g 减小至零引起的。由图 10-5(b) 可见: r 小, $g(t)$ 在起控阶段近似为常数, 接近 t_f 阶段才逐渐下降为零, $g(t_f) = fz(t_f) = 0$ 。由图 10-5(c) 可见, r 小, 起控阶段支付能量大, 接近 t_f 阶段下降为零。

当取参数值为: $x_0=0, f=0, q=1, t_f=1, z(t)=1(t)$, 但 $a=0, r$ 仍分别取 0.01、0.1、1 时, 其 $x(t), g(t), u(t)$ 的计算结果见图 10-6。由图 10-6(a) 可见, 误差无重新回升现象, 但在接近 t_f 阶段仍有 $u(t)$ 减小至零, 由于状态方程特性改变为纯积分特性, 故使误差无回升现象。

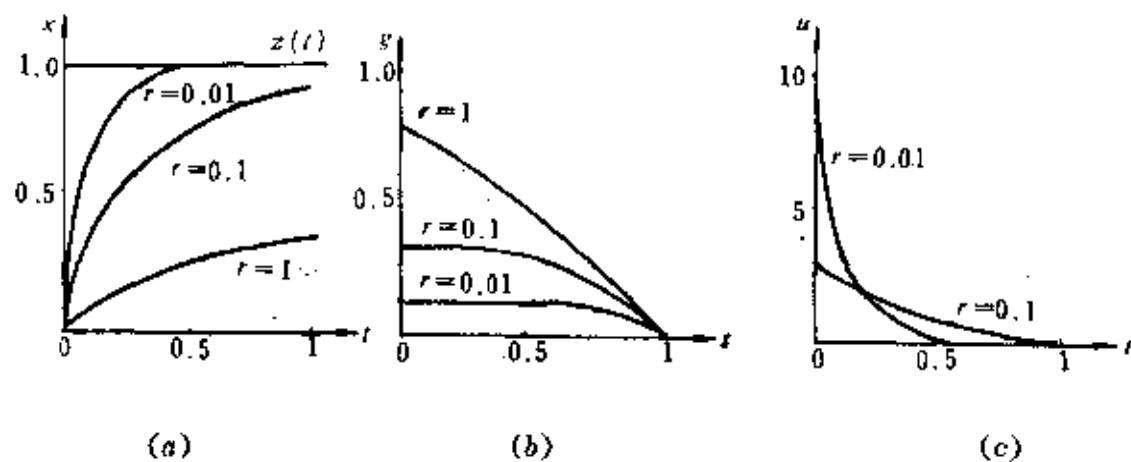


图 10-6 最优跟踪器响应曲线 ($a=0$)

当取参数值为: $x_0=0, f=0, q=1, t_f=1, z(t)=1(t)$, 但 $a=+1, r$ 仍分别取 0.01、0.1、1 时, 其 $x(t), g(t), u(t)$ 的计算结果见图 10-7。由图 10-7(a) 可见, 接近 t_f 阶段有误差发散趋势, 这是由于闭环不稳定引起的。由图 10-7(c) 可见, 接近 t_f 阶段的控制函数改变了极性, 它使误差保持在较小的数值。

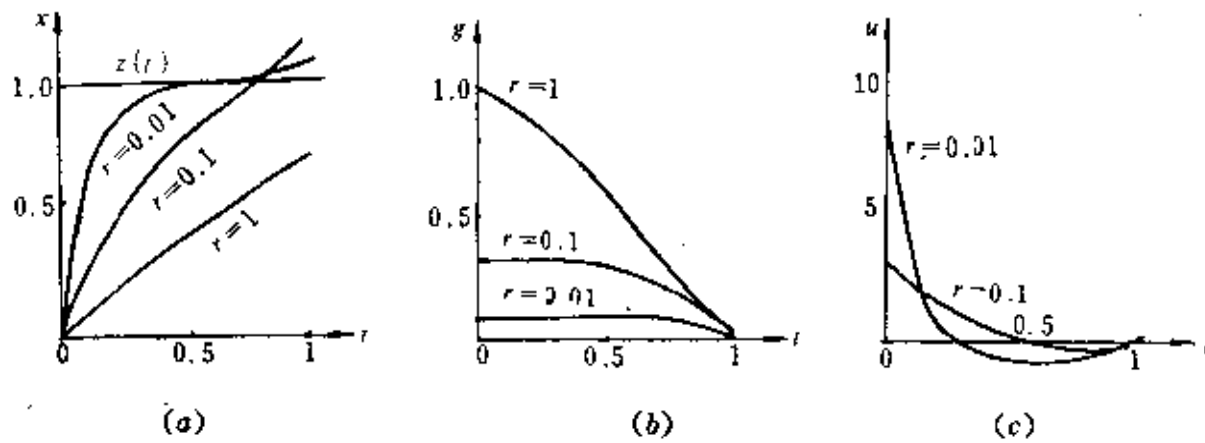


图 10-7 最优跟踪器响应曲线($a=+1$)

§ 10-3 黎卡提方程的解析解法及计算机算法流程图

[内容提要]

一、黎卡提矩阵微分方程的解析解法

黎卡提矩阵微分方程是一种特殊的非线性微分方程,可以分解为如下两个线性微分方程,称为欧拉方程式:

$$\dot{W} = AW - BR^{-1}B^T V \quad (10.3-1)$$

$$\dot{V} = -QW - A^T V \quad (10.3-2)$$

其边界条件为:

$$W(t_f) = I_n \quad (10.3-3)$$

$$V(t_f) = P \quad (10.3-4)$$

式中 W, V 均为 $n \times n$ 矩阵, I_n 为 n 阶单位矩阵。黎卡提方程的解为:

$$K(t) = V(t)W^{-1}(t) \quad (10.3-5)$$

1. 证明 设矩阵 W 是非奇异的,存在 W^{-1} ,且 $WW^{-1} = I_n$ (10.3-6)

$$\frac{d}{dt}(WW^{-1}) = \dot{W}W^{-1} + W\dot{W}^{-1} = 0 \quad (10.3-7)$$

由于

$$\dot{W}^{-1} = -W^{-1}\dot{W}W^{-1} \quad (10.3-8)$$

$$\dot{K}(t) = \dot{V}(t)W^{-1}(t) + V(t)\dot{W}^{-1}(t) \quad (10.3-9)$$

将式(10.3-1)、(10.3-2)、(10.3-8)代入式(10.3-9):

$$\dot{K}(t) = (-QW - A^T V)W^{-1} - VW^{-1}(AW - BR^{-1}B^T V)W^{-1}$$

则 $\dot{K}(t) = -Q - A^T K + KA + KBR^{-1}B^T K$ (10.3-10)

$$K(t_f) = V(t_f)W^{-1}(t_f) = PI_n = P \quad (10.3-11)$$

故黎卡提矩阵微分方程与欧拉方程式是同解微分方程。

2. 怎样由欧拉方程式求 $K(t)$?

将欧拉方程式写成分块矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{W} \\ \dot{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ V \end{bmatrix} \quad (10.3-12)$$

这是 $2n$ 维齐次状态方程。令

$$M = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (10.3-13)$$

M 阵称为欧拉矩阵。

该齐次状态方程的解为：

$$\begin{bmatrix} W(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = \Phi(t - t_f) \begin{bmatrix} W(t_f) \\ V(t_f) \end{bmatrix} = \Phi(t - t_f) \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \quad (10.3-14)$$

式中 $\Phi(t - t_f)$ 是以 t_f 为起始时刻至 t 的状态转移矩阵。由于

$$\Phi(t_f - t) = \exp[M(t_f - t)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - M)^{-1}] \quad (10.3-15)$$

$$\text{而 } \Phi(t - t_f) = \exp[-M(t_f - t)] = \mathcal{L}^{-1}[sI - (-M)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1}[(sI + M)^{-1}] \quad (10.3-16)$$

$$\text{故 } \begin{bmatrix} W(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1}[(sI + M)^{-1}] \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \quad (10.3-17)$$

$$\text{或 } \begin{bmatrix} W(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ (sI + M)^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \right\} \quad (10.3-18)$$

求得 $W(t)$ 和 $V(t)$ 之后, 可计得

$$K(t) = V(t)W^{-1}(t) \quad (10.3-19)$$

3. 解析解法的步骤:

a. 已知黎卡提方程中的 A, B, R, Q, P 矩阵, 列写欧拉矩阵 M ;

b. 计算 $sI + M, (sI + M)^{-1}, (sI + M)^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix}$ 及 $\mathcal{L}^{-1}\left\{ (sI + M)^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} \right\}$, 求得 $W(t), V(t)$;

c. 计算 $W^{-1}(t)$;

d. 计算 $K(t) = V(t)W^{-1}(t)$

二、解黎卡提方程的计算机流程图

1. 解连续黎卡提方程的流程图

见图 10-8。图中 $P(t)$ 即 $K(t), P_f$ 即 P , 注意到这里所形成的矩阵 Z 有:

$$Z = -M \quad Z \in R^{2n \times 2n} \quad (10.3-20)$$

矩阵指数 $e^{Z\tau}$, 式中 $\tau = t_f - t$ 。当 $t = t_f$ 时, $\tau = 0$; 当 $t = t_0$ 时, $\tau = t_f - t_0$ 。

$$e^{Z\tau} = \Phi(\tau) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(\tau) & \varphi_{12}(\tau) \\ \varphi_{21}(\tau) & \varphi_{22}(\tau) \end{bmatrix} \quad (10.3-21)$$

$$\text{且有 } W(t_f) = I_n, V(t_f) = P_f = P(t_f) \quad (10.3-22)$$

$$\text{故 } P(\tau) = V(\tau)W^{-1}(\tau) = [\varphi_{21}(\tau) + \varphi_{22}(\tau)P_f][\varphi_{11}(\tau) + \varphi_{12}(\tau)P_f]^{-1} \quad (10.3-23)$$

$$\varphi_{ij}(\tau) \in R^{n \times n} \quad (i, j = 1, 2) \quad (10.3-24)$$

在数字计算机上, 按递推方法, 每隔 ΔT 按下式计算 $P[(k+1)\Delta T]$

$$P[(k+1)\Delta T] = [\varphi_{21}(\Delta T) + \varphi_{22}(\Delta T)P(k\Delta T)][\varphi_{11}(\Delta T) + \varphi_{12}(\Delta T)P(k\Delta T)]^{-1} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (10.3-25)$$

便可得到黎卡提方程的数值解。当加大步长 ΔT 后, 可求出当 $k\Delta T \rightarrow \infty$ 时的稳态解, 它便是黎卡提代数方程的解。图中 E 为设定的精度要求。

关于计算矩阵指数 e^{AT} 的子程序流程图见图 10-9。已知矩阵指数的级数展开式为:

$$e^{AT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (AT)^n \quad (10.3-26)$$

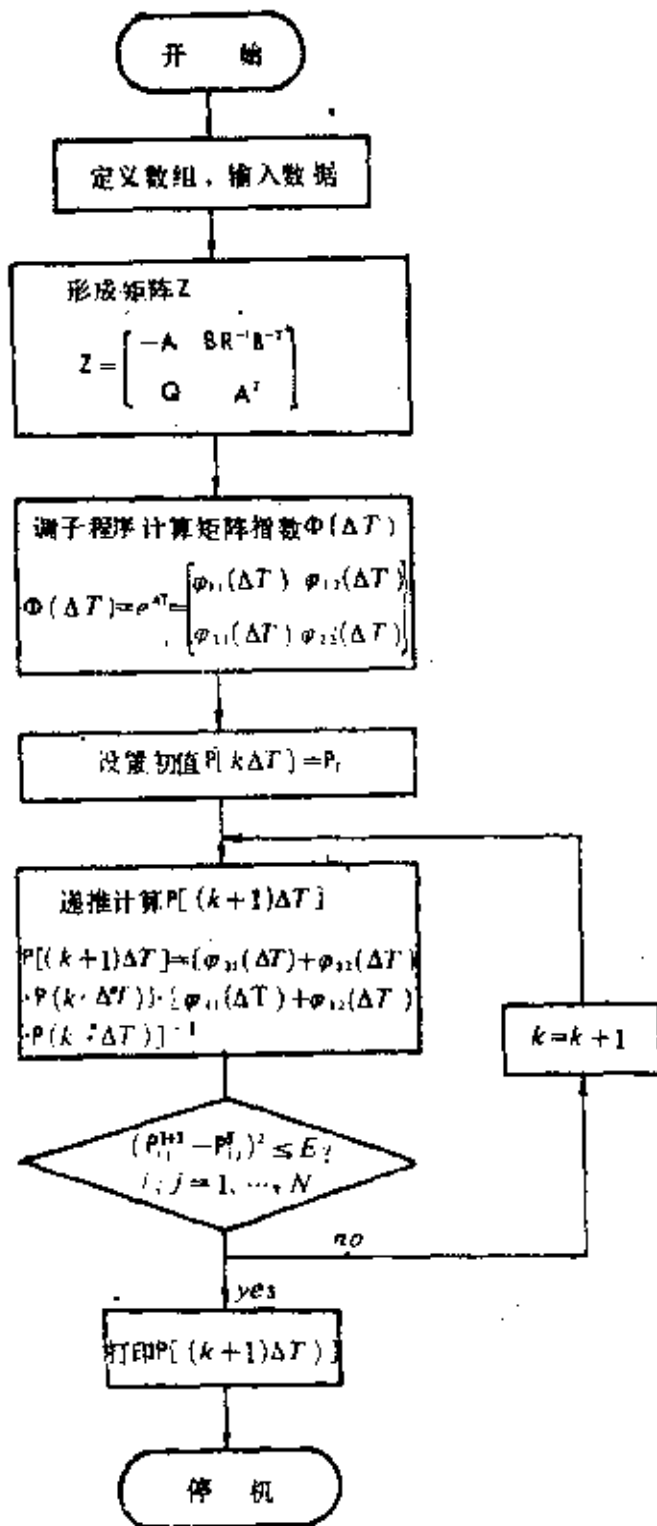


图 10-8 解连续黎卡提方程流程图

若取有限的 K 项来近似, 即

$$e^{AT} \approx \sum_{n=0}^K \frac{(AT)^n}{n!} \quad (10.3-27)$$

取其第 $(K+1)$ 项记以 R , 表征所舍去的余项的误差:

$$R = \frac{1}{(k+1)!} (AT)^{k+1} \quad (10.3-28)$$

该误差应满足给定精度要求:

$$R \leq \epsilon \quad (10.3-29)$$

由于在数字机上采用递推方法按步长 DT 求解, 于是可根据需要计算的总时间 T (即指标函数中的 t_f) 划分为若干整数步, 即有

$$T = DT \times 2^{KK} \quad (10.3-30)$$

为保证计算中级数收敛的快速性, DT 应满足:

$$DT \leq DT_1 \quad (10.3-31)$$

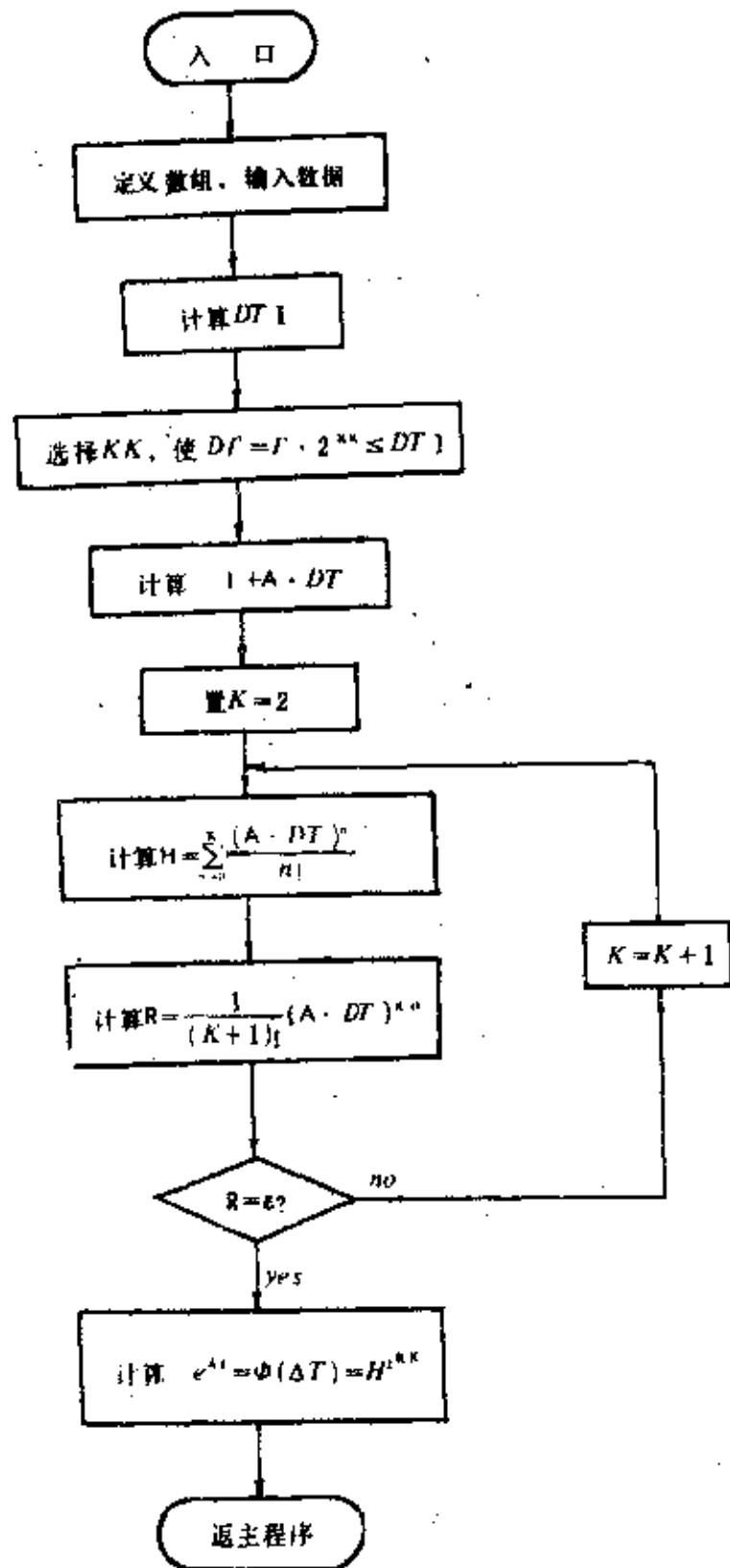


图 10-9 计算矩阵指数 e^{AT} 的子程序流程图

由经验公式：
$$DT_1 = \frac{0.5}{\max_{i,j} |a_{ij}|} \quad (10.3-32)$$

式中 a_{ij} 为矩阵 A 中的 (i, j) 元素, 于是:

$$e^{AT} = e^{A \cdot DT \cdot 2^{kk}} \quad (10.3-33)$$

令
$$H = e^{A \cdot DT} \approx \sum_{n=0}^k \frac{(A \cdot DT)^n}{n!} \quad (10.3-34)$$

则
$$e^{AT} = H^{2^{kk}} \quad (10.3-35)$$

2. 解离散黎卡提方程的流程图

已知
$$P_k = Q_k + A_k^T P_{k+1} [I + B_k R^{-1} B_k^T P_{k+1}]^{-1} A_k \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (10.3-36)$$

$$P(N) = P_N \quad (10.3-37)$$

流程图见图 10-10。图中 ϵ 为设定的精度要求, 当相邻的两次叠代计算得到的任一 P 阵元素之差的平方值大于 ϵ 时, 将继续循环叠代, 直到 $\leq \epsilon$ 时为止。

[例 题]

例 10.3-1 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}, Q = 0, R = r$ 。试用欧拉方程式求黎卡提矩阵微分方程的解析解。

解 欧拉矩阵
$$M = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI + M = \begin{bmatrix} s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & -1/r \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}; (sI + M)^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

式中

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/s & -1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix}; A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/s & 0 \\ 1/s^3 & 1/s \end{bmatrix}; -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/rs^4 & -1/rs^2 \\ 1/rs^3 & 1/rs^2 \end{bmatrix}$$

故

$$(sI + M)^{-1} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & -\frac{1}{s^2} & -\frac{1}{rs^4} & -\frac{1}{rs^3} \\ 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{rs^3} & \frac{1}{rs^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} - \frac{p_1}{rs^4} & -\frac{1}{s^2} - \frac{p_2}{rs^3} \\ \frac{p_1}{rs^3} & \frac{1}{s} + \frac{p_2}{rs^2} \\ \frac{p_1}{s} & 0 \\ \frac{p_1}{s^2} & \frac{p_2}{s} \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{(sI + M)^{-1}\} \begin{bmatrix} I_n \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{p_1}{r} \cdot \frac{\tau^3}{6} & -\tau - \frac{p_2}{r} \cdot \frac{\tau^2}{2} \\ \frac{p_1}{r} \cdot \frac{\tau^2}{2} & 1 + \frac{p_2}{r} \cdot \tau \\ p_1 & 0 \\ p_1 \tau & p_2 \end{bmatrix}$$

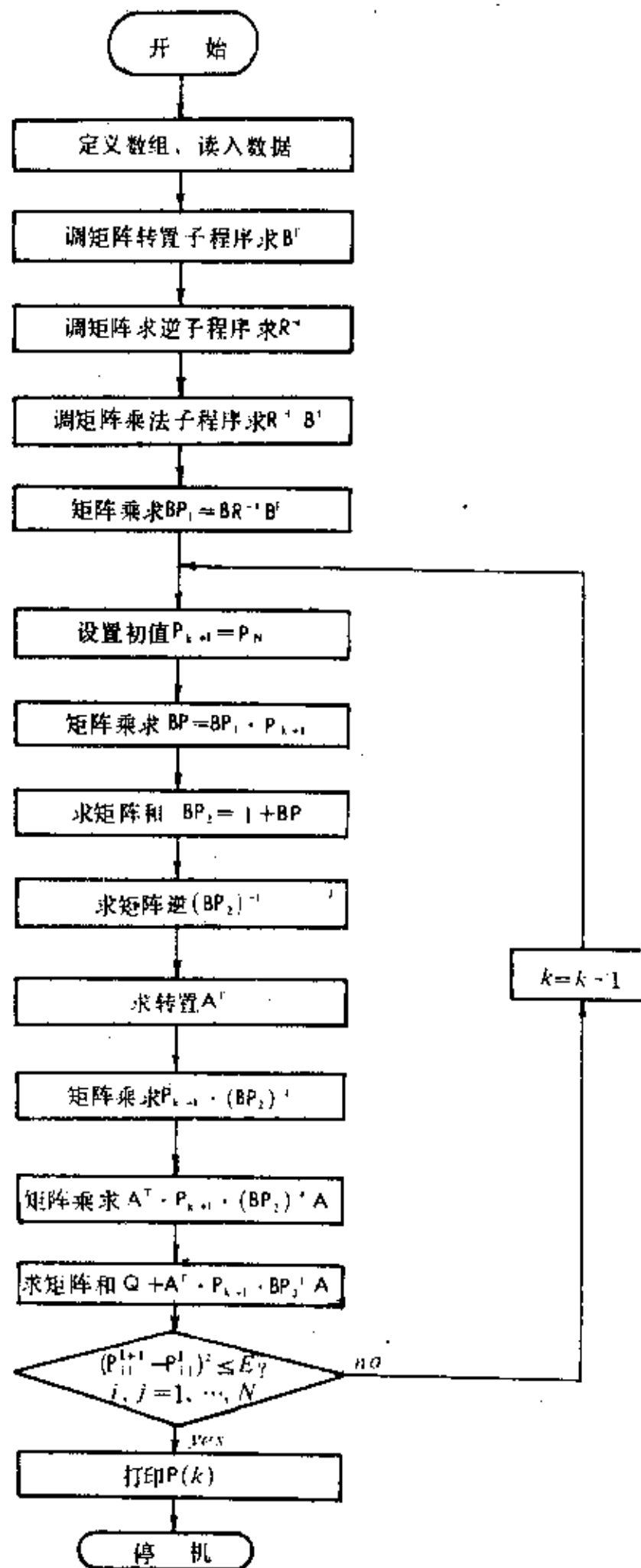


图 10-10 解离散黎卡提方程流程图

式中 $\tau = t_f - t$

故

$$W(t) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{p_1 \tau^3}{6r} & -\tau - \frac{p_2 \tau^2}{2r} \\ \frac{p_1 \tau^2}{2r} & 1 + \frac{p_2 \tau}{r} \end{bmatrix}; V(t) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 \\ p_1 \tau & p_2 \end{bmatrix};$$

$$W^{-1}(t) = \frac{1}{1 + \frac{p_2 \tau}{r} + \frac{p_1 \tau^3}{3r} + \frac{p_1 p_2 \tau^4}{12r^3}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{p_2}{r} \tau & \tau + \frac{p_2}{2r} \tau^2 \\ -\frac{p_1}{2r} \tau^2 & 1 - \frac{p_1}{6r} \tau^3 \end{bmatrix}$$

$$\text{有 } K(t) = V(t)W^{-1}(t) = \frac{1}{1 + \frac{p_2}{r} \tau + \frac{p_1}{r} \tau^3 + \frac{p_1 p_2}{12r^2} \tau^4} \begin{bmatrix} p_1(1 + \frac{p_2}{r} \tau) \tau & p_1 \tau(1 + \frac{p_2}{2r} \tau) \\ p_1 \tau(1 + \frac{p_2}{2r} \tau^2) & p_2 + p_1 \tau^2 + \frac{p_1 p_2}{3r} \tau^3 \end{bmatrix}$$

习 题

10-1 设系统状态方程为: $\dot{x}=u$; $x(t_0)$ 、 t_0 、 t_f 均给定, 试求最优控制使下列指标取极值。

$$J = \frac{1}{2}cx^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt$$

式中 c 为常数。

10-2 设系统状态方程为: $\dot{x} = -ax + bu$; a, b 为常数, 同习题 10-1 要求。

10-3 设系统状态方程为: $\dot{x} = -\frac{1}{\tau}x + u$; τ 为常数。试确定使下列指标为极小的最优控制。 $J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (ax^2 + bu^2) dt$, 式中 a, b 为常数。

10-4 设状态方程为 $\dot{x} = u$, 试求最优控制使指标 $J = \int_0^{\infty} (x^2 + \tau u^2) dt$ 取极小值, 式中 $\tau > 0$, 当 τ 变化时, 闭环特征值将怎样变化?

10-5 设系统状态方程为: $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + u$ 。试求最优控制使下列指标 $J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + \tau u^2) dt$ 取极小 ($\tau > 0$)。当 τ 变化时, 闭环特征值怎样变化?

10-6 设系统状态方程为: $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1 + u$ 。 $x_1(t_0), x_2(t_0), t_0, t_f$ 均给定。试求最优控制使下列指标取极值。

$$J = \frac{1}{2}cx^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt$$

10-7 火箭滚动通道状态方程组为:

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= u && \text{(控制方程)} \\ \dot{\omega} &= -\frac{1}{\tau}\omega + \frac{Q}{\tau}\delta && \text{(火箭滚动运动方程)} \\ \dot{\varphi} &= \omega && \text{(参数方程)} \end{aligned}$$

式中 δ ——副翼偏角; u ——控制副翼的指令; ω ——火箭滚动角速度; φ ——火箭滚动角; τ ——火箭滚动时间常数, 设 $\tau=1$ 秒; Q ——副翼效率, 设 $Q=10(1/s)$ 。

试为火箭设计一个最优反馈控制器, 使下列指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{\varphi^2}{\varphi_{\max}^2} + \frac{\delta^2}{\delta_{\max}^2} + \frac{u^2}{u_{\max}^2} \right) dt$$

取极值。式中 $\varphi_{\max} = \frac{\pi}{180}$ (rad), $\delta_{\max} = \frac{\pi}{12}$ (rad), $u_{\max} = \pi$ (rad/s)。

10-8 设系统状态方程及初始条件为:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad x_1(0) = 1$$

$$\dot{x}_2 = u \quad x_2(0) = 0$$

t_f 固定。试设计最优稳态调节器的控制规律,使下列指标取极小值。

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x_1^2 + u^2) dt$$

10-9 已知系统状态方程为:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + u \quad \dot{x}_2 = x_1$$

试求最优控制使下列性能指标

$$J = \int_0^{\infty} (x_2^2 + 0.1u^2) dt$$

取极小值,且画出最优系统结构图。

10-10 设系统状态方程及初始条件为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试求最优控制使下列性能指标

$$J = \int_0^{\infty} \left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} u^2 \right) dt$$

取极小值,且求出最优性能指标。

10-11 已知系统状态方程为:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = u$$

试求最优控制使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_1^2 + 2bx_1x_2 + ax_2^2 + u^2) dt, \quad \text{且 } a - b^2 > 0$$

取极小值,且画出最优系统结构图。

10-12 设系统状态方程为:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = u$$

试求最优控制使下列性能指标

$$J = \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2 + u^2) dt$$

取极小值。

10-13 设系统齐次状态方程及初始条件为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

式中 $a > 0$, 试确定 a 使下列指标

$$J = \int_0^{\infty} (x_1^2 + x_2^2) dt$$

取极小值。

10-14 已知系统状态方程及初始条件为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

试确定 $\zeta > 0$ 的值,使下列性能指标

$$J = \int_0^{\infty} [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} dt \quad \mu > 0$$

取极小。

10-15 设系统状态方程为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

控制规律为： $u = -Kx = -k_1x_1 - k_2x_2$ 。试确定 k_1, k_2 参数值使下列性能指标

$$J = \int_0^{\infty} \left\{ [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u^2 \right\} dt \quad (\mu \geq 0)$$

取极小。

10-16 设一阶离散系统状态方程及初始条件为：

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + u(k) & k &= 0, 1, \dots, N-1 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

试求最优控制序列 $u(0), u(1)$ ，使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} cx^2(2) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u^2(k)$$

取极小值，且求出最优轨线 $x(0), x(1), x(2)$ 。

10-17 设一阶离散系统状态方程为：

$$x(k+1) = x(k) + u(k) \quad x(0) = x_0$$

试用离散黎卡提方程求最优控制序列，使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^2 [x^2(k) + u^2(k)]$$

取极小值，并求出最优状态序列、最优性能指标。

10-18 设系统动态方程及初始条件为：

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad \begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

试确定最优控制使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [(x_1 - z)^2 + u^2] dt$$

取极小值。假定 $z(t) = \alpha_1 t$ 足够大。

10-19 设受控对象状态方程及输出方程为：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

试求最优控制使下列性能指标

$$J = \int_0^{t_f} [(y - y_d)^2 + u^2] dt$$

取极小值。设期望输出 $y_d = 1$ ； t_f 足够大。

10-20 试建立如下线性二次型问题的状态方程及性能指标表达式: 设有一 RC 电路, 输入电压为 u , 电容器两端电压 u_c 作为输出。 $u_c(0)=0, u_c(t_f)=u_f$ 。 要求使电阻 R 上损耗为最小的电源电压 $u(t)$, 并求出 R 上的损耗。

10-21 已知系统结构图如图 10-11 所示。 试建立线性二次型问题的状态方程及性能指标表达式: 确定 K 值, 使闭环阻尼比为 0.5, 且使 $t_f \rightarrow \infty$ 时的误差平方积分为极小。 初始条件为: $e(0)=1, \dot{e}(0)=0$ 。 并计算最优性能指标。

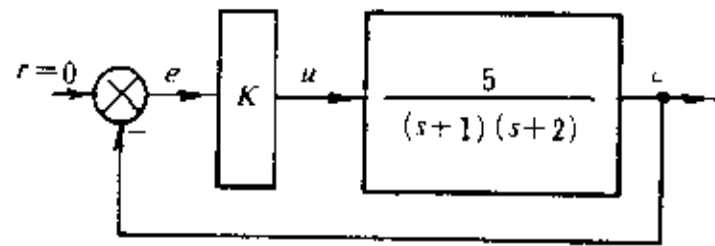


图 10-11 习题 10-21 系统结构图

第十一章 动态规划

§ 11-1 离散系统动态规划

[内容提要]

动态规划是美国学者贝尔曼(Bellman)在五十年代中期研究离散系统的多级决策问题时提出来的,它是解决受闭域约束的最优控制问题的又一有效方法。

一、多级决策过程

1. 把一个过程按时间顺序或空间顺序(如距离、费用)分为若干级(或阶段),按逆向逐级地选择最优控制(即决策),并逐级计算最优性能指标(它们均是该级输入状态的函数),使整个过程性能指标取得极值的过程,称为多级决策过程。

2. 任何离散的动态过程,均是一个自然的多级决策过程。例如,状态方程为:

$$x_{k+1} = f_{k+1}(x_k, u_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (11.1-1)$$

要求确定最优控制序列 u_0, u_1, \dots, u_{N-1} , 使下列性能指标

$$J_N = \theta(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(x_k, u_k) \quad (11.1-2)$$

为极值的问题,便是按采样周期 T 分级的 N 级决策过程。

3. 多级决策过程的分级及状态转移过程见图 11-1。各级决策过程的性能指标如下:

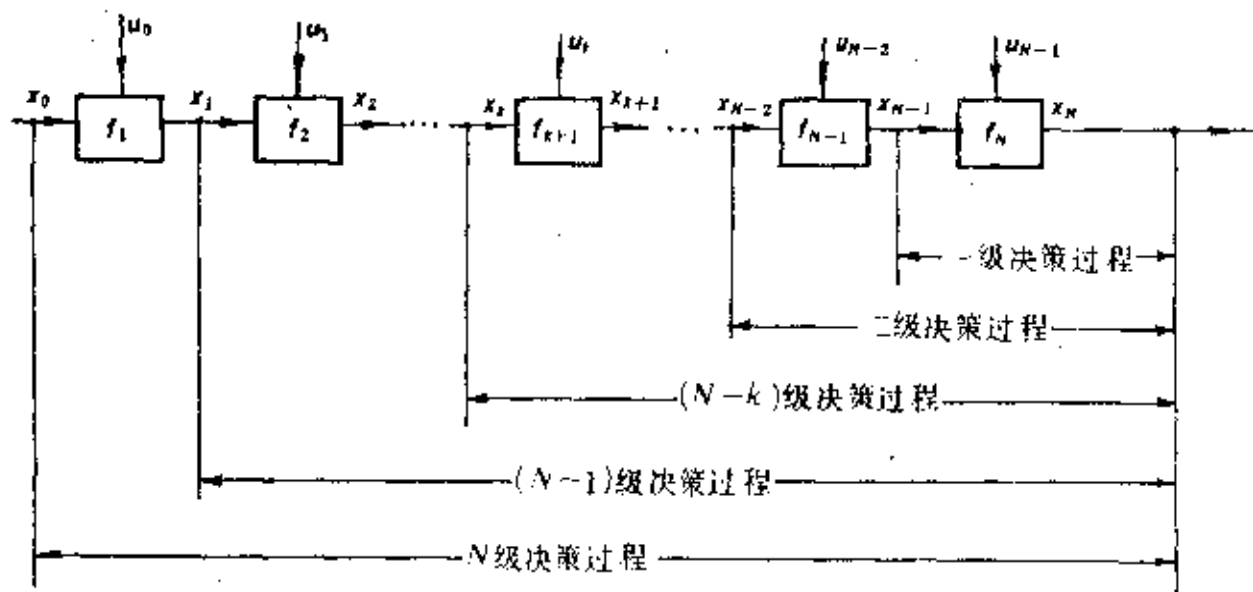


图 11-1 多级决策过程的分级

一级决策过程的性能指标:

$$J_1 = \theta(x_N) + L(x_{N-1}, u_{N-1})$$

二级决策过程的性能指标:

$$J_2 = \theta(x_N) + L(x_{N-1}, u_{N-1}) + L(x_{N-2}, u_{N-2})$$

$N-k$ 级决策过程的性能指标:

$$J_{y-k} = \theta(x_N) + \sum_{i=k}^{N-1} L(x_i, u_i)$$

$N-1$ 级决策过程的性能指标:

$$J_{N-1} = \theta(x_N) + \sum_{i=1}^{N-1} L(x_i, u_i)$$

N 级决策过程的性能指标:

$$J_N = \theta(x_N) + \sum_{i=0}^{N-1} L(x_i, u_i)$$

二、最优性原理

1. 不管初始状态和初始控制如何,余下的控制必须是依据前级转移而来的状态构成的最优控制。

2. 上述原理乃是基于下述事实:设 $t_1 \in [t_0, t_f]$, 则自 t_1 至 t_f 的最优控制序列,必与由 t_0 至 t_f 的最优控制序列中的 t_1 至 t_f 那部分控制序列相一致;自 $x(t_1)$ 出发的最优轨线,必与由 $x(t_0)$ 出发的最优轨线中 t_1 至 t_f 的那部分轨线相重合。

三、函数方程及解题步骤

1. 把最优性原理应用于多级决策过程而建立起来的性能指标递推关系式,称为函数方程。它与离散系统状态方程一起,构成用动态规划求解离散最优控制问题的基本方程。

2. 在按逆向确定了 $(k-1)$ 级决策过程最优控制 u_{k-1}^* 及最优性能指标 J_{k-1}^* 的基础上,再加上第 k 级性能指标 $L(x_k, u_k)$, 构成 k 级决策过程的综合性能指标 J_k (注意到 J_k 是第 k 级输入状态 x_k 及控制 u_k 的函数), 从中选择最优控制 u_k^* , 使 J_k 取得极值 J_k^* 。

3. 函数方程的数学表达式为:

$$J_k^* = \min_{u_{k-1} \in U} [L(x_{k-1}, u_{k-1}) + J_{k-1}^*] \quad k = 2, 3, \dots, N \quad (11.1-3)$$

$$J_1^* = \min_{u_{N-1} \in U} [L(x_{N-1}, u_{N-1}) + \theta(x_N)] \quad (11.1-4)$$

式(11.1-4)表明逆向算法首先据 J_1 选取 u_{N-1}^* , 使 J_1 取得极值 J_1^* 。式(11.1-3)是递推关系式,可逐级求得 $u_{N-2}^*, J_2^*; \dots; u_0^*, J_N^*$, 它们分别是各级输入状态的函数。在给定初始状态后,可正向逐级地确定出 $u_0^*, x_1^*; u_1^*, x_2^*; \dots; u_{N-1}^*, x_N^*$ 的具体数值,并算得总的最优性能指标 J_N^* 。

4. 函数方程把一个复杂的 N 级决策过程分解为 N 个简单的单级决策过程;把一个求泛函极值的问题转换为多个求一元函数的极值问题。

四、最小化运算

当控制量 u_{y-k} 不受约束时,由 $\partial J_k / \partial u_{y-k} = 0$ 求得 u_{y-k}^* ; 当 u_{y-k} 受闭集约束时,应选取使 J_k 绝对极小的 u_{y-k}^* 。

五、离散动态规划的简单评价

1. 计算结果丰富。不仅获得了 N 级决策过程的最优控制和最优轨线,还能获得 $N-1$ 级、 \dots 、一级决策过程在不同初始状态下的一族最优控制和最优轨线。

2. 不象极小值原理那样需求解两点边值问题,计算中只用到初始状态 x_0 。

3. 要求计算机存贮容量大,运算速度高。这是由于采用分级递推方式解决问题,需逐级进行最小化运算,存贮控制函数、状态转移特性、最优指标函数。当状态变量数目增多时,问题更加突出。

4. 离散动态规划是在“无后效性”假设前提下进行的,即系统从任一状态出发时,系统的行为只决定于这一状态及其以后的控制,而与系统到达这一状态的历史情况无关。“无后效性”要求在采样间隔内结束状态转移过程。

5. 用动态规划法求解最优控制问题,与变分法、极小值原理所得结果相同。

6. 注意到动态规划法是一种逆向算法。虽然对某些特例也可以用正向算法求解,但不具有普遍意义。

7. 函数方程所作的最小化运算,显然仍是指标函数存在极值的必要条件。

[例 题]

例 11.1-1 已知一阶离散状态方程:

$$x_{k+1} = x_k + u_k \quad k = 0, 1$$

初始条件 $x(0) = x_0$ 。试求最优控制序列 u_0, u_1 使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 u_i^2$$

取极小值。

解 (1) 逆向算法

$$\text{一级决策过程} \quad x_2 = x_1 + u_1 \quad J_1 = \frac{1}{2} u_1^2$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial u_1} = u_1^* = 0; \quad x_2 = x_1; \quad J_1^* = 0$$

$$\text{二级决策过程} \quad x_1 = x_0 + u_0$$

$$J_2 = \frac{1}{2} u_0^2 + J_1^* = \frac{1}{2} u_0^2$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial u_0} = u_0^* = 0; \quad x_1 = x_0; \quad J_2^* = 0$$

$$\text{总最优性能指标} \quad J^* = \frac{1}{2} (u_0^{*2} + u_1^{*2}) = 0$$

(2) 正向算法:

$$\text{一级决策过程} \quad x_1 = x_0 + u_0 \quad J_1 = \frac{1}{2} u_0^2$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial u_0} = u_0^* = 0; \quad x_1 = x_0; \quad J_1^* = 0$$

$$\text{二级决策过程} \quad x_2 = x_1 + u_1$$

$$J_2 = \frac{1}{2} u_1^2 + J_1^* = \frac{1}{2} u_1^2$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial u_1} = u_1^* = 0; \quad x_2 = x_1; \quad J_2^* = 0$$

$$\text{总最优性能指标} \quad J^* = \frac{1}{2} (u_0^{*2} + u_1^{*2}) = 0$$

两种计算方法用于本例均能获得相同的正确结果。不过,应注意到本例的性能指标不含终端状态指标项,和式指标中也与状态变量无关。否则,正向算法不能得出正确结果。

例 11.1-2 设一阶离散状态方程为:

$$x_{k+1} = x_k + u_k$$

初始条件 $x_0 = 1$ 。试用动态规划法确定最优控制序列 u_0, u_1, u_2, u_3 , 使下列性能指标

$$J = \sum_{i=0}^3 (x_i^2 + u_i^2)$$

取极小值,并计算 J_{\min} 。

解 本例为四级决策过程, $N=4$ 。 x_4 并未给定, 是自由的, 当 x_3, u_3 确定后, x_4 随之确定。

一级决策过程 $x_4 = x_3 + u_3; \quad J_1 = x_3^2 + u_3^2,$

$$\frac{\partial J_1}{\partial u_3} = 2u_3 = 0, \quad u_3^* = 0; \quad J_1^* = J_{1\min} = x_3^2$$

显见 J_1 是该级输入状态 x_3 的函数。

二级决策过程 $x_3 = x_2 + u_2;$

$$J_2 = x_2^2 + u_2^2 + J_1^* = 2x_2^2 + 2u_2^2 + 2x_2u_2$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial u_2} = 2(2u_2 + x_2) = 0, \quad u_2^* = -\frac{1}{2}x_2;$$

$$J_2^* = J_{2\min} = \frac{3}{2}x_2^2$$

即 u_2^*, J_2^* 均为该级输入状态 x_2 的函数。

三级决策过程 $x_2 = x_1 + u_1$

$$J_3 = x_1^2 + u_1^2 + J_2^* = \frac{5}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}u_1^2 + 3x_1u_1$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial u_1} = 5u_1 + 3x_1 = 0, \quad u_1^* = -\frac{3}{5}x_1;$$

$$J_3^* = J_{3\min} = \frac{8}{5}x_1^2$$

u_1^*, J_3^* 均为 x_1 的函数。

四级决策过程 $x_1 = x_0 + u_0$

$$J_4 = x_0^2 + u_0^2 + J_3^* = \frac{13}{5}x_0^2 + \frac{13}{5}u_0^2 + \frac{16}{5}x_0u_0$$

$$\frac{\partial J_4}{\partial u_0} = \frac{26}{5}u_0 + \frac{16}{5}x_0 = 0, \quad u_0^* = -\frac{8}{13}x_0;$$

$$J_4^* = J_{\min} = J^* = \frac{21}{13}x_0^2$$

u_0^*, J_{\min} 均为 x_0 的函数。

已知 $x_0=1$, 可正向确定最优控制序列和最优状态序列如下:

$$\begin{array}{cccccc} x_0 = 1 & x_1 = 5/13 & x_2 = 2/13 & x_3 = 1/13 & x_4 = 1/13 \\ u_0 = 8/13 & u_1 = 3/13 & u_2 = 1/13 & u_3 = 0 & \end{array}$$

例 11.1-3 设一个正数 c , 要求剖分为 N 份, 试用动态规划法研究怎样的剖分方案可使 N 份的乘积为最大?

解 根据最优性原理列出下列最优剖分的函数方程:

$$J_k^* = \max_{0 < x < c} [x \cdot J_{k-1}^*], \quad k = 2, \dots, N$$

式中 J_k^* —— 剖分为 k 份时所得最大乘积;

J_{k-1}^* —— 剖分为 $(k-1)$ 份时所得最大乘积;

x_k —— 第 k 次剖分时所选取的值。

且 $J_1^* = c$

该式表明第一次剖分乃是正数 c 本身。

函数方程把一个剖分为 N 份的问题转化为 N 次剖分两份的问题。

先从如何剖分为两份使乘积最大入手。令 $k=2$ ，乘积为：

$$J_2 = x_2(c - x_2)$$

欲使 J_2 最大应如下选取 x_2 ：

$$\frac{\partial J_2}{\partial x_2} = c - 2x_2 = 0 \quad x_2 = \frac{c}{2}$$

$$J_2^* = (c/2)^2$$

这里证明了当一个数剖分为两个数时，取其一半可获得最大乘积。

再来研究如何把一个数分为三份使乘积最大？令 $k=3$ ，即设剖分值为 x_3 ，余下 $(c-x_3)$ 的最优剖分规律已知为 $(c-x_3)^2/2$ ，故

$$J_3 = x_3 \cdot (c - x_3)^2/2$$

欲使 J_3 最大应如下选取 x_3 ：

$$\frac{\partial J_3}{\partial x_3} = (c - x_3)(c - 3x_3) = 0$$

$$x_3 = c/3, c(\text{舍去})$$

$$J_3^* = (c/3)^3$$

这里证明了当一个数剖分为三个数时，取其 $1/3$ 可获得最大乘积。

同理，研究把一个数剖分为四份使乘积最大的问题。令 $k=4$ ，设剖分值为 x_4 ，余下 $c-x_4$ 的最优剖分已知为 $(c-x_4)^3/3$ ，故

$$J_4 = x_4 \cdot (c - x_4)^3/3$$

欲使 J_4 最大应如下选取 x_4 ：

$$\frac{\partial J_4}{\partial x_4} = (c - x_4)^2(c - 4x_4) = 0$$

$$x_4 = c/4, c(\text{舍去})$$

$$J_4^* = (c/4)^4$$

.....

按数学归纳法，把一个数分为 N 份使乘积最大的问题，即令 $k=N$ ，设剖分值为 x_N ，余下 $(c-x_N)$ 的最优剖分已知为 $(c-x_N)^{N-1}/(N-1)$ ，有

$$J_N = x_N \cdot \frac{(c - x_N)^{N-1}}{(N - 1)}$$

$$\frac{\partial J_N}{\partial x_N} = (c - x_N)^{N-2}(c - Nx_N) = 0$$

$$x_N = c/N, c(\text{舍去})$$

$$J_N^* = (c/N)^N$$

即把一个数剖分为 N 个数时，取其 $1/N$ ，自乘 N 次，可得最大乘积。

例 11.1-4 设一阶离散系统状态方程为

$$x_{k+1} = x_k + 0.1x_k^2 + 0.1u_k$$

初始条件 $x_0=3$ 。试用动态规划法确定最优控制序列，使下列性能指标

$$J = \sum_{k=0}^2 |x_k - 3u_k|$$

取极小值,并求出最优状态序列及最优性能指标 J^* 。

解 由指标函数可见本例是三级决策过程。

一级决策过程: $x_3 = x_2 + 0.1x_2^2 + 0.1u_2$

$$J_1 = |x_3 - 3u_2|$$

当 $x_3 - 3u_2 = 0$ 时 J_1 可取得极小值,故

$$u_2^* = \frac{1}{3}x_2; \quad J_1^* = 0; \quad x_3^* = 0.1x_2^{*2} + \frac{31}{30}x_2^*$$

二级决策过程: $x_2 = x_1 + 0.1x_1^2 + 0.1u_1$

$$J_2 = |x_2 - 3u_1| + J_1^* = |x_2 - 3u_1|$$

当 $x_2 - 3u_1 = 0$ 时, J_2 可取得极小值,故

$$u_1^* = \frac{1}{3}x_1; \quad J_2^* = 0; \quad x_2^* = 0.1x_1^{*2} + \frac{31}{30}x_1^*$$

三级决策过程:

$$x_1 = x_0 + 0.1x_0^2 + 0.1u_0$$

$$J_3 = |x_1 - 3u_0| + J_2^* = |x_1 - 3u_0|$$

当 $x_1 - 3u_0 = 0$ 时, J_3 可取得极小值,故

$$u_0^* = \frac{1}{3}x_0; \quad J_3^* = J^* = 0; \quad x_1^* = 0.1x_0^2 + \frac{31}{30}x_0$$

已知 $x_0 = 3$, 于是可解得最优控制序列、最优状态序列为:

$$\begin{aligned} u_0^* &= 1 & u_1^* &= \frac{4}{3} & u_2^* &= 1.911 \\ x_1^* &= 4 & x_2^* &= 5.733 & x_3^* &= 9.211 \\ J^* &= 0 \end{aligned}$$

本例若采用正向算法计算,也能获得正确结果,这里由于 $(k-1)$ 级决策过程的最优性能指标均为零,只需根据第 k 级指标来确定 k 级决策过程的最优控制的缘故。

例 11.1-5 设一阶离散系统状态方程为:

$$x_{k+1} = -ax_k + bu_k \quad x(0) = x_0$$

且 $|u_k| \leq 1$ 。试用动态规划法求最优控制规律,使下列性能指标:

$$J = \sum_{k=0}^2 (x_k^2) + x_3$$

取极小值。

解 本例为控制受不等式约束的三级决策过程。

一级决策过程: $x_3 = -ax_2 + bu_2$

$$J_1 = x_3 + x_2^2 = -ax_2 + bu_2 + x_2^2$$

由于 $|u_2| \leq 1$ 及 J_1 是 u_2 的线性函数, J_1 极小值必须满足:

$$b > 0 \text{ 时, } u_2 = -1;$$

$$b < 0 \text{ 时, } u_2 = +1$$

故 $u_2^* = -\text{sign}b$;

$$J_1^* = J_{1\min} = -ax_2 + x_2^2 - b\text{sign}b = -ax_2 + x_2^2 - |b|;$$

$$x_3 = -ax_2 - |b|.$$

二级决策过程: $x_2 = -ax_1 + bu_1$

$$J_2 = x_1^2 + J_1^* = x_1^2 + (-ax_1 + bu_1)^2 - a(-ax_1 + bu_1) - |b|$$

由于 $J_2(u_1) = (-ax_1 + bu_1)^2 - abu_1$ 满足极值条件, 令 $\partial J_2 / \partial u_1 = 0$, 可得 $-ax_1 + bu_1 = \frac{a}{2}$, 即 $u_1 = \frac{a}{b}(\frac{1}{2} + x_1)$.

由于 u_1 必须满足 $|u_1| \leq 1$, 即 $|\frac{a}{b}(\frac{1}{2} + x_1)| \leq 1$, 故最优控制 u_1 的候选函数为

$$u_1^* = \begin{cases} +1 & x_1 > \frac{b}{a} - \frac{1}{2} \\ \frac{a}{b}(\frac{1}{2} + x_1) & -\frac{b}{a} - \frac{1}{2} < x_1 < \frac{b}{a} - \frac{1}{2} \\ -1 & x_1 < -\frac{b}{a} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

当 $x_1 = (b/a) - (1/2)$ 及 $-(b/a) - (1/2)$ 时, 应切换控制。鉴于 x_1 较小时才能使 J 取极小值, 故通常首先考虑选择 $u_1^* = (a/b)(1/2 + x_1)$, 对应有:

$$J_2^* = J_{2\min} = x_1^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a^2 - |b| = x_1^2 - \frac{1}{4}a^2 - |b|$$

$$x_2 = a/2$$

三级决策过程: $x_1 = -ax_0 + bu_0$

$$J_3 = x_0^2 + J_2^* = x_0^2 + (-ax_0 + bu_0)^2 - a^2/4 - |b|$$

同理由 $\frac{\partial J_3}{\partial u_0} = 2(-ax_0 + bu_0)b = 0$, 得 $u_0 = \frac{a}{b}x_0$ 。考虑 $|u_0| \leq 1$, 即 $|\frac{a}{b}x_0| \leq 1$ 。故最优控制 u_0 的候选函数为

$$u_0^* = \begin{cases} +1 & x_0 > \frac{b}{a} \\ \frac{a}{b}x_0 & -\frac{b}{a} < x_0 < \frac{b}{a} \\ -1 & x_0 < -\frac{b}{a} \end{cases}$$

当 $x_0 = b/a$ 及 $-b/a$ 时, 应切换控制, 当 x_0 较小时可使 J 取极小值, 故选择 $u_0^* = (a/b)x_0$, 对应有:

$$J_3^* = J_{3\min} = x_0^2 - \frac{1}{4}a^2 - |b| \quad \text{及} \quad x_1 = 0$$

于是, 已知 x_0 且满足 $-b/a < x_0 < b/a$ 时, 可求得最优控制序列、最优状态序列如下:

$$u_0^* = \frac{a}{b}x_0 \quad x_1^* = 0;$$

$$u_1^* = \frac{a}{2b} \quad x_2^* = \frac{a}{2};$$

$$u_2^* = -\text{sign}b \quad x_3^* = -\frac{a^2}{2} - |b|;$$

$$J^* = J_{\min} = x_0^2 - \frac{1}{4}a^2 - |b|.$$

§ 11-2 连续系统动态规划

[内容提要]

把贝尔曼最优性原理应用于连续系统时,可导出泛函存在极值的必要条件:贝尔曼方程和哈密顿-雅可比方程。

一、贝尔曼方程

1. 最优控制问题提法:

设线性连续系统状态方程为:

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$u \in \Omega$$

要求用动态规划法确定最优控制 $u(t)$ 使下列性能指标

$$J = \theta[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(x, u, t) dt$$

取极小值。

2. 应用最优性原理:设 $t \in [t_0, t_f]$, 则 t 至 t_f 这段后部子过程也是最优过程,其最优性能指标记为 $W(x, t)$

$$W(x, t) = \min_{u \in \Omega} \left\{ \theta[x(t_f), t_f] + \int_t^{t_f} F(x, u, t) dt \right\} \quad (11.2-1)$$

且

$$W[x(t_f), t_f] = \theta[x(t_f), t_f] \quad (11.2-2)$$

3. 贝尔曼方程为:

$$-\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = \min_{u \in \Omega} \left\{ F(x, u, t) + f^T(x, u, t) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \right\} \quad (11.2-3)$$

该式是一个非线性偏微分方程,意为:在闭域 Ω 内选取 u^* , 使 $\{\cdot\}$ 取极小,进而按状态方程计算 x^* , 其 $\{\cdot\}$ 的极小值即为 $-\frac{\partial W(x, t)}{\partial t}$ 。

4. 当 u 不受约束,或 $u \in \Omega$ 但存在 $\frac{\partial}{\partial u} \{\cdot\}$ 时,可按 $\frac{\partial}{\partial u} \{\cdot\} = 0$ 来选取 u^* , 于是有:

$$\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial f^T}{\partial u} \cdot \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (11.2-4)$$

5. 只要注意到与变分法、极小值原理中所列写的哈密顿函数 H 相比较,可显见若令

$$\lambda = \partial W / \partial x \quad (11.2-5)$$

则

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \min_{u \in \Omega} \{H(x, u, \lambda, t)\}. \quad (11.2-6)$$

求 $\min_{u \in \Omega} \{F + f^T \frac{\partial W}{\partial x}\}$ 即求 $\min_{u \in \Omega} \{H\}$, 而后者是极小值原理的重要结论,故动态规划与极小值原理是彼此相通的。

二、哈密顿-雅可比方程

又称贝尔曼-哈密顿-雅可比方程,它是贝尔曼方程的又一表达方式。既然已按 $\{\cdot\}$ 选

取了 u^* 并决定了 x^* , 那么可去掉最小化运算符号, 更明显地表为:

$$-\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} = F(x^*, u^*, t) + f^T(x^*, u^*, t) \frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \quad (11.2-7)$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = H^* \quad (11.2-8)$$

式(11.2-7)、(11.2-8)均称为哈密尔顿-雅可比方程, 它同样是一个非线性偏微分方程。应用该方程可确定最优控制和最优性能指标。

三、哈密尔顿-雅可比方程的解

1. 非线性偏微分方程通常只能借助计算机求得数值解, 只有某些简单情况可经手工运算获得解析解。

2. 对于线性二次型问题, 经证明得知最优性能指标 $W(x,t)$ (即 J^*) 是二次型函数。当积分指标 t_f 为有限值时:

$$W(x,t) = x^T(t)K(t)x(t) \quad (11.2-9)$$

式中 $K(t)$ 是黎卡提矩阵微分方程的解。当 $t_f \rightarrow \infty$ 时:

$$W(x,t) = x^T(t)\dot{K}x(t) \quad (11.2-10)$$

$$W(x_0, t_0) = x^T(t_0)\dot{K}x(t_0) \quad (11.2-11)$$

式中 \dot{K} 是黎卡提矩阵代数方程的解。

3. 对于某些特定问题, $W(x,t)$ 可以是一幂级数, 见例 11.2-2。设定 $W(x,t)$ 需要经验和技巧。

4. 当 $W(x,t) = x^T(t)\dot{K}(t)x(t)$ 时, $\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = ?$

$$\begin{aligned} \because \frac{d}{dt}[x^T(t)\dot{K}(t)x(t)] &= \dot{x}^T(t) \frac{\partial}{\partial x}[x^T(t)\dot{K}(t)x(t)] + \frac{\partial}{\partial t}W(x,t) \\ &= 2\dot{x}^T(t)\dot{K}(t)x(t) + \frac{\partial}{\partial t}W(x,t) \\ &= 2x^T(t)\dot{K}(t)\dot{x}(t) + \frac{\partial}{\partial t}W(x,t) \end{aligned} \quad (11.2-12)$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \because \frac{d}{dt}[x^T(t)\dot{K}(t)x(t)] &= \dot{x}^T(t)\dot{K}(t)x(t) + x^T(t)[\dot{K}(t)x(t) + \dot{K}(t)\dot{x}(t)] \\ &= 2x^T(t)\dot{K}(t)\dot{x}(t) + x^T(t)\dot{K}(t)x(t) \end{aligned} \quad (11.2-13)$$

比较式(11.2-12)和(11.2-13)有:

$$\frac{\partial}{\partial t}W(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}[x^T(t)\dot{K}(t)x(t)] = x^T(t)\dot{K}(t)x(t) \quad (11.2-14)$$

对于 $t_f \rightarrow \infty$ 的情况有: $\partial W/\partial t = 0$ (11.2-15)

四、连续动态规划解题步骤

1. 列写哈密尔顿函数

$$H = F(x, u, t) + f^T(x, u, t) \cdot \lambda;$$

2. 根据 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ (u 不受约束时)

或 $H(x^*, \lambda^*, u^*, t) \leq H(x^*, \lambda^*, u, t) \quad (u \in \Omega \text{ 时})$

选择最优控制 u^* , 它是 λ^* 的函数;

3. 令 $\lambda^* = \frac{\partial W}{\partial x}$;

4. 列写哈密顿-雅可比方程

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = F\left(x, \frac{\partial W}{\partial x}, t\right) + f^T\left(x^*, \frac{\partial W}{\partial x}, t\right) \frac{\partial W}{\partial x}$$

或

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = H^* ;$$

5. 在计算机上求解。对于线性二次型问题,可设定 $W(x, t) = x^T(t)K(t)x(t)$, 依次确定出 $K(t)$ 、 $u^*(t)$ 、 $W(x, t)$ 。

用动态规则法解最优控制问题,与变分法、极小值原理结果相同。

[例 题]

例 11.2-1 设系统状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = u$$

初始条件为:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

试用动态规划法求最优控制,使下列性能指标

$$J = \int_0^{\infty} (2x_1^2 + \frac{1}{2}u^2) dt$$

为极小,且求出最优性能指标。

解 列写哈密顿函数:

$$H = F + \lambda^T f = 2x_1^2 + \frac{1}{2}u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

由控制方程 $\partial H / \partial u = 0$, 求得最优控制应满足:

$$u + \lambda_2 = 0, \quad u^* = -\lambda_2$$

哈密顿函数的极小值为:

$$H^* = 2x_1^2 + \lambda_1 x_2 - \frac{1}{2}\lambda_2^2$$

令 $\lambda = \frac{\partial W(x, t)}{\partial x}$, 即 $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W(x, t)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial W(x, t)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$ 。式中 $W(x, t)$ 为 $[t, \infty]$ 间隔内的最优性能指标;

则 $u^* = -\frac{\partial W(x, t)}{\partial x_2}$

$$H^* = 2x_1^2 + \lambda_1 x_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial W(x, t)}{\partial x_2} \right]^2$$

由哈密顿-雅可比方程:

$$-\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = H^*$$

因线性二次型问题当 $t_f \rightarrow \infty$ 的最优性能指标满足:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = 0$$

且 $W(x, t) = x^T(t)Kx(t)$

式中 K 为黎卡提矩阵代数方程的解, 为正定实对称矩阵:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$$

要求 $k_{11} > 0; k_{22} > 0; k_{11}k_{22} > k_{12}^2$.

故 $W(x, t) = k_{11}x_1^2(t) + 2k_{12}x_1(t)x_2(t) + k_{22}x_2^2(t)$

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial x_1} = 2(k_{11}x_1 + k_{12}x_2)$$

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial x_2} = 2(k_{12}x_1 + k_{22}x_2)$$

代入哈密尔顿-雅可比方程(略去 * 符号)

$$2(1 - k_{12}^2)x_1^2 + 2(k_{12} - k_{22}^2)x_2^2 + 2(k_{11} - 2k_{12}k_{22})x_1x_2 = 0$$

有

$$\begin{cases} 1 - k_{12}^2 = 0 \\ k_{12} - k_{22}^2 = 0 \\ k_{11} - 2k_{12}k_{22} = 0 \end{cases}$$

解得 $k_{11} = 2, k_{12} = 1, k_{22} = 1$.

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是 $W(x, t) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

$$u^* = -\frac{\partial W(x, t)}{\partial x_2} = -2(x_1 + x_2)$$

将 u^* 代入状态方程可获得最优轨线:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

该齐次状态方程的解为:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} &= \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{bmatrix} s + 2 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1} \\ -2 \\ \frac{(s+1)^2+1}{(s+1)^2+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}(\cos t + \sin t) \\ -2e^{-t}\sin t \\ e^{-t}(\cos t + \sin t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

最优性能指标:

设 $W(x_0, 0)$ 为 $[0, \infty]$ 间隔内的最优性能指标, 则

$$W(x_0, 0) = x^T(0)Kx(0) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2;$$

$$\text{或计算 } J^* = \int_0^{\infty} (2x_1^{*2} + \frac{1}{2}u^{*2})dt = \int_0^{\infty} 4e^{-2t}dt = 2.$$

故解为:

$$u^*(t) = -2e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\sin t$$

$$x_1^*(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

$$x_2^*(t) = -2e^{-t}\sin t$$

$$J^* = W(x_0, 0) = 2$$

例11.2-2 设一阶非线性系统状态方程及初始条件为:

$$\dot{x} = -x^3 + u \quad x(0) = x_0$$

试用动态规划法求最优控制,使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^2 + u^2)dt$$

取极小值。

解 列写哈密顿函数:

$$H = \frac{1}{2}(x^2 + u^2) + \lambda(-x^3 + u)$$

由于 u 不受约束,存在控制方程 $\frac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda = 0$

得 $u^* = -\lambda$

$$H^* = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda x^3$$

令 $\lambda = \frac{\partial W}{\partial x}$

式中 $W(x, t)$ 为最优性能指标;根据哈密顿-雅可比方程及边界条件

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = H^*$$

$$W[x(t_f), t_f] = 0 \quad (\because \text{无终端指标项})$$

则 $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)x^3 = -\frac{\partial W}{\partial t}$

即 $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)x^3 - x^3 = 2\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)$

设该非线性偏微分方程的解具有如下幂级数形式:

$$W(x) = p_0 + p_1x + \frac{1}{2!}p_2x^2 + \frac{1}{3!}p_3x^3 + \frac{1}{4!}p_4x^4 + \dots$$

$W(x)$ 不含 t 的显函数,故 $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = p_1 + p_2x + \frac{1}{2!}p_3x^2 + \frac{1}{6}p_4x^3 + \dots$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = p_1^2 + p_1^2x^2 + \frac{1}{4}p_3^2x^4 + 2p_1p_2x + p_1p_3x^2 + \frac{1}{3}p_1p_4x^3$$

$$+ p_2p_3x^3 + \frac{1}{3}p_2p_4x^4 + \dots$$

$$2\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)x^3 = 2(p_1 + p_2x + \frac{1}{2}p_3x^2 + \dots)x^3$$

$$= 2p_1x^3 + 2p_2x^4 + p_3x^5 + \dots$$

代入哈密顿-雅可比方程,有

$$p_1^2 + 2p_1p_2x + (p_2^2 + p_1p_3 - 1)x^2 + \left(\frac{1}{3}p_1p_3 + p_2p_3 + 2p_1\right)x^3 \\ + \left(\frac{1}{4}p_3^2 + 2p_2 + \frac{1}{3}p_2p_1\right)x^4 + \dots = 0$$

解得 $p_1=0; p_2=1; p_3=0; p_4=-6; \dots$

\therefore 最优控制作用下,闭环系统一定稳定,即当 $t_f \rightarrow \infty$ 时, $x(t_f) = 0$, 故 $W[x(t_f), t_f] = W[x(\infty)] = p_3 = 0$

$$W(x) \approx \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$$

$$u^* = -\lambda = -\frac{\partial W}{\partial x} = -x + x^3$$

代入状态方程:

$$\dot{x} = -x^3 + u^* = -x$$

最优轨线为: $x = x^* = x_0 e^{-t}$. 最优系统确实是稳定的。

习 题

11-1 已知一阶离散系统状态方程为:

$$x(k+1) = ax(k) + bu(k)$$

试用动态规划法确定最优控制序列 $u(0), u(1), u(2)$, 使下列性能指标

$$J = \sum_{k=0}^2 x^2(k) + ru^2(k)$$

取极小值。

11-2 设一阶离散系统状态方程为:

$$x_{k+1} = 2x_k + u_k \quad x_0 = 1$$

试用动态规划法确定最优控制序列, 使下列性能指标

$$J = x_2 + \sum_{k=0}^1 (x_k^2 + 0.5u_k^2 + 2x_k)$$

取极小值, 并求出最优状态序列及最小性能指标 J^* 。

11-3 起点经各中间点达终点的路线图及各点间距离见图11-2。试用逆向算法确定 A 至 F 的最短路线。

11-4 设离散系统状态方程及初始条件为:

$$x(k+1) = x(k) + u(k), \quad x(0) = 0$$

终端状态 $x(4) = 2$, $u(k)$ 为 +1 或 -1, 试确定使下列性能指标

$$J = \sum_{k=0}^3 [x^3(k) + u^4(k)x(k) + u^2(k)x(k)]$$

为极小的最优控制序列、最优状态序列及最优性能指标值。

11-5 设离散状态方程及边界条件为:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + u(k) \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(3) = 0 \\ x_2(3) = -1 \end{cases}$$

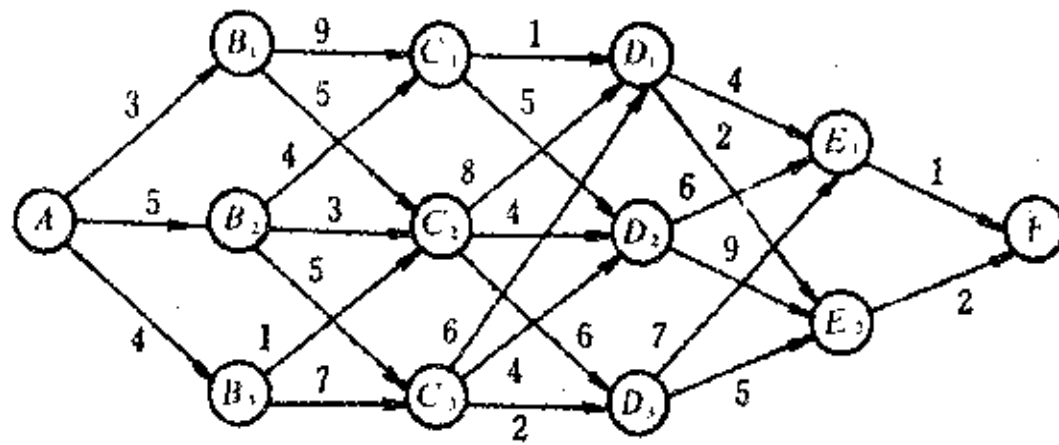


图11-2 路线图

$u(k)$ 为-1,0或+1,试确定使下列性能指标

$$J = \sum_{k=0}^2 [|u(k)| - x^2(k)]$$

为极小的最优控制序列、最优状态序列及最优性能指标值。

11-6 设离散状态方程及初始条件为:

$$x(k+1) = x(k)u(k) + u(k) \quad x(0) = 1$$

$u(k)$ 为-1,0或+1,试确定使下列性能指标

$$J = \sum_{k=0}^2 [|x(k)| + 3|u(k-1) + 1|] + |x(3)|$$

为极小的最优控制序列、最优状态序列及最优性能指标值。

11-7 设二阶系统状态方程及初始条件为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{cases}$$

试用动态规划法确定最优控制,使下列性能指标:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (4x_1^2 + u^2) dt$$

取极小值。

11-8 设一阶系统状态方程及初始条件为:

$$\dot{x} = u, \quad x(t_0) = x_0$$

试用动态规划法确定最优控制 $u(t)$,使下列性能指标

$$J = \frac{1}{2} cx^2(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt \quad c > 0$$

取极小值。 t_0 及 t_f 均给定。

11-9 已知下列系统状态方程及性能指标,试列写最优控制问题的哈密尔顿-雅可比方程:

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2 + u \end{cases} \quad |u| \leq 1, J = \int_0^{t_f} dt$
2. $\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ |u| \leq 1, J = \int_0^{\infty} x^2 dt \end{cases} \quad x(0) = x_0$

$$3. \quad \dot{x} = u, J = \int_0^{t_f} (x^2 + \frac{1}{2}x^4 + u^2) dt$$

11-10 设系统状态方程及性能指标为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu; & x(t_0) &= x_0; \\ J &= \frac{1}{2}x^T(t_f)Px(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (x^TQx + u^TRu) dt \end{aligned}$$

试用哈密顿-雅可比方程证明:

$$\begin{aligned} 1. u^* &= -R^{-1}B^TK(t)x; \\ 2. \dot{K}(t) &= -K(t)A - A^TK(t) + K(t)BR^{-1}B^TK(t) - Q \\ K(t_f) &= P \end{aligned}$$

11-11 已知状态方程及性能指标为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= kx; & x(t_f) &= x_f; \\ J &= \int_0^{t_f} (qx^2 + ru^2) dt \end{aligned}$$

设 $J = \lambda_1(t) + 2\lambda_2(t)x + \lambda_3(t)x^2$, 试用动态规划法导出该问题的黎卡提微分方程。

第十二章 系统辨识技术基础

§ 12-1 基本概念

[内容提要]

一、系统建模

1. 什么是模型

- (1)模型是一个系统本质方面的表达,是原系统的一种近似;
- (2)模型的表达方式有概念性模型、物理性模型、数学模型;
- (3)模型的用途有供自动控制用、预报用、科学研究用;
- (4)建立模型的过程称建模。

2. 数学模型及其类别

- (1)数学模型是用来描述系统运动规律的一组(一个)方程式或曲线。
- (2)数学模型可分为参数模型和非参数模型两大类。微分方程、差分方程属参数模型;频率响应、脉冲响应、阶跃响应属非参数模型。

(3)建立数学模型有两条途径——理论建模与系统辨识。

3. 系统辨识与参数估计

(1)根据受控系统或受控过程的输入输出数据,从某类模型中确定出一个在某种意义下最能代表该系统或该过程特性的数学模型称系统辨识。

(2)辨识过程是一个对输入输出数据进行处理的过程,所得模型只反映输入输出之间的特性。

(3)确定参数模型的参数问题称为参数估计。参数估计方法有最小二乘法、辅助变量法、极大似然估计法等。在所有估计方法中,其本质思想是力求使某个被适当定义的误差标准趋于最小,以便使模型与系统数据有最好的拟合。

4. 系统辨识的步骤

- (1)选择模型的类别并将其参数化;
- (2)对系统施加一个适当的试验信号,并记录输入输出数据;
- (3)对所选择的一种模型进行参数估计,使其与统计数据有最好的拟合;
- (4)对所获得的模型进行验证性试验,看其是否能描述所要辨识的系统;
- (5)若验证性试验通过,则辨识程序结束,否则选择其他类型的模型,并重复步骤(2)到(4),直到获得一个“满意”的模型。

二、误差的种类及其相应的模型

1. 输出误差与输出误差模型

在同一输入条件下系统输出 y_k 与模型响应 $F_0(u_k, \hat{\theta})$ 之差。

$$e_k = y_k - F_0(u_k, \hat{\theta}) \quad (12.1-1)$$

式中

y_k —— k 时刻的系统输出;
 u_k —— k 时刻的系统与模型的输入;
 $\hat{\theta}$ ——模型的参数估计值。

以输出误差为判别准则所获得的模型称为输出误差模型。例如脉冲响应模型、滑动均值(MA)模型以及传递函数模型

$$F_0 = \frac{\hat{b}_0 + \hat{B}(z^{-1})}{1 + \hat{A}(z^{-1})} u_k \quad (12.1-2)$$

2. 输入误差与输入误差模型

在同一输出条件下系统输入 u_k 与模型响应 $F_1(y_k, \hat{\theta})$ 之差

$$\varepsilon_k = u_k - F_1(y_k, \hat{\theta}) \quad (12.1-3)$$

式中

u_k —— k 时刻系统的输入;
 y_k —— k 时刻系统的输出;
 $\hat{\theta}$ ——模型的参数估计值。

以输入误差为判别准则所获得的模型称为输入误差模型,例如自回归(AR)模型,逆传递函数模型。

3. 方程误差与通用模型

将量测得到的输入输出数据代入模型方程所产生的误差称为方程误差

$$\varepsilon_k = F_0(y_k, \hat{\theta}') - F_1(u_k, \hat{\theta}') \quad (12.1-4)$$

由方程误差作为判别准则所获得的模型称为通用模型。例如自回归滑动平均(ARMA)模型。

$$[1 + \hat{A}(z^{-1})]y_k = [\hat{b}_0 + \hat{B}(z^{-1})]u_k \quad (12.1-5)$$

上述三种误差及其相应模型的示意图如图 12-1 所示。

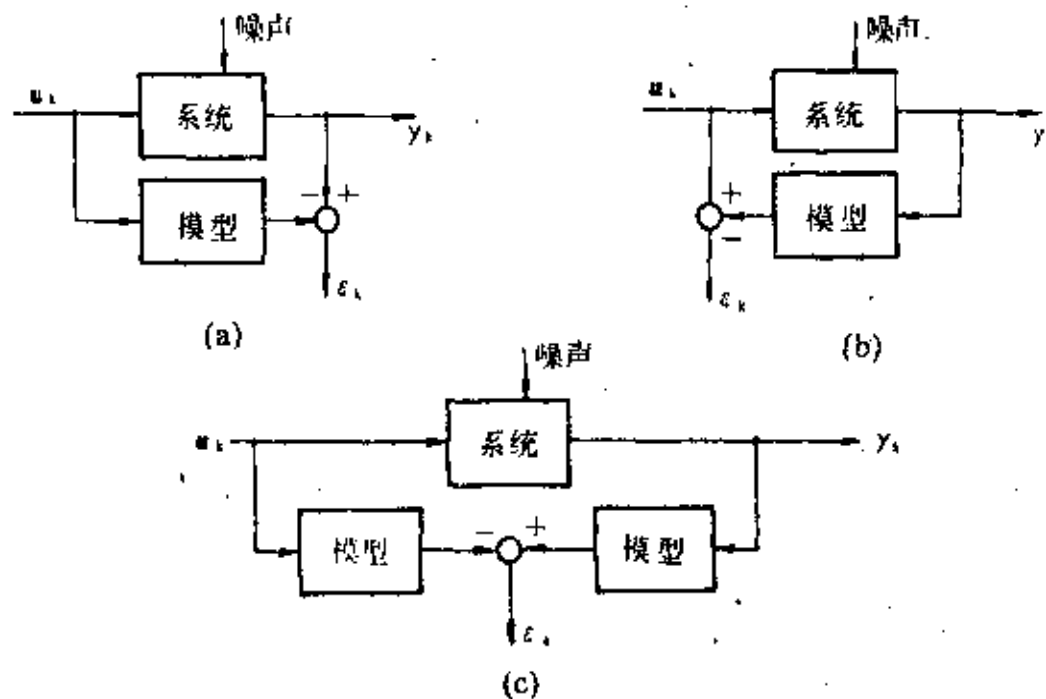


图 12-1 输出误差、输入误差及方程误差的示意图

§ 12-2 最大长度伪随机双电平信号(M 序列)

[内容提要]

一、随机双电平信号与伪随机双电平信号

1. 随机双电平序列信号是由贝奴里 (Bernoulli) 试验所形成的二位式序列。即独立地投掷一枚硬币,若把出现正面对应为“+1”,出现反面对应为“-1”,这种由“+1”和“-1”所构成的序列称为随机二位式序列。

2. 伪随机二位式序列是一种近似于随机二位式序列的确定性序列,英文缩写为 PRBS。二位式最大长度线性移位寄存器序列是一种常用的伪随机二位式序列,简称 M 序列。

二、M 序列的生成方法

1. M 序列信号可以由专用多级移位寄存器电路产生,也可以由在线控制计算机产生。

2. 图 12-2 是 n 级二进制反馈式移位寄存器的原理图。

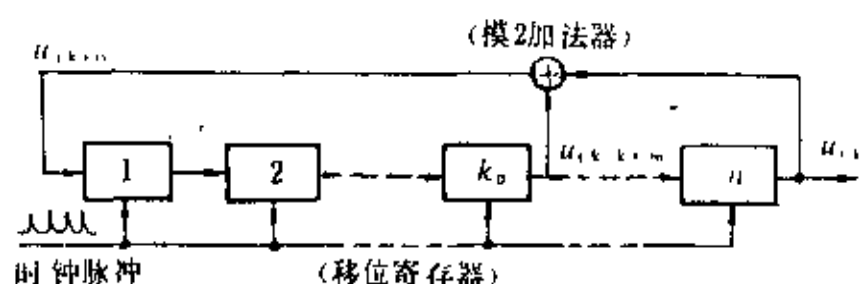


图 12-2 n 级二进制反馈式移位寄存器的原理图

注意,如果反馈通道的级号 k_0 选得不当,就得不到最大长度序列。对于 11 级以下的移位寄存器产生 M 序列其反馈通道宜取的级号如表 12-1 所示。

表 12-1 产生 M 序列的移位寄存器中反馈通道的选择

移位寄存器级数 n	M 序列周期长度 $N_p = 2^n - 1$	反馈通道级号 k_0
2	3	1 和 2
3	7	2 和 3
4	15	3 和 4
5	31	3 和 5
6	63	5 和 6
7	127	4 和 7
8	255	2, 3, 4 和 8
9	511	5 和 9
10	1023	7 和 10
11	2047	9 和 11

三、几个专用术语

(1) 基本电平时间 Δ ——M 序列信号能保持同一基本电平 (+V 或 -V) 不变的最小时间

单元,即时钟脉冲的周期,简称钟周期。

(2)游程——M序列信号连续保持某一基本电平不变的时间历程,其长度和伪概率分别为:

$$\text{游程长度(或状态蝉联数)} l = \frac{\text{游程持续时间}}{\Delta} \quad (12.2-1)$$

$$\begin{aligned} \text{游程伪概率} &= \frac{\text{一周期内出现同一长度的游程累计时间}}{\text{周期时间 } T_p} \\ &= \frac{\text{同一长度的游程在一周期内所占基本电平时间的累计段数}}{\text{周期长度 } N_p} \end{aligned} \quad (12.2-2)$$

四、M序列的基本性质

(1)由 n 级线性反馈移位寄存器所产生的 M 序列,其周期长度为

$$N_p = 2^n - 1 \quad (12.2-3)$$

(2)长度为 N_p 的 M 序列,其取逻辑值“1”和“0”的基本电平时间段数分别为 $(N_p + 1)/2 = 2^{n-1}$ 和 $(N_p - 1)/2 = 2^{n-1}$,即“1”比“0”的总个数多 1。

(3)有 n 种不同的游程长度 $l, l=1, 2, \dots, n$ 。在一周期内不同长度的游程出现个数的累计时间及伪概率如表 12-2 所列

表 12-2 M 序列的时域特征

游程长程	1	2	...	i	...	$n-1$	n
游程个数	2^{n-2}	2^{n-3}	...	2^{n-i-1}	...	$2^0=1$	1
所占基本电平时间累计	2^{n-2}	2^{n-2}	...	$i2^{n-i-1}$...	$n-1$	n
伪概率	1/2	1/4	...	$1/2^i$...	$1/2^{n-1}$	$1/2^n$

(4)移位相加性 任一 M 序列 $\{u_n\}$ 移位 τ 步所得新序列 $\{u_{n-\tau}\}$ 再与原序列作模 2 相加,结果仍为 M 序列

$$\{u_n\} \oplus \{u_{n-\tau}\} = \{u_{n-\tau}\} \quad (21.2-4)$$

(5)M 序列的自相关函数

$$R_{uu}(\tau) = \begin{cases} V^2 \left[1 - \left(1 + \frac{1}{N_p} \right) \frac{|\tau|}{\Delta} \right] & |\tau| < \Delta \\ -V^2/N_p & |\tau| \geq \Delta \end{cases} \quad (12.2-5)$$

其波形如图 12-3 所示,它接近于周期性尖三角脉冲波。

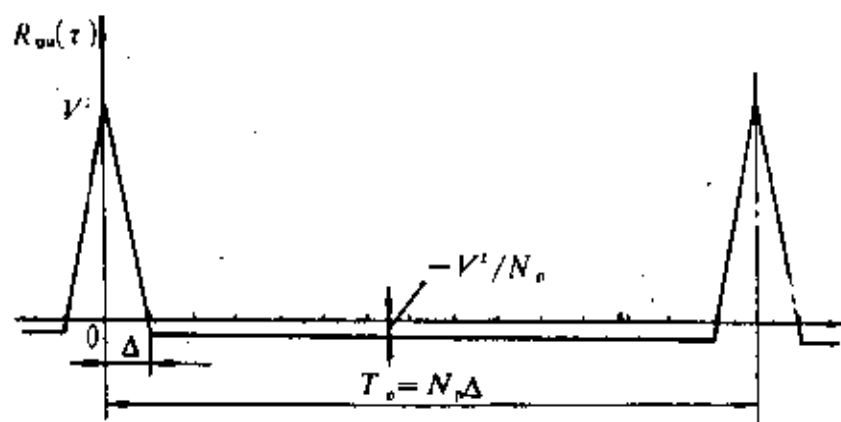


图 12-3 M 序列信号的自相关函数曲线($N_p=15$ 的情况)

(6) M 序列信号的功率谱密度为离散脉冲谱线,其表达式为

$$S_{uu}(\omega) = \hat{S}_0 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{\omega\Delta}{2}}{\frac{\omega\Delta}{2}} \right]^2 \delta(\omega - i\omega_0) \quad i = 1, 2, \dots \quad (12.2-6)$$

式中

$$\hat{S}_0 = 2\pi V^2(N_p + 1)/N_p \quad (12.2-7)$$

$$\omega_0 = 2\pi/N_p\Delta \quad (12.2-8)$$

其图形如图 12-4 所示。

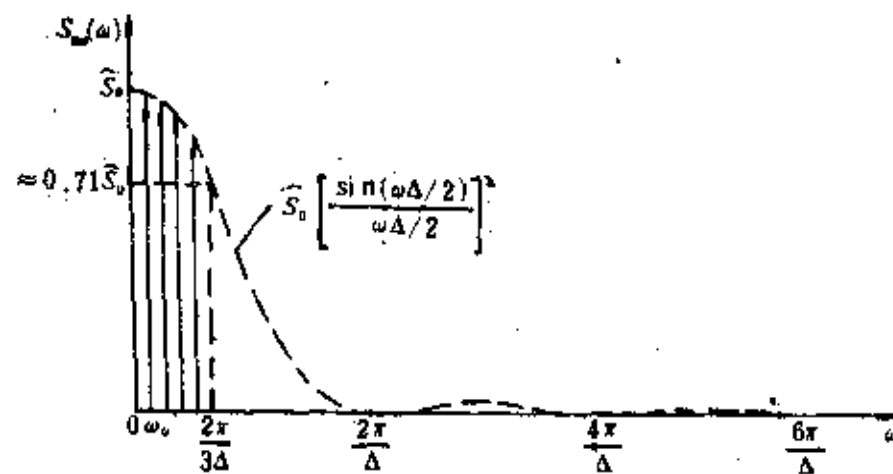


图 12-4 M 序列信号的功率谱密度曲线

五、反馈逻辑的设计

(1) 线性反馈移位寄存器序列生成函数

若对于图 12-2 所示的 n 级线性反馈移位寄存器所产生的无限序列表示为

$$\{a_0, a_1, \dots, a_k, \dots\}$$

其中 a_k 是模 2 域上的数,称为一个码元。

这个无限序列可以和有限域上的按模求和的无限多项式

$$G(q^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k q^{-k} \quad (12.2-9)$$

建立起对应关系。式中 q^{-1} 为移位算子。

称 $G(q^{-1})$ 为线性移位寄存器序列的生成函数。显然,多项式 $G(q^{-1})$ 的系数就是序列的各个码元。

(2) 序列中任一码元可用下列递推算式表示

$$a_k = \sum_{j=1}^n c_j a_{k-j} = c_1 a_{k-1} \oplus c_2 a_{k-2} \oplus \dots \oplus c_n a_{k-n} \quad (12.2-10)$$

其中 c_j 是各级的反馈系数。

(3) 线性反馈移位寄存器的反馈逻辑用线性反馈移位寄存器的特征多项式

$$f(q) = 1 \oplus \sum_{j=1}^n c_j q^j \quad (12.2-11)$$

描述。

由于模 2 域上加法和减法实质是一样的,所以式(12.2-11)又可写成

$$f(q) = 1 \oplus \sum_{j=1}^n c_j q^j \quad (12.2-12)$$

(4)生成函数 $G(q)$ 与特征多项式 $f(q)$ 的关系为

$$G(q) = \frac{1}{f(q)} \quad (12.2-13)$$

这是一个很有用的表达式,它使得 $G(q)$ 与 $f(q)$ 两者之间可以互相确定。

(5)定理 n 级线性移位寄存器产生 m 序列的充分必要条件是它的特征多项式为本原多项式。

所谓本原多项式是指 n 次不可约多项式 $f(x)$, 如果对于任一正整数 $s < 2^n - 1$, 都有 $f(x)$ 不被 $x^s + 1$ 整除。表 12-3 是模 2 域上的本原多项式简表。

表 12-3 模 2 域上的本原多项式简表

序 号	特征多项式	序 号	特征多项式
(3,2,1)	(3,1,0)	(7,4,10)	(7,5,4,3,0)
(3,2,2)	(3,2,0)	(7,4,11)	(7,5,3,1,0)
(4,2,1)	(4,1,0)	(7,4,12)	(7,6,4,2,0)
(4,2,2)	(4,3,0)	(7,4,13)	(7,6,3,1,0)
(5,2,1)	(5,2,0)	(7,4,14)	(7,6,4,1,0)
(5,2,2)	(5,3,0)	(7,4,15)	(7,6,5,4,3,2,0)
(5,4,3)	(5,3,2,1,0)	(7,4,16)	(7,5,4,3,2,1,0)
(5,4,4)	(5,4,3,2,0)	(7,6,17)	(7,6,5,4,2,1,0)
(5,4,5)	(5,4,2,1,0)	(7,5,18)	(7,6,5,3,2,1,0)
(5,4,6)	(5,4,3,1,0)	(8,4,1)	(8,7,2,1,0)
(6,2,1)	(6,1,0)	(8,4,2)	(8,7,6,1,0)
(6,2,2)	(6,5,0)	(8,4,3)	(8,5,3,1,0)
(6,4,3)	(6,5,2,1,0)	(8,4,4)	(8,7,5,3,0)
(6,4,4)	(6,5,4,1,0)	(8,4,5)	(8,4,3,2,0)
(6,4,5)	(6,4,3,1,0)	(8,4,6)	(8,6,5,4,0)
(6,4,6)	(6,5,3,2,0)	(8,4,7)	(8,5,3,2,0)
(7,2,1)	(7,1,0)	(8,4,9)	(8,6,5,3,0)
(7,2,2)	(7,6,0)	(8,4,10)	(8,6,3,2,0)
(7,2,3)	(7,3,0)	(8,4,10)	(8,6,5,2,0)
(7,2,4)	(7,4,0)	(8,4,12)	(8,7,3,2,0)
(7,4,5)	(7,3,2,1,0)	(8,6,13)	(8,6,5,1,0)
(7,4,6)	(7,6,5,4,0)	(8,6,14)	(8,6,4,3,2,1,0)
(7,4,7)	(7,5,2,1,0)	(8,6,15)	(8,7,6,5,4,2,0)
(7,4,8)	(7,6,5,2,0)	(8,6,16)	(8,7,6,3,2,1,0)
(7,4,9)	(7,4,3,2,0)	(8,6,16)	(8,7,6,5,2,1,0)

说明:1)序号: (i, j, k)

i 表示移位寄存器的级数;

j 表示有多少级的信号要参与反馈;

k 表示属于同一个 n 级移位寄存器,产生同样长度的 M 序列的不同本原多项式的次序号。

2)特征多项式:用 $(m, n, p, q, \dots, 0)$ 表示移位寄存器中的第 m ,第 n ,第 p ,第 q 级要参与反馈

六、逆重复 M 序列

1.产生方法 将 $2N_p$ 个码的 M 序列 $\{u\}$ 和 $2N_p$ 个码的方波信号 $\{m\}$ 按模2加法规则相加,便得到逆重复 M 序列 $\{l\}$ 。

2.性质

a.序列 $\{l\}$ 的周期为原序列 $\{u\}$ 的二倍。

b.如果将逻辑1状态看成电平“ $-V$ ”,将逻辑0状态看成电平“ $+V$ ”,则在序列 $\{l\}$ 中上述两电平出现的频率相等,因而在 $2T_p$ 内其电平均值为零。

c.序列 $\{l\}$ 与原序列 $\{u\}$ 是互不相关的,即它们的互相关函数为零。

d.序列 $\{l\}$ 的前半周期与后半周期是逆重复的,即

$$l\{t\} = -l\{t + T_p\}$$

e.逆重复 M 序列的自相关函数

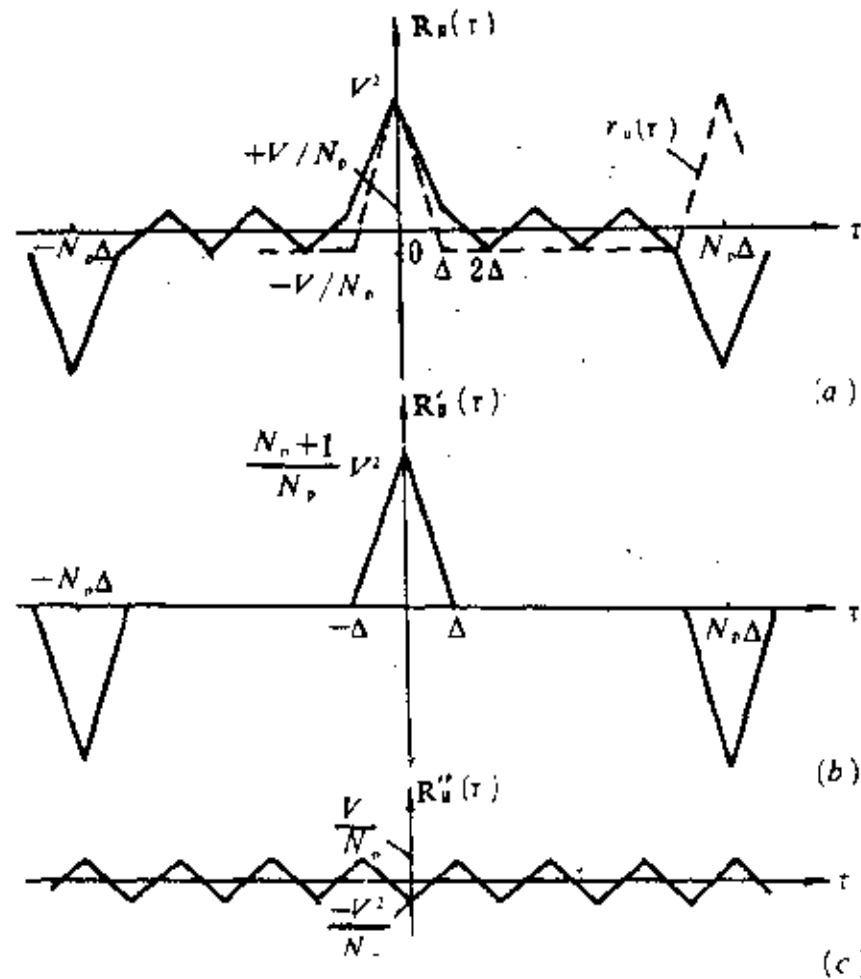


图 12-5 逆重复 M 序列自相关函数及分解示意图

$$R_n(\tau) = \begin{cases} \left(1 - \frac{N_p - 1}{N_p} \frac{|\tau|}{\Delta}\right)^2 & \text{当 } -\Delta < \tau < \Delta \\ (-1)^k \frac{V_z}{N_p} \left(2k - 1 - \frac{2\tau}{\Delta}\right) & \text{当 } (k-1)\Delta < \tau < k\Delta \\ & k \text{ 为 } \left\{ \begin{array}{l} 2 < k < N \\ N+2 < k < 2N \end{array} \right\} \text{ 的整数} \\ \left(\frac{N_p - 1}{N_p} \frac{|\tau|}{\Delta} - 1\right)^2 & \text{当 } (N_p - 1)\Delta < \tau < (N_p + 1)\Delta \end{cases} \quad (12.2-14)$$

$R_n(\tau)$ 的周期为 $2N_p\Delta$, 见图 12-5 所示。

3. 在双输入系统辨识时, 可以应用 M 序列和逆重复 M 序列这两个互不相关的信号作为两路输入。

[例 题]

例 12.2-1 试证明 n 级线性移位寄存器所产生的 M 序列其长度为 n 的“1”游程与长度为 $n-1$ 的“0”游程分别各有一个, 没有长度为 $n-1$ 的“1”游程。

证 在 M 序列的一个周期中, 由于反馈逻辑 n 级寄存器全为“1”的状态只可能出现一次。而又因为全零状态不允许出现, 所以 $n-1$ 个零的状态也只能出现一次。至于 $n-1$ 个“1”的游程不会出现, 是这样考虑的: 若状态 $(1, 1, \dots, 1, 0)$ 一出现, 根据非退化和参加反馈的级为偶数个这两点就可判定所形成的一位必然是“1”, 即变成了 n 个“1”状态; 若状态为 $(0, 1, 1, \dots, 1)$ 一出现, 仍根据上述两点, 可以判定在该状态之前的那个状态必定是全“1”, 综上所述两种情况, 所以 $n-1$ 个“1”的游程在 M 序列中是不可能出现的。

例 12.2-2 试证明长度为 i ($1 \leq i \leq n-2$) 的游程数是总游程数的 $(1/2)^i$ 。

证 长度为 i 的 1 游程意味着 i 个毗邻出现“1”的两边各有一个零, 这就占去了 $i+2$ 位, 对于 n 级而言, 剩下的 $n-(i+2)$ 级中各级可为“0”, 也可为“1”, 这样共有 2^{n-i-2} 个状态可以出现长度为 i 的“1”游程

同理, 长度为 i 的“0”游程的个数也将是 2^{n-i-2} 个。

从以上论述可求出 M 序列一个周期内各种长度游程的个数, 即

1 个长度为 n 的“1”游程,

1 个长度为 $n-1$ 的“0”游程,

2^1 个长度为 $n-2$ 的游程,

2^2 个长度为 $n-3$ 的游程,

.....

2^{n-2} 个长度为 1 的游程。

所以总游程数为

$$\begin{aligned} & 1 + 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} \\ & = 2 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} \\ & = 2^2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} \\ & = 2^3 + 2^3 + \dots + 2^{n-2} \\ & = 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1} \end{aligned}$$

最后有

$$\frac{\text{长度为 } i \text{ 的游程数}}{\text{总游程数}} = \frac{2^{n-i-1}}{2^{n-1}} = 2^{-i}$$

例 12.2-3 试推导 M 序列自相关函数为

$$R_{uu}(\tau) = \begin{cases} V^2 \left[1 - \left(1 + \frac{1}{N_p} \right) \frac{|\tau|}{\Delta} \right] & |\tau| < \Delta \\ -V^2/N_p & |\tau| \geq \Delta \end{cases}$$

解 (1) 当 $\tau=0$

因为 M 序列是周期为 $T_p = N_p \Delta$ 的周期信号, 且在移位脉冲的周期 Δ 内, M 序列信号的电平是固定的, 于是自相关函数的积分形式可以写成求和形式

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{N_p} \left[\sum_{k=0}^{N_p-1} u(k\Delta) u(k\Delta - \tau) \right]$$

当 $\tau=0$

$$R_{uu}(0) = \frac{1}{N_p} \left[\sum_{k=0}^{N_p-1} u^2(k\Delta) \right]$$

考虑到 M 序列的逻辑状态 0 相当于正电平, 逻辑状态 1 相当于负电平, 于是

$$R_{uu}(0) = \frac{1}{N_p} \underbrace{[V^2 + V^2 + \dots + V^2]}_{N_p \uparrow} = V^2$$

(2) 当 τ 取任意值时, 分几种情况来讨论

① 当 $0 < \tau < \Delta$ 时, 有

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{N_p \Delta} \int_0^{N_p \Delta} u(t) u(t + \tau) dt$$

对于 M 序列的任一游程来说, 由于 $u(t + \tau)$ 相对于 $u(t)$ 平移了 τ 而使 $\int_0^{N_p \Delta} u(t) u(t + \tau) dt$ 的面积相对于 $\tau=0$ 而言减少了 $2V^2|\tau|$ 。一个 M 序列在周期内有 $(N_p + 1)/2$ 个游程, 所以相对于 $\tau=0$ 的 $R_{uu}(\tau)$ 而言, 总共减少了 $\frac{1}{2}(N_p + 1) \cdot 2|\tau|V^2$ 的面积。从而得出相关函数为

$$\begin{aligned} R_{uu}(\tau) &= R(0) - \frac{N_p + 1}{2} \cdot \frac{2|\tau|V^2}{N_p \Delta} = V^2 - \frac{N_p + 1}{N_p} \frac{|\tau|}{\Delta} V^2 \\ &= V^2 \left[1 - \frac{N_p + 1}{N_p} \frac{|\tau|}{\Delta} \right] \end{aligned}$$

② 当 $|\tau| = \Delta$ 时, 相当于 $\frac{|\tau|}{\Delta} = p = 1$, 所以有

$$R_{uu}(\tau) = -V^2/N_p$$

③ 当 $p\Delta < \tau < (p+1)\Delta$ 时

对于 p 为整数 $p=1, 2, \dots, N_p-1$, 有

$$\begin{aligned} R_{uu}(\tau) &= \frac{1}{N_p} \left[\sum_{k=0}^{N_p-1} u(k\Delta) u(k\Delta + p\Delta) \right] \\ &= \frac{1}{N_p} \{ V^2 [(\text{同号码相乘的个数}) - (\text{异号码相乘的个数})] \} \end{aligned}$$

两个幅度为 V 的二位式 M 序列相乘等价于该两序列按模 2 相加所得其幅度为 V^2 的新 M 序列。对于这个新序列, 在一个周期中逻辑 1 出现的次数应为 $(N_p + 1)/2$, 逻辑 0 出现的次数应

数 $(N_p - 1)/2$ 。于是有

$$R_{uu}(\tau) = \frac{V^2}{N_p} \left[\frac{N_p - 1}{2} - \frac{N_p + 1}{2} \right] = -\frac{V^2}{N_p}$$

对于 p 为非整数, $u(t + \tau)$ 的波形相对于整数 $p_{\text{整}} \Delta$ 又移动了 $(\tau - p_{\text{整}} \Delta)$, 当然每个游程又都移位了 $\tau - p_{\text{整}} \Delta$ 。若把原先只移位了 $p_{\text{整}} \Delta$ 时 $u(t)$ 与 $u(t + p_{\text{整}} \Delta)$ 的波形在同号区间以及异号区间方面的情况作为基点, 现在又移了 $\tau - p_{\text{整}} \Delta$ 后, 这类区间又有了变化。但是, 每一个游程的前沿移动与后沿移动所带来的乘积波形的面积变化正好大小相等、符号相反。结果, 面积代数和不变。即

$$R_{uu}(\tau) = -\frac{V^2}{N_p}$$

综上所述, M 序列的自相关函数在一个周期内的表达式为

$$R_{uu}(\tau) = \begin{cases} V^2 \left[1 - \left(1 + \frac{1}{N_p} \right) \frac{|\tau|}{\Delta} \right] & |\tau| < \Delta \\ -V^2/N_p & |\tau| \geq \Delta \end{cases}$$

例 12.2-4 设有四级移位寄存器, 其反馈逻辑为

$$a_n = a_{n-3} \oplus a_{n-4}$$

试写出这个电路的输出序列。

解 由于反馈逻辑为

$$a_n = a_{n-3} \oplus a_{n-4}$$

则特征多项式为

$$f(q) = 1 \oplus q^3 \oplus q^4$$

生成函数为

$$\begin{aligned} G(q) &= \frac{1}{f(q)} = \frac{1}{1 \oplus q^3 \oplus q^4} \\ &= 1 \oplus q^3 \oplus q^4 \oplus q^6 \oplus q^8 \oplus q^9 \oplus q^{10} \oplus q^{11} \oplus q^{13} \oplus \dots \end{aligned}$$

所以对应的二位式序列为

$$100110101111000, 100\dots$$

例 12.2-5 试设计一线性反馈移位寄存器, 使其产生的二位式 M 序列为

$$1100100111110111000101011010000\dots\dots$$

解 由给定的二位式序列直接写出生成函数

$$G(q) = 1 \oplus q \oplus q^4 \oplus q^7 \oplus q^8 \oplus q^9 \oplus q^{10} \oplus q^{11} \oplus q^{13} \oplus \dots$$

根据式(12.2-13)计算特征多项式

$$f(q) = \frac{1}{G(q)} = q^5 \oplus q^3 \oplus q^2 \oplus q \oplus 1$$

所以所设计的为 5 级线性反馈移位寄存器, 其反馈取自第 5, 第 3, 第 2, 第 1 级。

§ 12-3 辨识系统脉冲响应函数的相关分析法

[内容提要]

一、脉冲响应函数

1 定义 初始条件为零时, 线性系统对于单位脉冲输入 $u(t) = \delta(t)$ 产生的响应 $y(t) =$

$h(t)$, 称之为单位脉冲响应函数。

对于离散系统, 脉冲响应函数呈离散形式, 可以用序列

$$\{h(i)\} \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

表示。

2. 脉冲响应函数模型归属于非参数模型。考虑到实际稳定系统的脉冲响应 $h(t)$, 在 t 大于某个数值时, 它的数值已趋于很小, 可予忽略, 该非参数模型可以简化为参数型滑动平均模型。对于单输入单输出 (SISO) 系统

$$y(k) = B(q^{-1})u(k) \quad (12.3-1)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_pq^{-p} \quad (12.3-2)$$

式中 q^{-1} 为单位延迟算子

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_c(0) \\ h_c(1) \\ \vdots \\ h_c(p) \end{bmatrix} \quad (12.3-3)$$

对于多输入多输出 (MIMO) 系统

$$y(k) = B(q^{-1})u(k) \quad (12.3-4)$$

式中

$$y(k) = [y_1(k) \quad y_2(k) \quad \dots \quad y_m(k)]^T \quad (12.3-5)$$

$$u(k) = [u_1(k) \quad u_2(k) \quad \dots \quad u_r(k)]^T \quad (12.3-6)$$

$$B(q^{-1}) = \begin{bmatrix} B_{11}(q^{-1}) & B_{12}(q^{-1}) & \dots & B_{1r}(q^{-1}) \\ B_{21}(q^{-1}) & B_{22}(q^{-1}) & \dots & B_{2r}(q^{-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{m1}(q^{-1}) & B_{m2}(q^{-1}) & \dots & B_{mr}(q^{-1}) \end{bmatrix} \quad (12.3-7)$$

脉冲响应函数阵 $B(q^{-1})$ 共有 $m \times r$ 个元素, 其中 $B_{ij}(q^{-1})$ 表示第 j 个输入和第 i 个输出之间的脉冲响应函数, 其形式与式 (12.3-2) 相同

$$B_{ij}(q) = b_{ij0} + b_{ij1}q^{-1} + \dots + b_{ijp}q^{-p} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, r) \quad (12.3-8)$$

3. 设 $t \leq 0$ 时系统静止, 则其卷积公式为

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t u(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (12.3-9)$$

二、脉冲响应法

1. 脉冲响应法是利用被辨识系统不含噪声的输入、输出信息, 通过卷积公式来辨识系统的脉冲响应函数。

2. 根据 $u(t), y(t)$ 求 $h(t)$ 。

若对式 (12.3-9) 的卷积公式进行离散化, 当步长 T 足够小时, $u(t), y(t)$ 和 $h(t)$ 可用下列阶梯信号近似代替

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= u(kT) \\ y(t) &= y(kT) \\ h(t) &= H(kT) \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \quad (12.3-10)$$

由式 (12.3-9) 可以导出

$$\left. \begin{aligned} y(T) &= Tu(0)h(0) \\ y(2T) &= T[u(0)h(T) + h(0)u(T)] \\ &\vdots \\ y(NT) &= T \sum_{i=0}^{N-1} h(iT)u(NT - iT - T) \end{aligned} \right\} \quad (12.3-11)$$

其向量形式为

$$y = TUh \quad (12.3-12)$$

式中

$$y \triangleq [y(T) \quad y(2T) \quad \cdots \quad y(NT)]^T \quad (12.3-13)$$

$$h \triangleq [h(0) \quad h(T) \quad \cdots \quad h((N-1)T)]^T \quad (12.3-14)$$

$$u \triangleq \begin{bmatrix} u(0) & 0 & \cdots & 0 \\ u(T) & & & \\ & u(0) & & \vdots \\ u(2T) & u(T) & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ u[(N-1)T] & \cdots & u(T) & u(0) \end{bmatrix} \quad (12.3-15)$$

如果 U^{-1} 存在, 则有

$$h = \frac{1}{T} U^{-1} y \quad (12.3-16)$$

由上式所解出的脉冲响应函数 $h(t)$ 的采样序列 $h(kT)$, 其精度与步长 T 的选择有关. 检验 T 是否足够小的办法是: 如第一次选择步长为 T , 第二次选择步长为 $T/2$, 若上述两次步长所得的脉冲响应其结果无明显差异, 则认为 T 已经足够小了.

应该指出, 这种辨识方法虽然简便易行, 但是它仅适用于确定型线性定常系统, 在有随机噪声的情况下会带来误差.

三、辨识系统脉冲响应的相关分析法

1. 相关分析法的原理

(1) 维纳-何甫 (Wiener-Hopf) 方程

$$R_{yy}(\tau) = \int_0^{\infty} \hat{h}(\tau) R_{uu}(\tau - \lambda) d\lambda \quad (12.3-17)$$

式中 $R_{uu}(\tau)$ 为输入量的自相关函数;

$R_{yy}(\tau)$ 为输入输出信号的互相关函数;

$\hat{h}(\tau)$ 为系统脉冲响应的最佳估计.

(2) 若输入信号选择为白噪声, 则系统的脉冲响应最佳估计问题变为求系统输入输出信号的互相关函数的问题.

$$\hat{h}(\tau) = \frac{1}{K} R_{yy}(\tau) \quad (12.3-18)$$

式中 K 为 $R_{uu}(\tau)$ 呈 δ 函数的幅值.

(3) 若输入信号选择为 M 序列, 则维纳-何甫方程为

$$R_{yy}(\tau) = \int_0^{N\Delta} \hat{h}(t) R_{uu}(\tau - t) dt$$

$$= \frac{N_p + 1}{N_p} V^2 \Delta \hat{h}(\tau) - \frac{V^2}{N_p} \int_0^{N_p \Delta} \hat{h}(t) dt \quad (12.3-19)$$

式中: V 为 M 序列信号的幅值,

Δ 为 M 序列信号的基本电平时间,

N_p 为 M 序列信号的周期长度.

2. 由式(12.3-18)计算 $\hat{h}(\tau)$ 的几种方法

(1) 目测法, 由于

$$\frac{V^2}{N_p} \int_0^{N_p \Delta} \hat{h}(t) dt = A$$

是一个常数, 所以有

$$R_{uy}(\tau) = \frac{N_p + 1}{N_p} V^2 \Delta \hat{h}(\tau) - A \quad (12.3-20)$$

这意味 $R_{uy}(\tau)$ 与 $\frac{N_p + 1}{N_p} V^2 \Delta \hat{h}(\tau)$ 的形状一样, 只是纵坐标差一常数 A , 且

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{uy}(\tau) = A \quad (12.3-21)$$

因此可以用目测法沿着 $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{uy}(\tau)$ 作一水平线, 并将 $R_{uy}(\tau)$ 平移上述常数 A , 如图 12-6 所示.

即得

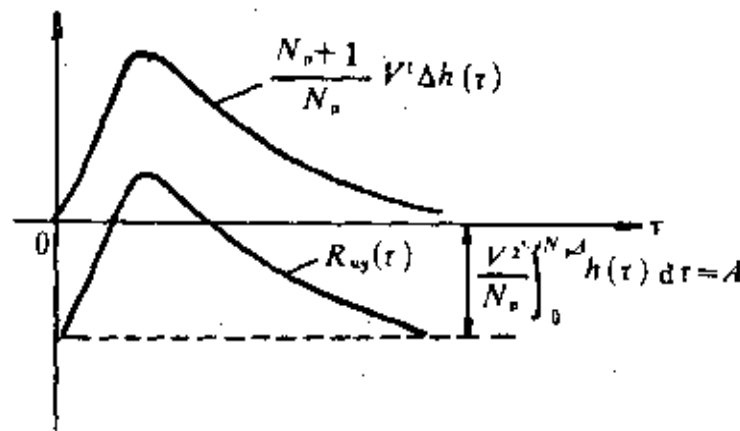


图 12-6 用目测法求脉冲响应

与 $h(\tau)$ 成比例的曲线 $\frac{N_p + 1}{N_p} V^2 \Delta \cdot h(\tau)$, 因 N_p, V 和 Δ 已知, 故最终可得 $h(\tau)$.

(2) 离线计算公式

$$\hat{h}(\tau) = \frac{N_p}{(N_p + 1)V^2} [R_{uy}(\tau) + \sum_{i=0}^{N_p-1} R_{uy}(i)] \quad (12.3-22)$$

(3) 在线递推算法

$$\hat{h}_k = \hat{h}_{k-1} + \frac{1}{k+1} \left\{ \frac{N_p}{V^2(N_p + 1)} y(k) \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-N_p+1) \end{bmatrix} - \hat{h}_{k-1} \right\} \quad (12.3-23)$$

式中 \hat{h}_k 为 \hat{h} 的第 k 次递推值

$$\hat{h}_k = \begin{bmatrix} \hat{h}_k(0) \\ \hat{h}_k(1) \\ \vdots \\ \hat{h}_k(n-1) \end{bmatrix} \quad (12.3-24)$$

$y(k)$ 为输出的第 k 次测量值; V 为 M 序列的幅值; N_p 为 M 序列的周期长度。

可以看出,该递推公式的意思是根据上一次的脉冲响应的估计值 \hat{h}_{k-1} ,加上新的测量信息 $y(k)$,来递推计算这一次的脉冲响应的估计值 \hat{h}_k 。为了提高互相关函数的计算精度,可以多几个 M 序列的周期。

3. 用 M 序列信号测试系统脉冲响应的具体步骤

(1)估测被测系统的调整时间 T_s 及最高工作频率 ω_{max} (或截止频率 ω_c)。

(2)选择 M 序列的参数 Δ 及 N_p 。

a. 为使 M 序列的有效频带能覆盖被辨识系统的重要工作频区,应满足

$$\Delta \leq \frac{1}{3} \frac{1}{f_{max}} \quad (12.3-25)$$

Δ 愈小, M 序列信号的自相关函数 $R_{uu}(\tau)$ 的图形愈接近于脉冲函数,辨识结果也愈接近于脉冲响应;但 Δ 也不宜过小,否则信号在重要频率范围 $\omega < 2\pi f_{max}$ 内的有效功率太小,反而会使辨识精度降低。

b. 为使脉冲响应 $h(t)$ 在 M 序列的一个周期内近似衰减到零,应满足

$$(N_p - 1)\Delta > T_s$$

或

$$N_p > T_s/\Delta + 1 \quad (12.3-26)$$

通常取

$$N_p = (1.2 \sim 1.5)T_s/\Delta \quad (12.3-27)$$

如果 N_p 选得太小,会使互相关函数 $R_{uy}(\tau)$ 曲线上相邻两个周期的图形发生混叠,致使辨识所得脉冲响应曲线的头部和尾部产生误差;但如 N_p 选得太大,又会使测试时间过长,并使系统运行工况漂移影响增大。

4. 脉冲响应法与最小二乘估计相结合,形成一种称之为两步法的估计方法,可以将非参数模型化成参数模型,详见本章§12-4。

[例 题]

例 12.3-1 试证明用相关法所求得的系统脉冲响应 $\hat{h}(t)$ 是 $h(t)$ 的一个最佳估计。

证

$$\because y(t) = w(t) + v(t)$$

$$\begin{aligned} \therefore R_{uy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y(t)u(t-\tau)dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [w(t) + v(t)]u(t-\tau)dt \\ &= R_{uw}(\tau) + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T v(t)u(t-\tau)dt \end{aligned}$$

考虑到 $v(t)$ 和 $u(t)$ 互不相关,只要有一个为零均值,则

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v(t)u(t-\tau)dt = 0$$

所以有

$$R_{uy}(\tau) = R_{uw}(\tau)$$

从这一证明过程还可以看出,相关辨识法不仅可以得到脉冲响应的最佳估计,而且具有较强的抗干扰的能力。

例 12.3-2 试证明相关辨识所得的估计是无偏的,且具有最小的方差。

证 设 $\hat{h}(t)$ 是系统脉冲响应 $h(t)$ 的一个估计量,只需证 $E\{\hat{h}(\tau)\} = h(\tau)$

设噪声 $v(t)$ 是零均值,系统激励输入量 $u(t)$ 和测量到的输出 $y(t)$ 间的互相关函数为:

$$\begin{aligned} R_{uy}(\tau) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i)u(i-\tau) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [w(i) + v(i)]u(i-\tau) \end{aligned}$$

对 $R_{uy}(\tau)$ 取数学期望则有

$$\begin{aligned} E\{R_{uy}(\tau)\} &= E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [w(i) + v(i)]u(i-\tau)\right\} \\ &= E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [w(i)u(i-\tau)]\right\} \\ &= E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} [h(j)u(i-j)u(i-\tau)]\right\} \\ &= E\left\{\sum_{j=0}^{N-1} h(j) \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} u(i-j)u(i-\tau)\right\} \\ &= E\left\{\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(j)R_{uu}(j-\tau)\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} h(j)R_{uu}(j-\tau) \end{aligned}$$

这正是维纳-何甫方程的离散形式,所以有

$$E\{R_{uy}(\tau)\} = \frac{N+1}{N} a^2 h(\tau) - \frac{a^2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} h(i)$$

但从另一角度来看

$$R_{uy}(\tau) = \frac{N+1}{N} a^2 \hat{h}(\tau) - \frac{a^2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \hat{h}(i)$$

两边取数学期望

$$E\{R_{uy}(\tau)\} = \frac{N+1}{N} a^2 E\{\hat{h}(\tau)\} - \frac{a^2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} E\{\hat{h}(i)\}$$

$R_{uy}(\tau)$ 的两种形式的数学期望应相等,从而有

$$E\{\hat{h}(\tau)\} = h(\tau)$$

即相关辨识所得的估计是无偏的。

例 12.3-3 设被辨识系统的 $t_s = 20\text{min}$, $\omega_c = 1/6$, 试求 M 序列的 Δ 和 N 值。

解 用式(12.3-25)和式(12.3-27)

$$\Delta < \frac{2\pi}{3\omega_c} = \frac{2\pi}{3/6} = 12.5664(\text{s})$$

$$N = (1.2 \sim 1.5) \frac{t_s}{\Delta} = \frac{(1.2 \sim 1.5)20.6}{12.5664}$$

$$= 114.6 \sim 143.2$$

取

$$n = 7$$

$$N = 2^n - 1 = 2^7 - 1 = 127$$

例 12.3-4 某常压加热炉[图 12-7(a)],炉膛温度受所加燃料量的影响。燃料量则与燃料调节阀的压力直接有关,试采用 M 序列辨识燃料压力与炉膛温度之间的动态关系。

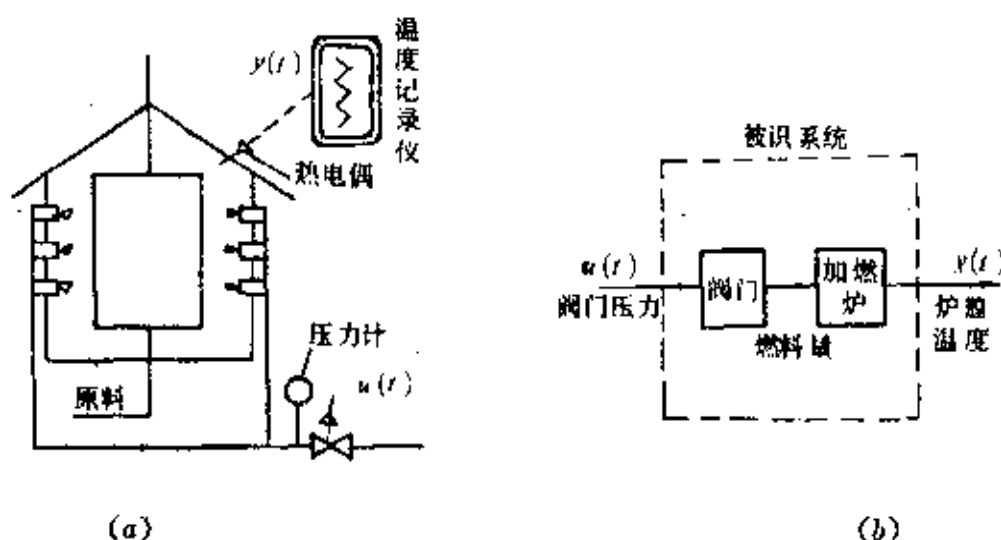


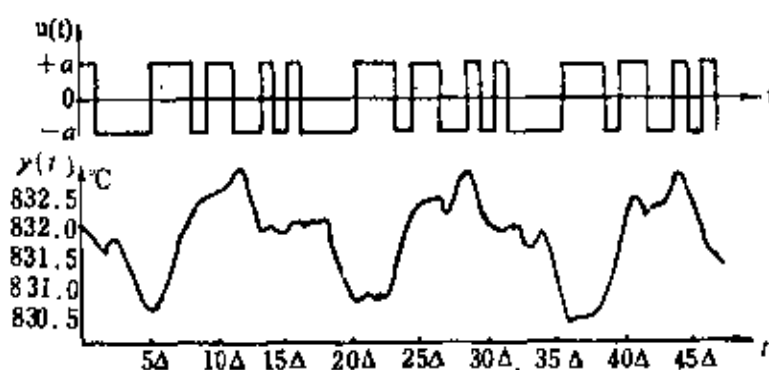
图 12-7 常压加热炉示意图

通过预备试验,预测出对象的过渡过程时间 T_t 不大于 50min,对象的最高工作频率 f_M 低于 0.0012Hz,确定 M 序列的时钟周期 $\Delta = 4\text{min}$, $N_p = 15$,这样,

$$(N_p - 1) > 50\text{min}$$

$$\frac{1}{3\Delta} > 0.0012\text{Hz}$$

用幅度 $V = 0.03\text{kg/cm}^2$ 的 M 序列信号作为燃料压力扰动作用周期以后的炉膛温度记录如图 12-8 所示。



12-8 M 序列及炉膛温度记录曲线

用两个周期的数据来计算互相关函数

$$\begin{aligned} R_{uy}(m) &= \frac{1}{2 \times 15} \sum_{k=0}^{2 \times 15 - 1} u(k-m)y^*(k) \\ &= \frac{1}{30} \sum_{k=0}^{29} u(k)y^*(k+m) \end{aligned}$$

式中 $y^*(k)$ 是输出 $y(k)$ 扣除恒值 830℃ 后得到的数值。

$$u(k) = V \text{sign}\{u(k)\} = 0.03 \text{sign}\{u(k)\}$$

其中

$$\text{sign}\{u(k)\} = \begin{cases} +1 & u(k) = +V \\ -1 & u(k) = -V \end{cases}$$

因而可得

$$\frac{R_{uy^*}(\mu)}{0.03} = \frac{1}{30} \sum_{k=0}^{29} \text{sign}\{u(k)\} y^*(k + \mu)$$

用上面公式计算相当简单,例如在计算 $R_{uy^*}(0)$ 时,可按表 12-4 中 $m=0$ 那一栏中的正负号对应地将 $y^*(k)$ 相加减,最后除以采样值的个数,即

$$\begin{aligned} \frac{R_{uy^*}(0)}{0.03} &= \frac{1}{30} [(2.06 + 0.68 + 0.44 + \dots + 2.82) \\ &\quad - 1.85 + 1.84 + \dots + 2.04] \\ &= -0.303 \end{aligned}$$

表 12-4

k	0	1	2	...	5	6	...	10	...	15	...	28	29	...	40	...	44
$y^*(k)$	2.06	1.85	1.84	...	0.68	0.44	...	2.47	...	1.82	...	2.82	2.04	...	2.28	...	2.06
$m=0$	+	-	-	...	+	+	...	+	...	+	...	+	-	
1		+	-		-	+		+		-		-	+				
\vdots																	
14																	

在计算 $R_{uy^*}(\mu)$ 时,将 $m=0$ 那一栏中的正负号向右移动 μ 后再按上面加法计算即得 $\mu=1, 2, \dots, 14$ 各点相关函数值,全部结果如图 12-9 虚线所示。

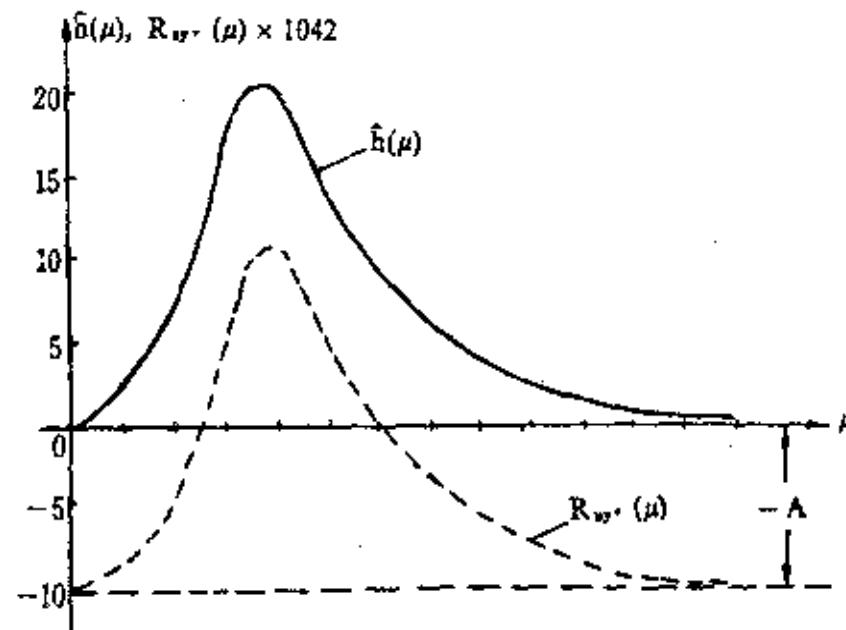


图 12-9 例 12.3-3 中的 $R_{uy^*}(\mu)$ 及 $\hat{h}(\mu)$

最后将 $R_{uy^*}(\mu)$ 平移并除以 $\left(\frac{N_p}{N_p+1}\right) \frac{1}{V^2} = 1042$ 便得脉冲响应曲线,如图 12-9 实线所示。

§ 12-4 系统辨识的最小二乘法

[内容提要]

一、最小二乘算法的基本概念

1. 传统的最小二乘算法

对于线性方程组

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(1) & \cdots & x_n(1) \\ x_1(2) & \cdots & x_n(2) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1(m) & \cdots & x_n(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad (12.4-1)$$

即

$$y = \Phi\theta \quad (12.4-2)$$

当 $m=n$ 时, 可得 θ 的唯一解

$$\theta = \Phi^{-1}y \quad (12.4-3)$$

当 $m>n$ 时, 一般不可能确定一组 θ 使之精确地满足全部 m 个方程, 只能求出在最小误差平方准则下的估计值 $\hat{\theta}$ 。

对于非真值的 θ 代入方程(12.4-1)其误差 e 为

$$e = y - \Phi\theta \quad (12.4-4)$$

选择一组 θ , 使得指标函数

$$J = \sum_{i=1}^m e_i = e^T e \quad (12.4-5)$$

为最小的 θ 是

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \quad (12.4-6)$$

此称为 θ 的最小二乘估计, 简写 LSE。

2. 用最小二乘法估计线性离散系统模型的参数

(1) 参数估计的任务

对于单变量线性定常系统给定的 n 阶离散模型

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) \\ = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_n u(k-n) \end{aligned} \quad (12.4-7)$$

其参数估计的任务是给定输入输出测量值 $\{u(k), y(k)\}, k=1, 2, \dots, N+n$, 估计系统参数 a_i 和 $b_i (i=1, 2, \dots, n)$ 使得系统方程在最小方差意义下与输入输出数据相拟合。

(2) 方程误差与最小二乘准则

若将输入输出测量值 $\{u(k), y(k)\}, k=1, 2, \dots, N+n$ 代入含有待求参数 $a_i, b_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的系统方程式(12.4-7)中, 欲使等式成立必须添加误差项 $e(k)$, 即有

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \cdots + a_n y(k-n) \\ = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \cdots + b_n u(k-n) + e(k) \end{aligned} \quad (12.4-8)$$

$e(k)$ 称为方程误差, 在线性回归理论中被称为残差。

因为有 $N+n$ 组输入输出数据 $\{u(k), y(k)\}$, 所以能引出 N 个方程组

$$\begin{bmatrix} y(n+1) \\ y(n+2) \\ \vdots \\ y(n+N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n) & \cdots & -y(1) & u(n) & \cdots & u(1) \\ -y(n+1) & \cdots & -y(2) & u(n+1) & \cdots & u(2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y(n+N-1) & \cdots & -y(N) & u(n+N-1) & \cdots & u(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(n+1) \\ e(n+2) \\ \vdots \\ e(n+N) \end{bmatrix} \quad (12.4-9)$$

其向量形式为

$$y = \Phi\theta + e \quad (12.4-10)$$

其中

$$y = [y(n+1) \quad y(n+2) \quad \cdots \quad y(n+N)]^T \quad (12.4-11)$$

$$e = [e(n+1) \quad e(n+2) \quad \cdots \quad e(n+N)]^T \quad (12.4-12)$$

$$\theta = [a_1 \quad \cdots \quad a_n \quad b_1 \quad \cdots \quad b_n]^T \quad (12.4-13)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} x^T(n) \\ x^T(n+1) \\ \vdots \\ x^T(n+N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(n) & \cdots & -y(1) & u(n) & \cdots & u(1) \\ -y(n+1) & \cdots & -y(2) & u(n+1) & \cdots & u(2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y(n+N-1) & \cdots & -y(N) & u(n+N-1) & \cdots & u(N) \end{bmatrix} \quad (12.4-14)$$

最小二乘法的误差指标 J

$$J = \sum_{k=n+1}^{n+N} e^2(k) = e^T e \quad (12.4-15)$$

即

$$J = (y - \Phi\theta)^T (y - \Phi\theta) \quad (12.4-16)$$

(3) 参数估计值的解析解

使得误差指标 J 为最小的参数估计值 $\hat{\theta}$ 为

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y \quad (12.4-17)$$

3. 最小二乘估计值的统计特性

(1) 如果系统的噪声是白噪声, 最小二乘估计值是无偏的。即

$$E[\hat{\theta}] = \theta \quad (12.4-18)$$

(2) 如果系统的噪声是白噪声, 其方差为 σ^2 , 则最小二乘估计值的方差阵是

$$E[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T] = \sigma^2 (\Phi^T \Phi)^{-1} \quad (12.4-19)$$

(3) 如果系统的噪声是白噪声, 则最小二乘估计值

$$\hat{\theta}_N = (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T y \quad (12.4-20)$$

是一致的, 即当 $N \rightarrow \infty$ 时, 估计值 $\hat{\theta}_N$ 以概率 1 收敛于真值。

注意, 最小二乘估计值的上述性质都是在假设噪声序列是独立的白噪声的情况下作出的。但是, 关于噪声独立性的假设, 在实际中往往不能得到满足。这使最小二乘的参数估计方法在应用上受到一定的限制。从而派生出辅助变量法, 广义最小二乘法等方法。

二、最小二乘法的计算方法

1. 按公式 $\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$ 直接计算

这不是一个好方法。因为这种算法在计算中要进行求逆运算, 求逆后还要作矩阵乘法。不但计算量较大, 而且精度也不高。

2. 直接求解线性方程 $\Phi^T \Phi \hat{\theta} = \Phi^T y$

因为 $\Phi^T \Phi$ 是个正定矩阵, 求解比较容易。常用的方法有

- (1) 高斯消去法;
- (2) 主元素消去法;
- (3) 平方根法。

3. 评判算法优劣的标准

- (1) 计算精度;
- (2) 计算量大小;
- (3) 所占用的存贮量的大小;
- (4) 算法的复杂程度。

4. “病态”问题

(1) 在解线性方程时, 当常数项或系数稍微变化一点就会引起解的很大变化。这种情况称为“病态”。病态是个很复杂的问题, 无论是在理论上还是在实际中, 至今没能很好地解决。

(2) 对于解方程组来说, 矩阵的病态程度是由矩阵的条件数来度量。矩阵的条件数定义为它的范数与它逆矩阵的范数之积。即

$$P(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \quad (12.4-21)$$

$P(A)$ 越大, A 的病态就越严重。

(3) 病态情况不但与方程组的具体数据有关, 而且随着阶数 n 的增加而剧烈增加。所以对于多变量系统, 病态问题比起单输入单输出系统要突出得多。

(4) 采用 Householder 变换是求解病态方程的有效途径, 读者可参阅[41]。

三、相关分析——最小二乘两步法

1. 基本原理

先用相关分析获得输入信号的自相关函数与输入输出信号的互相关函数 $R_{xy}(\mu)$, 然后把 $R_{xy}(\mu)$ 看成是系统在 $R_{xx}(\mu)$ 输入下的响应。在假设系统模型为

$$\begin{aligned} y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) \\ = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_n u(k-n) \end{aligned}$$

的条件下应用最小二乘法估计参数 \hat{a}_i, \hat{b}_i ($i=1, 2, \dots, n$)

2. 计算公式

$$\hat{\theta} = (S^T S)^{-1} S^T R_{xy} \quad (12.4-22)$$

式中

$$\hat{\theta} = [\hat{a}_1 \quad \dots \quad \hat{a}_n \quad \hat{b}_1 \quad \dots \quad \hat{b}_n] \quad (12.4-23)$$

$$R_{yy} = \begin{bmatrix} R_{yy}(n+1) \\ \vdots \\ R_{yy}(n+N) \end{bmatrix} \quad (12.4-24)$$

$$S = \begin{bmatrix} -R_{yy}(n) & \cdots & -R_{yy}(1) & R_{uu}(n+1) & \cdots & R_{uu}(1) \\ -R_{yy}(n+1) & \cdots & -R_{yy}(2) & R_{uu}(n+2) & \cdots & R_{uu}(2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -R_{yy}(n+N-1) & \cdots & -R_{yy}(N) & R_{uu}(n+N) & \cdots & R_{uu}(N) \end{bmatrix} \quad (12.4-25)$$

四、最小二乘法的改进算法

1. 最小二乘法的统计性质上的无偏性与一致性是在系统噪声为白噪声的假设下获得的。但是在实际问题中,系统的噪声往往是相关的序列,因而所得到的参数估计值是有偏的。为克服最小二乘法的这一缺陷,在最小二乘法的基础上出现了一些诸如广义最小二乘法,辅助变量法等其他算法。

2. 广义最小二乘法

(1) 思路 当系统的噪声是有色噪声时,先将数据经预白化滤波处理,将原来问题中的噪声转化为白噪声。这样采用普通最小二乘法的解便是无偏的估计值。至于预白化滤波处理的多项式

$$C(q^{-1}) = 1 + C_1 q^{-1} + \cdots + C_p q^{-p} \quad (12.4-26)$$

式中的参数 $C_i (i=1, 2, \dots, p)$ 又是用最小二乘法获得的。因此,广义最小二乘法本身就是一个由两套最小二乘法组成的交叉计算过程。一套辨识系统的参数,一套辨识系统的噪声参数,它们互相修正,最终得到系统的参数估计值。

(2) 算法流程

广义最小二乘法的离线算法是一个循环迭代的计算过程。其具体步骤是:

(a) 先令预白化滤波多项式 $C(q^{-1})=1$, 即没有进行滤波,用普通最小二乘法初步计算系统参数估计值 $\hat{\theta}_0 = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$ 。

(b) 计算对于参数 $\hat{\theta}_0$ 下的残差

$$e(k) = \hat{A}(q^{-1})y(k) - \hat{B}(q^{-1})u(k) \quad k = n+1, \dots, n+N \quad (12.4-27)$$

并假设噪声模型 $C(q^{-1})$ 为 p 阶多项式,构造矩阵 Ω

$$\Omega = \begin{bmatrix} -e(n) & -e(n-1) & \cdots & -e(n+1-p) \\ -e(n+1) & -e(n) & \cdots & -e(n+2-p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -e(n+N-1) & -e(n+N-2) & \cdots & -e(n+N-p) \end{bmatrix} \quad (12.4-28)$$

计算噪声参数的估计值 \hat{C}

$$\hat{C} = (\Omega^T \Omega)^{-1} \Omega^T e \quad (12.4-29)$$

式中

$$e = [e(n+1) \quad e(n+2) \quad \cdots \quad e(n+N)]^T \quad (12.4-30)$$

(c) 用 $\hat{C}(q)^{-1}$ 对 $u(k)$ 和 $y(k)$ 进行预白化滤波处理

$$\tilde{u}(k) = \hat{C}(q^{-1})u(k) \quad (12.4-31)$$

$$\tilde{y}(k) = \hat{C}(q^{-1})y(k) \quad (12.4-32)$$

并计算第一步的参数估计值 $\hat{\theta}_1$

$$\hat{\theta}_1 = (\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi})^{-1} \tilde{\Phi}^T \tilde{y} \quad (12.4-33)$$

其中 $\tilde{\Phi}$ 为由 $\tilde{u}(k), \tilde{y}(k), (k=1, 2, \dots, N)$ 按式(12.4-14)所构成的矩阵。

(d) 检验参数估计值是否收敛, 如已收敛, 计算结束。如果还没有收敛, 返回第二步, 计算一直重复下去, 直到 $\hat{\theta}$ 和 \hat{C} 收敛为止。

广义最小二乘辨识算法的流程图如图 12-10 所示。

(3) 两个具体问题

(a) 在实际问题中, $\hat{C}(q^{-1})$ 的阶数 p 可能与系统的阶数相等, 也可能不等。根据经验, $p=2\sim 3$, 经优化后就可获得一个较好的模型。

(b) 检验算法是否收敛的准则是检查参数向量前后两次估计值之差 $\theta_{i+1} - \theta_i$ 的各元素的绝对值是否小于预先所确定的标准, 比如 0.001。

3. 辅助变量法

(1) 思路 对于由 N 组输入输出数据所组成的系统方程

$$\Phi_N \theta = y_N + e_N \quad (12.4-34)$$

在最小二乘法中, 由于估计值

$$\hat{\theta}_{NLS} = (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T (y_N + e_N) = \theta + (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T e_N \quad (12.4-35)$$

能否趋近于真值 θ , 将取决于 $(\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T e_N$ 能否随着 N 趋近无限大而趋近于零。由计算表明: 如果矩阵 Φ_N 与 e_N 相关, 则 $\hat{\theta}_{NLS}$ 不再是一致的和无偏的。为此, 寻求一个与 Φ_N 维数相同且满足下列条件的矩阵 Z

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T e_N = 0 \quad (12.4-36)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z^T \Phi_N = Q \quad (Q \text{ 为某一个非奇异阵}) \quad (12.4-37)$$

使之左乘式(12.4-34)两边, 并解出 θ , 则有

$$\hat{\theta}_{IV} = (Z^T \Phi_N)^{-1} Z^T y \quad (12.4-38)$$

并称估计量 $\hat{\theta}_{IV}$ 为辅助变量估计, Z 为辅助变量阵, 在 Z 中的元素称为辅助变量。

(2) 辅助变量的选择

(a) 由式(12.4-36)和(12.4-37)所给出的 Z 的特性可简单地演译为凡与 e 无关但与 Φ 中的 $u(k)$ 及 $y(k)$ 强相关的量都可选择为辅助变量。

(b) 仅仅依靠式(12.4-36)和(12.4-37)来选择辅助变量阵是很难使参数估计值具有某种最优性。且这两个条件在实际中是很难验证的。

(c) Z 的理想选择为

$$Z = \begin{bmatrix} -y_r(n) & \cdots & -y_r(1) & u(n+1) & \cdots & u(1) \\ -y_r(n+1) & \cdots & -y_r(2) & u(n+2) & \cdots & u(2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_r(n+N-1) & \cdots & -y_r(N) & u(n+N) & \cdots & u(N) \end{bmatrix} \quad (12.4-39)$$

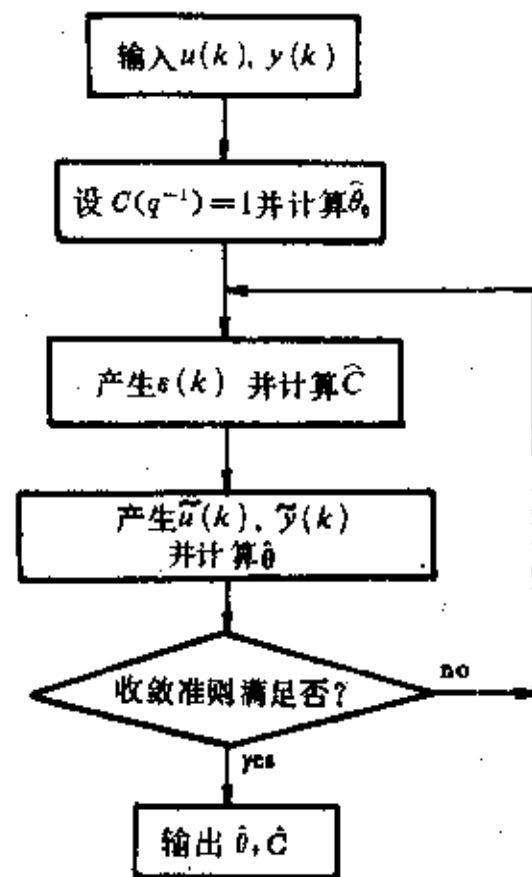


图 12-10 广义最小二乘辨识算法的流程图

式中 $u(k)$ 和 $2n+1$ 阶持续激发的输入, $y_r(k)$ 为系统在 $u(k)$ 激励下输出的精确解。当然 $y_r(k)$ 是不可能获得的, 必须用近似值代替。一个简单的方法是用一个辅助模型的输出值。辅助模型可以选用以系统的最小二乘参数估计值为参数的数学模型。

(3) 计算步骤为

(a) 采集数据;

(b) 用最小二乘法估计参数估计值向量 $\hat{\theta}_1$;

(c) 用 $\hat{\theta}_1$ 中的 $\hat{a}_i, \hat{b}_i (i=1, 2, \dots, n)$ 作辅助模型的参数, 在原数据的基础上计算出该辅助模型的输出值

$$\hat{y}(k) = - \sum_{i=1}^n \hat{a}_i y(k-i) + \sum_{i=1}^n \hat{b}_i u(k-i+1) \quad (12.4-40)$$

(d) 按式(12.4-39)构造辅助变量阵, 即用 $\hat{y}(k)$ 代替 $y_r(k)$ 。

(e) 由式

$$\hat{\theta}_{iv} = (Z^T \Phi)^{-1} Z^T y$$

求出参数估计值, 此即辅助变量法的参数估计值。

(4) 有很多方法可以用来选择辅助变量, 对 Z 的不同选择将会导致估计 $\hat{\theta}_{iv}$ 有不同的结果。但不管何种选择, 辅助变量的效果永远要比最小二乘的估计差些, 辅助变量法优点在于使用方便简单。

五、最小二乘的递推算法

1. 基本概念

在取得一组新的数据(例如第 $N+n+1$ 组)以后, 不用直接求解正则方程, 只要在原来由前 $N+n$ 组数据所算出的估计值 $\hat{\theta}_N$ 的基础上, 根据新取到的数据的新信息进行修正, 就能得到新的估计值 $\hat{\theta}_{N+1}$ 。

最小二乘的递推算法由于方法简单, 容易计算, 每一步所需要的存储单元不多, 用微处理机即可进行, 因此在线辨识和自适应控制中经常使用。

2. 基本最小二乘的递推算法公式

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + P_N x_{N+n} (1 + x_{N+n}^T P_N x_{N+n})^{-1} [y(N+n) - x_{N+n}^T \hat{\theta}_N] \quad (12.4-41)$$

$$P_{N+1} = P_N - P_N x_{N+n}^T (1 + x_{N+n}^T P_N x_{N+n})^{-1} x_{N+n} P_N \quad (12.4-42)$$

式中

$$x_{N+n}^T = [-y(N+n) \quad -y(N+n-1) \quad \dots \quad -y(N+1) \\ u(N+n) \quad u(N+n-1) \quad \dots \quad u(N+1)] \quad (12.4-43)$$

初始值有两种选取方法:

(1) 取 N 组数据 ($N \geq 2n$), 先用离线算法求出 $P_N = (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1}$ 与 $\hat{\theta}_N$, 然后把它们作为递推的初值, 从 $N+1$ 步起递推。

(2) 取 $P_0 = \alpha^2 I$, $\hat{\theta}_0 = 0$, 代入递推公式进行递推。

其中 α^2 是充分大的正数, 通常选择 α^2 满足

$$10^5 \leq \alpha^2 \leq 10^{10} \quad (12.4-44)$$

图 12-11 表示了递推最小二乘法的计算程序。

3. 广义最小二乘法的递推算法

广义最小二乘法的递推算法是由两套递推最小二乘法构成的。一套递推计算系统的参

数估计值 $\hat{\theta}$, 另一套递推计算噪声参数估计值 \hat{c} 。两套递推过程交叉进行, 计算数据互相修正。

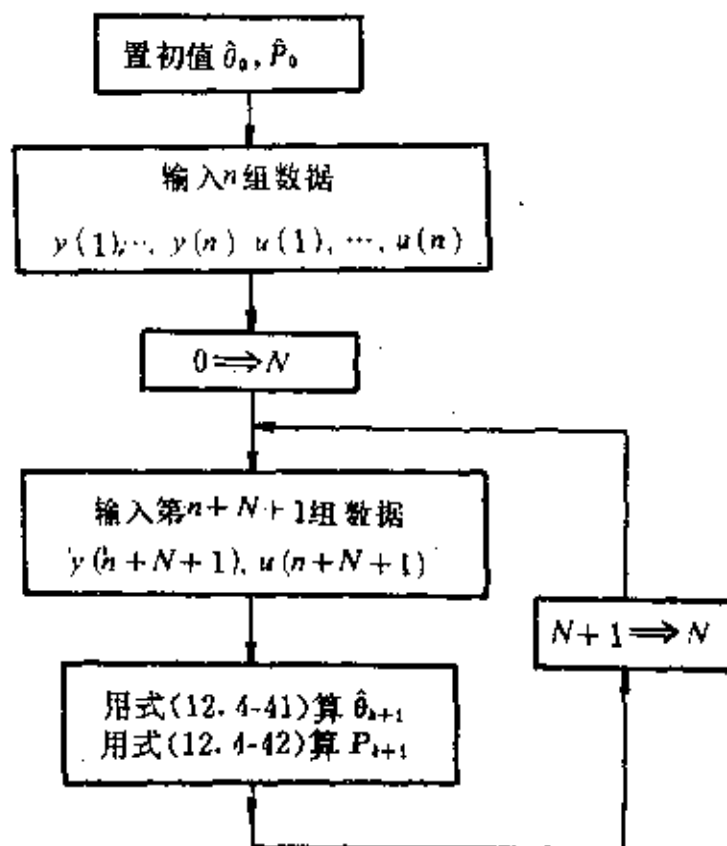


图 12-11 递推最小二乘法计算程序示意图

(1) 对于系统参数估计值 $\hat{\theta}$ 的递推公式

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + P_N \tilde{x}_{N+n}^T (1 + \tilde{x}_{N+n}^T P_N \tilde{x}_{N+n})^{-1} [y(N+n+1) - \tilde{x}_{N+n}^T \hat{\theta}_N] \quad (12.4-45)$$

$$P_{N+1} = P_N - P_N \tilde{x}_{N+n}^T (1 + \tilde{x}_{N+n}^T P_N \tilde{x}_{N+n})^{-1} \tilde{x}_{N+n} P_N \quad (12.4-46)$$

式中

$$\tilde{X}_{N+n}^T = \begin{bmatrix} -\bar{y}(N+n) & -\bar{y}(N+n-1) & \cdots & -y(N+1) \\ u(N+n) & u(N+n-1) & \cdots & u(N+1) \end{bmatrix} \quad (12.4-47)$$

式中

$$\bar{y}(k) = y(k)(1 + \hat{c}_1 q^{-1} + \hat{c}_2 q^{-2} + \cdots + \hat{c}_n q^{-n}) \quad (12.4-48)$$

$$k = N+1, N+2, \dots, N+n$$

$$\bar{u}(k) = u(k)(1 + \hat{c}_1 q^{-1} + \hat{c}_2 q^{-2} + \cdots + \hat{c}_n q^{-n}) \quad (12.4-49)$$

$$k = N+1, N+2, \dots, N+n$$

式中 $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_n$ 为噪声参数估计值 \hat{c} 的各元素, $q^{-1} (i=1, 2, \dots, n)$ 为移位算子。

(2) 对于噪声参数估计值 \hat{c} 的递推公式

$$\hat{c}_{N+1} = \hat{c}_N + Q_N e_{N+n} (1 + e_{N+n}^T Q_N e_{N+n})^{-1} [e(N+n+1) - e_{N+n}^T \hat{c}_N] \quad (12.4-50)$$

$$Q_{N+1} = Q_N - Q_N e_{N+n} (1 + e_{N+n}^T Q_N e_{N+n})^{-1} e_{N+n}^T Q_N \quad (12.4-51)$$

式中
$$e_{N+n}^T = [-e(N+n) \quad -e(N+n-1) \quad \cdots \quad -e(N+1)] \quad (12.4-52)$$

其中
$$e(k) = y(k) - x_{N+n}^T \hat{\theta}_{N+1} \quad k = N+1, N+2, \dots, N+n \quad (12.4-53)$$

(3) 广义最小二乘法的递推算法是由基本最小二乘法开始, 待基本最小二乘法的参数估计值递推到基本上收敛时再转入广义最小二乘法计算。

4. 辅助变量法的递推算法

(1) 把基本最小二乘法公式中的 Φ_N^T 换成 Z_N^T

$$P_N \triangleq [Z_N \Phi]^T \quad (12.4-54)$$

便可得到辅助变量法的递推公式

$$P_{N+1} = P_N - P_N Z_{N+n} (1 + x_{N+n}^T P_N z_{N+n})^{-1} x_{N+n}^T P_N \quad (12.4-55)$$

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + P_N Z_{N+n} (1 + x_{N+n}^T P_N z_{N+n})^{-1} [y(N+n+1) - x_{N+n}^T \hat{\theta}_N] \quad (12.4-56)$$

式中

$$x_{N+n}^T = [-y(N+n) \quad -y(N+n-1) \quad \cdots \quad -y(N+1) \\ u(N+n) \quad u(N+n-1) \quad \cdots \quad u(N+1)] \quad (12.4-57)$$

$$Z_{N+n}^T = [-\hat{y}(N+n) \quad -\hat{y}(N+n-1) \quad \cdots \quad -\hat{y}(N+1) \\ u(N+n) \quad u(N+n-1) \quad \cdots \quad u(N+1)] \quad (12.4-58)$$

其中

$$\hat{y}(N+n+1) = Z_{N+n}^T \hat{\theta}_N \quad (12.4-59)$$

(2) 辅助变量法的递推算法对初始值 P_0 的选择非常敏感。如何选择初值 P_0 和 θ_0 是很重要的。通常有两种方法:

a. 由递推最小二乘法开始计算, 当递推到一定步数(必须超过 $2n$ 步)之后, 再转入上面公式的辅助变量法的递推计算。

b. 选取

$$\hat{\theta}_0 = 0 \\ P_0 = \alpha^2 \cdot I \quad 10^5 \leq \alpha^2 \leq 10^{10}$$

以及

$$\hat{y}(1) = \hat{y}(2) = \cdots = \hat{y}(n) = 0$$

(3) 应当注意, 辅助变量的递推估计与一次完成的估计是不等价的。

六、差分方程与微分方程系数之间的转换关系

差分方程

$$a_0 y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots + a_n y(k-n) \\ = b_1 u(k-1) + \cdots + b_n u(k-n) \quad (12.4-60)$$

与微分方程

$$a_0 \frac{dy^n(t)}{dt^n} + \bar{a}_1 \frac{dy^{n-1}(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + \bar{a}_n y(t) \\ = \bar{b}_1 \frac{du^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + \bar{b}_n u(t) \quad (12.4-61)$$

系数之间的转换关系是

$$A = D_{m+1} \bar{A} \quad (12.4-62)$$

$$B = D_m \bar{B} \quad (12.4-63)$$

式中

$$A = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_n]^T \quad (12.4-64)$$

$$\bar{A} = \left[\frac{\bar{a}_0}{T^n} \quad \frac{\bar{a}_1}{T^{n-1}} \quad \cdots \quad \bar{a}_n \right]^T \quad (12.4-65)$$

$$B = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T \quad (12.4-66)$$

$$\bar{B} = \left[\frac{\bar{b}_1}{T^{n-1}} \quad \frac{\bar{b}_2}{T^{n-2}} \quad \cdots \quad \bar{b}_n \right]^T \quad (12.4-67)$$

D_{m+1} 和 D_m 分别是 $m+1$ 阶和 m 阶方阵,称为转换矩阵,具有下列特点:

1. D_{m+1} 及 D_m 都是下三角阵,其对角线上的元素及最后一行元素的绝对值都是 1。
2. 矩阵中每个元素 d_{ij} 的符号由 $(-1)^{i+j}$ 决定, i 和 j 分别是本元素所在位置的行数和列数。
3. 矩阵中绝对值不等于 1 的其他非零元素的绝对值按下式计算

$$|d_{ij}| = |d_{i+1,j+1}| + |d_{i,j+1}| \quad (12.4.68)$$

例如 $m=4$

$$D_{m+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, D_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[例 题]

例 12.4-1 试用配方法推导最小二乘法的求解公式

$$\hat{\theta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T y$$

解 由式(12.4-16)误差指标 J

$$\begin{aligned} J &= (y - \Phi\theta)^T (y - \Phi\theta) \\ &= y^T y - y^T \Phi\theta - \theta^T \Phi^T y + \theta^T \Phi^T \Phi\theta \end{aligned}$$

将其配成完全平方的形式

$$\begin{aligned} J &= [\Phi^T y - \Phi^T \Phi\theta]^T [\Phi^T y - \Phi^T \Phi\theta] \\ &\quad + [y^T y - y^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y] \end{aligned}$$

若 $\Phi^T \Phi$ 为非奇异,则 $\Phi^T \Phi$ 为正定矩阵, $(\Phi^T \Phi)^{-1}$ 亦为正定矩阵。于是,对于任意向量 z , 标量 $z^T (\Phi^T \Phi)^{-1} z$ 为非负。所以上式中的第一项为非负数。这样,欲使 J 达到最小,就要使第一项为零,即

$$\Phi^T \Phi\theta = \Phi^T y$$

最后得

$$\hat{\theta} = [\Phi^T \Phi]^{-1} \Phi^T y$$

例 12.4-2 设某物体的长度为 X (真值是未知量)。现测量它的长度 N 次,得到 $x(1), x(2), \dots, x(N)$ 共 N 个观测值。试求此物体长度的最小二乘估计值 \hat{X} 。

解 这是一个静态问题,此问题亦可按动态问题来解。对于该问题公式(12.4-17)的 Φ , y 为

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix}$$

$$\therefore \Phi^T \Phi = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = N$$

$$\therefore \hat{X} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y = \frac{1}{N} [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i)$$

即为 N 次观测值的平均值。

例 12.4-3 若把某输入序列 $\{u(1), u(2), \dots, u(N)\}$ 作用于下列单输入—单输出的离散定常线性系统

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1)$$

测得系统的输出序列为 $\{y(1), y(2), \dots, y(N+1)\}$ 。试用最小二乘法计算模型估计参数 \hat{a}, \hat{b} 。

解 对于该问题,公式(12.4-17)中的 Φ, y, θ 为

$$y = \begin{bmatrix} y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(N+1) \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} -y(1) & u(1) \\ -y(2) & u(2) \\ \vdots & \vdots \\ -y(N) & u(N) \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

计算出式中所需要的各个矩阵因子:

$$\Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N y^2(i) & -\sum_{i=1}^N y(i)u(i) \\ -\sum_{i=1}^N u(i)y(i) & \sum_{i=1}^N u^2(i) \end{bmatrix}$$

$$(\Phi^T \Phi)^{-1} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^N u^2(i)\right)\left(\sum_{i=1}^N y^2(i)\right) - \left(\sum_{i=1}^N y(i)u(i)\right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N u^2(i) & \sum_{i=1}^N y(i)u(i) \\ \sum_{i=1}^N u(i)y(i) & \sum_{i=1}^N y^2(i) \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T y = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^N y(i+1) & y(i) \\ \sum_{i=1}^N y(i+1) & u(i) \end{bmatrix}$$

代入公式(12.4-17),得所欲估计的参数值

$$\hat{a} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N y(i)u(i)\right)\left(\sum_{i=1}^N y(i+1)u(i)\right) - \left(\sum_{i=1}^N u^2(i)\right)\left(\sum_{i=1}^N y(i+1)u(i)\right)}{\left(\sum_{i=1}^N u^2(i)\right)\left(\sum_{i=1}^N y^2(i)\right) - \left(\sum_{i=1}^N y(i)u(i)\right)^2}$$

$$\hat{b} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N y^2(i)\right)\left(\sum_{i=1}^N y(i+1)u(i)\right) - \left(\sum_{i=1}^N y(i+1)u(i)\right)\left(\sum_{i=1}^N y(i+1)u(i)\right)}{\left(\sum_{i=1}^N u^2(i)\right)\left(\sum_{i=1}^N y^2(i)\right) - \left(\sum_{i=1}^N y(i)u(i)\right)^2}$$

例 12.4-4 设有两个参数完全相同和系统 S_1 与 S_2 , 它们的初始值相同并在同一个输入序列的作用下运动,若分别受到两个互为逆序列的白噪声序列 $\{v_1\}$ 与 $\{v_2\}$ 的扰动,现使用最

小二乘法对这两个系统辨识,所得到的参数估计值 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 相等吗?

解 分两种情况讨论,若数量 k 为有限的数,不同的噪声序列使系数矩阵 Φ 不相同,必然使计算结果有差异;若 $k \rightarrow \infty$,因参数估计值只与噪声的统计性质有关,而与具体的序列无关,于是 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2 \rightarrow \theta_0$ 。

例 12.4-5 用递推最小二乘法在线辨识冷轧带钢的弹跳方程

$$H = S_0 + K_0 F$$

式中 H 表示轧出厚度, S_0 是相对辊缝, K_0 是机架刚度的倒数, F 是总压力。其中 H 与 F 是可以被量测的。

解 通过仪表测得的一组观测值 $\{H_i, F_i\} i=1, 2, \dots, N$ 。可以写出其观测方程

$$H_i = S_0 + K_0 F_i + e_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

如果令

$$\Phi(N) = \begin{bmatrix} 1 & F_1 \\ 1 & F_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & F_n \end{bmatrix}, \quad y(N) = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} S_0 \\ K_0 \end{bmatrix}$$

并设 e_i 是独立同分布随机变量,且方差等于 1。对于这一稳态方程的递推公式有

$$P(N) = [\Phi^T(N)\Phi(N)]^{-1}$$

$$P(N+1) = P(N) - P(N)\varphi^T(N+1)[1 + \varphi(N+1)P(N)\varphi^T(N+1)]^{-1}$$

$$\hat{\theta}(N+1) = \hat{\theta}(N) + P(N)\varphi^T(N+1)[y_{n+N+1} - \varphi(N+1)\hat{\theta}(N)]$$

式中 $\hat{\theta}(N)$ 和 $\hat{\theta}(N+1)$ 分别为 $n+N$ 个和 $n+N+1$ 个数据对所获得的最小二乘估计值。

$$\varphi^T(N+1) = \begin{bmatrix} -y_{n+N} & -y_{n+N-1} & \dots & -y_{n+1} \\ u_{n+N} & u_{n+N-1} & \dots & u_{n+1} \end{bmatrix}$$

由于

$$P(N) = [\Phi^T(N)\Phi(N)]^{-1} = \begin{bmatrix} p_{11}(N) & p_{12}(N) \\ p_{21}(N) & p_{22}(N) \end{bmatrix}$$

$$\varphi^T(N+1) = [1 \quad F_{N+1}]$$

且 $p_{12}(N) = p_{21}(N)$, 代入递推公式得 $P(N+1)$ 和每个元素的递推关系

$$p_{11}(N+1) = p_{11}(N) - [p_{11}(N) + F_{N+1}p_{12}(N)]^2 \cdot \{p_{11}(N) + F_{N+1}p_{12}(N) + F_{N+1}[p_{12}(N) + F_{N+1}p_{22}(N)] + 1\}^{-1}$$

$$p_{12}(N+1) = p_{12}(N) - [p_{11}(N) + F_{N+1}p_{12}(N)][p_{12}(N) + F_{N+1}p_{22}(N)] \cdot \{p_{11}(N) + F_{N+1}p_{12}(N) + F_{N+1}[p_{12}(N) + F_{N+1}p_{22}(N)] + 1\}^{-1}$$

$$p_{22}(N+1) = p_{22}(N) - [p_{12}(N) + F_{N+1}p_{22}(N)]^2 \cdot \{p_{11}(N) + F_{N+1}p_{12}(N) + F_{N+1}[p_{12}(N) + F_{N+1}p_{22}(N)] + 1\}^{-1}$$

又由

$$\hat{\theta}(N) = \begin{bmatrix} \hat{S}(N) \\ \hat{K}(N) \end{bmatrix}, \quad y_{N+1} = H_{N+1}$$

可得

$$y_{N+1} - \varphi(N+1)\hat{\theta}(N) = H_{N+1} - \hat{S}_0(N) - \hat{K}_0(N)F_{N+1}$$

最后得到估计值

$$\hat{S}_0(N+1) = \hat{S}_0(N) + [p_{11}(N) + F_{N+1}p_{12}(N)]$$

$$\begin{aligned} & \cdot [H_{N+1} - \hat{S}_0(N) - \hat{K}_0(N)F_{N+1}] \\ \hat{K}_0(N+1) &= \hat{K}_0(N) + [p_{11}(N) + F_{N+1}p_{22}(N)] \\ & \cdot [H_{N+1} - \hat{S}_0(N) - \hat{K}_0(N)F_{N+1}] \end{aligned}$$

从而得到轧出厚度的预报值

$$\hat{H}_{N+1} = \hat{S}_0(N) + \hat{K}_0(N)F_{N+1}$$

例 12.4-6 考虑二阶线性动态模型

$$y(k) = a_1y(k-1) + a_2y(k-2) + b_1u(k-1) + b_2u(k-2)$$

试计算用递推最小二乘法估计此二阶系统参数时每一步需要多少存储单元。

解 对于该具体系统应用递推公式(12.4-41)、(12.4-42)和(12.4-43)时引用下列符号,记

$$x_{N+n}^T = [y(N+n) \quad y(N+n+1) \quad u(N+n) \quad u(N+n-1)]$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$P_N = [p_N(i, j)] \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

$$xx(i) = \sum_{j=1}^4 p_N(i, j)x_{N+n}(j) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$Z = (1 + x_{N+n}^T P_N x_{N+n})^{-1} = (1 + \sum_{j=1}^4 xx(j) \cdot x_{N+n}(j))^{-1}$$

$$f = \sum_{j=1}^4 \theta_N(j)x_{N+n}(j)$$

于是递推最小二乘公式(12.4-41)和(12.4-42)写为

$$\theta_{N+1}(i) = \theta_N(i) + xx(i) \cdot z \cdot [y(N+n+1) - f] \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$p_{N+1}(i, j) = p_N(i, j) - xx(i) \cdot xx(j) \cdot z \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

初值为 $\theta_0 = 0 \quad P_0 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & & & \\ & \alpha^2 & & \\ & & \alpha^2 & \\ & & & \alpha^2 \end{bmatrix} \quad 10^5 \leq \alpha^2 \leq 10^{10}$

从第三组数据开始递推。

从上面的计算过程可见,对于本题,递推最小二乘法每一步需要存储单元的数目是

P_{N-1}	$(2n)^2$	16
$P_{N-1}x_{N+n-1}$	$2n$	4
x_{N+n-1}	$2n$	4
θ	$2n$	4
z	1	1
f	1	1
共计存储单元	$(2n)^2 + 6n + 2$	30

所以,用递推最小二乘法估计二阶系统参数时,每一步只需要 30 个存储单元。

例 12.4-7 若 e_i 是均值为零且具有相同方差的独立随机变量序列, Φ 与 e_i 无关, 试证明

(1) $E[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T] = \sigma^2(\Phi^T\Phi)^{-1}$

(2) 如果方差 σ^2 未知, 它可以用下式

$$\sigma^2 = \frac{1}{N - n} (y - \Phi\hat{\theta})^T (y - \Phi\hat{\theta})$$

给出 σ^2 的无偏估计。

证 (i) 先证第一部分

由于

$$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T y$$

而

$$y = \Phi\theta + e$$

即得

$$\hat{\theta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T(\Phi\theta + e)$$

展开后得

$$\hat{\theta} = \theta + (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T e$$

于是

$$\begin{aligned} E[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T] &= E[(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T e e^T \Phi (\Phi^T\Phi)^{-1}] \\ &= (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T \{E[ee^T]\} \Phi (\Phi^T\Phi)^{-1} \end{aligned}$$

由于

$$E[ee^T] = \sigma^2 I$$

所以

$$E[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T] = \sigma^2(\Phi^T\Phi)^{-1}$$

(ii) 再证第二部分, 由(12.4-10)与(12.4-17)有

$$\begin{aligned} y - \Phi\hat{\theta} &= \Phi\theta + e - \Phi[\theta + (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T e] \\ &= [I_N - \Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T]e \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} (y - \Phi\hat{\theta})^T (y - \Phi\hat{\theta}) &= e^T [I_N - \Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T] [I_N - \Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T] e \\ &= e^T [I_N - \Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T] e \end{aligned}$$

对上式两边求数学期望

$$\begin{aligned} E(y - \Phi\hat{\theta})^T (y - \Phi\hat{\theta}) &= E\{e^T [I_N - \Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T] e\} \\ &= E\{\text{Tr}[I_N - \Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T] ee^T\} \\ &= \sigma^2 \text{Tr}[I_N - \Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T] \end{aligned}$$

如果模型中含有 n 个未知参数, 此时 Φ 是 $N \times n$ 阶矩阵, 且因为

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

所以

$$\begin{aligned} \text{Tr}[I_N - \Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T] &= \text{Tr}(I_N) - \text{Tr}[\Phi(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T] \\ &= N - \text{Tr}[(\Phi^T\Phi)(\Phi^T\Phi)^{-1}] = N - n \end{aligned}$$

这样

$$E\{(y - \Phi\hat{\theta})^T (y - \Phi\hat{\theta})\} = \sigma^2(N - n)$$

即有

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-n} (y - \Phi\hat{\theta})^T (y - \Phi\hat{\theta})$$

是 σ^2 的无偏估计。

§ 12-5 传递函数的辨识

[内容提要]

一、系统频率特性的获得

1. 测试法

测试系统频率特性最常用的方法有

(1) 正弦波测试法

在系统的输入端加入正弦信号,当输出信号达稳态时同时记录输入、输出信号。然后求出输出信号对输入信号的振幅比和相位差。每一个频率下进行一次测量,可获得频率特性的一个点。改变信号频率、重复测量若干次便可获得频率特性的一系列离散点。

(2) 相关分析法

信号发生器产生的 $\sin\omega t$ 和 $\cos\omega t$ 信号分别和系统的输出信号 $A\sin(\omega t + \varphi)$ 进行相关计算

$$a_1 = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} A \sin(\omega t + \varphi) \sin \omega t dt = \frac{A \cos \varphi}{2} \quad (12.5-1)$$

$$b_1 = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} A \sin(\omega t + \varphi) \cos \omega t dt = \frac{A \sin \varphi}{2} \quad (12.5-2)$$

于是很容易从 a_1 和 b_1 求得 A 和 φ

$$A = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (12.5-3)$$

$$\varphi = \text{tg}^{-1}(b_1/a_1) \quad (12.5-4)$$

(3) 组合多频信号测试法

为了减少实验测试时间,可把若干个各自具有一定幅值和相位的不同频率的正弦信号组合起来作为输入信号。然后采用谐波分析法将输出信号中各个频率的正弦响应分解出来。组合正弦信号按下列公式构成

$$u(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (12.5-5)$$

A_i, ω_i 及 φ_i 的选择原则是:

- ω_i 的分布在对数刻度上应是均匀的;
- 最低频率应该选择为待测系统的第一个转折频率的 $\frac{1}{2}$ 左右或更低;
- 高频成分的幅度应适当选得大一些;
- 各分量的周期 $T_i = 2\pi/\omega_i$ 应具有较小的最小公倍数;
- 调整各个分量的相位,使组合信号的最大峰值尽可能小。

(4) 矩形波方法

(a) 当输入矩形波频率很高时其高频谐波分量将几乎被系统滤去。输出波形可以看作是一个正弦波。

(b) 当输入矩形波频率较低时, 被测系统的幅频特性 $A(\omega)$ 和相频特性 $\varphi(\omega)$ 的计算公式

$$A(\omega) \approx \frac{\pi}{4} \left[B_1 + \frac{B_3}{3} \cos(3\beta_1 - \beta_3) - \frac{B_5}{5} \cos(5\beta_1 - \beta_5) + \dots \right] \quad (12.5-6)$$

$$\varphi(\omega) \approx \beta_1 + \arcsin \left\{ \frac{1}{\beta_1} \left[\frac{\beta_3}{3} \sin(3\beta_1 - \beta_3) + \frac{\beta_5}{5} \sin(5\beta_1 - \beta_5) + \dots \right] \right\} \quad (12.5-7)$$

式中, B_1, B_3, \dots 是矩形波频率为 $\omega, 3\omega, \dots$ 时输出波形的变程 P 和输入波形的变程 R 的比值 P/R ; β_1, β_3, \dots 是当矩形振荡的频率为 $\omega_1, 3\omega_1, \dots$ 时发生的相位移(以弧度为单位)。

2. 由脉冲响应 $h(nT)$ 求脉冲传递函数 $G(z)$

设系统的脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \\ &= h(0) + h(T)z^{-1} + h(2T)z^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (12.5-8)$$

式中, $h(iT)$ ($i=0, 1, 2, \dots$) 为脉冲响应序列, 令

$$h_i \triangleq h(iT)$$

在已知系统阶数为 n 的情况下, a_i, b_i 可由下式解出

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ h_2 & h_3 & \dots & h_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_{n+1} \\ -h_{n+2} \\ \vdots \\ -h_{2n} \end{bmatrix} \quad (12.5-9)$$

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & & & \vdots \\ a_2 & a_1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & 0 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad (12.5-10)$$

这种方法仅适用于确定性系统, 且其精度取决于步长 T 和 $h(t)$ 的形状。如果在某一步长 T 下, $2n$ 拍内的 $h(iT)$ 能很好地反映脉冲响应的全过程, 则才有可能取得好的结果。

3. 由脉冲响应求频率响应的数值算法

(1) 对于图 12-12(a) 所示脉冲响应 $h(t)$ 的计算公式

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \int_0^T h(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) \end{aligned} \quad (12.5-11)$$

其中

$$\text{Re}(\omega) = \frac{1}{\omega^2 \Delta t} \sum_{i=1}^N \Delta h_i (\cos \omega t_i - \cos \omega t_{i-1}) \quad (12.5-12)$$

$$\text{Im}(\omega) = -\frac{1}{\omega} \left[h_0 + \frac{1}{\omega \Delta t} \sum_{i=1}^N \Delta h_i (\sin \omega t_i - \sin \omega t_{i-1}) \right] \quad (12.5-13)$$

其中

$$\Delta t = T/N = t_{i+1} - t_i \quad (12.5-14)$$

$$\Delta h_i = h_{i+1} - h_i \quad (12.5-15)$$

(2) 对于图 12-12(b) 的阶跃响应 $g(t)$ 可用差商求得一组脉冲响应的离散值。

$$h(t_i) = \frac{g(t_{i+1}) - g(t_i)}{\Delta t} \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (12.5-16)$$

然后再按式(12.5-9)和(12.5-10)计算 $\text{Re}(\omega)$ 和 $\text{Im}(\omega)$ 。

二、由实验频率特性拟合传递函数

1. 图解法

把所获得的频率特性曲线与典型环节的频率特性曲线相对照, 判别该属何种典型环节, 并确定其参数, 进而写出其传递函数的表达式。

(1) 如果实验所得之幅相频率特性近似如图12-13所示的半圆, 则该系统的传递函数可用一阶非周期环节来近似, 即

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1} \quad (12.5-17)$$

其中

$$K = K(0) \quad (12.5-18)$$

$$T = \text{tg} \varphi_k / \omega_k$$

$$(12.5-19)$$

φ_k 是任取某一频率 $\omega = \omega_k$ 时该点的相移。

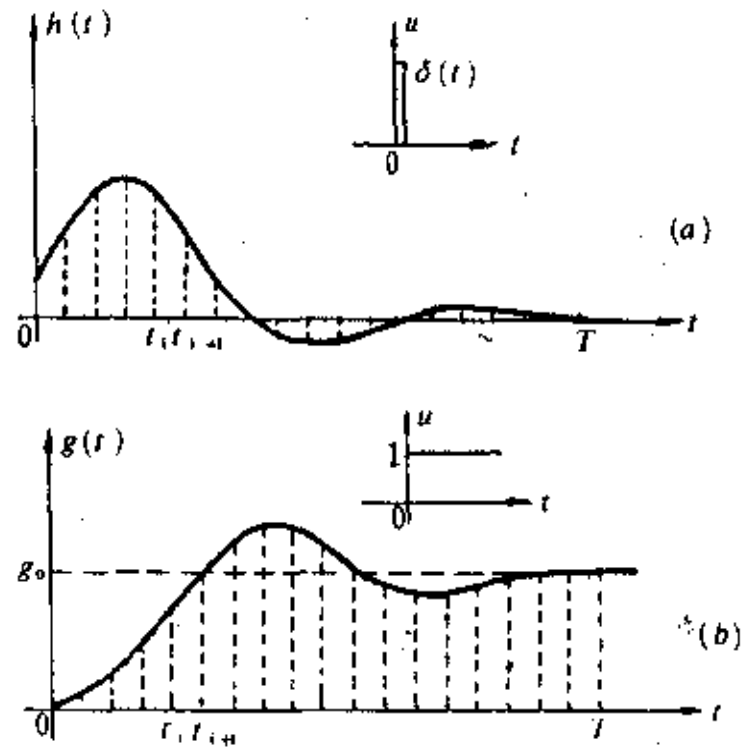


图12-12 脉冲响应与阶跃响应曲线

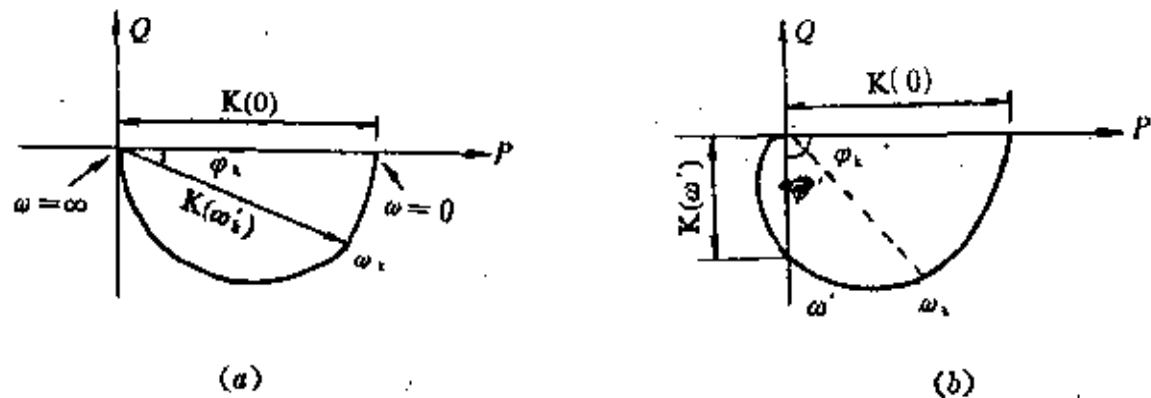


图12-13 一阶环节和二阶环节的幅相特性曲线

(2) 如果幅相频率特性分布在两个象限内, 如图12-13(b)所示, 而且当相移 $\varphi' = \pi/2$ 时,

$$K(\omega) \leq 0.5K(0) \quad (12.5-20)$$

则系统的传递函数可用阻尼系数 $\zeta \geq 1$ 的二阶过阻尼环节来近似, 即

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \quad (\zeta \geq 1) \quad (12.5-21)$$

这时各参数可按下列公式计算

$$K = K(0) \quad (12.5-22)$$

$$2\zeta T = \frac{K(0)}{\omega_k K(\omega_k) \sqrt{1 + (1/\text{tg}^2 \varphi_k)}} \quad (12.5-23)$$

$$T^2 = \frac{1}{\omega_k^2} - \frac{2\zeta T}{\omega_k \text{tg} \varphi_k} \quad (12.5-24)$$

其中 ω_k 和 φ_k 的意义同前。

(3) 若实验所得的幅相特性曲线不满足上面两种情况, 则可用带时延的一阶非周期环节

$$G(s) = \frac{K}{T_s + 1} e^{-\tau s} \quad (12.5-25)$$

或带时延的二阶环节

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta s + 1} e^{-\tau s} \quad (12.5-26)$$

来近似。

对于式(12.5-25)中的参数可以在实验幅相特性曲线上选定某个 $\omega = \omega_k$, 以坐标原点为中心, 以该点的幅值为半径作圆周, 与一阶环节的半圆相交, 从而确定了对应于该 ω_k 下一阶环节的相移 φ_k 和引进纯时延后所增加的相移 φ_{sk} , 结果

$$K = K(0) \quad (12.5-27)$$

$$T = \text{tg} \varphi_k / \omega_k \quad (12.5-28)$$

$$\tau = \varphi_{sk} / \omega_k \quad (12.5-29)$$

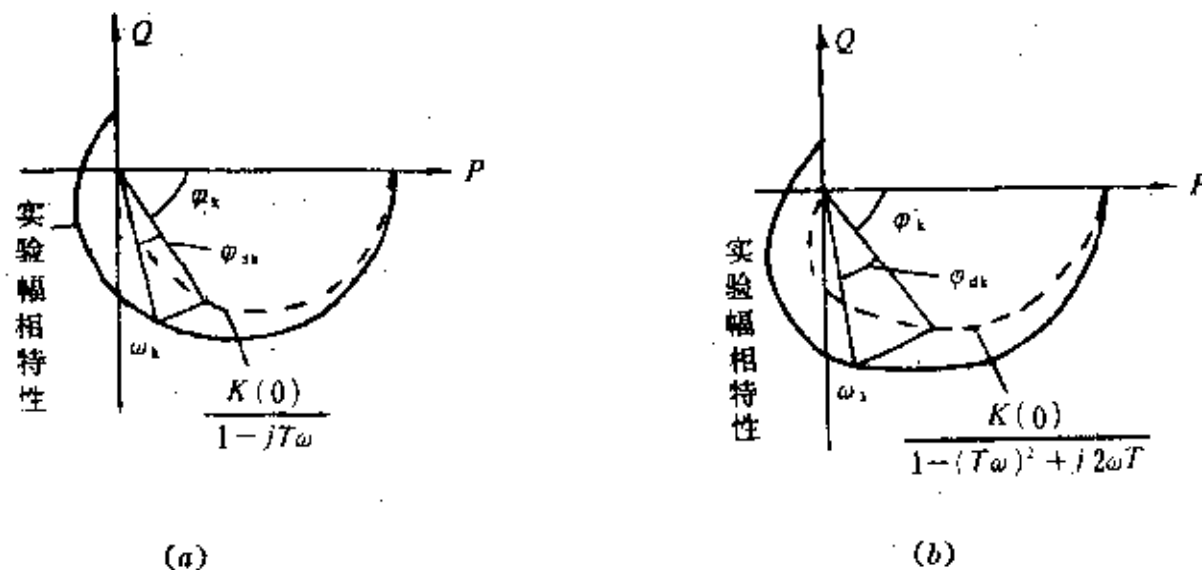


图12-14 带时延的一阶系统和二阶系统实验幅相特性曲线

对于带时延二阶环节的参数其求法与前相同, 只不过用表示 $\zeta=1$ 的二阶环节的近似幅相特性, 如图12-14(b)所示。该曲线可按表12-5所列数据来画。

表 12-5 二阶系统 $\zeta=1$ 的实频特性与虚频特性

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(\omega)/K(0)$	1	0.83	0.48	0.18	0	-0.08	-0.12	-0.125	-0.12	-0.1
$Q(\omega)/K(0)$	0	-0.44	-0.64	-0.62	-0.5	-0.38	-0.28	-0.21	-0.16	-0.095

式(12.5-28,29)中的参数由下列各式算出

$$K = K(0) \quad (12.5-30)$$

$$T = \frac{K(0)}{2\omega_k K(\omega_k) \sqrt{1 + \text{ctg}^2 \varphi_k}} \quad (12.5-31)$$

$$\tau = \varphi_{sk} / \omega_k \quad (12.5-32)$$

2. 加权最小二乘方拟合 (Levy 一次法)

(1) 基本概念

已知系统的实测频率特性

$$G(j\omega_i) = \text{Re}(\omega_i) + j\text{Im}(\omega_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (12.5-33)$$

式中, $\text{Re}(\omega_i)$ 为 $\omega = \omega_i$ 实测频率特性的实部;

$\text{Im}(\omega_i)$ 为 $\omega = \omega_i$ 实测频率特性的虚部;

ω_i 为第 i 次的频率值;

N 为总采样点数。

在假设系统传递函数为

$$\hat{G}(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n} = \frac{Q(s)}{D(s)} \quad (12.5-34)$$

的前提下, 寻求使评价函数

$$J = \sum_{i=1}^N |G(j\omega_i)D(j\omega_i) - Q(j\omega_i)|^2 \quad (12.5-35)$$

为最小的 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ 。

(2) 计算公式

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & -\lambda_2 & \dots & T_1 & S_2 & -T_3 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & -S_2 & T_3 & S_4 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & \dots & T_5 & S_4 & -T_5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_1 & -S_2 & -T_3 & \dots & U_2 & 0 & -U_4 \\ S_2 & T_3 & -S_4 & \dots & 0 & U_4 & 0 \\ T_3 & -S_4 & -T_5 & \dots & U_4 & 0 & U_6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ T_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (12.5-36)$$

式中

$$\lambda_h = \sum_{i=1}^N \omega_i^h \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (12.5-37)$$

$$S_h = \sum_{i=1}^N \omega_i^h \text{Re}(\omega_i) \quad h = 0, 2, 4, \dots \quad (12.5-38)$$

$$T_h = \sum_{i=1}^N \omega_i^h \text{Im}(\omega_i) \quad h = 1, 3, 5, \dots \quad (12.5-39)$$

$$U_h = \sum_{i=1}^N \omega_i^h [\text{Re}^2(\omega_i) + \text{Im}^2(\omega_i)] \quad h = 2, 4, 6, \dots \quad (12.5-40)$$

(3) 几点说明

(a) 模型的精度可按如下拟合误差公式计算

$$\delta = \sum_{i=1}^N \left| \text{Re}(\omega_i) + j\text{Im}(\omega_i) - \frac{Q(j\omega_i)}{D(j\omega_i)} \right|^2 \quad (12.5-41)$$

(b) 参加最小二乘法拟合的数据个数 N , 只须取成使 ω_N 稍大于截止频率 ω_c 即可。若 ω_N 取得过大, 将会把高频干扰带入拟合过程, 反而影响拟合效果。

(c) 若 ω_i 的取值范围伸展到好几个十倍频程, 对应于低频成份的数据所起的影响变得很小, 导致在低频段上不能得到很好的拟合。为此, 应增加低频段上数据的个数, 减少高频段上数据个数的办法来改进。

(d) 若被测系统的传递函数 $G(s)$ 中含有相近的极点, 会引起较大的拟合误差。

(e) 克服前两点缺陷的改进算法是 Santhan 法和山下法。参见[42]。

[例 题]

例12.5-1 设某三阶系统其脉冲响应激励长 $T=0.05s$ 的采样值为

$t(s)$	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3
$h(t)$	0	7.157039	9.491077	8.563889	5.930506	2.845972	0.144611

试求该系统的传递函数。

解 设脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3}}$$

由式(12.5-9)得

$$\begin{bmatrix} 7.157039 & 9.491077 & 8.563889 \\ 9.491077 & 8.563889 & 5.930506 \\ 8.563889 & 5.930506 & 2.845972 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.930506 \\ -2.845972 \\ -0.144611 \end{bmatrix}$$

解出 $a_1 = -2.232575, a_2 = 1.764088, a_3 = -0.496585$ 。

代入式(12.5-10)得

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2.232575 & 1 & 0 & 0 \\ 1.764088 & -2.232575 & 1 & 0 \\ -0.496585 & 1.764088 & -2.232575 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 7.157039 \\ 9.491077 \\ 8.563889 \end{bmatrix}$$

解出 $b_0 = 0, b_1 = 7.157309, b_2 = -6.487547, b_3 = 0$ 。

$$\therefore G(z) = \frac{7.157309z^2 - 6.487547z}{z^3 - 2.232575z^2 + 1.764088z - 0.496585}$$

若欲将离散型模型化为连续型模型,只需解出 $G(z)$ 的三个特征值

$$z_1 = 0.818731, z_{2,3} = 0.706922 \pm j0.326789494$$

由 $z = e^{sT}$ 可导出

$$s_1 \approx -4.0, s_{2,3} \approx -0.5 \pm j8.66022902$$

最后求出

$$G(s) = \frac{200(s+2)}{(s+4)(s^2+10s+100)}$$

例12.5-2 试求图12-15所示实验幅相特性的系统传递函数。

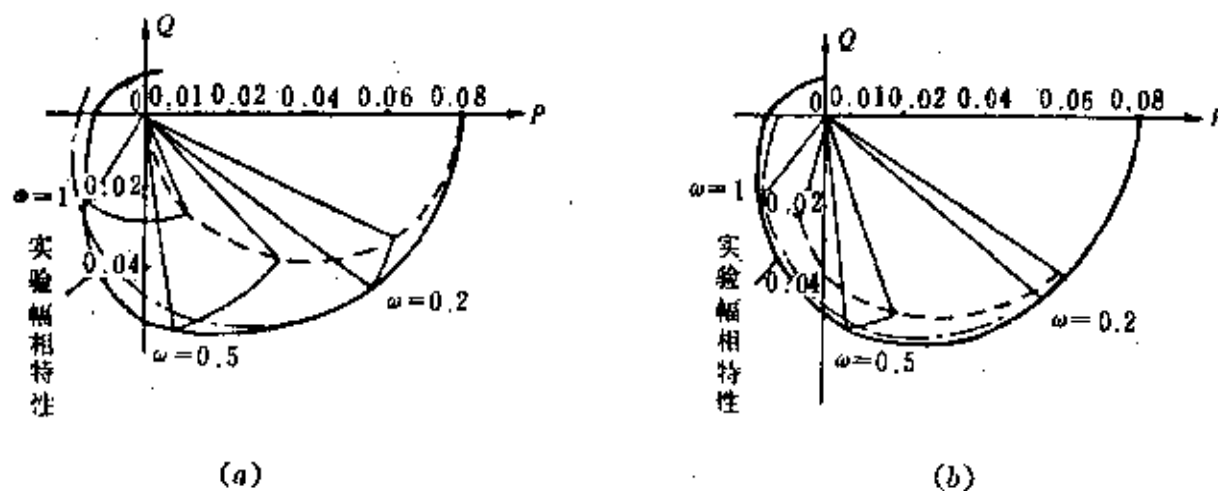


图12-15 例12.5-2中的幅相特性

解 鉴于此幅相特性分布在四个象限中,且不满足不等式(12.5-20),故需分别用带时延的一阶非周期环节和带时延的二阶环节来拟合。

(1)用带时延的一阶非周期环节来拟合

先绘制无时延的一阶环节的幅相特性一直径为 $K(0)=0.08$ 的半圆。然后将频率 $\omega=0.2, 0.5, 1$ 的点从实验曲线上移到一阶环节的幅相特性曲线上,这样就确定了相应的 φ_k 和 φ_{sk} ,如表12-6所示。再按公式(12.5-28)和(12.5-29)计算上述频率下的时间常数 T 和纯时延 τ ,其结果见表12-6。

表 12-6

ω	φ_{sk}	φ_k	τ	T
0.2	12°	25°	1.05	2.33
0.5	68°	47°	1.33	2.14
1	61°	68°	1.07	2.47

最后对所选三种频率的 τ 和 T 取平均值,得

$$\tau = \frac{1.05 + 1.33 + 1.07}{3} = 1.15$$

$$T = \frac{2.33 + 2.14 + 2.47}{3} = 2.31$$

于是,得到一阶带时延的传递函数

$$\hat{G}_1(s) = \frac{0.08}{2.31s + 1} e^{-1.15s}$$

(2)用带时延的二阶环节拟合

先根据表12-4所列数据绘制 $\zeta=1$ 的二阶环节的幅相特性,如图中的虚线所示。然后按同样的方法计算出所选三个频率的时间常数及纯时延 τ ,见表12-7。

表 12-7

ω	K_k	φ_{sk}	φ_k	τ	T
0.2	0.89	4°	34°	0.35	1.56
0.5	0.68	15°	71°	0.53	1.4
1	0.37	24°	105°	0.42	1.3

T 和 τ 的平均值为

$$T = \frac{1.56 + 1.4 + 1.3}{3} = 1.42$$

$$\tau = \frac{0.35 + 0.53 + 0.42}{3} = 0.435$$

于是,得到近似的传递函数为

$$\hat{G}_2(s) = \frac{0.08}{2.02s^2 + 2.84s + 1} e^{-0.435s}$$

若作出 $\hat{G}_1(s)$ 和 $\hat{G}_2(s)$ 的幅相特性,对比可看出,带时延的二阶环节的模型比带时延的一阶非周期环节的模型更好地拟合了实验曲线。

§ 12-6 系统辨识中的一些有关问题

[内容提要]

一、阶的辨识

1. 基于脉冲响应序列的 Hankel 矩阵法

设已知被辨识系统的脉冲响应序列 $h_0, h_1, h_2, \dots, h_N$, 按下式组成 Hankel 矩阵 (简称 H 阵)

$$H(l, k) = \begin{bmatrix} h_k & h_{k+1} & \dots & h_{k+l-1} \\ h_{k+1} & h_{k+2} & \dots & h_{k+l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{k+l-1} & h_{k+l} & \dots & h_{k+2l-2} \end{bmatrix} \quad (12.6-1)$$

(1) 在没有噪声的情况下, 如果 H 阵中的 l 值大于系统的阶数 n 时, H 阵的秩等于系统的阶数。当 $l=n+1$ 时, 对于所有的 k 值, H 阵的行列式等于零。因此, 在无噪声条件下, 可以分别令 $l=1, 2, \dots$, 求出某一个 k 值下的 H 阵的行列式, 直到 H 阵的行列式值等于零为止, 将此时的 l 值减 1 即是系统的阶数。

(2) 在含有噪声的情况下, 为了有效地估计系统的阶数, 可采用下列算法:

(a) 计算每一个 l 值 ($l=1, 2, 3, \dots$) 之下, k 取不同值时 H 阵行列式的平均值—— $\bar{H}(l, k)$ 。

(b) 令

$$D_l \triangleq \left| \frac{\bar{H}(l, k)}{\bar{H}(l+1, k)} \right| \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (12.6-2)$$

(c) 作出 $D_l \sim l$ 曲线, 当 D_l 达极大时的 l 值即为系统阶数的估计值。

2. 基于误差性能指标函数的直接法

(1) 考虑单输入单输出线性模型

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-d-1) + \dots + b_n u(k-d-n) + e(k)$$

式中 n 是模型的阶, d 是滞后时间。显然, n 和 d 唯一确定了这个模型的结构。

(2) 假设系统的阶数是 $n^* = 1, 2, \dots, p$, 滞后时间为 $d^* = 1, 2, \dots, q$ 。在各个假设的阶数与滞后时间下作参数辨识, 然后把不同阶数与滞后时间下得到的残差平方和进行比较, 从中找出最合适的阶数与滞后时间。

(3) 为减少盲目性, 工程上常用如下方法估计滞后时间。假定实际系统的真正阶次为 n_0 , 真正的滞后时间为 d_0 。在 d_0 未知的情况下先考虑一个 n 阶 ($n \geq n_0 + d_0$) 模型

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n)$$

用输入输出数据估计参数得到 $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_n$, 检查参数的估计值找出满足下述条件

$$|\hat{b}_1|, |\hat{b}_2|, \dots, |\hat{b}_n| \ll \sum_{i=1}^n \hat{b}_i \quad (12.6-3)$$

并且

$$|\hat{b}_{\beta+1}| \gg |\hat{b}_\beta| \quad (12.6-4)$$

的整数 β 。于是取 $\hat{d} = \beta$ 作为模型滞后时间的估计值。

(4)用比较损失函数的值来估计模型阶次

这是一个比较直观且简单的常用方法

考虑滞后为 \hat{d} 的 n 阶模型

$$\begin{aligned}
y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) \\
= b_1 u(k-\hat{d}-1) + \dots + b_n u(k-\hat{d}-n) + e(k)
\end{aligned}
\tag{12.6-5}$$

最小二乘估计得到的损失函数值是

$$J = \sum_{k=n+1}^{n+N} e^2(k) \tag{12.6-6}$$

损失函数通常是随着阶数的增加而递减。起初，随着阶数的增高损失函数下降得很快，然后就基本上保持不变，有时还会略微有点回升。

阶数的估计值就是 $J \sim n$ 关系曲线平坦部分左端点处阶的数值。这时损失函数值较小，同时阶数也不太高。为此要检查 $J(n^*+1)$ 与 $J(n^*)$ 。如果它们没有显著的差异， n^* 就是阶数的估计值 \hat{n} 。

4. 显著性检验

(1)为了确定损失函数的“显著”变化，可以采用 F 检验法，这是统计学上的一种基本假设检验方法。

(2)若在所选的阶数 n_1 和 n_2 下进行参数估计所得到的残差平方和分别记为 $J(n_1)$ 和 $J(n_2)$ ；又若残差是独立正态分布的随机变量，则当 $n_2 > n_1 \geq n_0$ 时 (n_0 为理想的真实阶)，则 $J(n_2)$ 与 $[J(n_1) - J(n_2)]$ 也是独立的随机变量，按如下定义

$$f = \frac{J(n_1) - J(n_2)}{J(n_2)} \frac{N - 2n_2}{2(n_2 - n_1)} \tag{12.6-7}$$

为随机变量 f ，当采样点数 N 很大时，随机变量 f 是 $F[f_1, f_2]$ 分布，其中 $f_1 = 2(n_2 - n_1)$ ， $f_2 = N - 2n_2$ 。

(3) F 分布的临界值可以通过查表获得。表12-8给出了在阶数检验中对于 $f_1 = 2$ 情况下常用到的 F 分布的临界值。其中 α 为风险水平 ($1 - \alpha$ 为置信度)。

表 12-8 F 分布表 ($f_1 = 2$)

$f_2 \backslash \alpha$	10	20	30	40	60	80	100	120	∞
0.1	2.92	2.59	2.49	2.44	2.39	2.37	2.36	2.35	2.30
0.05	4.10	3.49	3.32	3.23	3.15	3.11	3.09	3.07	3.00
0.01	17.56	5.85	5.39	5.18	4.98	4.88	4.85	4.79	4.61

(4)根据 F 检验法，若给定一个风险水平 α (通常取 $\alpha = 5\%$)，从 F 分布函数表中可以找到对应于 α 下的 f 的临界值 f_α ，与式(12.6-7)所算出的 f 值比较，若 $f < f_\alpha$ 则表示 $J(n_2)$ 的概率小于 $J(n_1)$ 的概率，则 n_1 就是系统阶的估计值，否则需要增加阶次，继续运算，直到 $f < f_\alpha$ 为止。

(5)从表12-5可以看出；在大样本的情况下 F 分布临界值随 f_2 的变化不大，故可用 $f_2 \rightarrow \infty$ 时的临界值，另外考虑到一般情况是阶数每次增加1， $f_1 = 2$ ，这样在 $\alpha = 0.05$ 的情况下， F 检验的临界值 $f_\alpha = 3.00$ 。所以只要按式(12.6-7)计算出的 f 值小于3.00就可认为损失函数的变化不显著。由于所假定的阶数是由小到大逐渐增加的，所以损失函数第一次出现变

化不显著的点就是曲线平坦部分的左端点。

4. 阶的检验法还有其他一些方法,如零极点对消法,白度检验法,AIC 准则,这里不一一介绍。

二、对测试信号的要求

1. 系统辨识与输入信号之间的关系十分密切,为了辨识动态系统的可控可观部分的动态模型,对输入信号的最低要求是在辨识过程中能使对象内部的动态持续地激励起来,这样的信号被称为持续激励信号。

2. 在一定的噪声统计特征、输入输出信号的幅度和波形需满足某一要求以及一定的辨识记录长度等约束条件下,使模型误差的某个指标为极小的输入信号称最优输入信号,因涉及较多统计理论和优化知识,这里暂不讨论。所幸,对于能用滑动平均方程描述的系统,伪随机二进制序列非常接近最优输入信号。

3. 输入信号的持续激励条件

(1) 对于辨识频率特性来说,要求输入测试信号对系统频率特性 $G(j\omega)$ 的频率范围内所有有关频率上都应该能持续地激励。

(2) 对于相关分析辨识系统脉冲响应函数的情况

相关分析法中平稳输入信号 $\{u(k)\}$ 应满足 $(p+1)$ 阶持续激励条件,即自相关函数序列矩阵

$$R_u = \begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(-\Delta) & \cdots & R_u(-p\Delta) \\ R_u(\Delta) & R_u(0) & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u(p\Delta) & R_u((p-1)\Delta) & \cdots & R_u(0) \end{bmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} R_u(0) \\ R_u(\Delta) \\ \vdots \\ R_u(p\Delta) \end{bmatrix}} \right\} p+1 \quad (12.6-8)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{p+1}$

为正定。

式中, $p=T_s/\Delta$, T_s 为系统脉冲响应的调整时间, Δ 为离散时间间隔。

显然,周期为 $N_s\Delta > T_s$ 的 M 序列信号,因 $N_s \geq p+1$,故总能满足 $p+1$ 阶持续激励条件。

(3) 对于利用输入输出数据辨识动态系统差分方程的情况

采用最小二乘参数估计时,输入信号 $\{u(k)\}$ 应满足 n 阶持续激励条件。即

$$R_u = \begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(-1) & \cdots & R_u(-n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u(n-1) & R_u(n-2) & \cdots & R_u(0) \end{bmatrix} \quad (12.6-9)$$

为正定阵。

4. 采用 M 序列作为测试信号其采样周期和试验长度的选择见 § 12-3 的公式 12.3-26 和 12.3-27。

三、模型检验

1. 检验模型的方法通常采用“白色度”检验法,即比较被辨识系统与模型在一些输入测试信号下的响应,如果残差序列是一个零均值白噪声序列,且其方差尽可能地小,则认为这个模型是满意的。

2. “白色度”的检验方法

(1) 设随机序列为 $\{e(k)\}$, $k=1, 2, \dots, N$, 当且仅当相关系数

$$\rho_i = 0 \quad i > 0 \quad (12.6-10)$$

时,残差序列 $\{e(k)\}$ 为白色序列。

其中

$$\rho_i = R_e(i)/R_e(0) \quad (12.6-11)$$

式中, $R_e(i)$ 为 $\{e(k)\}$ 的自相关函数

$$R_e(i) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-i} \sum_{k=1}^{N-i} e(k)e(k+i) \quad (12.6-12)$$

(2)检验有限长度随机序列白色度的方法

(a)方法一 如果 ρ_i 满足下列条件

$$|\rho_i| \leq \frac{1.95}{\sqrt{N}} \quad i \geq 1 \quad (12.6-13)$$

则在置信度极限为95%的条件下,可将 $\{e(k)\}$ 近似当成白噪声序列。据经验取 $i \leq 20$ 即可。

(b)方法二 当 m 值足够大,在置信度极限为95%的情况下,随机序列 $\{e(k)\}$ 的相关系数满足下列条件时

$$N \sum_{i=1}^m \rho_i \leq (m + 1.65 \sqrt{2m}) \quad (12.6-14)$$

则可近似认为 $\{e(k)\}$ 为白噪声序列。经验取 $m=2$ 已足够。

四、闭环条件下辨识

1. 闭环条件下辨识的主要问题是估计闭环系统中正向通道的数学模型。

2. 闭环条件下系统辨识要比开环系统辨识复杂得多,原因在于:

(1)在闭环系统中,噪声与正向通道的控制输入信号之间一般来说都会通过反馈而互相关。

(2)闭环系统中正向通道数学模型的阶数不能通过闭环条件下的辨识获得。

(3)闭环条件下,即使正向通道数学模型的阶数已知,在一般情况下也不可能用开环辨识的方法来估计正向通道模型的参数。

3. 可以证明,在反馈不造成闭环传递函数零极相消时,而且反馈通道的阶不小于开环系统的阶时,系统是可以辨识的。

[例 题]

例12.6-1 设某系统的脉冲响应序列如下表所列

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_k	1.0	0.8	0.65	0.54	0.46	0.39	0.35	0.31	0.28	0.26	0.24
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
g_k	0.23	0.22	0.21	0.20	0.19	0.19	0.18	0.18	0.18	0.17	0.17
k	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
g_k	0.17	0.16	0.16	0.15	0.15	0.15	0.14	0.14	0.14	0.13	0.13
k	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
g_k	0.13	0.13	0.13	0.12	0.12	0.12	0.12	0.11	0.11	0.11	0.11
k	44	45	46	47	48						
g_k	0.11	0.10	0.10	0.10	0.10						

试用 Hankel 矩阵法估计系统的阶。

解 经计算得到

$$\begin{aligned} H(2,k) &= 0.00087872, & H(3,k) &= -0.00029311, \\ H(4,k) &= -3.214 \times 10^{-7}, & H(5,k) &= -5.709 \times 10^{-9}, \\ D_2 &= 2.998, & D_3 &= 911.9, & D_4 &= 56.296. \end{aligned}$$

$l=3$ 时, D_l 达极大, 故系统阶数的估计值为3。

例 12.6-2 某系统由输入/输出对 $\{u(i), y(i)\}$, $i=1, 2, \dots, 293$, 使用最小二乘估计公式求得阶数 $n=1, 2, 3, \dots, 7$ 时的参数估计值 $\hat{a}_1, \hat{b}_1, J_1$ 如表 12-9 所示。试用 F 检验法确定该系统的阶。

表 12-9

n	a	b	J	ΔJ	F
1	-0.643	1.018	592.25		
2	-1.015 0.377	1.086 -0.520	496.64	123.01	50.94
3	-1.118 0.624 -0.178	1.115 -0.660 0.263	447.25	22.39	9.67
4	-1.157 0.756 -0.412 0.187	1.085 -0.733 0.409 -0.146	426.40	20.85	9.43
5	-1.185 0.814 -0.518 0.349 -0.117	1.080 -0.745 0.475 -0.252 0.123	418.72	7.68	3.51
6			416.56	2.16	0.99
7			414.62	1.94	0.89

解 应用公式(12.6-7)计算模型阶数 $n=2, 3, \dots, 7$ 的 $f_i (i=2, 3, \dots, 7)$ 。

$$f_2 = \frac{J(n_1) - J(n-2)}{J(n_2)} \frac{N - 2n_2}{2(n_2 - n_1)} = \frac{592.25 - 469.64}{469.64} = \frac{293 - 4}{2(2 - 1)} = 50.94$$

同理, 算得 $f_3=9.67, f_4=9.43, f_5=3.51, f_6=3.51, f_7=0.89$ 。

现给定风险水平 $\alpha=0.05$, 由于 $N>100$, 单输入单输出系统阶数从 n 增加到 $n+1$ 时参数增加2个, 由 F 分布表查得临界值

$$F(2, 100) = 3.09$$

因为 $N>100$, 此时变量 f 至少大于3, 损失函数的减小才是显著的(置信度为0.95)。

由计算表明, 当系统阶数由4增加到5时, $f_5=3.51>3.09$; 而当阶数再增加时,

$f_5 = 0.99 < 3.09$, 即 J 的减少是不显著的, 所以应采用5阶系统作为该系统的模型。将 \hat{a}, \hat{b} 代入模型方程, 有

$$\begin{aligned} y(k) &= 1.19y(k-1) + 0.81y(k-2) - 0.52y(k-3) + 0.35y(k-4) - 0.12y(k-5) \\ &= 1.08u(k-1) - 0.75u(k-2) + 0.48u(k-3) \\ &\quad - 0.25u(k-4) + 0.12u(k-5) \end{aligned}$$

例12.6-3 设根据某系统模型与实际系统输出之间的残差序列 $\{e(k)\}$ 的38个数据, 经计算得到下列10个相关系数的值为

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 0.138 & \rho_2 &= -0.034 & \rho_3 &= -0.005 & \rho_4 &= 0.012 \\ \rho_5 &= -0.130 & \rho_6 &= 0.015 & \rho_7 &= -0.272 & \rho_8 &= 0.112 \\ \rho_9 &= -0.171 & \rho_{10} &= -0.032 \end{aligned}$$

试利用两种白色度检验方法检验所辨识的模型是否可取。

解 第一种方法, 因

$$\frac{1.95}{\sqrt{N}} = \frac{1.95}{\sqrt{38}} = 0.316$$

从给出的 $\rho_i (i=1, 2, \dots, 10)$ 可知, $|\rho_i| < 0.316$, 故所辨识的模型是可取的。

第二种方法, 当 $m=10$ 时

$$N \sum_{i=1}^{10} \rho_i^2 = 38 \sum_{i=1}^{10} \rho_i^2 = 5.832$$

而

$$(m+1.65\sqrt{2m})|_{m=10} = 17.38 > 5.832$$

故所辨识的模型是可取的。可见两种方法结论是一致的。

例12.6-4 设一阶模型

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + e(k)$$

具有反馈调节

$$u(k) = \beta y(k)$$

试证明该系统的参数 a, b 在闭环条件下不能得到估计。

证 若用最小二乘估计, 其目标函数

$$J(a, b) = \sum_{k=1}^N [y(k+1) + ay(k) - bu(k)]^2$$

达到最小。用任意数 α 乘 $u(k) = \beta y(k)$ 两边, 移项得

$$- \alpha u(k) + \alpha \beta y(k) = 0$$

代入目标函数中, 得

$$\begin{aligned} J(a, b) &= \sum_{k=1}^N [y(k+1) + (a + \alpha\beta)y(k) - (\alpha + b)u(k)]^2 \\ &= J[a + \alpha\beta, \alpha + b] \end{aligned}$$

因此, 使 J 达到极小的参数可能是 a, b , 也可能是 $a + \alpha\beta, \alpha + b$ 。所以参数 a, b 不能在闭环条件下得到估计。

习 题

12-1 设 M 序列

$$\{a_n\} = 1110100, 1110100, \dots$$

求 $\{a_n\} + \{a_{n-4}\} = \{a_{n-4}\}$ 中的 τ' 。

12-2 设有一个四位移位寄存器, 反馈取自第四级与第一级的输出的模2加法和, 试说明:

1. 其输出序列是否是 M 序列;
2. 它与取自第四级与第三级输出模2加法和所得序列有何不同。

12-3 试证明逆重复序列与原 M 序列互不相关。

12-4 试设计一线性反馈移位寄存器使其产生的 M 序列为

$$\{a_n\} = 1101001, \dots$$

12-5 试证明相关辨识所得估计 $\hat{h}(\tau)$ 具有最小方差。

12-6 某系统过渡时间 t_d 为 20 分钟, 截止周期约为 6s, 若在相关辨识中选取伪随机序列参数 $N_p = 63, M = 20s$, 问这样选取 M 序列的参数是否可行?

12-7 在用伪随机序列辨识系统时, 在试验中为何要预先给系统施加一个预激励?

12-8 有一个双输入双输出的线性系统, 如果用电平宽度为 Λ , 幅度为 V 的 127 码的伪随机信号和位移 63 码的移位序列信号同时输入系统的输入端, 对系统进行辨识。

- (1) 叙述这种辨识方法的依据;
- (2) 列出辨识该系统脉冲响应阵的计算公式。

12-9 试用向量到子空间距离的概念证明最小二乘法的正则方程。

12-10 考虑一个一阶定常线性系统

$$y(t) + ay(t-1) - bu(t-1) = e(t)$$

若输入是独立随机变量序列, 试用输入输出数据估计系统参数 \hat{a} 和 \hat{b} 。

12-11 对于某二阶系统其量测数据如表 12-10 所列, 试在计算机上计算该二阶系统的参数 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2$ 。

表 12-10

k	u	y	k	u	y
1	-1.0	-1.2014	11	1.0	3.7085
2	1.0	-2.7922	12	1.0	2.9304
3	1.0	0.4148	13	1.0	2.2209
4	1.0	-2.1893	14	-1.0	2.3781
5	1.0	0.6690	15	-1.0	-1.2573
6	-1.0	5.7227	16	1.0	-1.5446
7	1.0	8.4379	17	-1.0	-2.8305
8	-1.0	10.0951	18	-1.0	-4.3165
9	-1.0	9.9709	19	1.0	-6.2645
10	-1.0	6.9914	20	-1.0	-5.5518

12-12 试画出广义最小二乘算法的示意图。

12-13 试分析广义最小二乘法的离线算法与递推算法是否等价?

12-14 广义最小二乘的递推算法中,矩阵 P, Q 及噪声向量 \hat{e} 的初值如何选择。

12-15 试比较辅助变量法与广义最小二乘法的优缺点。

12-16 考虑系统

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k)$$

试证明

$$W_N = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) \\ \vdots & \vdots \\ u(k-1) & u(k) \\ \vdots & \vdots \\ u(N-1) & u(N) \end{bmatrix}$$

是一个合适的辅助变量矩阵。

12-17 试将二阶差分方程

$$y(k) + a_{1y}(k-1) + a_{2y}(k-2) = bu(k-1)$$

转换为二阶微分方程,(设采样周期为 T)。

12-18 某二阶系统用 BT-6 频率测试仪所记录的频率响应数据如下表所列

$f(Hz)$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.06	0.08	0.1	0.13
R_r	0.980	0.915	0.840	0.775	0.68	0.595	0.525	0.430
I_m	-0.180	-0.225	-0.280	-0.320	-0.360	-0.385	-0.405	-0.410

试用 Levy 一次法计算系统模型。

12-19 概述 Levy 一次法的缺陷及改进措施。

12-20 在对某系统进行阶数辨识时,采用 $N=100$ 的输入输出数据求得损失函数为

n	1	2	3	4	5
J	262.0137	193.6729	182.5233	181.5750	181.9031

试用损失函数法和 F 检验法判定其阶数。

12-21 对于损失函数定阶法,在不同阶数下求损失函数之值时是否要求数据个数一样多。

12-22 某生物系统,根据它的 48 点输入输出数据分别确定了两个数学模型 H_1 和 H_2 , (H_1 为二阶, H_2 为三阶) 采用白色度检验法求出 H_1 的相关系数为

$$\begin{array}{lll} \rho_1 = -0.56458 & \rho_2 = 0.09653 & \rho_3 = 0.13508 \\ \rho_4 = 0.11014 & \rho_5 = 0.31377 & \rho_6 = -0.41380 \\ \rho_7 = 0.38314 & \rho_8 = 0.9211 & \end{array}$$

H_2 的前 10 个相关系数为

$$\begin{array}{lll} \rho_1 = -0.25837 & \rho_2 = 0.36306 & \rho_3 = 0.19174 \\ \rho_4 = 0.12296 & \rho_5 = 0.10717 & \rho_6 = -0.28881 \\ \rho_7 = 0.16158 & \rho_8 = -0.03092 & \rho_9 = 0.08611 \\ \rho_{10} = 0.04443 & & \end{array}$$

试确定何者为佳?

附 录

向量空间与矩阵理论的基础知识

一、子空间

1. 定义 设 X^n 是一 n 维线性空间, 若 $X_s \subset X^n$ 是满足下列条件的向量集合

(1) 若 $x \in X_s$, 则对任意常数 $\alpha \in F$, 有 $\alpha x \in X_s$.

(2) 若 $x_1, x_2 \in X_s$, 有 $x_1 + x_2 \in X_s$.

那么 X_s 所构成的线性空间称为 X^n 的一个子空间。

2. 设 v_1, v_2, \dots, v_m 是 X^n 中的向量, 按如下线性组合

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m \quad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \text{ 为任意实数})$$

所形成的全部向量构成的集合 $X_s \subset X^n$, 是 X^n 的一个线性子空间, 称为由 v_1, v_2, \dots, v_m 所张成的子空间, 记为

$$X_s = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \quad (A-1)$$

3. 设 $v'_1, v'_2, \dots, v'_l (l \leq m)$ 是 v_1, v_2, \dots, v_m 的极大线性无关组, 则

$$\begin{aligned} X_s &= \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \\ &= \text{span}\{v'_1, v'_2, \dots, v'_l\} \end{aligned}$$

即

$$\dim X_s = l \quad (A-2)$$

4. 设 X_1, X_2 是 X^n 中的两个子空间, 若 $X_1 \cap X_2 = 0$, 则 $X_1 + X_2$ 称为 X_1 与 X_2 的直接和, 记为

$$X_1 \oplus X_2$$

显然

$$\dim\{X_1 \oplus X_2\} = \dim\{X_1\} + \dim\{X_2\} \quad (A-3)$$

5. 设 X_1, X_2, \dots, X_s 是 X 的子空间, 如果有

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \dots \oplus X_s \quad (A-4)$$

则称上式为空间的一个分解。

二、几个基本矩阵运算

1. 矩阵的秩

(1) 定义 $m \times n$ 阶矩阵 A 中不等于零的子式的最大阶数为矩阵 A 的秩, 记作 $\text{rank} A$ 。

由定义, 显然有

$$\text{rank} A \leq \min(m, n) \quad (B-1)$$

(2) 由列(行)向量所张成的向量空间称为 A 的列(行)空间, 其维数定义为矩阵 A 的列(行)秩。

(3) 矩阵的行或列的初等变换不改变其秩。

(4) 两个矩阵乘积的秩满足西勒维斯特(Sylvester)不等式

$$\text{rank} A + \text{rank} B - n \leq \text{rank}(A B) \leq \min(\text{rank} A, \text{rank} B) \quad (B-2)$$

2. 矩阵的初等变换

(1) 定义 下列三种变换统称为矩阵的行(列)初等变换

- 将矩阵的某一行(列)乘以一个非零的数。
- 将矩阵的两行(列)互换位置。
- 将矩阵的某一行(列)乘以一个数并加到另一行(列)上去。

(2) 定义 若矩阵 A 可经初等变换变为 B , 则称 A 等价于 B , 或称 A 与 B 等价。

可证明, A 与 B 等价的充要条件是

$$\text{rank } A = \text{rank } B \quad (\text{B-3})$$

(3) 对于 $m \times n$ 矩阵 A , 对 A 施行一次行(列)的初等变换, 其结果等于在 A 的左(右)边乘以相应的 $m(n)$ 阶初等方阵。

3. 常用求逆公式。

$$(1) \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A \quad (\text{B-4})$$

$$(2) \quad \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS \\ \hline -S^{-1}CD & S^{-1} \end{array} \right) \quad (\text{B-5})$$

式中

$$S = D - CA^{-1}B \quad (\text{B-6})$$

(3) 初等变换求逆阵的方法:

设 A 是可逆方阵, 如果对组合矩阵 $[A \mid I]$ 的行(注意, 不要对列)进行初等变换, 那么把 A 变为单位矩阵的同时也就使 I 变成了 A^{-1} 。

三、线性变换

1. 定义 对于 X^n 的任意元素 x_1, x_2 和数域 F 上的标量 λ , 有

$$\mathcal{A}(x_1 + x_2) = \mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2) \quad (\text{C-1})$$

$$\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}(x) \quad (\text{C-2})$$

成立, 称 \mathcal{A} 为线性变换(或称线性算子)。

矩阵是在空间坐标已经确定的情况下的一个线性变换的数学表示。 $m \times n$ 矩阵 A 组成了一种线性变换 $\mathcal{A}: R^n \rightarrow R^m$, 而其转置 A^T , 则是另一种变换 $\mathcal{A}^T: R^m \rightarrow R^n$ 。

2. 线性变换的结构

(1) A 的象空间 $m \times n$ 矩阵 A 的象空间是由下式定义的 R^m 的子空间, 记为 $\text{Im}(A)$

$$\text{Im}(A) \triangleq \{y \in R^m; y = Ax \quad x \in R^n\} \quad (\text{C-3})$$

由于 Ax 是 A 各列的线性组合, 所以有

$$\text{Im}(A) = \text{span}(A) \quad (\text{C-4})$$

且

$$\text{rank } A = \dim[\text{Im}(A)] \quad (\text{C-5})$$

(2) A 的零空间 $m \times n$ 矩阵 A 的零空间是由下式定义的 R^n 的子空间, 记为 $N(A)$

$$N(A) \triangleq \{x \in R^n; Ax = 0\} \quad (\text{C-6})$$

A 的零空间又称为 A 的核, 记为 $\text{Ker} A$ 。

因为 $N(A)$ 由正交于 A^T 各列向量的全部向量所组成, 故有

$$N(A) = [\text{span}(A^T)]^\perp = \text{Im}(A^T)^\perp \quad (\text{C-7})$$

式中符号 \perp 表示正交。

(3) A 的不变子空间 若 X^n 的一个子空间 $X_{\nu s}$ 中的向量 x 在变换 A 的作用下仍在 $X_{\nu s}$ 中,即

$$Ax \in X_{\nu s} \quad \text{对于 } x \in X_{\nu s} \quad (C-8)$$

则称 $X_{\nu s}$ 是 A 的不变子空间。

容易证明, n 维空间 X^n 可分解为对 A 的不变子空间的直接和

$$X^n = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_s \quad (C-9)$$

的充要条件是在适当坐标下该变换的矩阵 A 有对角分块形式

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{bmatrix} \quad (C-10)$$

(1) 对一个秩为 p 的 $m \times n$ 矩阵 A , 空间 R^m 和 R^n 可分解成

$$R^m = \underset{(p \text{ 维})}{\text{Im}(A^T)} \oplus \underset{(n-p \text{ 维})}{N(A)} \quad (C-11)$$

$$R^n = \underset{(p \text{ 维})}{\text{Im}(A)} \oplus \underset{(n-p \text{ 维})}{N(A^T)} \quad (C-12)$$

3. 特征值与特征向量

(1) 定义 设 A 是 n 维复向量空间 C^n 中的某一线性变换, 如果在 C^n 中存在非零向量 v , 在变换 A 作用下, 使

$$Av = \lambda v \quad (C-13)$$

则称 λ 为 A 的特征值, 任何满足上式的非零向量 v 称为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量。

$$\text{多项式} \quad \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \quad (C-14)$$

称为 A 的特征多项式。

$$\text{方程} \quad \det(\lambda I - A) = 0 \quad (C-15)$$

称为 A 的特征方程。

(2) 寻求矩阵 A 的特征向量的问题实质上就是求 A 的一维不变子空间。

4. 线性变换的相似关系。

(1) 若线性变换 \mathcal{A} 对于坐标 $[e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n]$ 和 $[e_1^* \ e_2^* \ \cdots \ e_n^*]$ 其矩阵分别为 A 和 \hat{A} , 它们的关系是

$$\hat{A} = P^{-1}AP \quad (C-16)$$

式中 P 为坐标变换阵

$$P = [p_1 \ p_2 \ \cdots \ p_n] \quad (C-17)$$

其中 $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是 e_i 关于坐标 $[e_1^* \ e_2^* \ \cdots \ e_n^*]$ 的表示。

满足式(C-16)的 A 和 \hat{A} 称为相似矩阵。

(2) 可以证明, 相似矩阵具有相同的行列式

$$\det A = \det \hat{A} \quad (C-18)$$

和特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - \hat{A}) \quad (C-19)$$

(3)在现代控制理论中,经常需要寻找某种坐标变换阵 P ,使能将给定矩阵 A 化为某种所需要的标准形式 \hat{A} 。

5. 矩阵的对角形化

设 $n \times n$ 矩阵 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互异,相应的特征向量 v_1, v_2, \dots, v_n 是线性无关的,若以 v_1, v_2, \dots, v_n 为列向量构造矩阵 P 作为坐标变换阵

$$P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \quad (C-20)$$

则有

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (C-21)$$

四、矩阵的约当形化

若 $n \times n$ 矩阵 A 具有多重特征值, A 不一定能化成对角形矩阵,但可化为约当标准形。

1. 约当块与约当矩阵

定义:形如

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (D-1)$$

的矩阵称为约当块,由若干约当块组成的分块对角矩阵称为约当矩阵,其标准分块形式为

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_t \end{bmatrix} \quad (D-2)$$

其中

$$J_j = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & & \\ & \lambda_j & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \lambda_j \end{bmatrix}}_{m_j} \quad j = 1, 2, \dots, t \quad (D-3)$$

2. 广义特征向量

矩阵 A 的特征值 λ 有重根时, 需要将特征向量的概念作如下扩展

(1) 定义 设 k 为正整数, 把同时满足如下二式

$$(A - \lambda I)^k v = 0 \quad (D-4)$$

$$(A - \lambda I)^{k-1} v \neq 0 \quad (D-5)$$

的向量 v 称为 A 的对于特征值 λ 的 k 阶广义特征向量。其最大阶数定义为 λ 的指数, 记为 K 。

至于 $K=1$ 时, 条件 (D-5) 改为 $v \neq 0$, 此即是通常的特征向量。

(2) 若 v 为 A 的 k 阶广义特征向量, 则可按如下要求定义 k 个线性独立的向量。

$$\left. \begin{aligned} v_k &\triangleq v \\ v_{k-1} &\triangleq (A - \lambda I)v_k \\ \dots\dots \\ v_1 &\triangleq (A - \lambda I)v_2 = (A - \lambda I)^{k-1}v \end{aligned} \right\} \quad (D-6)$$

(3) 对于同一特征值 λ , 若 A 的 j 阶 ($1 \leq j \leq K$) 广义特征向量不止一个, 这些同阶的广义特征向量张成线性子空间, 记为

$$M_j \triangleq \text{Span}\{v_i \mid (\lambda I - A)^j v = 0, (\lambda I - A)^{j-1} v \neq 0\} \quad (D-7)$$

(4) 若有 S 个 j 阶广义特征向量 $v_j^{(1)}, v_j^{(2)}, \dots, v_j^{(s)} \in M_j$

则有 $(\lambda I - A)v_j^{(1)}, (\lambda I - A)v_j^{(2)}, \dots, (\lambda I - A)v_j^{(s)} \in M_{j-1}$ (D-8)

3. $(\lambda I - A)^j v = 0$ 的解空间

(1) 满足

$$(\lambda I - A)^j v = 0 \quad (D-9)$$

的所有 v 构成解空间, 记为 N_j , 其维数

$$\dim N_j = n - r_j \quad (D-10)$$

式中 n 是 A 的阶, r_j 是 $(\lambda I - A)^j$ 的秩。

(2) 如果对于特征值 λ 存在广义特征向量, 则必有

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq N_K \quad (D-11)$$

式中 K 为特征值 λ 的指数。

(3) 对于 n 阶方阵 A 的 \bar{n} 重特征值 λ , 如果其指数 $K > 1$, 则有

$$N_K = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_K \quad (D-12)$$

且

$$\dim N_K = \bar{n} \quad (D-13)$$

(4) N_K 的结构如图 T-1 所示。图中所有向量按行构成 M_j ($j=1, 2, \dots, K$), 按列构成广义特征向量链。

4. N_K 的结构与约当块结构的关系

(1) 用 l_j 表示 j 阶广义特征向量的个数, 故对于 \bar{n} 重特征值 λ 的约当块的块数用 l_j 表示, j 阶约当块的块数为 $l_j - l_{j+1}$ 。

(2) 化 A 为约当形的坐标变换阵 Q 其结构是将 N_K 结构图中所列的特征向量和广义特征向量从左到右, 自下而上的顺序排列而成

$$Q = [v_1^{(1)} \quad v_2^{(1)} \quad \dots \quad v_k^{(1)} \quad v_1^{(2)} \quad v_2^{(2)} \quad \dots \quad v_1^{(k)}] \quad (D-14)$$

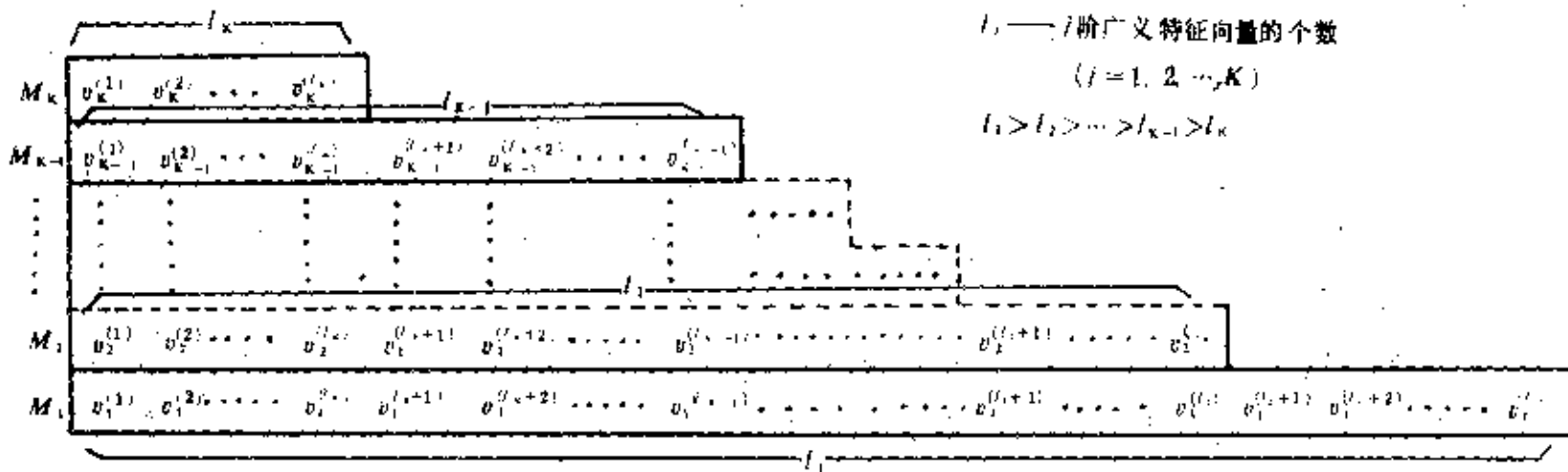


图 D-1 N_k 的结构示意图

5. 寻求各阶广义特征向量的两种途径

(1) 途径一: 首先解出 M_1 中的特征向量 $v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_1^{(l_1)}$ 然后依次算出 M_2, M_3, \dots 直至 M_k 中的各阶广义特征向量, 其具体步骤为

a. 对于每一个 \bar{n}_i 重特征值 λ_i 计算 $((\lambda_i I - A))$ 的秩

$$\text{rank}(\lambda_i I - A) = r_{i1} \quad (D-15)$$

这样对于

$$(\lambda_i I - A)v_{i1} = 0$$

的独立解数有 $l_{i1} = n_i - r_{i1}$ 个, 即 $v_{i1}^{(1)}, v_{i1}^{(2)}, \dots, v_{i1}^{(l_{i1})}$.

b. 判别 $l_{i1} = \bar{n}_i$? (\bar{n}_i 是 λ_i 的重数) 若是, 用上述独立特征向量构造变换阵 Q ; 若否, 转入下步。

c. 对于每一个 λ_i 计算 $(\lambda_i I - A)^2$ 的秩

$$\text{rank}(\lambda_i I - A)^2 = r_{i2} \quad (D-16)$$

这样对于

$$(\lambda_i I - A)^2 v_{i2} = 0$$

的独立解有 $n - r_{i2}$ 个, 由此可算得对于 λ_i 的二阶广义特征向量的个数 l_{i2} 为

$$l_{i2} = n - r_{i2} - (n - r_{i1}) = r_{i1} - r_{i2} \quad (D-17)$$

在 $n - r_{i2}$ 个独立解中寻求 l_{i2} 个解 $v_{i2}^{(1)}, v_{i2}^{(2)}, \dots, v_{i2}^{(l_{i2})}$ 使之满足

$$(\lambda_i I - A)v_{i2}^{(j)} = v_{i1}^{(j)} \quad j = 1, 2, \dots, l_{i2} \quad (D-18)$$

判别 $n - r_{i2} = \bar{n}_i$? 若是, 用 $v_{i1}^{(1)}, v_{i2}^{(1)}, v_{i1}^{(2)}, v_{i2}^{(2)}, \dots, v_{i1}^{(l_{i1})}, v_{i2}^{(l_{i2})}, \dots, v_{i1}^{(l_{i1})}$ 构造 Q , 若否, 转入下步, 计算 $\text{rank}((\lambda_i I - A)^3)$ 和三阶广义特征向量, \dots , 直至

$$\text{rank}(\lambda_i I - A)^k = r_{ik} \quad (D-19)$$

$$n - r_{ik} = \bar{n}_i \quad (D-20)$$

(2) 途径二: 首先确定各特征值 λ_i 的指数 K_i , 按广义特征向量的定义求出对于每个 λ_i 的最高阶广义特征向量, 然后依次求出其他各阶广义特征向量。其具体步骤为

a. 求解 $\det(\lambda I - A) = 0$, 计算 A 的特征值, 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 分别为 A 的 $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_p$ 重特征值。

b. 计算 $\text{rank}(\lambda_i I - A)^k, k = 1, 2, \dots$

直到

$$\text{rank}(\lambda_i I - A)^k = \text{rank}(\lambda_i I - A)^{k+1} \quad (D-21)$$

满足上式的 k 是特征值 λ_i 的广义特征向量的阶数 K_i 。

c. 求 λ_1 的 K 阶广义特征向量及其他各阶广义特征向量

$$(\lambda I - A)^K v = 0 \quad (D-22)$$

$$v_j^{(1)} = (\lambda I - A)^{K-j} v \quad (j = 1, 2, \dots, K) \quad (D-23)$$

d. 判别 $K = \bar{n}_1$? 若是, 转移到步骤(f); 若否, 寻求第二组与 $\{v_k^{(1)}, v_{k-1}^{(1)}, \dots, v_1^{(1)}\}$ 线性无关的且阶数为最大(设为 K')的广义特征向量 $v_k^{(2)}$ 所派生出来的 $v_{k-1}^{(2)}, v_{k-2}^{(2)}, \dots, v_1^{(2)}$

$$v_j^{(2)} = (\lambda I - A)^{K'-j} v_k^{(2)} \quad (j = 1, 2, \dots, K') \quad (D-24)$$

e. 判别 $K + K' = \bar{n}_1$? 若是, 转移到步骤(f); 若否, 再寻求第三个与 $\{v_k^{(1)}, v_{k-1}^{(1)}, \dots, v_1^{(1)}\}$ 及 $\{v_k^{(2)}, v_{k-1}^{(2)}, \dots, v_1^{(2)}\}$ 线性无关的且阶数为最大的(设为 K'')的广义特征向量 $v_k^{(3)}$ 并计算 $v_{k-1}^{(3)}, \dots, v_1^{(3)}$ 。如此继续下去, 直到

$$K + K' + \dots = \bar{n}_1 \quad (D-25)$$

为止。

应予以注意的是若 $\text{rank}(\lambda I - A) = r_1$, 则其属于 λ_1 的广义特征向量链有 $n - r_1$ 个。

f. 对其他特征值施行步骤(b), (c), (d), (e)。

g. 将所求得的广义特征向量构造变换矩阵 Q 。

$$Q = [v_1^{(1)} \ v_2^{(1)} \ \dots \ v_k^{(1)} \ v_1^{(2)} \ v_2^{(2)} \ \dots \ v_k^{(2)} \ \dots] \quad (D-26)$$

五、凯莱—哈密顿定理

1. 定义 若对方阵 A , 有

$$g(A) = 0 \quad (E-1)$$

则自变量 λ 的标量多项式 $g(\lambda)$ 称为方阵 A 的零化多项式。

2. 定理 对于 $n \times n$ 阶方阵 A , 其特征多项式

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \end{aligned} \quad (E-2)$$

是 A 的一个零化多项式。

亦即, 若

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \det(\lambda I - A) \\ &= \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 \end{aligned} \quad (E-3)$$

则有

$$\varphi(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0 \quad (E-4)$$

3. 最小多项式

(1) 定义 矩阵 A 的最小多项式是其次数最低且最高次项的系数为1的零化多项式。

(2) 计算方法

a. 先将矩阵化为约当形, 再按如下公式计算

$$\Psi(\lambda) = \prod_{i=1}^p (\lambda - \lambda_i)^{K_i} \quad (E-5)$$

式中, K_i 是矩阵 A 的特征值 λ_i 的指数;

p 是矩阵 A 不同特征值的个数。

b. 将 $(\lambda I - A)^{-1}$ 约去公因式

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(\lambda I - A)}{|\lambda I - A|} = \frac{P(\lambda)}{\Psi(\lambda)} \quad (E-6)$$

其分母多项式 $\Psi(\lambda)$ 即为最小多项式。

(3) 设矩阵 A 的最小多项式 $\Psi(\lambda)$ 的次数为 l , 则对于任意次数的矩阵多项式 $f(A)$ 可以化为次数比 l 小的矩阵多项式 $r(A)$

$$f(A) = r(A) \quad (E-7)$$

$r(\lambda)$ 是以最小多项式 $\Psi(\lambda)$ 除 $f(\lambda)$ 所得的余式, 即

$$r(\lambda) = f(\lambda) - q(\lambda)\Psi(\lambda) \quad (E-8)$$

式中, $q(\lambda)$ 是 $\Psi(\lambda)$ 除 $f(\lambda)$ 的商。

习题解答

第一章

$$1-1 \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} -1/R_2 & 1/R_2 \\ 0 & -1/R_1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/R_1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0]$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} -R_1/L_1 & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ 1/c & -1/c & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$1-2 \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M_1} & -\frac{B_2}{M_1} & \frac{B_2}{M_1} & 0 \\ 0 & \frac{B_2}{M_2} & -\frac{B_1+B_2}{M_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{M_1}(k_1+k_2) & \frac{k_2}{M_1} & -\frac{1}{M_1}(B_1+B_2) & \frac{B_2}{M_1} \\ \frac{k_2}{M_2} & -\frac{k_2}{M_2} & \frac{B_1}{M_2} & -\frac{B_2}{M_2} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/M_2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1-3 \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} -R/L & -K_s/L \\ K_s/J & -B/J \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [k_s \quad 0]$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} -R/L & -K_s/L & 0 \\ K_s/J & -B/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & -1/J \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$1-4 \quad (1) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{s_1 R_1} + \frac{1}{s_1 R_2}\right) & \frac{1}{s_1 R_1} \\ \frac{1}{s R_2} & -\frac{1}{s R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/s_1 R_1 & 0 \\ 1/s_2 R_1 & -1/s_2 R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/s_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$1-5 \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K/V_1 C_1 & K/V_1 C_1 \\ K/V_2 C_2 & (K/V_2 C_2 - Q C_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/V_1 C_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$1-6 \quad \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.01 & 0 \\ 0.02 & 0.95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$1-7 \quad \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-a-\beta) & 0 & 0 & 0 \\ \beta & (1-r-\delta) & 0 & 0 \\ a & \delta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$1-8 \quad (1) \quad \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+a) & -\lambda \\ k\lambda & (1+k\lambda+r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 & -250 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

$$1-9 \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 3/4 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

$$1-10 \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -4 & -5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [10 \ 0 \ 0]$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [-1 \ -1 \ 2]$$

$$1-11 \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0] \text{ (串联分解)}$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 1 \ 1] \text{ (并联分解)}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \text{ (串联分解)}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 1] \text{ (并联分解)}$$

$$1-12 \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -40 & -13 & -4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [40 \ 10 \ 0] \text{ (答案之一)}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -50 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \text{ (答案之一)}$$

$$(3) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad A = \begin{bmatrix} -a & -c \\ -d & -b \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1-13 \quad (1) \quad A = \begin{bmatrix} -2+j1 & 0 \\ 0 & -2-j1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad C = [-j1-1]$$

$$(2) \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ -8 \frac{2}{5} & -14 \frac{2}{5} \\ 5 \frac{2}{5} & 6 \frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+j & 0 \\ 0 & 0 & -1-j \end{bmatrix} \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} \frac{2+4j}{10} \\ \frac{-1-4j}{10} \\ \frac{-1-4j}{10} \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 1 \ 1]$$

$$1-14 \quad (1) \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{c} = [-1 \ 0 \ 0] \text{ (答案之一)}$$

$$(2) \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -13 & 3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (答案之二)}$$

$$1-15 \quad (1) \quad A_M = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) \quad A_M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$1-16 \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

1-17 提示: $(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}AP$

1-18 提示: 由 $P^{-1}AP = \hat{A}$ 推证。

$$1-19 \quad (1) \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^3 - 2s^2 - 4s - 23.7} \begin{bmatrix} s^2 - s - 8 & 3s - 9 & -2s - 12 \\ -s + 9 & s^2 - 2s + 9 & 4s - 2 \\ 2s - 3 & 3s + 3 & s^2 - s + 7 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad (sI - A)^{-1} = \frac{Q_1 s^4 + Q_2 s^3 + Q_3 s^2 + Q_4 s + Q_0}{s^5 - 5s^4 - 20s^3 - 12s^2 + 28s + 160.2}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 10 & 6 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} -15 & -7 & -5 & -6 & -6 \\ 1 & -5 & 0 & -3 & -4 \\ -7 & -2 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad Q_0 = \begin{bmatrix} -126 & -74 & -21 & -21 & -39 \\ -41 & -57 & -22 & -15 & -11 \\ -23 & -17 & -41 & -14 & -13 \\ 44 & 33 & 23 & -11 & 12 \\ 31 & 25 & 19 & 13 & -17 \end{bmatrix}$$

$$1-20 \quad G(s) = \frac{1}{s(s^2+3s+2)} \begin{bmatrix} s^2+3s+3 & s+1 \\ s & s^2 \end{bmatrix}$$

$$1-21 \quad G_{\text{前}}(s) = \begin{bmatrix} 1/(s+1) & s/(s+1)^2 \\ 0 & s/(s+3) \end{bmatrix}$$

$$1-22 \quad (1) \quad G(s) = \frac{1}{s^3+3s^2+3s+2} \begin{bmatrix} -3s+1 & s^2+s \\ s^3+3s^2+7s+6 & -s^2-2s-2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad G(s) = \frac{1}{s^2+(a+b)s+(ab-cd)} \begin{bmatrix} c(s+b) & -cd \\ -cd & d(s+a) \end{bmatrix}$$

1-23 提示:注意 $A=\tilde{A}^T$ $b=\tilde{C}^T$ $c=\tilde{b}^T$ 的关系。

1-24 提示:应用逆阵的定义。

1-25 对分块矩阵左乘 $\begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}$ 或者 $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -cA^{-1} & I \end{bmatrix}$

第二章

$$2-1 \quad (1) \quad e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$2-2 \quad (1) e^{At} = \begin{bmatrix} (1+e^{2t})/2 & -(1+e^{2t})/2 & 0 \\ (1-e^{2t})/2 & (1+e^{2t})/2 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t}+e^{-3t}+te^{-3t} & 2e^{-3t}+te^{-3t} \\ 0 & e^{-3t}-te^{-3t} & -te^{-3t} \\ 0 & te^{-3t} & e^{-3t}+te^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$2-3 \quad (1) \quad e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})-1 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^t+e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t}) \\ 0 & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t+e^{-t}) \end{bmatrix} \quad (2) \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 1 \\ 0 & e^{2t}-e^t & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$2-4 \quad (1) \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-3t} \cos 4t + \frac{1}{4} e^{-3t} \sin 4t & \frac{1}{4} e^{-3t} \sin 4t \\ -4 \frac{1}{4} e^{-3t} \sin 4t & e^{-3t} \cos 4t - \frac{1}{4} e^{-3t} \sin 4t \end{bmatrix}$$

(2) 见例 2.2-5

$$2-5 \quad \phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

2-6 (1) 不满足 (2) 满足, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(3) 满足, $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (4) 满足, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$2-7 \quad \phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}-2te^{-t} & 4te^{-t} \\ -te^{-t} & e^{-t}+2te^{-t} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2-8. \quad x(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + 4e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t} \\ 4e^{-t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$2-9. \quad x(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} + t + e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-3t} \\ 1 - t - 2e^{-2t} + e^{-3t} \end{bmatrix}$$

2-10 提示:应当沿实部最小的特征值相对应的特征向量方向来选择初始条件。 $x_1(0) = 0.38, x_2 = 0.95$ 。

$$2-11 (1) \quad \Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \exp(-t^2)$$

$$(2) \quad \Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} 1 & (t + \frac{t^3}{6} + \dots) \\ 0 & (1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \dots) \end{bmatrix}$$

$$2-12 (1) \quad a. x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{b-a} e^{-at} \\ \frac{1}{a-b} e^{-bt} \end{bmatrix} \quad b. x(t) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-at}-1}{a(a-b)} \\ \frac{e^{-bt}-1}{b(a-b)} \end{bmatrix}$$

$$c. x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{a^2} (e^{-at}-1) + \frac{t}{a} \right] \\ \frac{1}{a-b} \left[\frac{1}{b^2} (e^{-bt}-1) + \frac{t}{b} \right] \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad a. x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \\ \frac{1}{b-a} (be^{-bt} - ae^{-at}) \end{bmatrix}$$

$$b. x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a-b} \left[\frac{e^{-at}-1}{a} - \frac{e^{-bt}-1}{b} \right] \\ \frac{1}{a-b} (e^{-bt} - e^{-at}) \end{bmatrix}$$

$$c. x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{a^2} (e^{-at}-1) - \frac{1}{b^2} (e^{-bt}-1) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) t \right] \\ \frac{1}{b-a} \left[\frac{1}{b} (e^{-bt}-1) - \frac{1}{a} (e^{-at}-1) \right] \end{bmatrix}$$

2-13 -17. 183V.

2-14 提示:应用对角化便于处理。

2-15 略。

$$2-16 \quad G(T) = \begin{bmatrix} 2e^{-T} - e^{-2T} & -e^{-T} + e^{-2T} \\ 2e^{-T} - 2e^{-2T} & -e^{-T} + 2e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$H(T) = \begin{bmatrix} e^{-T} - \frac{1}{2}e^{-2T} - \frac{1}{2} \\ e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix}$$

$$2-17 (1) \quad G(T) = \begin{bmatrix} 2e^{-2T} - e^{-T} & -e^{-T} + e^{-2T} \\ 1 - e^{-T} & e^{-T} \end{bmatrix} \quad H(T) = \begin{bmatrix} e^{-2T} - e^{-T} \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \Phi(k) = z^{-1} [(zI - G)^{-1} z]$$

2-18 $u(0) = -3.28$ $u(1) = 0.09$

第三章

- 3-1 (1)可控、可观； (2)可控、可观；
 (3)不可控、不可观； (4)不可控、可观。

3-2 (1) $\beta \neq \frac{(a-2) \pm \sqrt{a^2-4a}}{2}$ a 为任意

(2) $a_2 \neq a_1 + 1$

(3) $\beta_1 \neq -\frac{3}{2}, \beta_2 \neq -2$ 。

3-3 提示：将 $\Sigma = (A \cdot B)$ 化为对角标准形。

3-4 (1) $\dim Q_c = 2, \dim Q_{no} = 0$ 。

(2) $\dim Q_c = 3, \dim Q_{no} = 1$ 。

3-5 提示：由系统可控的充要条件推证。

3-6 (1) $\frac{1}{R^2C} \neq \frac{1}{L}$ (2) $\frac{1}{R^2C} \neq \frac{1}{L}$

3-7 (1)系统不完全可控；(2)系统不完全可观。

3-8 可控、可观测；若仅以位移 z 为输出，系统为不可观测。

3-9 $A_M = A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}$ $b_M = C^T = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$C_M = b^T = [0 \ 0 \ 1]$

3-10 提示：对对偶系统应用可控判别准则，即可推证出原系统的可观测判别准则。

3-11 (1)第一可控标准形

$$\bar{A}_{c1} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \bar{b}_{c1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2)第二可控标准形

$$\tilde{A}_{c2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 5 \end{bmatrix} \quad \tilde{b}_{c2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3-12 (1)第一可观测标准形

$$\bar{A}_{o1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{b}_{o1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \bar{c}_{o1} = [1 \ 0]$$

(2)第二可观测标准形

$$\tilde{A}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \tilde{b}_{o2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{c}_{o2} = [0 \ 1]$$

3-13 $\tilde{A}_{o2} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ $\tilde{b}_{o2} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\tilde{c} = [0 \ 1]$ $D = 1$

3-14 $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A_L = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$B_L^c = TB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第四章

4-1 (1) 按可控分解

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{c} = [1 \quad -1 \quad 1]$$

按可观测分解

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{c} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

(2) 按可控分解

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{c} = [1 \quad 2 \quad -1]$$

按可观测分解

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{c} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$4-2 \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{c} = [1 \quad 0 \quad 3 \quad 0]$$

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$4-3 (1) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4-4 $a=2$.

4-5 (1) 若 S_2 在前, 系统不能控; 若 S_2 在后, 系统不能观。 $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)^2}$

(2) 并联系统为可控且可观。

4-6 提示: 若开环系统 S_0 的 $G(s) = \frac{M(s)}{D(s)}$ 没有零极对消, 则闭环系统 $G_m(s) = \frac{M(s)}{D(s)+M(s)}$,

亦无零极对消。

第五章

- 5-1 (I)不定; (II)负定;
(III)正半定; (IV)正定;
(V)不定。

- 5-2 (I) a 为任何值时, $V(x)$ 均不定。
(II) $a > 0; b < 1/a; c > (4a+b-4)/(ab-1)$ 。

5-3 略。

- 5-4 (I) $V(x) = x_1^2 + x_2^2$; 大范围内渐近稳定。
(II) $V(x) = 2x_1^2 + x_2^2$; 大范围内渐近稳定。
(III) $V(x) = x_1^2 + x_2^2$; 在 $x_1^2 + x_2^2 < 1$ 内渐近稳定。
(IV) $V(x) = (x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}x_1^2$; 大范围内渐近稳定。
(V) $V(x) = \frac{1}{2} \frac{K}{m} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$; 大范围内渐近稳定的。
(VI) $V(x) = \int_0^{x_1} g(x_1) dx_1 + \frac{1}{2} x_2^2$; 大范围内渐近稳定的。

- 5-5 $V(x) = -a_1 x_1^2 + x_2^2$ 。

5-6
$$P = \begin{bmatrix} \frac{1 + \omega_n^2 + 4\zeta^2}{4\zeta\omega_n} & \frac{1}{2\omega_n} \\ \frac{1}{2\omega_n} & \frac{1 + \omega_n^2}{4\zeta\omega_n} \end{bmatrix}$$

(I) 大范围内渐近稳定。

(II) P 无解, 不是渐近稳定的; 取 $V(x) = \omega_n^2 x_1^2 + x_2^2$, 有 $\dot{V}(x) = 0$; 稳定。

(III) P 负定, 所以系统不稳定。

- 5-7 (I) $\phi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 0.632$; $\phi(1) = 0.632 > 0$; $(-1)^2 \phi(-1) = 2.632 > 0$; $|0.632| < 1$;
系统渐近稳定。

(II) $V(x(k)) = x_1^2(k) + x_2^2(k) + x_3^2(k) > 0$;

$\Delta V(x(k)) = 13x_1^2(k) + 9x_2^2(k) + 8x_3^2(k) + 20x_1(k)x_2(k) + 18x_1(k)x_3(k) + 12x_2(k)x_3(k) > 0$;

系统不稳定。又: 系统有一个为 -2 的特征根, 不稳定。

- 5-8 $a < -1; b \leq 0$ 或 $a \leq -1; b < 0$ 。

- 5-9 $V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$; 在 $x_1 x_2 < \frac{1}{2}$ 内渐近稳定。

5-10 略。

- 5-11 取状态 $y_1 = x; y_2 = \dot{x}$ 及 $V(y) = y_1^2 + y_2^2$ 有 $\dot{V}(y) = -2K_1 y_1^2 - 2K_2 y_2^2$ 。

(I) $\dot{V}(y)$ 负半定, 但沿解曲线不恒为零, 渐近稳定。

(II) $\dot{V}(y)$ 正半定, 不稳定。

(III) 当 $|y_2| < \sqrt{-K_1/K_2}$ 时, $V(y)$ 是负定的, 在上述范围内系统是渐近稳定的。

- 5-12 答案在题目的提示内。

第六章

6-1 $K = [-2 \ 5]$

6-2 $K = [-4 \ -1.2 \ -0.1]$

$$6-3 \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [20 \ 0 \ 0]$$

$$K = [-40 \ -31 \ -13]$$

$$6-4 \quad A = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; K = [5 \ -10 \ -24]$$

$$6-5 \quad \zeta = \sin[\operatorname{tg}^{-1}(-\ln\sigma/\pi)]; \omega_n = \pi/(t_s \sqrt{1-\zeta^2})$$

$$(I) \zeta = 0.36; \omega_n = 3.6(1/\text{秒}) \quad (II) \zeta = 0.707; \omega_n = 4.5(1/\text{秒})$$

$$(III) \zeta = 0.36; \omega_n = 7.2(1/\text{秒}) \quad (IV) \zeta = 0.707; \omega_n = 9(1/\text{秒})$$

$$6-6 \quad (I) \text{可镇定}, K = [2a - b \ 0 \ a], a < -3, b < -8$$

$$(II) \text{可镇定} \quad K = [k_1 \ k_2]; k_1 < 1, k_2 < 3$$

$$6-7 \quad (I) \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 1; \text{不稳定。}$$

(ii) 闭环 $\det(\lambda I - A - BHC) = \lambda^3 - h_1\lambda - (1 - h_2)$, 由于缺 λ^2 项, 当 $h_1 = 0, h_2 = 1$ 全零根。否则必有正实部的根。不可镇定。

$$6-8 \quad (I) \det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 5, \text{不稳定。}$$

(II) 闭环 $\det(\lambda I - A - BHC) = \lambda^3 + (2h_2 - 3)\lambda^2 + (1 + h_1)\lambda - (5 + 2h_1)$ 。当 $h_2 > 3/2$ 及 $h_1 > -1 - 3/(2h_2 - 1)$ 时闭环可镇定。

(III) h_1 的选择不可能使 $1 + h_1$ 和 $-(5 + 2h_1)$ 同时为任意值, 所以不可能任意配置闭环极点。

$$6-9 \quad (I) \hat{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(II) K = \begin{bmatrix} -28 & -8 & -52 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [0 \ 0 \ 10]$$

$$K = [1.6 \ -0.03 \ -0.06] \quad F = 0.006$$

$$6-11 \quad F = 10000, e_r = 0.15。$$

$$6-12 \quad K_s = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}。$$

$$6-13 \quad K_s = \begin{bmatrix} 8.5 \\ 23.5 \end{bmatrix}。$$

$$6-14 \quad \text{可控实现时}, K_s = [17 \ 63]^T; \text{可观测实现时}, K_s = [80 \ 17]^T。$$

$$6-15 \quad (I) \frac{d}{dt}[\hat{x}_2 - 2y] = -3\hat{x}_2 + u - 4y; x_2 = y。$$

$$(II) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{x}_2 - y \\ \hat{x}_3 - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y; x_1 = y。$$

$$(III) \frac{d}{dt}(\hat{x}_3 - [h_1 \ -1]y) = -5\hat{x}_3 + u - [6 \ 11 + h_1]y; y = [x_1 \ x_2]^T, h_1 \text{ 为任意值。}$$

$$6-16 \quad (I) K_s = \begin{bmatrix} 3r \\ 2r^2 \end{bmatrix}。$$

$$(II) \hat{X}(s) = \frac{1}{s^2 + 3rs + 2r^2} \begin{bmatrix} 1 & 3rs + 2r^2 \\ s + 3r & 2r^2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{bmatrix}。$$

$$(II) \hat{X}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \end{bmatrix}$$

$$(IV) x_1(t) = y(t) + 10^{-3} \sin 10^6 t, x_2(t) = y(t) + 10^3 \cos 10^6 t$$

$$(V) r < 50$$

(VI) 为滤除高频干扰噪声, 观测器的频带不宜太高。本例中的 r 不能太大。

$$6-17 \quad (I) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1];$$

$$\frac{d}{dt}(\hat{x}_1 - 13y) = -15\hat{x}_1 + 50u; x_2 = y$$

$$(I) u = -0.16\hat{x}_1 - y$$

$$6-18 \quad (i) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$K = [-3 \quad -4 \quad -1]$$

$$(I) \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 25 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -25 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u;$$

$$u = -3y - 4\hat{x}_2 - \hat{x}_3$$

$$6-19 \quad (I) \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1; \lambda_{1,2} = \pm j$$

(I) 闭环 $\det(\lambda I - A - Bhc) = \lambda^2 - h\lambda + 1 + h$, 找不到合适的 h 值使之镇定。

$$(II) \dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -10 \\ 6 \end{bmatrix} y$$

$$u = [-3 \quad 1] \hat{x}$$

第七章

$$7-1 \quad G_r = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)^2} & -\frac{s}{s+2} \\ -\frac{s+2}{(s+1)^3} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$7-2 \quad d_1 = 0, d_2 = 1, E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

不能 $\{K, F\}$ 解耦。

$$7-3 \quad (I) d_1 = d_2 = 0, E_0 = \begin{bmatrix} 2 & 24 \\ 10 & 20 \end{bmatrix};$$

可以 $\{K, F\}$ 解耦。

$$(I) K = \begin{bmatrix} 0.68 & -0.2 & 0.6 \\ -0.14 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.12 \\ 0.05 & -0.01 \end{bmatrix}$$

7-4 利用例 7.1-2 的结果 $\{K_{rv}, F\}$ 再附加反馈

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

所以, E_0 的 $\{K, F\}$ 变换是:

$$K = K_{rv} + F\tilde{K} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$7-5 \quad (I) d_1 = 1, d_2 = 0, E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$F = E_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; K = E_0^{-1} \begin{bmatrix} C_1 A^2 \\ C_2 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(I) d_1 = d_2 = 0, E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

不能 $\{K, F\}$ 解耦。

$$7-6 \quad d_1 = d_2 = 0, E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \dot{v} + \begin{bmatrix} 2 + \mu_1 & 1 \\ 1 & 2 + \mu_2/2 \end{bmatrix} x$$

$$7-7 \quad (I) G_0(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + \omega^2} & \frac{2\omega}{s(s^2 + \omega^2)} \\ \frac{-2\omega}{s(s^2 + \omega^2)} & \frac{s^2 - 3\omega^2}{s^2(s^2 + \omega^2)} \end{bmatrix}$$

$$(I) d_1 = d_2 = 1, E_0 = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

可以 $\{K, F\}$ 解耦。

$$(II) F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$K = - \begin{bmatrix} C_1 A^2 \\ C_2 A^2 \end{bmatrix} = -CA^2 = \begin{bmatrix} -3\omega^2 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(N) \tilde{K} 和习题 7-4 的答案一致。

$$7-8 \quad d_1 = d_2 = 0, E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

可以 $\{K, F\}$ 解耦。

7-9 使闭环镇定的任意 K 阵;

$$F = -[C(A + BK)^{-1}B]^{-1}H^*(0)$$

7-10 外扰模型 F 、外扰初值 $w(0)$ 、外扰 $w(t)$;

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; w(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; w(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

由 $AP - PF = E$ 解出 P , 进而求出稳态解 $\bar{x}(t)$;

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{25}{36} \\ 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}; \bar{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}t + \frac{25}{36} \\ -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

$$7-11 \quad P = A^{-1}E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; CP = M;$$

可以实现输出调节。

$$7-12 \quad P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -25/36 \\ 0 & 5/6 \end{bmatrix}; CP = M;$$

可以实现输出调节。

7-13 (I) $K = [-6 \quad -5]; L = [1 \quad 2]$ 。 P 阵结果与习题 7-12 的一致。

(II) 不能实现输出调节。

$$7-14 \quad CE = [6 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

$$C(A+BK)E = 0$$

要求 $K = [k_1 \quad k_2]$ 满足: $3k_1 - 12 - 6k_2 = 0$ 。

闭环 $A+BK$ 渐近稳定, 要求: $k_1 < 0, k_2 < 0$; 结果是: $K = [1 + 2a, a]$; $a < -2$ 。

$$7-15 \quad \begin{cases} AP - PF + BS = E \\ CP + DS = M \end{cases}$$

$$7-16 \quad K = [-3 \quad 0]; L = -4.$$

$$7-17 \quad \begin{cases} \dot{q} = z \\ u = \begin{bmatrix} -16 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 & -18 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q \end{cases}$$

$$7-18 \quad \Phi(s) = s + 1$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z$$

$$7-19 \quad (I) \Phi(s) = s(s^2 + 1) = s^3 + s$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z$$

$$(II) \Phi(s) = s(s-1)^2 = s^3 - 3s^2 + s$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z$$

$$7-20 \quad \dot{q}_1 = y_1 - R_1$$

$$\dot{q}_2 = y_2 - R_2$$

$$u_1 = -10x_1 - 152.5x_2 + 256q_1 - 646q_2$$

$$u_2 = 0.5q_2$$

其中: R_1, R_2 分别是两贮液槽的液面给定高度(常值)。

第八章

$$8-1 \quad h = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}}; \quad r = \sqrt{\frac{A_0}{6\pi}}$$

$$8-2 \quad \text{最短距离} = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$8-3 \quad x(t) = 2\sin t + \cos t$$

$$8-4 \quad x(t) = 3 - \frac{2}{t}$$

$$8-5 \quad u(t) = \sin t; x(t) = -\sin t.$$

$$8-6 \quad x(t) = t + 1; t_f = \frac{1}{2}.$$

$$8-7 \quad x(t) = 0$$

$$8-8 \quad x(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 3t + 1)$$

- 8-9 $u(t) = 18t - 10$
 $x_1(t) = 3t^3 - 5t^2 + t + 1$
 $x_2(t) = 9t^2 - 10t + 1$
- 8-10 $u(t) = 6(t-1); x_1(t) = t^3 - 3t^2 + t + 1; x_2(t) = 3t^2 - 6t + 1$
- 8-11 $u(t) = \frac{\exp(-\sqrt{2})}{(-1+\sqrt{2})\exp(\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\exp(-\sqrt{2})} \exp(-1+\sqrt{2})t$
 $\frac{\exp(\sqrt{2})}{(-1+\sqrt{2})\exp(\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\exp(-\sqrt{2})} \exp(-1-\sqrt{2})t$
 $= \frac{1}{(-1+\sqrt{2})\exp(2\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})} \exp(-1+\sqrt{2})t$
 $\frac{1}{(-1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\exp(-2\sqrt{2})} \exp(-1-\sqrt{2})t$
- 8-12 $u(t) = -\sqrt{2}; x(t) = -\sqrt{2}t + 1; t_f = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 8-13 $u(t) = \frac{cx_0}{1+C(T-t_0)}; x(t) = -Cx_T(t-t_0) + x_0;$
 $x_T = \frac{x_0}{1+C(T-t_0)}; J = \frac{1}{2} \cdot \frac{Cx_0^2}{1+C(T-t_0)}$
- 8-14 $\begin{cases} \lambda_1(t) = -2 \\ \lambda_2(t) = -1 \end{cases}; \begin{cases} u_1(t) = 1 \\ u_2(t) = \frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x_1(t) = t \\ x_2(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t \end{cases}$
- 8-15 $u(t) = \frac{(\sqrt{2}+1)\exp(\sqrt{2}t) + (\sqrt{2}-1)\exp(-\sqrt{2}t)}{\exp(\sqrt{2}t_f) - \exp(-\sqrt{2}t_f)};$
 $x(t) = \frac{-\exp(-\sqrt{2}t_f) \cdot \exp(\sqrt{2}t) + \exp(\sqrt{2}t_f) \cdot \exp(-\sqrt{2}t)}{\exp(\sqrt{2}t_f) - \exp(-\sqrt{2}t_f)}$
- 8-16 $I_s(t) = -\frac{1}{c_m} \left[\left(\frac{6aJ}{t_1^2} + M_f \right) - \frac{12aJ}{t_1^3} t \right]; \omega(t) = \frac{6a}{t_1^2} \left(t - \frac{t^2}{t_1} \right)$
- 8-17 $u(t) = -\frac{x_0}{T-t_0}; x(t) = \frac{T-t}{T-t_0} x_0; J = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_0^2}{T-t_0}$
- 8-18 $u(t) = -\frac{x_0 \exp(t_f) - x_f}{\exp(t_f) - \exp(-t_f)} \exp(-t) + \frac{x_f - x_0 \exp(-t_f)}{\exp(t_f) - \exp(-t_f)} \exp(t)$
- 8-19 $u(t) = -\sqrt[3]{2}; t_f = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

第九章

9-1 最优控制候选函数: $u = \begin{cases} \frac{1}{2} & 1-\lambda > 0 \\ 1 & 1-\lambda < 0 \end{cases}$

伴随变量 $\lambda(t) = -1 + e^{1-t}$;

切换控制时刻 $t_s = 0.307$;

$t \in [0, 0.307], u^* = 1, x^*(t) = 4e^t + 1$;

$t \in [0.307, 1], u^* = \frac{1}{2}, x^*(t) = 5.937e^{t-0.307} + 0.5$

9-2 最优控制候选函数: $u = \begin{cases} -10 & 1+4\lambda > 0 \\ 10 & 1+4\lambda < 0 \end{cases}$

$$u^* = -\text{sign}(1 + 4\lambda);$$

$$\lambda(t_f) = 0; u(t_f) = -x^2(t_f);$$

$$u^*(t) = -10; x^*(t) = (x_0 + 40)e^{-t} - 40; t_f = \ln\left(\frac{x_0 + 40}{40 + \sqrt{10}}\right).$$

9-3 最优控制候选函数: $u = \begin{cases} -U_m & \lambda(t)b(t) > 0 \\ U_m & \lambda(t)b(t) < 0 \end{cases}$

$$u^* = -U_m \cdot \text{sign}[\lambda(t)b(t)];$$

$$\lambda(t_f) = -1; \lambda(t) = -\exp\left[\int_t^{t_f} a(t)dt\right]$$

设 $b(t) > 0, t \in [t_0, t_f]; u^* = U_m, \dot{x} = a(t)x(t) + b(t)U_m$

$$x(t) = x_0 \cdot \exp\left[\int_{t_0}^t a(t)dt\right] + \int_{t_0}^t \exp\left[\int_t^{t_f} a(t-\tau)dt\right] b(t)U_m d\tau$$

由 $H|_{t_f} = a(t_f)x(t_f) + b(t_f)U_m = 0$ 确定 t_f .

9-4 最优控制候选函数: $u = \begin{cases} 1 & \lambda < 0 \\ -1 & \lambda > 0 \end{cases}$

$$H|_{t_f} = 1 + \lambda(t_f)u(t_f) = 0;$$

当 $x_0 < 0$, 则 $u^* = 1, x^*(t) = t + x_0; t_f = -x_0$

当 $x_0 > 0$, 则 $u^* = -1, x^*(t) = -t + x_0; t_f = x_0$.

9-5 $u^*(t) = -2\text{sign}(C_2 e^t + 2C_1 e^{2t});$

开关线方程 $u = +1, \begin{cases} x_1 = x_2^2 \\ x_2 < 0 \end{cases}; \quad u = -1, \begin{cases} x_1 = -x_2^2 \\ x_2 > 0 \end{cases}$

9-6 $u^* = -2\text{sign}\lambda_2(t);$

$$\lambda_2(t) = c_1 \exp[0.5(1 + \sqrt{3}j)t] + c_2 \exp[0.5(1 - \sqrt{3}j)t]$$

当 $u^* = +2, x_1^*(t) = 2 + A \sin(bt + \varphi)$

$$x_2^*(t) = -A b \cos(bt + \varphi)$$

式中 $b = \sqrt{3}/2, A^2 = (c_1 e^{at} + c_2 e^{at})^2 - (c_1 e^{at} - c_2 e^{at})^2$

$$\sin\varphi = \frac{1}{A}(c_1 e^{at} + c_2 e^{at})$$

c_1, c_2 与初始条件有关;

在 $x_1 - x_2/b$ 平面上, 最末一段开关线方程为:

$$(x_1 - 2)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = A^2 \quad \text{且 } \frac{x_2}{b} < 0.$$

当 $u^* = -2$ 时, 最末一段开关线方程为:

$$(x_1 + 2)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = A^2 \quad \text{且 } \frac{x_2}{b} > 0.$$

9-7 最优控制候选函数: $u = \begin{cases} +1 & \lambda < -1 \\ 0 & -1 < \lambda < 1 \\ -1 & \lambda > 1 \end{cases}$

$$\lambda(t) = \lambda(0)e^t;$$

当 $0 < \lambda(0) < 1; u^* = 0, x(t) = x_0 e^{-t}, t_s = \ln \frac{1}{\lambda(0)}$ 时,

切换为 $u^* = -1, x(t) = [x(t_s) + 1]e^{-(t-t_s)} - 1$.

当 $-1 < \lambda_0 < 0; u^* = 0, x(t) = x_0 e^{-t}, t_s = \ln \frac{-1}{\lambda(0)}$ 时, 切换为 $u^* = 1, x(t) = [x(t_s) - 1]e^{-(t-t_s)}$

+1;

当 $\lambda_0 > 1; u = -1, x(t) = (x_0 + 1)e^{-t} - 1$

当 $\lambda_0 < -1; u = +1, x(t) = (x_0 - 1)e^{-t} + 1$

9-8 在两个采样周期内完成转移时:

$$u(0) = \frac{3}{4}x_{10} + \frac{1}{2}x_{20} \quad u(1) = \frac{1}{4}x_{10} + \frac{1}{2}x_{20}$$

在一个采样周期内完成转移时:

$$u(0) = x_{10}/2; u(1) = -x_{20}$$

即满足下列方程

$$\frac{1}{2}x_{10} + x_{20} = 0$$

的初始状态才可能在一个采样周期内完成转移。

9-9 状态方程: $\dot{u} = a \cos \beta; \dot{v} = a \sin \beta; \dot{x} = u; \dot{y} = v$ 。控制变量 $\beta(t)$ 不受约束。 t_f 固定, $t_f = T$ 。初始条件: $u(0) = v(0) = x(0) = y(0) = 0$ 。终端条件: $u(T)$ 自由, $v(T) = 0, x(T)$ 自由, $y(T) = h$ 。选择最优控制 $\beta(t)$ 使末值型指标 $J = u(T)$ 取极大值。

$$H = \lambda_u \cdot a \cdot \cos \beta + \lambda_v \cdot a \cdot \sin \beta + \lambda_x \cdot u + \lambda_y \cdot v$$

式中 $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_x, \lambda_y$ 均为伴随变量(拉格朗日乘子)。

将终端条件表为终端约束形式时,其增广泛函 J_s 为: $J_s = u(T) + [y(T) - h]v_r + v(T)v_s$ 。式中 v_r, v_s 也为伴随变量(拉格朗日乘子)。

解得

$$\text{tg} \beta = \text{tg} \beta_0 - ct$$

$$u = \frac{a}{c} \log \frac{\text{tg} \beta_0 + \sec \beta_0}{\text{tg} \beta + \sec \beta}$$

$$v = \frac{a}{c} (\sec \beta_0 - \sec \beta)$$

$$x = \frac{a}{c^2} \left(\sec \beta_0 - \sec \beta - \text{tg} \beta \log \frac{\text{tg} \beta_0 + \sec \beta_0}{\text{tg} \beta + \sec \beta} \right)$$

$$y = \frac{a}{2c^2} \left[(\text{tg} \beta_0 - \text{tg} \beta) \sec \beta_0 - (\sec \beta_0 - \sec \beta) \text{tg} \beta - \log \frac{\text{tg} \beta_0 + \sec \beta_0}{\text{tg} \beta + \sec \beta} \right]$$

式中 $\text{tg} \beta_0 = v_r + v_s T, c = v_r$ 。

9-10 状态方程 $\dot{x} = V \cos \theta + u(x, y)$

$$y = V \sin \theta + v(x, y)$$

初态和终态给定。性能指标 $J = \int_0^{t_f} dt$ 。

$$H = \lambda_x (V \cos \theta + u) + \lambda_y (V \sin \theta + v) + 1$$

$$\text{伴随方程 } \dot{\lambda}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_x \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda_y \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\dot{\lambda}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\lambda_x \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda_y \frac{\partial v}{\partial y}$$

控制方程 $\frac{\partial H}{\partial \theta} = V(-\lambda_x \cdot \sin \theta + \lambda_y \cdot \cos \theta) = 0$, 故 $\text{tg} \theta = \frac{\lambda_y}{\lambda_x}$ 。最优终端时间条件 $H|_{t_f} = 0$;

对 $\text{tg} \theta = \frac{\lambda_y}{\lambda_x}$ 两端求全导数有:

$$\frac{1}{\cos^2\theta} \cdot \dot{\theta} = \frac{\lambda_x \cdot \dot{\lambda}_y - \lambda_y \cdot \dot{\lambda}_x}{\lambda_x^2}$$

可求得

$$\dot{\theta}(t) = \sin^2\theta \frac{\partial v}{\partial x} + \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \cos^2\theta \frac{\partial u}{\partial y}$$

将 $\dot{\theta}(t)$ 与状态方程联立, 可求出最短时间轨线。

9-11

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \frac{6\xi_0}{t_f^2} \left(\frac{2}{t_f} t - 1 \right); \\ x_1^*(t) &= \xi_0 \left(\frac{2}{t_f^3} t^3 - \frac{3}{t_f^2} t^2 + 1 \right); \\ x_2^*(t) &= \frac{6\xi_0}{t_f^2} \left(\frac{1}{t_f} t^2 - t \right) \\ J^* &= \frac{12\xi_0^2}{t_f^3} \end{aligned}$$

9-12 控制变量不受约束时:

$$u^*(t) = -2, x^*(t) = -2t + 8, t_f^* = 4$$

控制变量 $|u(t)| \leq 1$ 时:

$$u^*(t) = -1, x^*(t) = -t + 8, t_f^* = 8$$

9-13 最优轨线由两段组成。起自 $(-1, 0)$ 点的轨线方程为 $x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - 1, u = +1$; 运行时间为 $\sqrt{2}$ 。在点 $(0, \sqrt{2})$ 处切换控制, $u = -1$, 轨线方程为: $x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + 1$; 运行至终点 $(1, 0)$ 的时间也为 $\sqrt{2}$ 。故最优时间为 $2\sqrt{2}$ 。

9-14 伴随变量 $\lambda_1(t) = 1, \lambda_2(t) = -t + 2; u = \begin{cases} -1 & \lambda_2 > 1 \\ 0 & |\lambda_2| < 1 \\ +1 & \lambda_2 < -1 \end{cases}$

$$\text{故 } u^*(t) = \begin{cases} -1 & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 3 \\ +1 & 3 < t < 3 \end{cases}$$

第十章

10-1
$$u^*(t) = -\frac{1}{1/c + t_f - t} x(t)$$

10-2
$$u^*(t) = -\frac{b \exp[-2a(t_f - t)]}{\frac{1}{c} + \frac{b^2}{2a} (1 - \exp[-2a(t_f - t)])}$$

10-3
$$\hat{K} = -\frac{b}{r} + \sqrt{\frac{b^2}{r^2} + ab}; u^*(t) = \left[\frac{1}{r} - \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{a}{b}} \right] x(t)$$

10-4
$$u^*(t) = -\frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{r}} t\right);$$

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{r}}$$

10-5 $u^*(t) = -\frac{1}{r}(k_{12}x_1 + k_{22}x_2);$

闭环特征方程为: $r\lambda^2 + k_{22}\lambda + (k_{12} + r) = 0;$

闭环特征根为: $\lambda_{1,2} = \frac{-k_{22} \pm \sqrt{k_{22}^2 - 4r(k_{12} + r)}}{2r}$

$$k_{12} = -r + \sqrt{r^2 + r}$$

$$k_{22} = \sqrt{2r(\sqrt{r^2 + r} - r)}.$$

10-6 $u^*(t) = \frac{4\omega^2 \cdot \cos\omega(t_f - t) \cdot x_1(t_0) + 4\omega \cdot \sin\omega(t_f - t) \cdot x_2(t_0)}{\frac{4\omega^3}{c} + 2\omega(t_f - t_0) - \sin 2\omega(t_f - t_0)} \cdot \sin\omega(t_f - t)$

10-7 $u^*(t) = -26.9\delta - 28.9\omega - 180\varphi$

10-8 $u^*(t) = -x_1 - \sqrt{2}x_2$

10-9 反馈增益矩阵 $K = \begin{bmatrix} 0.1706 & 0.3162 \\ 0.3162 & 0.8556 \end{bmatrix}$

$$u^*(t) = -1.706x_1 - 3.162x_2$$

10-10 $u^*(t) = 2e^{-t}(\sin t - \cos t)$

$$J = 1$$

10-11 反馈增益矩阵 $\hat{K} = \begin{bmatrix} \sqrt{a+2} - b & 1 \\ 1 & \sqrt{a+2} \end{bmatrix}$

$$u^*(t) = -x_1 - \sqrt{a+2}x_2$$

10-12 $u^*(t) = -x_1 - \sqrt{3}x_2$

10-13 $\hat{K} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2a} + \frac{1+2a}{3} & \frac{1}{2a} \\ \frac{1}{2a} & \frac{1+2a}{6a} \end{bmatrix}$

$$J^* = x^T(0)\hat{K}x(0) = \frac{3}{2a} + \frac{1+2a}{3}$$

$$\text{由 } \frac{\partial J^*}{\partial a} = 0 \text{ 得 } a = \frac{3}{2}$$

10-14 $\hat{K} = \begin{bmatrix} \zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1+\mu}{4\zeta} \end{bmatrix}$

$$J^* = x^T(0)\hat{K}x(0) = \zeta + \frac{1+\mu}{4\zeta}$$

$$\text{由 } \frac{\partial J^*}{\partial \zeta} = 0 \text{ 得 } \zeta = \frac{\sqrt{1+\mu}}{2}$$

10-15 $\hat{K} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu+2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}$

$$K = R^{-1}B^*K = [1 \quad \sqrt{\mu+2}] = [k_1 \quad k_2]$$

10-16 用离散黎卡提方程解得

$$u(0) = -\frac{c}{2c+1}x_0 \quad x(1) = \frac{c+1}{2c+1}x_0$$

$$u(1) = -\frac{c}{2c+1}x_0 \quad x(2) = \frac{1}{2c+1}x_0$$

10-17

$$u(0) = -\frac{3}{5}x_0; \quad x(1) = \frac{2}{5}x_0$$

$$u(1) = -\frac{1}{5}x_0; \quad x(2) = \frac{1}{5}x_0$$

$$u(0) = 0 \quad J = \frac{8}{5}x_0^2$$

10-18

$$K = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} \sqrt{2}a \\ a \end{bmatrix}$$

$$u(t) = -x_1 - \sqrt{2}x_2 + a$$

10-19

$$K = \begin{bmatrix} 0.3320 & 0.0500 \\ 0.0500 & 0.0116 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 0.332 \\ 0.050 \end{bmatrix}$$

$$u(t) = -x_1 - 0.232x_2 - 1$$

10-20 由电路方程 $Ri + \frac{1}{C} \int i dt = u_i$, 取微分有: $Ri + \frac{1}{C}i = \dot{u}_i$; 引入新变量, 以消去 \dot{u}_i . 设 $x = i - \frac{1}{R}u_i$, 故 $\dot{x} + \frac{1}{RC}x = -\frac{1}{R^2C}u_i$. 性能指标为:

$$J = \int_0^t i^2 R dt = \int_0^t R(x + \frac{1}{R}u_i)^2 dt.$$

再化为规范调节器问题求解。

10-21 $K=0.7$; 设 $x_1=e, x_2=\dot{e}$; 状态方程为: $\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=-1.5x_2-2.25x_1; J=\int_0^{\infty} x_1^2 dt$.

第十一章

$$11-1 \quad u(0) = -\frac{ab(r+b^2+ra^2)}{(r+b^2)^2+ra^2b^2}x_0$$

$$u(1) = -\frac{ab}{r+b^2}x_1$$

$$u(2) = 0$$

$$11-2 \quad u_0 = -8/3 \quad x_1 = -2/3$$

$$u_1 = 0 \quad x_2 = -4/3 \quad J^* = 23/3$$

11-3 A 至 F 的最短路线为 $AB_2C_1D_1E_2F$; 最短距离为 14。

$$11-4 \quad u(0) = -1, u(1) = 1, u(2) = 1, u(3) = 1;$$

$$x(0) = 0, x(1) = -1, x(2) = 0, x(3) = 1, x(4) = 2;$$

$$J^* = J_{\min} = 0.$$

$$11-5 \quad u(0) = -1, u(1) = 0 \text{ 或 } +1, u(2) = -1;$$

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(1) = 1 \\ x_2(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(2) = 0 \\ x_2(2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(3) = 0 \\ x_2(3) = -1 \end{cases}$$

$$J^* = J_{\min} = 2$$

11-6 $u(-1) = -1, u(0) = -1, u(1) = -1, u(2) = 0;$
 $x(0) = 1, x(1) = -2, x(2) = 1, x(3) = 0。$

11-7 提示: 设 $W(x, t) = \frac{1}{2} x^T K x; \frac{\partial W}{\partial t} = 0;$
 $u(t) = -2x_1 - 2x_2$

11-8 提示: 设 $W(x, t) = \frac{1}{2} K(t)x^2$

$$u(t) = -\frac{c}{1 + c(t_f - t)} x$$

11-9 由 $\min_{x \in \mathcal{U}} H = -\frac{\partial J}{\partial t}$ 及 $\lambda = \frac{\partial J}{\partial x}$ 导出:

1. $u^* = -\text{sign} \frac{\partial J}{\partial x_2};$
 $x_2 \left(\frac{\partial J}{\partial x_1} - 4 \frac{\partial J}{\partial x_2} \right) - x_1 \frac{\partial J}{\partial x_2} - \left(\left| \frac{\partial J}{\partial x_2} \right| - 1 \right) = 0$

2. $u^* = -\text{sign} \left[\frac{\partial J}{\partial x} \cdot b \right];$
 $x^2 + \frac{\partial J}{\partial x} a x - \left| b \cdot \frac{\partial J}{\partial x} \right| = 0。$

3. $u^* = -\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial x};$
 $x^2 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^2 = 0。$

11-10 提示: 设 $J^* = \frac{1}{2} x^T K(t)x$, 有 $\frac{\partial J^*}{\partial t} = \frac{1}{2} x^T \dot{K}(t)x, \frac{\partial J^*}{\partial x} = K(t)x$, 代入 $-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \min_{x \in \mathcal{U}} H$ 即可证明。

11-11 $\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{k^2}{r} \lambda_1^2(t);$
 $\dot{\lambda}_2(t) = \lambda_2(t) \lambda_3(t);$
 $\dot{\lambda}_3(t) = \lambda_3^2(t) - q;$
 $u^* = -\frac{k}{r} [\lambda_2(t) + \lambda_3(t)x]$

第十二章

12-1 $\tau' = 5$

12-2 (1)是 M 序列; (2)它与取自 4, 3 输出模 2 加法和所得序列相同, 因为它们都产生 M 序列。

12-3 提示: 只需注意到原 M 序列的重复周期为 N, 而逆重复 M 序列的周期为 2N, 且逆重复现象发生的间隔是 N 个码元。这样, 在计算互相关函数时, 由于是在 2NΔ 长度的周期内计算, 所以互相关函数一定为零。

12-4 所设计的线路为三级移位寄存器, 反馈取自第三级和第一级。

12-5 证: $E\{[\hat{h}(\tau) - E\{\hat{h}(\tau)\}]^2\} = E\{[\hat{h}(\tau) - h(\tau)]^2\}$
 $= E\{\hat{h}^2(\tau) + h^2(\tau) - 2\hat{h}(\tau)h(\tau)\}$
 $= h^2(\tau) + h^2(\tau) - 2h^2(\tau) = 0$

12-6 $N\Delta = 63 \times 24 = 1512 \text{ 秒} > t$, 故所选取的 M 序列参数基本上是可行的。

12-7 保证输出为平稳过程。

12-8 提示:原 M 序列与位移 63 码的 M 序列其互相关函数除在时延 63 码及其倍数时出现一个尖峰;对其余的时延来讲,互相关函数均为 $-V^2/N$ 。只要 N 足够大,可以看作为零。这样,当系统各个脉冲响应的调整时间 $T_{ij} < 63\Delta$,

$$R_{r_i, r_j}(\tau) = \int_0^\tau g_{ij}(t) R_{r_i, r_j}(\tau - t) dt + \sum_{i \neq j} \int_0^\infty g_{ij} R_{r_i, r_j}(\tau - t) dt$$

的第二项可以忽略,于是就可以用单输入单输出的方法辨识出各个通道的脉冲响应。

12-9 题示:应用线性代数中的定理(1)如果子空间 W 是由向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 组成,则另一个向量 β 垂直于子空间 W 的充要条件是 β 垂直 W 中任一向量。(2)一个向量到一个子空间的距离以垂线为最短。在最小二乘问题中,观测矩阵 Φ 的列向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$ 组成一个子空间 L ($\alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$)。为了要使残差 $\varepsilon = \Phi\theta - y$ 最小,就要求找到一个向量 $\hat{\theta}$,使 y 到 $\Phi\hat{\theta}$ 的距离比到 L 空间中任一向量 $\Phi\theta^*$ 都短, ($\Phi\theta^*$ 与 $\Phi\hat{\theta}$ 都在子空间 L 之内)。于是 $\Phi\hat{\theta}$ 定是 y 在 L 子空间上的投影,即有 ε 与 L 垂直。即

$$(\varepsilon, \alpha_1) = (\varepsilon, \alpha_2) = \dots = (\varepsilon, \alpha_{2n}) = 0$$

由矩阵乘法规则,相当于

$$\Phi^T \varepsilon = 0$$

即

$$\Phi^T (\Phi\theta - y) = 0$$

从而有

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T y$$

12-10 参见例 12.4-3。

12-11 $a_1 = 1.5, a_2 = 0.7, b = 1; b_2 = 0.5$ 。

12-12 略。

12-13 不等价。递推法不是由离线算法经由数学推导而得到的。

12-14 因为已把问题转化为普通最小二乘问题,因此 P, Q 与 \hat{C} 的初值的选取方法与普通最小二乘一样。

12-15, 16, 17, 18, 19 略。

12-20 $n = 2$ 。

12-21 数据必须一样多。因为在不同数据量下的损失函数之间无法比较。

12-22 三阶系统为佳。

参 考 文 献

- [1] 尤昌德:《线性系统理论基础》,电子工业出版社,1985年。
- [2] 郑大钟:《现代控制理论》(一),清华大学教材,1978年。
- [3] 郑大钟、石纯一:《自动控制原理及系统》(下)国防工业出版社,1981年。
- [4] 王照林等:《现代控制理论基础》,国防工业出版社,1981年。
- [5] 王 翼:《离散控制系统》,科学出版社,1987年。
- [6] 谢绪恺:《现代控制理论基础》,辽宁人民出版社,1980年。
- [7] D. E. 博纳, L. K. 蒂莫西:《状态空间分析导论》,高等教育出版社。
- [8] 古田胜久、佐野昭:《线性控制理论基础》(朱春元等译),国防工业出版社,1984年。
- [9] 有泽肇、高桥进一、滨田望:《线性系统理论、例题和习题》(卢伯英译),科学出版社,1982年。
- [10] 古田胜久、美多勉:《系统控制理论习题》(沈承林、吕砚山译),化学工业出版社,1983年。
- [11] T. E. 佛特曼, K. L. 海兹:《线性控制系统引论》(吕林等译),机械工业出版社,1980年。
- [12] 须田信英:《自动控制中的矩阵理论》(曹长修译),科学出版社,1979年。
- [13] 何关钰:《线性控制系统理论》,辽宁人民出版社,1982年。
- [14] 常春馨:《现代控制理论概论》,机械工业出版社,1982年。
- [15] 刘 豹:《现代控制理论》,机械工业出版社,1983年。
- [16] 南航、西工大、北航:《自动控制原理》(修订版)(下册),国防工业出版社,1984年。
- [17] 北航、西工大、南航:《现代控制理论》(第二册)。
- [18] 绪方胜彦:《现代控制工程》(卢伯英等译),科学出版社,1978年。
- [19] 蔡尚峰:《自动控制理论》(下册),机械工业出版社,1983年。
- [20] 符 曦:《自动控制理论习题集》,机械工业出版社,1983年。
- [21] 秦寿康、张正方编:《最优控制》,国防工业出版社,1980。
- [22] M. G. 辛, A. 铁脱里编著:《大系统的最优化及控制》,机械工业出版社,1983年。
- [23] Kirk, D. E., 《Optimal Control Theory》, Prentice-Hall, Inc, 1970.
- [24] 海宁·吐尔著:《最优化方法》(欧天垣等译),机械工业出版社,1982年。
- [25] 罗伯特·E·拉森, 约翰·L·卡斯梯著:《动态规划原理》(陈伟基等译),清华大学出版社,1984年。
- [26] Kuo, B. C., 《Automatic Control Systems》, Third Edition, Prentice-Hall, Inc, 1975.
- [27] 解学书著:《最优控制理论与应用》,清华大学出版社,1986年。
- [28] 官锡芳著:《最优控制问题的计算方法》,科学出版社,1979年。
- [29] Понтрягин Л. С. 等著:《最佳过程的数学理论》(陈祖浩等译),上海科学出版社,1965年。
- [30] Athans, M. 等著:《Optimal Control》, McGraw-Hill, Book Co., 1967.
- [31] Sage, A. P., 《Optimum Systems Control》, Prentice-Hall, Inc, 1968.
- [32] Anderson, B. D. O., Moore, J. B., 著:《线性最优控制》(尤云程译),科学出版社,1982年。
- [33] Bryson, A. E., 何毓琦著:《应用最优控制——最优化·估计·控制》(钱洁文等译),国防工业出版社,1982年。
- [34] M. Noton 著:《现代控制理论》(杨志坚译),科学出版社,1979年。
- [35] Jacquot, R. G. 著:《现代数字控制系统》(刘兴良等译),科学出版社,1985年。
- [36] 成田诚之助著:《数字系统控制理论及应用》(张贤达译),机械工业出版社,1984年。
- [37] 干华雷:“LQGSP——线性二次型高斯控制系统的计算机辅助设计软件包”,《信息与控制》,1982年第6期。
- [38] 关肇直、韩京清等编著:《极值控制与极大值原理》,科学出版社,1980年。
- [39] 蔡宣三编:《最优化与最优控制》,清化大学出版社,1983年。

- [40] 王永初,《最佳控制系统设计基础》,科学出版社,1980年。
- [41] 姜伟,《系统辨识基础》,化学工业出版社,1989年。
- [42] 史维祥、尤昌德,《系统辨识基础》,上海科学技术出版社,1988年。
- [43] 张成乾、张国强,《系统辨识与参数估计》,机械工业出版社,1986年。
- [44] 胡千耀,《系统辨识》,北京航空学院出版社,1987年。
- [45] 徐宁寿,《系统辨识技术及其应用》,机械工业出版社,1986年。
- [46] 徐南荣,《系统辨识导论》,电子工业出版社,1986年。
- [47] 夏天长,《系统辨识》(刘绍球、宋可炎译),国防工业出版社,1984年。
- [48] 袁著祉等,《现代控制理论在工程中的应用》,科学出版社,1985年。

- [40] 王永初,《最佳控制系统设计基础》,科学出版社,1980年。
- [41] 姜伟,《系统辨识基础》,化学工业出版社,1989年。
- [42] 史维祥、尤昌德,《系统辨识基础》,上海科学技术出版社,1988年。
- [43] 张成乾、张国强,《系统辨识与参数估计》,机械工业出版社,1986年。
- [44] 胡千耀,《系统辨识》,北京航空学院出版社,1987年。
- [45] 徐宁寿,《系统辨识技术及其应用》,机械工业出版社,1986年。
- [46] 徐南荣,《系统辨识导论》,电子工业出版社,1986年。
- [47] 夏天长,《系统辨识》(刘绍球、宋可炎译),国防工业出版社,1984年。
- [48] 袁著祉等,《现代控制理论在工程中的应用》,科学出版社,1985年。

- [40] 王永初,《最佳控制系统设计基础》,科学出版社,1980年。
- [41] 姜伟,《系统辨识基础》,化学工业出版社,1989年。
- [42] 史维祥、尤昌德,《系统辨识基础》,上海科学技术出版社,1988年。
- [43] 张成乾、张国强,《系统辨识与参数估计》,机械工业出版社,1986年。
- [44] 胡千耀,《系统辨识》,北京航空学院出版社,1987年。
- [45] 徐宁寿,《系统辨识技术及其应用》,机械工业出版社,1986年。
- [46] 徐南荣,《系统辨识导论》,电子工业出版社,1986年。
- [47] 夏天长,《系统辨识》(刘绍球、宋可炎译),国防工业出版社,1984年。
- [48] 袁著祉等,《现代控制理论在工程中的应用》,科学出版社,1985年。

- [40] 王永初,《最佳控制系统设计基础》,科学出版社,1980年。
- [41] 姜伟,《系统辨识基础》,化学工业出版社,1989年。
- [42] 史维祥、尤昌德,《系统辨识基础》,上海科学技术出版社,1988年。
- [43] 张成乾、张国强,《系统辨识与参数估计》,机械工业出版社,1986年。
- [44] 胡千耀,《系统辨识》,北京航空学院出版社,1987年。
- [45] 徐宁寿,《系统辨识技术及其应用》,机械工业出版社,1986年。
- [46] 徐南荣,《系统辨识导论》,电子工业出版社,1986年。
- [47] 夏天长,《系统辨识》(刘绍球、宋可炎译),国防工业出版社,1984年。
- [48] 袁著祉等,《现代控制理论在工程中的应用》,科学出版社,1985年。

- [40] 王永初,《最佳控制系统设计基础》,科学出版社,1980年。
- [41] 姜伟,《系统辨识基础》,化学工业出版社,1989年。
- [42] 史维祥、尤昌德,《系统辨识基础》,上海科学技术出版社,1988年。
- [43] 张成乾、张国强,《系统辨识与参数估计》,机械工业出版社,1986年。
- [44] 胡千耀,《系统辨识》,北京航空学院出版社,1987年。
- [45] 徐宁寿,《系统辨识技术及其应用》,机械工业出版社,1986年。
- [46] 徐南荣,《系统辨识导论》,电子工业出版社,1986年。
- [47] 夏天长,《系统辨识》(刘绍球、宋可炎译),国防工业出版社,1984年。
- [48] 袁著祉等,《现代控制理论在工程中的应用》,科学出版社,1985年。

- [40] 王永初,《最佳控制系统设计基础》,科学出版社,1980年。
- [41] 姜伟,《系统辨识基础》,化学工业出版社,1989年。
- [42] 史维祥、尤昌德,《系统辨识基础》,上海科学技术出版社,1988年。
- [43] 张成乾、张国强,《系统辨识与参数估计》,机械工业出版社,1986年。
- [44] 胡千耀,《系统辨识》,北京航空学院出版社,1987年。
- [45] 徐宁寿,《系统辨识技术及其应用》,机械工业出版社,1986年。
- [46] 徐南荣,《系统辨识导论》,电子工业出版社,1986年。
- [47] 夏天长,《系统辨识》(刘绍球、宋可炎译),国防工业出版社,1984年。
- [48] 袁著祉等,《现代控制理论在工程中的应用》,科学出版社,1985年。

- [40] 王永初,《最佳控制系统设计基础》,科学出版社,1980年。
- [41] 姜伟,《系统辨识基础》,化学工业出版社,1989年。
- [42] 史维祥、尤昌德,《系统辨识基础》,上海科学技术出版社,1988年。
- [43] 张成乾、张国强,《系统辨识与参数估计》,机械工业出版社,1986年。
- [44] 胡千耀,《系统辨识》,北京航空学院出版社,1987年。
- [45] 徐宁寿,《系统辨识技术及其应用》,机械工业出版社,1986年。
- [46] 徐南荣,《系统辨识导论》,电子工业出版社,1986年。
- [47] 夏天长,《系统辨识》(刘绍球、宋可炎译),国防工业出版社,1984年。
- [48] 袁著祉等,《现代控制理论在工程中的应用》,科学出版社,1985年。

- [40] 王永初,《最佳控制系统设计基础》,科学出版社,1980年。
- [41] 姜伟,《系统辨识基础》,化学工业出版社,1989年。
- [42] 史维祥、尤昌德,《系统辨识基础》,上海科学技术出版社,1988年。
- [43] 张成乾、张国强,《系统辨识与参数估计》,机械工业出版社,1986年。
- [44] 胡千耀,《系统辨识》,北京航空学院出版社,1987年。
- [45] 徐宁寿,《系统辨识技术及其应用》,机械工业出版社,1986年。
- [46] 徐南荣,《系统辨识导论》,电子工业出版社,1986年。
- [47] 夏天长,《系统辨识》(刘绍球、宋可炎译),国防工业出版社,1984年。
- [48] 袁著祉等,《现代控制理论在工程中的应用》,科学出版社,1985年。

- [40] 王永初,《最佳控制系统设计基础》,科学出版社,1980年。
- [41] 姜伟,《系统辨识基础》,化学工业出版社,1989年。
- [42] 史维祥、尤昌德,《系统辨识基础》,上海科学技术出版社,1988年。
- [43] 张成乾、张国强,《系统辨识与参数估计》,机械工业出版社,1986年。
- [44] 胡千耀,《系统辨识》,北京航空学院出版社,1987年。
- [45] 徐宁寿,《系统辨识技术及其应用》,机械工业出版社,1986年。
- [46] 徐南荣,《系统辨识导论》,电子工业出版社,1986年。
- [47] 夏天长,《系统辨识》(刘绍球、宋可炎译),国防工业出版社,1984年。
- [48] 袁著祉等,《现代控制理论在工程中的应用》,科学出版社,1985年。

- [40] 王永初,《最佳控制系统设计基础》,科学出版社,1980年。
- [41] 姜伟,《系统辨识基础》,化学工业出版社,1989年。
- [42] 史维祥、尤昌德,《系统辨识基础》,上海科学技术出版社,1988年。
- [43] 张成乾、张国强,《系统辨识与参数估计》,机械工业出版社,1986年。
- [44] 胡千耀,《系统辨识》,北京航空学院出版社,1987年。
- [45] 徐宁寿,《系统辨识技术及其应用》,机械工业出版社,1986年。
- [46] 徐南荣,《系统辨识导论》,电子工业出版社,1986年。
- [47] 夏天长,《系统辨识》(刘绍球、宋可炎译),国防工业出版社,1984年。
- [48] 袁著祉等,《现代控制理论在工程中的应用》,科学出版社,1985年。