最优设计中的新计算法

ZUIYOU SHEJI ZHONG DE XIN JISUANFA

邹海 著

新时代出版社

最优设计中的新计算法

邹　海　著

新时代出版社

内 容 简 介

应用电子计算机进行最优化设计，除了计算机、数学模型等条件外，还需要有一套数学方法。本书提供的就是在结合实际应用的基础上，总结出的系统化和条理化的计算方法，包括极值有理法、数值积分和数值微分的新方法等。这些方法在实践中已证明是可行的。

本书可供从事工程设计的技术人员在进行最优设计中使用，也可供管理工作者在选择最佳计划方案时参阅。

最优设计中的新计算法

邹　海　著

新时代出版社出版　新华书店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印刷

850×1168 毫米 32 开本　8 印张　203 千字

1982年11月第 1 版　　1982年11月北京第 1 次印刷

印数：00,001—14,000册

统一书号：15241·11　　定价：1.00 元

序

电子技术的迅速发展和电子计算机的广泛应用，为在工程设计中进行最优设计；在工业生产自动化中对生产过程进行最佳控制；在企业管理中发挥最佳效率；在国民经济的综合平衡中实现最优调运等等，提供了现实的物质基础。

目前我国许多工程设计中，应用计算机进行最优设计已受到重视并开展研究，但还未全面展开。为满足加速实现“四个现代化”的要求，还急待普及这方面的知识。

六十年代初期开始了单项最优设计，七十年代以后进一步发展为“设计、生产和管理”一体化系统的研究工作，从而对数学研究也提出了新的要求，在我国各条战线上，也取得了可喜的成果。邹海同志的工作便是这些成果中的一项。

邹海同志将多年来在应用计算机实现最优设计方面的工作总结成系统化和条理化的计算方法，这里包括极值有理法、数值积分和数值微分的新方法等。这些方法在实践中已证明是可行的，在理论上也有了一定的根据与提炼。因此，我很高兴推荐这一本书给为实现“四个现代化”而战斗的广大工程技术人员和科研工作者，希望能有助于为加速实现“四个现代化”做出贡献，并在广泛应用中进一步发展与提高。

秦元勋

中国科学院　应用数学研究推广办公室

1978年10月于北京

目　　录

引 言

在学习国内外应用最优化方法的经验，以及在计算机上对常用的最优化方法做了数字模拟实验后，进一步认识到，如黄金分割法、对分法、爬山法、梯度法等都是根据几个点的实验情况确定下一次的实验点。然后再实验，再根据新实验点周围几个点的实验情况去确定下一次的实验点。此时，以前的实验结果就都不用了。能否使实验的全部信息得到更充分地利用，以便更快地找到最好点，用尽少的实验次数达到精度高的要求，这个问题引起了我们的注意。如果能够进一步给出最好点的计算公式，将对做实验很有帮助，并且这是很有实际意义的工作。

怎样解决呢？这是个"难题"。一方面因为实验对象没有数学表达式，在数学表达式都不知道的情况下，又如何去构造最好点的计算公式。另一方面，即使有了实验目标与因素 x 之间函数关系式 $f(x)$，又如何写出极值点与实验数据 (x_i, f_i) 之间的数学关系式。就是对于 $f(x)$ 为代数多项式的情况，如

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

$f(x)$ 的极值点与实验数据之间的数学关系式也不是一下子就能写得出来的。

为此，可以分析一下一项实验工作的全过程。一般来说，做一次实验得到一组数据 (x_i, f_i)，分析实验数据，再实验，再分析，…，直至得到最优实验结果。从这个实验的过程得到启发，我们能否利用实验过程中提供的信息，用函数关系反映各种因素间的相互关系。经过反复地探讨，终于找到了反映每次实验数据 (x_i, f_i) 与极值点的关系式。如极值有理法，就是利用极值点处的斜率为零这个条件，导出了极值点与实验数据之间的关系式。如：

第一次实验点　$x_0=b_0$

第二次实验点　$x_1=b_0-\frac{y_0}{b_1}$

第三次实验点　$x_2=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}$

第四次实验点　$x_3=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\frac{y_2}{b_3}$

……

其中 b_i，y_{i-1} 均是由实验数据确定的系数，$i=1$，2，…。

大量的计算机数字模拟实验和各种应用的结果说明，在最优设计中，采用本书提出的最优设计的新计算方法，可以显著地减少实验（或计算）次数、节省计算机机时和提高精度。本书第二章提出一维情况的几种最优化方法及其误差估计，同时对 n 维情况也提出两种最优化方法供使用。

根据同样的观点，为了更充分地、合理地利用积分和微分过程的信息，作者总结出了数值积分、数值微分的新方法，这些方法适合处理离散情况。

在研究和应用过程中，曾经得到中国科学院副院长华罗庚教授、大连工学院副院长钱令希教授、南京大学何旭初教授、中国科学院计算中心席少林副研究员等同志的热情支持和高度评价，并提出了十分宝贵的改进意见，在此谨向他们表示衷心地感谢。

由于这是初步的工作，加之作者水平有限，一定会有很多错误和缺点，恳切地希望读者提出批评和指正。

第一章　预 备 知 识

1. 渐 近 分 式

如下的表达式

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}+\cdots \tag{1-1}$$

称为连分式。

分式$\frac{a_{i-1}}{b_i}$称做连分式的第 i 节，a_{i-1} 与 b_i 称做连分式第 i 节的两个项，a_0，a_1，a_2，…称做连分式的部分分子，b_0 称做连分式的常数项，b_1，b_2，b_3，…称做连分式的部分分母。部分分子 a_{i-1}，部分分母 b_i，$i=1$，2，…，在通常情况下，可以认为是独立变量，根据不同的需要，这些变量允许在不同的领域中变化。如可以设 a_{i-1}，b_i，$i=1$，2，…，是实数或复数，是一个变量或多个变量的函数等。按本书的目的，规定 b_0，b_1，b_2，…和 a_0，a_1，a_2，…都是实数。

连分式的节数可以是有限或无限，在前一种情况下，可以把连分式记成

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

并且称做有限连分式，或更确切地称做 i 节连分式。在后一种情况下，把连分式记成

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

并且称做无限连分式。

假设连分式（1-1）各节的项都是有限实数，并且所有部分分母都不为零。把有限连分式记成

$$\frac{P_i}{Q_i}=b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}$$

并且把$\frac{P_i}{Q_i}$称做连分式（1-1）的第 i 个渐近分式。

每个有限连分式都是对其各项进行有限次运算的结果，如果假设其分子和分母各项皆为实数的话，则任何有限连分式皆为实数。如果假设有限连分式的项皆为有理数的话，则此连分式本身也是有理数。

反之，不能够轻易地认为无限连分式代表某个数值。在它的收敛性问题还未获得进一步的结论之前，它仅是一种数学形式的记号，然而，它应当是数学的研究对象。

定理一（渐近分式关系） 设

$$P_i=b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}$$
$$Q_i=b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}$$
$$i\geqslant 1$$

则

$$\frac{P_i}{Q_i}=\frac{b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}}$$
$$i\geqslant 1$$

其中
$$P_{-1}=1$$
$$P_0=b_0$$
$$Q_{-1}=0$$
$$Q_0=1$$

证明 首先证明 $i=1$ 情况，由连分式的定义，有

$$\frac{P_1}{Q_1}=b_0+\frac{a_0}{b_1}=\frac{b_0b_1+a_0}{b_1}=\frac{b_1P_0+a_0P_{-1}}{b_1Q_0+a_0Q_{-1}}$$

对于 $i=2$ 情况，同样有

$$\frac{P_2}{Q_2}=b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}$$

$$=b_0+\frac{a_0b_2}{b_1b_2+a_1}=\frac{b_0b_1b_2+b_0a_1+a_0b_2}{b_1b_2+a_1}$$

$$=\frac{b_2P_1+a_1P_0}{b_2Q_1+a_1Q_0},$$

如果对 m 成立，那么对（$m+1$）成立否？为此用（$m+1$）代替 m 时，从 $\frac{P_m}{Q_m}$ 变到 $\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$，应以 $b_m+\frac{a_m}{b_{m+1}}$ 代替 b_m，于是

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}=\frac{b_mP_{m-1}+\frac{a_m}{b_{m+1}}P_{m-1}+a_{m-1}P_{m-2}}{b_mQ_{m-1}+\frac{a_m}{b_{m+1}}Q_{m-1}+a_{m-1}Q_{m-2}}$$

$$=\frac{b_{m+1}[b_mP_{m-1}+a_{m-1}P_{m-2}]+a_mP_{m-1}}{b_{m+1}[b_mQ_{m-1}+a_{m-1}Q_{m-2}]+a_mQ_{m-1}}$$

$$=\frac{b_{m+1}P_m+a_mP_{m-1}}{b_{m+1}Q_m+a_mQ_{m-1}}$$

由于 m 是任意正整数，故定理一成立。定理得证。

定理二 设

$$\frac{P_i}{Q_i}=\frac{b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}}$$

则当 $i\geqslant 1$，

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=\frac{(-1)^{i+1}a_0a_1a_2\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

证明 为了求证渐近分式的这一关系，考察相邻两个渐近分式的差，有

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=\frac{P_iQ_{i-1}-Q_iP_{i-1}}{Q_iQ_{i-1}}$$

用等式

$$P_i=b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}$$
$$Q_i=b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}$$

代替 P_i 和 Q_i，得到

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=\frac{1}{Q_iQ_{i-1}}[(b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2})Q_{i-1}$$
$$-(b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2})P_{i-1}]$$
$$=-a_{i-1}\frac{P_{i-1}Q_{i-2}-Q_{i-1}P_{i-2}}{Q_{i-1}Q_i}$$

对于 $P_{i-1}Q_{i-2}-Q_{i-1}P_{i-2}$ 施行同样的变换，有

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^2a_{i-1}a_{i-2}\frac{P_{i-2}Q_{i-3}-Q_{i-2}P_{i-3}}{Q_{i-1}Q_i}$$

重复上述代换过程，有

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^3a_{i-1}a_{i-2}a_{i-3}\frac{P_{i-3}Q_{i-4}-Q_{i-3}P_{i-4}}{Q_{i-1}Q_i}$$

……

$$=(-1)^ia_{i-1}a_{i-2}\cdots a_0\frac{P_0Q_{-1}-Q_0P_{-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

$$=(-1)^{i+1}a_{i-1}a_{i-2}\cdots a_0\frac{1}{Q_{i-1}Q_i}$$

故对于任意正整数 i，等式

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1a_2\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

成立，也即

$$P_iQ_{i-1}-Q_iP_{i-1}=(-1)^{i+1}a_0a_1a_2\cdots a_{i-1}$$

定理得证。

定理三（变换连分式成级数） 连分式

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

可以变换为等价的级数形式

$$b_0+\frac{a_0}{Q_0Q_1}-\frac{a_0a_1}{Q_1Q_2}+\cdots+(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}+\cdots$$

其中

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}$$
$$i\geqslant 1$$
$$Q_{-1}=0$$
$$Q_0=1$$

证明 令 $P_{-1}=1$，$P_0=b_0$，由连分式的定义，得

$$b_0=\frac{P_0}{Q_0}$$

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}=\frac{b_0b_1+a_0}{b_1}=\frac{P_1}{Q_1}$$

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}=\frac{b_0b_1b_2+b_0a_1+a_0b_2}{b_1b_2+a_2}$$

$$=\frac{b_2P_1+a_1P_0}{b_2Q_1+a_1Q_0}=\frac{P_2}{Q_2}$$

对于一般项，令

$$P_i=b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}$$
$$Q_i=b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}$$

则

$$\frac{P_i}{Q_i}=\frac{b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}}$$

$$=b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}$$

为证明此关系，用 $i+1$ 代替 i 时上述关系仍然成立否？当用 $i+1$ 代替 i 时，应以 $b_i+\frac{a_i}{b_{i+1}}$代替 b_i，于是

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}=\frac{b_iP_{i-1}+\frac{a_i}{b_{i+1}}P_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+\frac{a_i}{b_{i+1}}Q_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}}$$

$$= \frac{b_{i+1}[b_i P_{i-1} + a_{i-1} P_{i-2}] + a_i P_{i-1}}{b_{i+1}[b_i Q_{i-1} + a_{i-1} Q_{i-2}] + a_i Q_{i-1}}$$

$$= \frac{b_{i+1} P_i + a_i P_{i-1}}{b_{i+1} Q_i + a_i Q_{i-1}}$$

因此，关系成立。

再根据定理二，知道对于任意正整数 i 都有等式

$$\frac{P_i}{Q_i} - \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} = (-1)^{i+1} \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{Q_{i-1} Q_i}$$

成立。由此，令 $i = 1, 2, 3, \cdots$ 代入上式后，得

$$\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{Q_0 Q_1}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1} = -\frac{a_0 a_1}{Q_1 Q_2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{P_i}{Q_i} - \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}} = (-1)^{i+1} \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{Q_{i-1} Q_i}$$

把这些等式加起来，并且由于 $\frac{P_0}{Q_0} = b_0$，得

$$\frac{P_i}{Q_i} = b_0 + \frac{a_0}{Q_0 Q_1} - \frac{a_0 a_1}{Q_1 Q_2} + \cdots + (-1)^{i+1} \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{Q_{i-1} Q_i}$$

因为 i 是任意正整数，所以

$$b_0 + \frac{a_0}{b_1} + \frac{a_1}{b_2} + \cdots + \frac{a_{i-1}}{b_i} + \cdots$$

$$= b_0 + \frac{a_0}{Q_0 Q_1} - \frac{a_0 a_1}{Q_1 Q_2} + \cdots + (-1)^{i+1} \frac{a_0 a_1 \cdots a_{i-1}}{Q_{i-1} Q_i} + \cdots$$

定理得证。

推论 设连分式

$$b_0 + \frac{a_0}{b_1} + \frac{a_1}{b_2} + \cdots + \frac{a_{i-1}}{b_i} + \cdots$$

式中 a_{i-1}，b_i 均为实常数，$i = 1, 2, 3, \cdots$。则连分式可以变换成等价的偶数节或奇数节渐近分式的级数

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}=b_0+\frac{a_0b_2}{Q_0Q_2}+\frac{a_0a_1a_2b_4}{Q_2Q_4}+\cdots+\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-2}b_{2k}}{Q_{2k-2}Q_{2k}}$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots$$

或

$$\frac{P_{2k-1}}{Q_{2k+1}}=b_0+\frac{a_0}{b_1}-\frac{a_0a_1b_3}{Q_1Q_3}-\cdots-\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-1}b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

其中

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

证明 首先分析指标相差2的两个渐近分式的差。在等式

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

中，用 $i+1$ 代替 i，得到

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}=(-1)^i\frac{a_0a_1\cdots a_i}{Q_iQ_{i+1}}$$

把上面两式加起来，得到如下等式

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^i\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{Q_i}\left(\frac{a_i}{Q_{i+1}}-\frac{1}{Q_{i-1}}\right)$$

$$=(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}b_{i+1}}{Q_{i-1}Q_{i+1}}$$

其次，在上式中用 $2k-1$ 代替 i，得

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}-\frac{P_{2k-2}}{Q_{2k-2}}=\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-2}b_{2k}}{Q_{2k-2}Q_{2k}}$$

令 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$时，有以下等式

$$\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_0}{Q_0}=\frac{a_0b_2}{Q_0Q_2}$$

$$\frac{P_4}{Q_4}-\frac{P_2}{Q_2}=\frac{a_0a_1a_2b_4}{Q_2Q_4}$$

……

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}-\frac{P_{2k-2}}{Q_{2k-2}}=\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-2}b_{2k}}{Q_{2k-2}Q_{2k}}$$

把这些等式加起来，并且由于$\frac{P_0}{Q_0}=b_0$，于是得偶数节渐近分式的级数

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}=b_0+\frac{a_0b_2}{Q_0Q_2}+\frac{a_0a_1a_2b_4}{Q_2Q_4}+\cdots+\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-2}b_{2k}}{Q_{2k-2}Q_{2k}}$$

同样，用 $2k$ 代替 i 时，又得等式

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}-\frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}}=-\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-1}b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$$

令 $k=1$，2，3，…时，可得以下等式

$$\frac{P_3}{Q_3}-\frac{P_1}{Q_1}=-\frac{a_0a_1b_3}{Q_1Q_3}$$

$$\frac{P_5}{Q_5}-\frac{P_3}{Q_3}=-\frac{a_0a_1a_3b_5}{Q_3Q_5}$$

……

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}-\frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}}=-\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-1}b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$$

把这些等式加起来，并且根据$\frac{P_1}{Q_1}=b_0+\frac{a_0}{b_1}$，于是得奇数节渐近分式的级数

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}=b_0+\frac{a_0}{b_1}-\frac{a_0a_1b_3}{Q_1Q_3}-\cdots-\frac{a_0a_1\cdots a_{2k-1}b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$$

推论得证。

连分式应用 现在举例说明连分式的计算。

例 1

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots$$

截断第 i 节后，就得出$\sqrt{2}$的近似值，如

$i=0$ $\qquad\sqrt{2}\approx 1$

$i=1$ $\qquad\sqrt{2}\approx 1+\frac{1}{2}=1.5$

$i=2 \qquad \sqrt{2} \approx 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=1.4$

$i=3 \qquad \sqrt{2} \approx 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=1.416$

……

例 2

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cdots+\cfrac{(2i-1)^2}{2+\cdots}}}}}$$

截断第 i 节后，就得出 $\frac{\pi}{4}$ 的近似值，如

$i=0 \qquad \frac{\pi}{4} \approx 1$

$i=1 \qquad \frac{\pi}{4} \approx \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}=0.666\dot{6}$

$i=2 \qquad \frac{\pi}{4} \approx \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2}}}=0.8666\dot{6}$

$i=3 \qquad \frac{\pi}{4} \approx \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2}}}} \approx 0.7237$

……

2. 函数渐近分式

如下的表达式

$$\varphi(x)=b_0+\cfrac{x-x_0}{b_1+\cfrac{x-x_1}{b_2+\cdots+\cfrac{x-x_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

如果 $\varphi(x)$ 的分点 x_i 与 x 均属于区间〔a，b〕，那么，$\varphi(x)$

称为定义在区间〔a，b〕上的一维函数连分式。分式$\frac{x-x_{i-1}}{b_i}$称做函数连分式的第 i 节，$(x-x_{i-1})$ 与 b_i 称做函数连分式第 i 节的两个项。$(x-x_0)$，$(x-x_1)$，$(x-x_2)$，…，称做函数连分式的部分分子，并且为变数；b_0 是常数项；b_1，b_2，…，称做部分分母，并且为实常数。

函数连分式的节数可以为有限或无限。在前一种情况下，可以把函数连分式记成

$$\varphi_i(x)=b_0+\cfrac{x-x_0}{b_1+\cfrac{x-x_1}{b_2+\cdots+\cfrac{x-x_{i-1}}{b_i}}}$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m$$

并且称之为有限函数连分式，或更确切地称它为第 i 节连分式。在后一种情况下，可以把函数连分式记成

$$\varphi_i(x)=b_0+\cfrac{x-x_0}{b_1+\cfrac{x-x_1}{b_2+\cdots+\cfrac{x-x_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

并且称之为无限函数连分式。

假设函数连分式各节的项都是有限数，并且函数连分式部分分母都不为零。把有限函数连分式记成

$$\frac{P_i(x)}{Q_i(x)}=b_0+\cfrac{x-x_0}{b_1+\cfrac{x-x_1}{b_2+\cdots+\cfrac{x-x_{i-1}}{b_i}}}$$

并且把$\frac{P_i(x)}{Q_i(x)}$称做函数连分式的第 i 个渐近分式。为了叙述方便起见，把 $P_i(x)$ 记为 P_i，把 $Q_i(x)$ 记为 Q_i。于是第 i 个渐近分式记为

$$\frac{P_i(x)}{Q_i(x)}=\frac{P_i}{Q_i}$$

本书中以后各章，如果没有特殊说明，一律采用此种记法。

定理四 设

$$P_i=b_iP_{i-1}+(x-x_{i-1})P_{i-2}$$
$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(x-x_{i-1})Q_{i-2}$$

则

$$\frac{P_i}{Q_i}=\frac{b_iP_{i-1}+(x-x_{i-1})P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+(x-x_{i-1})Q_{i-2}} \tag{1-2}$$

其中

$$P_{-1}=1$$
$$P_0=b_0$$
$$Q_{-1}=0$$
$$Q_0=1$$

证明 首先证明 $i=1$ 的情况，由连分式的定义，有

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{b_1P_0+(x-x_0)P_{-1}}{b_1Q_0+(x-x_0)Q_{-1}}$$

同样，对于 $i=2$ 的情况

$$\frac{P_2}{Q_2}=b_0+\frac{x-x_0}{b_1}\,+\,\frac{x-x_1}{b_2}$$

$$=b_0+\frac{(x-x_0)b_2}{b_1b_2+(x-x_1)}=\frac{b_2P_1+(x-x_1)P_0}{b_2Q_1+(x-x_1)Q_0}$$

如果等式（1-2）对 m 成立，那么对（$m+1$）成立否？为此用($m+1$)代替 m 时，从 $\frac{P_m}{Q_m}$ 变到 $\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}$，应以 $b_m+\frac{x-x_m}{b_{m+1}}$ 代替 b_m，于是

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}=\frac{\left(b_m+\frac{x-x_m}{b_{m+1}}\right)P_{m-1}+(x-x_{m-1})P_{m-2}}{\left(b_m+\frac{x-x_m}{b_{m+1}}\right)Q_{m-1}+(x-x_{m-1})Q_{m-2}}$$

$$=\frac{b_{m+1}[b_mP_{m-1}+(x-x_{m-1})P_{m-2}]+(x-x_m)P_{m-1}}{b_{m+1}[b_mQ_{m-1}+(x-x_{m-1})Q_{m-2}]+(x-x_m)Q_{m-1}}$$

$$=\frac{b_{m+1}P_m+(x-x_m)P_{m-1}}{b_{m+1}Q_m+(x-x_m)Q_{m-1}}$$

由于m是任意正整数，故定理四成立。定理得证。

定理五 设

$$\frac{P_i}{Q_i}=\frac{b_iP_{i-1}+(x-x_{i-1})P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+(x-x_{i-1})Q_{i-2}}$$

则当 $i\geqslant 1$ 时，

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{Q_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^{i+1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_{i-1}Q_i}$$

证明 根据定理二可知，如果

$$\frac{P_i}{Q_i}=\frac{b_iP_{i-1}+a_{i-1}P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+a_{i-1}Q_{i-2}}$$

则

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1a_2\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}$$

在上式中，令

$$a_0=x-x_0,\quad a_1=x-x_1,\quad\cdots,\quad a_i=x-x_i$$

显然有

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^{i+1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_{i-1}Q_i}$$

成立。定理得证。

定理六（变换函数连分式成级数） 设函数连分式

$$\varphi(x)=b_0+\frac{x-x_0}{b_1}+\frac{x-x_1}{b_2}+\cdots+\frac{x-x_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

则可以变换为等价的级数

$$\varphi(x)=b_0+\frac{x-x_0}{Q_0Q_1}-\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{Q_1Q_2}$$
$$+\cdots+(-1)^{i+1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_{i-1}Q_i}+\cdots$$

其中

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(x-x_{i-1})Q_{i-2}$$
$$Q_{-1}=0$$
$$Q_0=1$$

证明 根据定理三可知，连分式

$$b_0+\frac{a_0}{b_1}+\frac{a_1}{b_2}+\cdots+\frac{a_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

可以变换为等价的级数

$$b_0+\frac{a_0}{Q_0Q_1}-\frac{a_0a_1}{Q_1Q_2}+\cdots+(-1)^{i+1}\frac{a_0a_1\cdots a_{i-1}}{Q_{i-1}Q_i}+\cdots$$

在上式中，令

$$a_0=x-x_0,\quad a_1=x-x_1,\quad a_2=x-x_2,\quad \cdots,\quad a_i=x-x_i$$

显然有

$$\varphi(x)=b_0+\frac{(x-x_0)}{Q_0Q_1}-\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{Q_1Q_2}+\cdots+(-1)^{i+1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_{i-1}Q_i}+\cdots$$

其中

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(x-x_{i-1})Q_{i-2}$$
$$Q_{-1}=0$$
$$Q_0=1$$

定理得证。

推论 设函数连分式

$$\varphi(x)=b_0+\frac{x-x_0}{b_1}+\frac{x-x_1}{b_2}+\cdots+\frac{x-x_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

其中 x_{i-1}，b_i 为实常数，$i=1$，2，$\cdots$。则函数连分式可以变换成等价的偶数节或奇数节渐近分式的级数

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}=b_0+\frac{(x-x_0)b_2}{Q_0Q_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)b_4}{Q_2Q_4}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{2k-2})b_{2k}}{Q_{2k-2}Q_{2k}}$$

$$k=2,\ \cdots$$

或

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}=b_0+\frac{x-x_0}{b_1}-\frac{(x-x_0)(x-x_1)b_3}{Q_1Q_3}$$
$$-\cdots-\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{2k-1})b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots$$

其中

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(x-x_{i-1})Q_{i-2}$$
$$Q_{-1}=0$$
$$Q_0=1$$

证明 首先分析指标相差2的两个函数渐近分式的差。在等式

$$\frac{P_i}{Q_i}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^{i+1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_{i-1}Q_i} \tag{1-3}$$

中，用 $i+1$ 代替 i，得到

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}=(-1)^i\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_i)}{Q_iQ_{i+1}} \tag{1-4}$$

把上面两式加起来，有

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}=(-1)^i\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_i}$$
$$\times\left(\frac{x-x_i}{Q_{i+1}}-\frac{1}{Q_{i-1}}\right)=(-1)^{i+1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})b_{i+1}}{Q_{i-1}Q_{i+1}}$$

其次在上式中用 $2k-1$ 代替 i，有

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}-\frac{P_{2k-2}}{Q_{2k-2}}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{2k-2})b_{2k}}{Q_{2k-2}Q_{2k}}$$

令 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$时，有以下等式

$$\frac{P_2}{Q_2}-\frac{P_0}{Q_0}=\frac{(x-x_0)b_2}{Q_0Q_2}$$
$$\frac{P_4}{Q_4}-\frac{P_2}{Q_2}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)b_4}{Q_2Q_4}$$
$$\vdots$$
$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}-\frac{P_{2k-2}}{Q_{2k-2}}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{2k-2})b_{2k}}{Q_{2k-2}Q_{2k}}$$

把这些等式加起来，并由于$\frac{P_0}{Q_0}=b_0$，得

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}}=b_0+\frac{(x-x_0)b_2}{Q_0Q_2}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)b_4}{Q_2Q_4}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{2k-2})b_{2k}}{Q_{2k-2}Q_{2k}}$$

同样，用$2k$代替i，有

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}-\frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}}=-\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{2k-1})b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$$

令$k=1$，2，3，…时，有以下等式

$$\frac{P_3}{Q_3}-\frac{P_1}{Q_1}=-\frac{(x-x_0)(x-x_1)b_3}{Q_1Q_3}$$

$$\frac{P_5}{Q_5}-\frac{P_3}{Q_3}=-\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)b_5}{Q_3Q_5}$$

$$\vdots$$

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}-\frac{P_{2k-1}}{Q_{2k-1}}=-\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{2k-1})b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$$

把这些等式加起来，并且由于$\frac{P_1}{Q_1}=b_0+\frac{x-x_0}{b_1}$，便得到函数奇数节渐近分式的级数

$$\frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}=b_0+\frac{x-x_0}{b_1}-\frac{(x-x_0)(x-x_1)b_3}{Q_1Q_3}-\cdots-\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{2k-1})b_{2k+1}}{Q_{2k-1}Q_{2k+1}}$$

推论得证。

3. 连分式的变换

为了研究函数连分式的性质，首先讨论如下的函数连分式

$$\varphi(x)=b_0+\frac{x-x_0}{b_1}+\frac{x-x_1}{b_2}+\cdots+\frac{x-x_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

式中 x_{i-1}与b_i均为实数，$i=1$，2，3，…。

由于一个分数的分子与分母同时乘以任意不为零的有限数

时，分数值不变的这一事实，把函数连分式的第 i 节的分子 $(x-x_{i-1})$ 与分母 b_i 和第 $i+1$ 节的分子 $(x-x_i)$ 同时乘以任意不为零的有限数 c_{i-1} 时，$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，显然函数连分式的值不变。所以有下列恒等式

$$b_0+\frac{x-x_0}{b_1}+\frac{x-x_1}{b_2}+\cdots+\frac{x-x_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

$$=b_0+\frac{c_0(x-x_0)}{c_0b_1}+\frac{c_0c_1(x-x_1)}{c_1b_2}+\cdots+\frac{c_{i-1}c_i(x-x_i)}{c_ib_{i+1}}+\cdots \tag{1-5}$$

这样，P_1 与 Q_1 分别变成 c_0P_1 与 c_0Q_1，而通项 P_i 与 Q_i 分别变成 $c_0c_1\cdots c_{i-1}P_i$ 与 $c_0c_1\cdots c_{i-1}Q_i$。适当选取 c_i，利用式（1-5）总可以把函数连分式的所有部分分母都变成正的数。

其次讨论怎样利用式（1-5），把函数连分式所有部分分子都变成 1 。为此，这样选取 $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \cdots$，使它们满足等式

$$c_0(x-x_0)=1$$

$$c_{i-1}c_i(x-x_i)=1$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

由此，可得

$$c_0=\frac{1}{x-x_0}$$

$$c_1=\frac{x-x_0}{x-x_1}$$

$$\cdots\cdots$$

$$c_{2k}=\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{2k-1})}{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{2k})}$$

$$c_{2k+1}=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{2k})}{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{2k+1})}$$

和

$$c_0(c_1c_2)(c_3c_4)\cdots(c_{2k-1}c_{2k})=\frac{1}{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{2k})}$$

$$(c_0c_1)(c_2c_3)(c_4c_5)\cdots(c_{2k}c_{2k+1})=\frac{1}{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{2k+1})}$$

则函数连分式变换成

$$\varphi(x)=K_0+\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}+\cdots+\frac{1}{K_{2k}}+\frac{1}{K_{2k+1}}+\cdots$$

其中

$$K_0=b_0$$

$$K_1=\frac{b_1}{x-x_0}$$

……

$$K_{2k}=\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{2k-2})b_{2k}}{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{2k-1})}$$

$$K_{2k+1}=\frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_{2k-1})b_{2k+1}}{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{2k})}$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

最后，讨论利用式（1-5）把函数连分式的所有部分分母都变换成等于1。为此，设

$$c_i=\frac{1}{b_{i+1}}$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

则

$$\varphi(x)=K_0+\frac{K_1}{1}+\frac{K_2}{1}+\cdots+\frac{K_{i-1}}{1}+\cdots$$

其中

$$K_0=b_0$$

……

$$K_i=\frac{x-x_{i-1}}{b_ib_{i+1}}$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

于是函数连分式第 i 个渐近分式的分子与分母分别变成

$$\frac{P_i}{b_1b_2b_3\cdots b_i} \quad 与 \quad \frac{Q_i}{b_1b_2b_3\cdots b_i}$$

4. 变换级数成连分式

在前几节中，阐述了变换函数连分式成级数的问题。本节讨论怎样把级数变换成连分式的问题，以便把连分式的结果推广应用于幂级数。

事实上，可以用各种方法，把已知的幂级数变换成连分式。欧拉的下列恒等式可以用来变换幂级数成等值连分式。

$$\overline{P}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_ix^i+\cdots$$

$$=a_0+\cfrac{a_1x}{1-\cfrac{\frac{a_2}{a_1}x}{1+\frac{a_2}{a_1}x-\cdots-\cfrac{\frac{a_i}{a_{i-1}}x}{1+\frac{a_i}{a_{i-1}}x-\cdots}}}$$

为了书写方便起见，用不为零的有限数 c_i 分别乘 a_{i-1}、b_i 与 a_i 时，连分式的值不变，为此，利用式（1-5）。以 x 代换式（1-5）中的 $x-x_i$，并

$$c_0=1,\ c_1=a_1,\ c_2=a_2,\ \cdots,\ c_i=a_i,\ \cdots$$

$$b_1=1,\ b_2=1+\frac{a_2}{a_1}x,\ \cdots,\ b_i=1+\frac{a_i}{a_{i-1}}x,\ \cdots$$

时，显然有

$$\overline{P}(x)=a_0+\frac{a_1x}{1}-\frac{a_2x}{a_1+a_2x}-\cdots-\frac{a_ia_{i-1}x}{a_{i-1}+a_ix}\cdots$$

5. 关于函数连分式的收敛性

如果在区间$[a,\ b]$上一切点 x，当 $i\to\infty$时，极限

$$\lim_{i\to\infty}\frac{P_i}{Q_i}=\lim_{i\to\infty}\frac{b_iP_{i-1}+(x-x_{i-1})P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+(x-x_{i-1})Q_{i-2}}$$

存在且为有限时，把函数连分式

$$\varphi(x)=b_0+\frac{x-x_0}{b_1}+\frac{x-x_1}{b_2}+\cdots+\frac{x-x_i}{b_{i+1}}+\cdots$$

称做在区间〔a，b〕上收敛，而函数连分式的值就取这个极限值。

如果 $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{P_i}{Q_i}$ 不存在，把函数连分式称做本性发散。

定理七 收敛性判别定理

设诸数 a_0，a_1，a_2，…，a_i，满足下列条件

$$\left|\frac{x-x_0}{Q_1}\right|\leqslant a_0$$

及

$$\left|\frac{(x-x_i)Q_{i-1}}{Q_{i+1}}\right|\leqslant a_i$$

并且，$Q_{-1}=0$，$Q_0=1$，$Q_i=b_iQ_{i-1}+(x-x_{i-1})Q_{i-2}$，$x_i$ 与 b_i 为实数，x 属于区间〔a，b〕。

如果级数

$$\sum_{i=0}^{\infty}a_0a_1a_2\cdots a_i$$

收敛，则函数连分式

$$\varphi(x)=b_0+\frac{x-x_0}{b_1}+\frac{x-x_1}{b_2}+\cdots+\frac{x-x_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

在区间〔a，b〕上收敛。

证明 由定理六可知，可以把函数连分式 $\varphi(x)$ 化为等价的级数

$$\varphi(x)=b_0+\frac{(x-x_0)}{Q_0Q_1}-\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{Q_1Q_2}$$
$$+\cdots+(-1)^{i+1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_{i-1}Q_i}+\cdots$$

然后对等号两边取绝对值，有

$$|\varphi(x)|\leqslant|b_0|+\left|\frac{x-x_0}{Q_0Q_1}\right|+\left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{Q_1Q_2}\right|$$
$$+\cdots+\left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_{i-1}Q_i}\right|+\cdots$$

又根据本定理的条件可知上式右边各项满足不等式

$$\left|\frac{x-x_0}{Q_0Q_1}\right|\leqslant a_0$$

$$\left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{Q_1Q_2}\right|=\left|\frac{x-x_0}{Q_1}\right|\left|\frac{(x-x_1)Q_0}{Q_2}\right|\leqslant a_0a_1$$

而一般项

$$\left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_{i-1}Q_i}\right|$$
$$=\left|\frac{(x-x_0)}{Q_0Q_1}\cdot\frac{(x-x_1)Q_0}{Q_2}\cdot\frac{(x-x_2)Q_1}{Q_3}\right.$$
$$\left.\cdot\cdots\cdot\frac{(x-x_{i-1})Q_{i-2}}{Q_i}\right|$$
$$=\left|\frac{x-x_0}{Q_1}\right|\left|\frac{(x-x_1)Q_0}{Q_2}\right|\cdots\left|\frac{(x-x_{i-1})Q_{i-2}}{Q_i}\right|$$
$$\times\left|\frac{(x-x_i)Q_{i-1}}{Q_{i+1}}\right|$$
$$\leqslant a_0a_1a_2\cdots a_i$$
$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

于是

$$|\varphi(x)|\leqslant b_0+a_0+a_0a_1+a_0a_1a_2+\cdots+a_0a_1a_2\cdots a_i+\cdots$$
$$=b_0+\sum_{i=0}^{\infty}a_0a_1a_2\cdots a_i$$

由众所周知的外尔斯特拉斯（Weierstrass）判别法● 得知，若函数项级数$\sum_{i=1}^{\infty}f(x)$的各项在集E上满足不等式$|f_i(x)|$

● A.Я.辛钦，北京大学数学力学系数学分析与函数论教研室译，数学分析简明教程下册，第342页，高等教育出版社，1954年。

$\leqslant a_i$，a_i是某一个收敛的常数级数$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$的对应项，则级数$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$在集$E$上一致收敛。于是，由于级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_0 a_1 a_2 \cdots a_i$$

收敛，所以函数项级数

$$b_0 + \frac{x - x_0}{Q_0 Q_1} - \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{Q_1 Q_2} + \cdots + (-1)^{i+1} \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})}{Q_{i-1} Q_i} + \cdots$$

收敛。从而得出函数连分式

$$\varphi(x) = b_0 + \frac{x - x_0}{b_1} + \frac{x - x_1}{b_2} + \cdots + \frac{x - x_{i-1}}{b_i} + \cdots$$

在区间$[a, b]$上收敛。定理得证。

定理八 设函数连分式

$$\varphi(x) = b_0 + \frac{x - x_0}{b_1} + \frac{x - x_1}{b_2} + \cdots + \frac{x - x_{i-1}}{b_i} + \cdots$$

的部分分子（$x - x_{i-1}$）中，至少有一个等于零。x_{i-1}与b_i为非零实数，x属于区间$[a, b]$。则函数连分式$\varphi(x)$在区间$[a, b]$上收敛。

证明 根据定理六可知函数连分式$\varphi(x)$可以变换成等价级数

$$\varphi(x) = b_0 + \frac{(x - x_0)}{Q_0 Q_1} - \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{Q_1 Q_2} + \cdots + (-1)^{i+1} \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})}{Q_{i-1} Q_i} + \cdots$$

两边取绝对值，并令$Q_0 = 1$，有

$$|\varphi(x)|\leqslant|b_0|+\left|\frac{x-x_0}{Q_0Q_1}\right|+\left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{Q_1Q_2}\right|$$
$$+\cdots+\left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_{i-1}Q_i}\right|+\cdots$$

上式右边各项，可以表示成

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{Q_1Q_2}=\frac{(x-x_0)}{Q_1}\cdot\frac{(x-x_1)Q_0}{Q_2}$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{Q_2Q_3}$$
$$=\frac{(x-x_0)}{Q_1}\cdot\frac{(x-x_1)Q_0}{Q_2}\cdot\frac{(x-x_2)Q_1}{Q_3}$$

……

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_{i-1}Q_i}$$
$$=\frac{(x-x_0)}{Q_1}\cdot\frac{(x-x_1)Q_0}{Q_2}\cdot\cdots\cdot\frac{(x-x_{i-1})Q_{i-2}}{Q_i}$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

因为 Q_i 与 $(x-x_{i-1})Q_{i-2}$ 是多项式，所以有理分式 $\dfrac{(x-x_{i-1})Q_{i-2}}{Q_i}$ 除了使 Q_i 为零的点 x 外，在区间 $[a, b]$ 上是连续的。又连续函数在区间 $[a, b]$ 上有极大值存在，用 M_i 表示 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\dfrac{(x-x_{i-1})Q_{i-2}}{Q_i}$。根据定理假设 $(x-x_{i-1})$ 中至少有一个等于零，不失问题的一般性，不妨令 $x-x_{m-1}=0$，于是 $\dfrac{(x-x_{m-1})Q_{m-2}}{Q_m}$ 为零，显然恒等于零的函数的极大值也是零，记为 M_m。把 M_i 代入函数连分式的右边，有

$$|\varphi(x)|\leqslant\left|b_0\right|+\left|\frac{(x-x_0)}{Q_0Q_1}\right|+\left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{Q_1Q_2}\right|$$
$$+\cdots+\left|\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_{i-1}Q_i}\right|$$
$$\leqslant|b_0|+M_0+M_0M_1+\cdots+M_0M_1M_2\cdots M_{m-1}+\cdots$$

如果令 $M_i=a_i$，显然满足定理七的条件，

即

$$\left|\frac{x-x_0}{Q}\right| \leqslant a_0$$

$$\left|\frac{(x-x_i)Q_{i-1}}{Q_{i+1}}\right| \leqslant a_i$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

因为 $M_m=0$，所以

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_0a_1a_2a_3\cdots a_i = \sum_{i=0}^{m-1} a_0a_1a_2\cdots a_i$$

又因为

$$\sum_{i=0}^{m-1} a_0a_1a_2\cdots a_i$$

是收敛的，所以 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_0a_1a_2\cdots a_i$ 是收敛的，于是由定理七可知函数连分式 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上收敛。定理得证。

定理九 设函数连分式

$$\varphi(x)=b_0+\frac{x-x_0}{b_1}+\frac{x-x_1}{b_2}+\cdots+\frac{x-x_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

如函数 $\varphi(x)$ 的点 x 和 x_{i-1} 在区间 $[a,\ b]$ 上取值，并且 b_i 和 x_{i-1} 为非零实数。若 $\lim\limits_{i\to\infty} x_{i-1}=x$，则函数连分式在区间 $[a,\ b]$ 上收敛。

证明 由定理六可得 $\varphi(x)$ 的等价级数

$$\varphi(x)=b_0+\frac{(x-x_0)}{Q_0Q_1}-\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{Q_1Q_2}+\cdots+(-1)^{i+1}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})}{Q_{i-1}Q_i}+\cdots$$

为了便于证明，进一步可以把 $\varphi(x)$ 改写成

$$\varphi(x)=b_0+\frac{x-x_0}{Q_0Q_1}-\frac{x-x_0}{Q_1}\cdot\frac{(x-x_1)Q_0}{Q_2}+\cdots+(-1)^{i+1}\frac{x-x_0}{Q_1}\cdot\frac{(x-x_1)Q_0}{Q_2}\cdot\cdots\cdot\frac{(x-x_{i-1})Q_{i-2}}{Q_i}+\cdots$$

把上式等号两边取绝对值得如下不等式

$$|\varphi(x)|\leqslant|b_0|+\left|\frac{x-x_0}{Q_0Q_1}\right|+\left|\frac{x-x_0}{Q_1}\right|\left|\frac{(x-x_1)Q_0}{Q_2}\right|$$

$$+\cdots+\left|\frac{x-x_0}{Q_1}\right|\left|\frac{(x-x_1)Q_0}{Q_2}\right|\cdots\left|\frac{(x-x_{i-1})Q_{i-2}}{Q_i}\right|+\cdots$$

由于 $Q_i=b_iQ_{i-1}+(x-x_{i-1})Q_{i-2}$，所以 Q_i 为多项式，并在区间 $[a, b]$ 为连续函数。根据连续函数在闭区间 $[a, b]$ 上有极值的性质，可知 Q_i 在区间 $[a, b]$ 上有极大值和极小值。

由假设条件 $\lim\limits_{i\to\infty}x_{i-1}=x$，可知对 $\bar{\varepsilon}=\frac{\overline{Q}_M\varepsilon}{Q}>0$，存在 $N>0$，且当 $i\geqslant N$ 时，有 $|x-x_{i-1}|<\bar{\varepsilon}$

成立。从而，当 $i\geqslant N$ 时，有不等式

$$|Q_i|\leqslant|b_iQ_{i-1}|+|x-x_{i-1}||Q_{i-2}|\leqslant|b_i||Q_{i-1}|+|Q_{i-2}|$$

成立。即

$$|Q_i|\leqslant|Q_N|$$

或

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|Q_i|\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|Q_N|$$

令 $\overline{Q}_N$ 表示 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|Q_N|$，$\overline{Q}_M$ 表示 $\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|Q_i|$。于是得出，当 $i\geqslant N$ 时，

$$\left|\frac{(x-x_{i-1})Q_{i-2}}{Q_i}\right|\leqslant\left|\frac{(x-x_{i-1})\max Q_{i-2}}{\min Q_i}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{(x-x_{i-1})\overline{Q}_N}{\overline{Q}_M}\right|\leqslant\varepsilon$$

令 $a_i=\frac{(b-a)\max Q_{i-2}}{\min Q_i}$，代入 $\varphi(x)$ 中，得

$$|\varphi(x)|\leqslant|b_0|+\left|\frac{x-x_0}{Q_0Q_1}\right|+\left|\frac{x-x_0}{Q_1}\right|\cdot\left|\frac{(x-x_1)Q_0}{Q_2}\right|$$

$$+\cdots+\left|\frac{x-x_0}{Q_1}\right|\cdot\left|\frac{(x-x_1)Q_0}{Q_2}\right|$$

$$\cdot\cdots\cdot\left|\frac{(x-x_{i-1})Q_{i-2}}{Q_i}\right|+\cdots$$

$$\leqslant |b_0| + \left|\frac{b-a}{\min Q_1}\right| + \left|\frac{b-a}{\min Q_1}\right| \cdot \left|\frac{b-a}{\min Q_2}\right|$$

$$+ \cdots + \left|\frac{b-a}{\min Q_1}\right| \cdot \left|\frac{b-a}{\min Q_2}\right|$$

$$\cdot \cdots \cdot \left|\frac{(b-a)\max Q_{N-2}}{\min Q_N}\right| + \left|\frac{b-a}{\min Q_1}\right|$$

$$\cdot \cdots \cdot \left|\frac{(b-a)\max Q_{N-2}}{\min Q_N}\right|$$

$$\cdot \left|\frac{(x-x_{i-1})\overline{Q}_N}{\overline{Q}_M}\right| + \cdots$$

$$\leqslant |b_0| + a_1 + a_1a_2 + \cdots + a_1a_2\cdots a_N + a_1a_2\cdots a_N\varepsilon + \cdots$$

$$= |b_0| + \sum_{i=1}^{N} a_1a_2\cdots a_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} a_1a_2\cdots a_N\varepsilon^{i-N}$$

故

$$|\varphi(x)| = b_0 + \sum_{i=1}^{N} a_1a_2a_3\cdots a_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} a_1a_2\cdots a_N\varepsilon^{i-N}$$

因为上式第一个部分和是有限项，显然是收敛的，而第二个部分和，当 $i \geqslant N$ 时，乘积项中 ε 是任意小的正数，不失一般性，可以设 $\varepsilon \leqslant 1$，故第二个部分和是收敛的。根据定理七可知，$|\varphi(x)|$ 是收敛的。定理得证。

推论 在定理九中，如果令 $x=0$，得到如下推论：

如果 $\lim\limits_{i\to\infty} x_{i-1} = 0$ 时，则函数连分式

$$\varphi(x) = b_0 + \frac{x-x_0}{b_1} + \frac{x-x_1}{b_2} + \cdots + \frac{x-x_{i-1}}{b_i} + \cdots$$

变为

$$\varphi(0) = b_0 - \frac{x_0}{b_1} - \frac{x_1}{b_2} - \cdots - \frac{x_{i-1}}{b_i} - \cdots$$

显然，当 x_{i-1} 和 b_i 为常数时，函数连分式收敛。

第二章 最优化方法

最优化方法是一个新的数学分支，它所研究的问题包括两个方面，一方面是从实际的生产或科学技术问题中形成为最优化的数学模型，另一方面是对数学模型做数学处理和求解。由于科学技术的发展，实际上已经形成了解决最优化问题的一套数学计算方法，这套方法通常叫做最优化方法。

在日常工作中，人们必须从内容繁杂、名目众多的诸项任务中，决策一下首先做哪项工作，其次做哪项工作，最后做哪些工作；然后再考虑对各项工作如何分配人力、设备、资金；还要考虑采用何种组织形式等等，以求用最短的时间、最少的人力和资金，达到最佳的效果。在生产活动中，为了研究如何使生产效率高、产品的数量多和质量高、原材料消耗少以及成本低等问题，可以通过优选影响生产过程的诸因素（例如，生产工艺条件、设备、管理方法、工人的技术水平等）的方法，找出最优的生产流程，确定合理的工艺条件等等。这就是经常遇到的最优化问题。

通常情况下，生产过程的最优化问题大多属于多因素优选问题。但是，长期的生产实践使人们对影响生产过程的诸因素的不同作用有所认识，从而可先对预想起主要作用的因素进行分析，暂时把影响小的因素假设是固定不变的，这样就把多因素问题转化为单因素问题，以利于最优化问题的解决。

1. 极值有理法

设目标函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内连续、单峰，$f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内某些点 x_i 处的值可以从计算或实验给出。把 $f(x_i)$ 记为 f_i。现在要寻求函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的极值点，

以便为确定最优生产过程或者为其它应用提供必要的信息。

从微分学知道，连续函数$f(x)$在区间$[a, b]$内的某点x处达到极大或极小时，必须满足方程

$$\frac{df(x)}{dx}=0 \tag{2-1}$$

如果令$y(x)=\frac{df(x)}{dx}$，那么，求目标函数$f(x)$在区间$[a, b]$内的极值问题，就转变为求方程

$$y(x)=0$$

的零点问题。

为了求方程的解，设函数$y(x)$的反函数为$x=\psi(y)$，且用一个连分式

$$\psi(y)=b_0+\frac{y-y_0}{b_1}+\frac{y-y_1}{b_2}+\cdots+\frac{y-y_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

近似地表示。如果已知$f(x)$的导数值y_i，$i=0, 1, 2, \cdots$，则系数b_i，$i=0, 1, 2, \cdots$，也可以用某种方法确定。把$y=0$代入$\psi(y)$，即可得到方程（2-1）的一个近似根$\tilde{x}$，其计算公式为

$$\tilde{x}=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\cdots-\frac{y_{i-1}}{b_i}-\cdots \tag{2-2}$$

为了确定诸系数b_i，假设有理函数$\psi(y)$所表示的曲线通过点列

$$(y_0, x_0), (y_1, x_1), (y_2, x_2), \cdots, (y_i, x_i), \cdots$$

即$\psi(y_i)=x_i$，$i=0, 1, 2, \cdots$。由此条件，再根据$\psi(y)$的渐近分式，可得方程

$$\frac{b_iP_{i-1}+(y_i-y_{i-1})P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+(y_i-y_{i-1})Q_{i-2}}=x_i$$

从上式解出系数b_i，即得

$$b_0=x_0$$

$$b_i = -\frac{(x_i Q_{i-2} - P_{i-2})(y_i - y_{i-1})}{x_i Q_{i-1} - P_{i-1}}$$

这样就确定了系数 b_i，$i = 1, 2, 3, \cdots$。

当 $i \geqslant 1$ 时，P_i 和 Q_i 满足递推关系式

$$P_i = b_i P_{i-1} + (y - y_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = b_i Q_{i-1} + (y - y_{i-1}) Q_{i-2}$$

$P_{-1} = 1$，$P_0 = b_0$，$Q_{-1} = 0$，$Q_0 = 1$。

由于目标函数 $f(x)$ 的导数 $y(x)$ 是未知的，若对 $f(x)$ 的表达式能很方便地求导时，则可以通过微分计算 $y(x)$ 的值。一般情况下，$f(x)$ 的表达式是不知道的，这时，可以通过实验测出点 x 与点 $(x+\Delta x)$ 处的相应函数值 $f(x)$ 与 $f(x+\Delta x)$，用差商近似地表示 $f(x)$ 在点 x 处的导数

$$y(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

并且，令 $y_i = \dfrac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$，这里的 Δx 是一个很小的适当的增量。于是把 y_i 代入式（2-2）中，就可以求得极值点的一个近似值，由于 $\tilde{x}$ 是方程

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0$$

的解，若目标函数 $f(x)$ 在足够小的区间 $\left[x - \dfrac{\Delta x}{2}, x + \dfrac{\Delta x}{2}\right]$ 内是对称的，则极值点 x 与近似极值点 $\tilde{x}$ 有如下关系

$$x = \tilde{x} + \frac{\Delta x}{2}$$

为了判断极值点是极大值点还是极小值点，可以采用如下不等式

$$\left[f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - 2f(x) + f\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)\right] \leqslant 0$$

来判断。如果不等式成立，则极值点为极大值点；反之，为极小值点。

下面说明怎样利用式（2-2）。在开始做实验时，可以根据经

验选取两个初始实验点x_0和x_1，对这两个初始点只要在约束范围〔a，b〕内就可以了。然后选定一个适当小的Δx，在每个点附近做两次实验，即在点（$x_0-\Delta x$）和（$x_0+\Delta x$）处做实验，求出$f(x_0-\Delta x)$和$f(x_0+\Delta x)$，再计算出

$$y_0=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

同样，在点（$x_1-\Delta x$）和（$x_1+\Delta x$）处也做两次实验，求出$f(x_1-\Delta x)$和$f(x_1+\Delta x)$，算出

$$y_1=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1-\Delta x)}{2\Delta x}$$

把点（x_0，y_0），（x_1，y_1）代入式（2-2）后求出新的实验点

$$x_2=b_0-\frac{y_0}{b_1}$$

再在点（$x_2-\Delta x$）和点（$x_2+\Delta x$）处做两次实验，求出y_2。如果$|y_2|\leqslant\varepsilon$，$\varepsilon$为实验精度，则$x_2+\Delta x$为所求的极值点。否则，再把点（$x_2$，$y_2$）代入式（2-2）继续计算，又得出新的实验点

$$x_3=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}$$

如此反复地重复上述计算，直到满足精度要求，即$|y_i|\leqslant\varepsilon$为止，$x_i+\Delta x$为所求的极值点。当然，如果目标函数$f(x)$的导数$y(x)$容易获得，就无须以$f(x)$的差商近似代替$y(x)$的值了。式(2-2)的几何意义是什么呢？事实上，就是利用实验点和该点的斜率，建立逼近关系式，进而再推出在斜率为零时的近似极值点。再利用新给出的实验点做实验，于是一边实验，一边利用实验信息去建立极值点的变化规律。从某种意义上看，极值有理法是自动寻优的计算方法。在实际运用时，这种方法既适合静态计算，也适合动态过程控制。一般情况下，式（2-2)用到第七节以内，就可以满足精度要求。如果在某种特殊情况下，取到第七节仍然不满足精度时，可以丢掉x_0点，而用x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6、x_7，相应地去代替x_0、x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6，继续上述

计算过程。因为实际生产或实验中所测试的数据难免有误差，所以利用式（2-2）进行最优方案计算时，取更多的节数，收敛并不太显著。

为了便于应用极值有理法，下面给出系数 b_i，$i=0$，1，2，3，…，的一种计算格式。

若已知实验点列（x_i，y_i），则系数 b_i 的计算格式如下：

i	y_i	x_i	b_1	b_2	b_3	…
0	y_0	x_0				
1	y_1	x_1	$b_1=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$			
2	y_2	x_2	$b_{12}=\dfrac{y_2-y_0}{x_2-x_0}$	$b_2=\dfrac{y_2-y_1}{b_{12}-b_1}$		
3	y_3	x_3	$b_{13}=\dfrac{y_3-y_0}{x_3-x_0}$	$b_{23}=\dfrac{y_3-y_1}{b_{13}-b_1}$	$b_3=\dfrac{y_3-y_2}{b_{23}-b_2}$	
4	y_4	x_4	$b_{14}=\dfrac{y_4-y_0}{x_4-x_0}$	$b_{24}=\dfrac{y_4-y_1}{b_{14}-b_1}$	$b_{34}=\dfrac{y_4-y_2}{b_{24}-b_2}$	…
5	y_5	x_5	$b_{15}=\dfrac{y_5-y_0}{x_5-x_0}$	$b_{25}=\dfrac{y_5-y_1}{b_{15}-b_1}$	$b_{35}=\dfrac{y_5-y_2}{b_{25}-b_2}$	…
…	…	…	…	…	…	

其中

$$y_i=\frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i-\Delta x)}{2\Delta x}。$$

2．离散点极值有理法

在实际问题中，常常有大量的生产纪录或实验数据需要处理，如已知点列

$$(x_0,\ f_0),\ (x_1,\ f_1),\ \cdots,\ (x_i,\ f_i),$$
$$\cdots,\ (x_m,\ f_m)$$

能否借助计算机求算出由上述点列所描述问题的极值。为此提出一种计算方法。

设已知目标函数 $f(x)$，在点 x_i 处的函数值为 f_i，$i=0$，1，2，…，m，点列（x_i，f_i）的变化趋势呈单峰（或下凹），求出其极值点 x。

为此，用下面形式的函数来近似地表示目标函数 $f(x)$

$$\varphi(x)=a_0+\frac{x-x_0}{a_1}+\frac{x-x_1}{a_2}+\cdots+\frac{x-x_{i-1}}{a_i}+\cdots$$

上式也可以改写成如下形式：

$$\varphi_0(x)=a_0+\frac{x-x_0}{\varphi_1(x)}$$

其中

$$\varphi_1(x)=a_1+\frac{x-x_1}{\varphi_2(x)}$$

……

$$\varphi_{i-1}(x)=a_{i-1}+\frac{x-x_{i-1}}{\varphi_i(x)}$$

$$\varphi_i(x)=a_i$$

而系数 a_0，a_1，a_2，…，a_i 可以通过 $\varphi_0(x_i)=f_i$ 来确定，递推算法为

$$a_0=f_0$$

$$\varphi_0(x_i)=f_i$$

$$\varphi_{j+1}(x_i)=\frac{x_i-x_j}{\varphi_j(x_i)-a_j}$$

$$a_i=\varphi_i(x_i)$$

$$j=0,\ 1,\ \cdots,\ i-1$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

由微积分学可知，目标函数 $f(x)$ 的极值点 x 必满足其导数方程

$$f'(x)=y(x)=0$$

根据点列（x_i，f_i）的单峰假设，可知 $f'(x)$ 是单调下降，于是

其反函数存在。设其反函数为

$$x=\psi(y)$$

把极值有理法的思想用于上式，令 $\psi(y_i)=x_i$，其表示式为

$$\psi(y)=b_0+\frac{y-y_0}{b_1}+\frac{y-y_1}{b_2}+\cdots+\frac{y-y_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

同样，可以把函数 $\psi(y)$ 写为如下形式：

$$\psi_0(y)=b_0+\frac{y-y_0}{\psi_1(y)}$$

其中

$$\psi_1(y)=b_1+\frac{y-y_1}{\psi_2(y)}$$

$$\psi_2(y)=b_2+\frac{y-y_2}{\psi_3(y)}$$

……

$$\psi_{i-1}(y)=b_{i-1}+\frac{y-y_{i-1}}{\psi_i(y)}$$

$$\psi_i(y)=b_i$$

而系数 b_i 的计算公式为

$$b_0=x_0$$

$$\psi_0(y_i)=x_i$$

$$\psi_{j+1}(y_i)=\frac{y_i-y_j}{\psi_j(y_i)-b_j}$$

$$b_i=\psi_i(x_i)$$

$$j=0,\ 1,\ \cdots,\ i-1$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

因为目标函数 $f(x)$ 的极值点 x，使

$$f'(x)=y(x)=0$$

成立，故令 $y=0$，代入 $\psi(y)$，得出极值点的计算公式

$$x=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\cdots-\frac{y_{i-1}}{b_i}-\cdots \qquad (2\text{-}3)$$

在使用式（2-3）时，必须求出目标函数 $f(x)$ 在点 x 的导数 $f'(x)$。

对于目标函数 $f(x)$ 是连续的情况，一种方法是直接对目标函数 $f(x)$ 进行微分，求出 x 点的导数；另一种方法是通常采用差商 $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ 来近似代替导数的办法。

但是，用这两种方法求 $f'(x)$ 有时都会遇到困难。特别是当 $f(x)$ 的表达式很繁琐时，用微分方法很难求出导数。

若采用差商近似代替导数，则一方面其精度低，另一方面求一次导数时还必须计算二次目标函数值，这样的一维寻优就要花费很多的计算机机时。为了减少计算函数 $f(x)$ 的次数，下面提出一种计算 $f'(x)$ 的近似方法。

将 $\varphi(x)$ 对 x 微分，得出导数的近似计算公式

$$\varphi'(x)=\frac{\varphi_1(x)-(x-x_0)\varphi_1'(x)}{\varphi_1^2(x)}$$

其中

$$\varphi_1'(x)=\frac{\varphi_2(x)-(x-x_1)\varphi_2'(x)}{\varphi_2^2(x)}$$

……

$$\varphi_{i-1}'(x)=\frac{\varphi_i(x)-(x-x_{i-1})\varphi_i'(x)}{\varphi_i^2(x)}$$

$$\varphi_i'(x)=0$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

对于目标函数 $f(x)$ 是用离散点给出的情况，可以直接采用 $\varphi'(x)$ 代替 $y(x)$，$y_i=\varphi'(x_i)$。

在求极值的计算中，注意选取初始值 x_0 和步长 h，计算出点 $x_i=x_0+ih$ 上的 $y_i=\varphi'(x_i)$ 值，$i=0$，1，2，3，再代入极值点式（2-3）中，求出 $\bar{x}_i$。若 $|\varphi'(\bar{x}_i)|\leqslant\varepsilon$，$\varepsilon$ 为计算精度，则 $\bar{x}_i$ 为所求的极值点，否则把新产生的点（y_i，$\bar{x}_i$）代入式(2-3)

中，继续进行计算，直至满足精度要求为止。

在使用时，先做实验得到点列 (x_0, f_0)，(x_1, f_1)，…，(x_i, f_i)，用上述方法借助计算机进行运算，就可以求出极值。点列可以是不等距的。对于点列 (x_i, f_i)，$i=0, 1, 2, \cdots, m$，要进行是否存在极值点的检查。为此只需检查相邻两点的差商 $\frac{\Delta f_i}{\Delta x}$ 与 $\frac{\Delta f_{i+1}}{\Delta x}$，$i=0, 1, 2, \cdots, m$，是否异号。如果异号，表示该点列内有极值点；如果同号，表示该点列内没有极值点。

当极值点求出以后，可以根据 x 在第 j 点附近时，若不等式

$$(f_{j+1}-2f_j+f_{j-1})\leqslant 0$$

成立，则点 x 为极大值点；反之，点 x 为极小值点。

在使用式（2-3）时，对已知离散点列的要求并不严格，点列 (x_i, f_i) 可以是等距的，也可以是不等距的。在有实践经验的前提下，允许在极值点附近的点取密些，而在其它地方的点可以取稀一些。

本方法是处理大量实验数据，并找出其极值点的一种新方法。为了检验该方法的适用范围和精度，除了解决实际应用问题以外，还在计算机上对各种典型函数进行过数字模拟实验。实验分两种情况进行，一种是在实验范围 $[a, b]$ 内，按均分法取离散点列 $x_i=a+\frac{b-a}{m}(i-1)$，$i=1, 2, 3, \cdots, m+1$；另一种是在实验范围 $[a, b]$ 内，按不等距取离散点列。离散点列可以取“0.618”法的实验点列，取这种点列有很大的实用性，因为“0.618”法广泛应用于工矿、企业部门，并取得了良好效果。把数据输入计算机应用离散点极值有理法就可以求出极值点。

例 1　求目标函数 $f(x)=\sin x$ 在区间 $[0, \pi]$ 内的极值点。

解　计算结果如下：

次 数	"0.618" 法	离散点极值有理法
0	1.19998060	
1	1.94160939	
2	2.39996120	
3	1.65833240	
4	1.48325759	1.56526840
5	1.76653458	1.57079635
6	1.59145977	1.57079847
7	1.55013022	1.57079611
9	1.57567329	1.57079639
20	1.57093850	
40	1.57079613	

其精确极大值点为 $x=1.57079632$。

例 2　求目标函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+2x$ 的极值点。

解　计算结果如下：

次 数	"0.618" 法	离散点极值有理法
0	1.19998060	
1	1.94160939	
2	0.741628797	
3	0.458351803	-0.597392×10^{-4}
4	0.283276993	0.354248834
5	0.175074810	0.354251432
6	0.350149620	0.354248688
7	0.391479176	0.354248688
20	0.354291666	
30	0.354248103	
40	0.354248261	

其精确极大值点为 $x=0.354248688$。

例 3　求目标函数 $f(x)=\sin x\cos x$ 在区间 $[0,\ \pi]$ 内的极值点。

解　计算结果如下：

次　　数	"0.618" 法	离散点极值有理法
0	1.19998060	
1	1.94160939	
2	0.741628797	
3	0.458351803	0.749061977
4	0.916703607	0.749061977
5	0.633426614	0.785493722
6	0.808501424	0.785493722
7	0.849830980	0.785398175
30	0.785398121	

其精确极大值点为 $x=\frac{\pi}{4}=0.785398163$。

取"0.618"法的点列作为离散点，采用离散点极值有理法算出的上述表中右列结果，其详细计算步骤如下：

首先通过点列 (x_i, f_i) 建立近似的有理函数 $\varphi(x)$，其系数 a_i 计算结果如下：

次　　数	x_i	f_i	a_i
0	1.19998060	0.337745894	0.337745894
1	1.94160939	−0.337743937	−1.09791259
2	0.741628797	0.498085465	0.681528645
3	0.458351803	0.396800140	0.513084975
4	0.916703607	0.482857738	−2.61477686
5	0.633426614	0.477081900	2.13957795
6	0.808501424	0.499466334	−0.841720242
7	0.849830980	0.495854154	−1.45665017
8	0.782958353	0.499994047	12.8413535
9	0.767171868	0.499667838	−0.618518036

计算出 $\varphi(x)$ 的系数 a_0，a_1，…，a_i 后，就得到了近似有理逼近函数。

其次求其导数方程 $\varphi'(x)=0$ 的解。设初始值 $x_0=0.5$，$x_1=0.75$，$x_2=1$ 代入 $\varphi'(x)$ 中。计算结果如下：

次数	x_i	$\varphi'(x_i)$	$\bar{x}_i$	b_i
0	0.5	0.540302312	0.5	0.5
1	0.75	0.070737201	0.787661018	−1.87826044
2	1.0	−0.416146346	0.786892354	14.0564067
3	0.786892354	-0.298837×10^{-2}	0.785376785	−0.04450153
4	0.785376785	0.427561×10^{-4}	0.785398163	−13.9477124
5	0.785398163	0.108101×10^{-9}	0.785398163	−1.21424788

从上述计算过程可以看出，前三点为初始值，x_3 即 $\bar{x}_2$，是由式（2-3）求得的。然后再把（x_3，$\varphi'(x_3)$）代入式（2-3），得出 $\bar{x}_3$，直至$|\varphi'(\bar{x}_i)|\leqslant\varepsilon$，$\varepsilon$ 为计算精度，则 $\bar{x}_i$ 为所求的极值点。

3．极值迭代法

设目标函数 $f(x)$在区间$[a，b]$内是单峰的，并且目标函数值由实验或计算给出，则目标函数 $f(x)$在区间$[a，b]$的极大值点 x 的迭代公式为

$$x=b_0-\cfrac{y_0}{b_1-\cfrac{y_1}{b_2-\cdots-\cfrac{y_6}{b_7}}} \tag{2-4}$$

式中

$$b_0=x_0$$

$$b_i=-\frac{(x_iQ_{i-2}-P_{i-1})(y_i-y_{i-1})}{x_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i=b_iP_{i-1}+(y-y_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(y-y_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$\cancel{Q_{-1}=0}$$

$$Q_0=1$$

$$y_i=\varphi'(x_i)$$

式中$\varphi(x)$为通过点列（x_0，f_0），（x_1，f_1），（x_2，f_2），…，（x_i，f_i）的~~有理逼近函数，即~~

$$\varphi(x)=a_0+\frac{x-x_0}{\varphi_1(x)}$$

其中

$$\varphi_1(x)=a_1+\frac{x-x_1}{\varphi_2(x)}$$

$$\varphi_2(x)=a_2+\frac{x-x_2}{\varphi_3(x)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_i(x)=a_i$$

系数 a_i 的计算公式为

$$a_0=f_0$$

$$a_i=-\frac{(f_i\overline{Q}_{i-2}-\overline{P}_{i-2})(x_i-x_{i-1})}{f_i\overline{Q}_{i-1}-\overline{P}_{i-1}}$$

式中

$$\overline{P}_{-1}=1$$

$$\overline{P}_0=a_0$$

$$\overline{Q}_{-1}=0$$

$$\overline{Q}_0=1$$

$$\overline{P}_i=a_i\overline{P}_{i-1}+(x-x_{i-1})\overline{P}_{i-2}$$

$$\overline{Q}_i=a_i\overline{Q}_{i-1}+(x-x_{i-1})\overline{Q}_{i-2}$$

函数 $\varphi(x)$ 的导数的计算公式为

$$\varphi'(x)=\frac{\varphi_1(x)-(x-x_0)\varphi_1'(x)}{\varphi_1^2(x)}$$

其中

$$\varphi_1'(x)=\frac{\varphi_2(x)-(x-x_1)\varphi_2'(x)}{\varphi_2^2(x)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_{i-1}'(x)=\frac{1}{a_i}$$

$$\varphi_i'(x)=0$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$$

在上述公式中，采用按照“0.618”法所产生的点列 (x_i, f_i)，x_i 的计算公式为

$$x_0=a_0+(b_0-a_0)\times 0.382$$

$$x_1 = a_0 + (b_0 - a_0) \times 0.618$$
$$x_i = a_i + (b_i - a_i) \times c$$
$$i \geqslant 2$$

式中

$$a_0 = a\text{，}\ b_0 = b$$

$a_i = x_{i-1}$，$b_i = b_{i-1}$，当 $f_{i-2} < f_{i-1}$ 时；

$a_i = a_{i-1}$，$b_i = x_{i-1}$，当 $f_{i-2} > f_{i-1}$ 时；

$$c = \begin{cases} 0.618, & \text{当 } f_{i-2} \leqslant f_{i-1} \text{ 时；} \\ 0.382, & \text{当 } f_{i-2} > f_{i-1} \text{ 时。} \end{cases}$$

如果由式（2-4）得出的 x_i^* 满足不等式

$$|x_i^* - x_{i-1}^*| \leqslant |x_i - x_{i-1}|$$

和

$$|x_i^* - x_{i-1}^*| \leqslant \varepsilon \text{ 或} |\varphi'(x_i)| \leqslant \varepsilon$$

时，x_i^* 为所求的极大值点。若取到 $i = 6$ 仍不满足精度要求时，则去掉 x_0 点，取 x_1，x_2，…，x_7 代入式（2-4）继续迭代，直至满足计算精度为止。

证明 极值迭代法的基本思想是，按照“0.618”法做实验时，产生一个点列

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots$$

根据“0.618”法的收敛性，得知当实验次数 i 充分大时，极限

$$\lim_{i \to \infty} x_i = x^*$$

存在，极限值 x^* 为 $f(x)$ 的极大值点。由此可知，即使 $f(x)$ 是未知的，但当 i 充分大时，点列（x_i，f_i）将充分接近极值点，于是经过极值点附近的点列（x_i，f_i），所建立的有理函数将能够很好地近似 $f(x)$。故设其近似函数为

$$\varphi(x) = a_0 + \frac{x - x_0}{\varphi_1(x)}$$

其中

$$\varphi_1(x)=a_1+\frac{x-x_1}{\varphi_2(x)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_i(x)=a_i$$

从微分学知，$f(x)$的极值点满足其导数方程

$$f'(x)=0$$

由于计算$f'(x)$比较费事，甚至有时求不出来，所以用$\varphi(x)$的导数近似代替它。

为了解方程$\varphi'(x)=y(x)=0$，设其反函数为

$$\psi(y)=b_0+\frac{y-y_0}{b_1}+\frac{y-y_1}{b_2}+\cdots+\frac{y-y_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

式中的系数b_i，不难根据$\psi(y_i)=x_i$的规定，仿照离散点极值有理法导出其计算公式。因为极值点满足方程$\varphi'(x)=0$，所以令$y=0$代入$\psi(y)$中，即得出极值点的计算公式

$$x=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\cdots-\frac{y_{i-1}}{b_i}-\cdots$$

取$i=7$，于是得到计算极值点的迭代公式(2-4)。

下面列举几个算例。

例 设已知目标函数$f(x)=-(x-30)^2$，求$f(x)$在区间[0，100]内的极大值点。

解 计算结果如下：

次数	"0.618" 法	式(2-4)
0	38.1966011	
1	61.8033988	61.8033988
2	23.6067977	22.4805743
3	14.5898033	23.1382387
4	29.1796067	27.5367979
5	32.6237921	30.9036521
6	29.0509831	30.0000000
7	30.4951685	30

从此例的计算结果可知，用“0.618”法达到同样的 10^{-8} 精度要求，需要继续实验到第 40 次时，方能使极值点 $x=30$；而应用极值迭代法，只经过七次实验就达到 10^{-8} 精度要求。

此例中采用的有理逼近函数 $\varphi(x)$ 的表示式为

$$\varphi(x)=-67.18427+\frac{x-38.1966011}{\varphi_1(x)}$$

其中

$$\varphi_1(x)=-0.025+\frac{x-61.8033988}{\varphi_2(x)}$$

$$\varphi_2(x)=72.135955+\frac{x-23.6067977}{\varphi_3(x)}$$

$$\varphi_3(x)=0.025+\frac{x-14.5898033}{\varphi_4(x)}$$

$$\varphi_4(x)=-0.128333+\frac{x-29.1796067}{\varphi_5(x)}$$

$$\varphi_5(x)=0.702623+\frac{x-32.6237921}{\varphi_6(x)}$$

$$\varphi_6(x)=0.512289+\frac{x-27.0509831}{-0.141932\times10^{-12}}$$

其极大值点 x 的计算公式为

$$x=61.8033988$$

$$-\frac{y_1}{-1.01722092}-\frac{y_2}{-66.2125038}-\frac{y_3}{-0.526125199-d}$$

式中

$$d=\frac{y_4}{-55.300005}-\frac{y_5}{-0.456653873}-\frac{y_6}{0.14565\times10^2}$$

4. 中点极值有理法

设目标函数 $f(x)$ 在区间 $[\bar{a}_0,\ \bar{b}_0]$ 内单峰，目标函数 $f(x)$ 在实验点 x_i 处的函数值 f_i 由实验或计算给出。那么，目标函数

$f(x)$在区间$[\bar{a}_0, \bar{b}_0]$内的极值点的计算公式为

$$x = b_0 - \frac{y_0}{b_1} - \frac{y_1}{b_2} - \cdots - \frac{y_{i-1}}{b_i} - \cdots \tag{2-5}$$

其中

$$b_0 = x_0$$

$$b_i = -\frac{(x_i Q_{i-2} - P_{i-2})(y_i - y_{i-1})}{x_i Q_{i-1} - P_{i-1}}$$

而

$$P_i = b_i P_{i-1} + (y - y_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = b_i Q_{i-1} + (y - y_{i-1}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = b_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$y = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$y_i = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

而

$$x_0 = \bar{a}_0$$

$$x_i = \bar{a}_{i-1} + \frac{\bar{b}_{i-1} - \bar{a}_{i-1}}{2}$$

其中

$\bar{a}_i = \bar{a}_{i-1}$， $\bar{b}_i = x_i$， 当 y_i 与 y_{i-1} 异号时，

$\bar{a}_i = x_i$， $\bar{b}_i = \bar{b}_{i-1}$， 当 y_i 与 y_{i-1} 同号时，

$i = 1, 2, 3, \cdots$

本方法基于，目标函数$f(x)$的极值所在范围的中点，随着极值所在范围的逐次缩小，从而产生一个收敛于极值点的点列x_i，用这个点列来找极值点。

证明 为了求证目标函数$f(x)$的极值点x^*的计算公式，

首先设法产生一个点列 x_i，当 $i\to\infty$ 时，$x_i\to x^*$。为此，必须在 $\bar{a}_0$ 处做实验，测出 $f(\bar{a}_0)$ 和 $f(\bar{a}_0+\Delta x)$，并求出斜率

$$y_0=\frac{f(\bar{a}_0+\Delta x)-f(\bar{a}_0)}{\Delta x}$$

再在区间 $[\bar{a}_0,\ \bar{b}_0]$ 的中点 $x_1=\bar{a}_0+\frac{\bar{b}_0-\bar{a}_0}{2}$ 处做实验，测出 $f(x_1)$ 和 $f(x_1+\Delta x)$ 的值，并求出斜率

$$y_1=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

进而对 $\bar{a}_0$ 和 x_1 两点处的斜率 y_0 和 y_1 进行比较。如果 y_0 与 y_1 异号，则在区间 $[\bar{a}_0,\ x_1]$ 内有极大值点。这样，就可以把区间 $[\bar{a}_0,\ \bar{b}_0]$ 的 $[x_1,\ \bar{b}_0]$ 部分弃掉，把剩下的 $[\bar{a}_0,\ x_1]$ 部分记为新区间 $[\bar{a}_1,\ \bar{b}_1]$；如果 y_0 与 y_1 同号，说明在区间 $[\bar{x}_1,\ \bar{b}_1]$ 内有极大值点，于是把 $[\bar{a}_0,\ x_1]$ 部分弃掉，把剩下的部分同样记为区间 $[\bar{a}_1,\ \bar{b}_1]$。再在区间 $[\bar{a}_1,\ \bar{b}_1]$ 的中点 x_2 处做实验，算出斜率 $y_2=\frac{f(x_2+\Delta x)-f(x_2)}{\Delta x}$，并比较 $\bar{a}_1$ 与 x_2 二点处的斜率 y_1 与 y_2。留下斜率值为异号的部分，记为区间 $[\bar{a}_2,\ \bar{b}_2]$。依此类推就产生了一个点列

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_i,\ \cdots$$

其计算公式归纳如下：

$$x_0=a_0$$

$$x_i=\bar{a}_{i-1}+\frac{\bar{b}_{i-1}-\bar{a}_{i-1}}{2}$$

其中

$$\bar{a}_i=\bar{a}_{i-1},\ \bar{b}_i=x_i,\ \text{当 } y_{i-1} \text{ 与 } y_i \text{ 异号时；}$$

$$\bar{a}_i=x_i,\ \bar{b}_i=\bar{b}_{i-1},\ \text{当 } y_{i-1} \text{ 与 } y_i \text{ 同号时。}$$

从上述点列的产生不难看出，点 x_i 是极大值所在区间 $[\bar{a}_{i-1},\ \bar{b}_{i-1}]$ 的中点，每做完一次实验，区间 $[\bar{a}_i,\ \bar{b}_i]$ 就缩短一半，所以

$$\lim_{i\to\infty} x_i=x^*$$

其次，根据$f(x)$在区间$[\bar{a}_0, \bar{b}_0]$内是单峰的假设，可知$f'(x)$在区间$[\bar{a}_0, \bar{b}_0]$内是单调下降的，并由正值变为负值。由于$f'(x)$是连续的，所以$f'(x)$必经过零点。这个零点x^*就是要求的极值点。由于$\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x^*$，显然$\lim\limits_{i\to\infty} y_i = 0$，故在这个趋于极限的过程中得到一个相应的点列

$$(y_0, x_0), (y_1, x_1), \cdots, (y_i, x_i), \cdots$$

为了导出极值点的计算公式，设有理函数

$$\psi(y) = b_0 + \cfrac{y-y_0}{b_1 + \cfrac{y-y_1}{b_2 + \cdots + \cfrac{y-y_{i-1}}{b_i + \cdots}}}$$

通过点(y_i, x_i)，即在y_i处$\psi(y_i)=x_i$，然后令$y=0$代入$\psi(y)$中，便得出极大值点x的计算公式

$$x = b_0 - \cfrac{y_0}{b_1 - \cfrac{y_1}{b_2 - \cdots - \cfrac{y_{i-1}}{b_i - \cdots}}}$$

其中系数b_i的计算公式仿照离散点极值有理法不难导出。

在应用中，若$|y_i| \leqslant \varepsilon$，$\varepsilon$为计算精度，则$x_i$为所求极值点的近似值，这时，必须加上$\frac{\Delta x}{2}$作为修正，$\Delta x$为一适当小的量。这时，极值点

$$x^* = x + \frac{\Delta x}{2}$$

5. 非线性方程解法

设目标函数$f(x)$，x为控制变量，要求调节控制变量x，使$f(x)$达到指定的目标值C。为此，任给三个初始点x_0、x_1和x_2，计算相应的函数值$f(x_0)$、$f(x_1)$和$f(x_2)$，并求出与目标值C的差，记为$F(x_0)$、$F(x_1)$和$F(x_2)$。再设函数

$$x(F) = a_0 + \cfrac{F-F_0}{a_1 + \cfrac{F-F_1}{a_2}}$$

在$F(x_i)$点处取函数值为$x(F_i)=x_i$，$i=0$，1，2。由于所调节的变量x使$f(x)$等于C，所以令差$F=0$代入$x(F)$中，得出新的控制变量近似值

$$x_3=a_0-\frac{F_0}{a_1-\frac{F_1}{a_2}}$$

再把x_3代入$f(x)$中求相应的差$F(x_3)=f(x_3)-C$，如果$F(x_3)=0$，则x_3为所求的解。否则，把点(F_3, x_3)代入$x(F)$中确定系数a_3，再求出新的控制量近似值

$$x_4=a_0-\frac{F_0}{a_1-\frac{F_1}{a_2-\frac{F_2}{a_3}}}$$

如果$F(x_4)$为零，则x_4为所求的解，否则，继续上述过程。于是得出非线性方程

$$F(x)=0$$

解的一般计算公式

$$x=a_0-\frac{F_0}{a_1-\frac{F_1}{a_2-\cdots-\frac{F_{i-1}}{a_i-\cdots}}}$$

其中系数由$x(F_i)=x_i$的条件来确定，显然，其公式为

$$a_0=x_0$$

$$a_i=-\frac{(x_iQ_{i-2}-P_{i-2})(F_i-F_{i-1})}{x_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i=a_iP_{i-1}+(F-F_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=a_iQ_{i-1}+(F-F_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=a_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$F_i=F(x_i)$$

在应用上述方法时，一般取$i\leqslant 7$就可以满足要求。如果$i=7$

仍达不到要求时，可以另选初始点 x_0、x_1 和 x_3，重复上述计算。

本方法不但适用于目标函数 $f(x)$ 为连续的情况，也能处理目标函数 $f(x)$ 为离散的点列情况，如已知点列

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	…
f_i	f_0	f_1	f_2	f_3	…

求出相应的各点余量 F_i 后，即用

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	…
F_i	F_0	F_1	F_2	F_3	…

点列代入，便可求出解。

6. 极值有理逼近法

设目标函数 $f(x)$ 在优选区间 $[a, b]$ 内连续、单峰，求 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的极大值点 x。根据极值有理法，x 的计算公式为

$$x = b_0 - \frac{y_0}{b_1} - \frac{y_1}{b_2} - \cdots - \frac{y_{i-1}}{b_i} - \cdots$$

但是，在使用上述公式时，必须计算差商 $\frac{\Delta f}{\Delta x}$。这就要求在每一个实验点附近都要做两次实验，如在 $(x_i+\Delta x)$ 和 x_i 两点处分别做实验，然后，求出相应的函数值 $f(x_i+\Delta x)$ 和 $f(x_i)$，最后，计算出 $y_i = \frac{f(x_i+\Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$。

能否减少一次实验，即在每一个实验点只做一次实验。事实上，在实验中已经得到每次实验的信息，即点列 (x_0, f_0)，(x_1, f_1)，…，(x_i, f_i)。问题归结为，能否仅利用已经得到实验信息，即可求出在每一个实验点处的斜率来。

为此，设有理函数

$$\varphi(x) = a_0 + \frac{x - x_0}{\varphi_1(x)}$$

$$\varphi_1(x)=a_1+\frac{x-x_1}{\varphi_2(x)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_{i-1}(x)=a_{i-1}+\frac{x-x_{i-1}}{\varphi_i(x)}$$

$$\varphi_i(x)=a_i$$

在 x_i 处取值 $\varphi(x_i)=f_i$，根据这个条件，不难确定系数 a_i，$i=0，1，2，\cdots$。这样，$\varphi(x)$ 就是 $f(x)$ 的近似函数。从而，可以用 $\varphi'(x_i)$ 代替 $f'(x)$，代入极值点的计算公式，于是得到了当在实验点处每次只做一次实验（或计算）时的极值点计算公式，现将本方法的计算步骤叙述如下。

设目标函数 $f(x)$ 值由实验（或计算）得到，如果已知初始实验点 x_0、x_1 和 x_2 时，则 $f(x)$ 的极值点的计算公式为

$$x=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\cdots-\frac{y_{i-1}}{b_i}-\cdots \tag{2-6}$$

其中

$$b_0=x_1$$

$$b_i=-\frac{(x_{i+1}Q_{i-2}-P_{i-2})(y_i-y_{i-1})}{x_{i+1}Q_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i=b_iP_{i-1}+(y-y_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(y-y_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$y_i=\varphi'(x_{i+1})$$

$$x_{i+1}=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\cdots-\frac{y_{i-1}}{b_i}$$

$\varphi(x)$ 是目标函数 $f(x)$ 的近似函数

$$\varphi(x)=a_0+\frac{x-x_0}{\varphi_1(x)}$$

$$\varphi_1(x)=a_1+\frac{x-x_1}{\varphi_2(x)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_{i-1}(x)=a_{i-1}+\frac{x-x_{i-1}}{\varphi_i(x)}$$

$$\varphi_i(x)=a_i$$

其中

$$a_0=f_0$$

$$a_i=-\frac{(f_i\overline{Q}_{i-2}-\overline{P}_{i-2})(x_i-x_{i-1})}{f_i\overline{Q}_{i-1}-\overline{P}_{i-1}}$$

$$\overline{P}_i=a_i\overline{P}_{i-1}+(x-x_{i-1})\overline{P}_{i-2}$$

$$\overline{Q}_i=a_i\overline{Q}_{i-1}+(x-x_{i-1})\overline{Q}_{i-2}$$

$$\overline{P}_{-1}=1$$

$$\overline{P}_0=a_0$$

$$\overline{Q}_{-1}=0$$

$$\overline{Q}_0=1$$

而函数 $\varphi(x)$ 的导数计算公式为

$$\varphi'(x)=\frac{\varphi_1(x)-(x-x_0)\varphi_1'(x)}{\varphi_1^2(x)} \qquad (2\text{-}7)$$

其中

$$\varphi_1'(x)=\frac{\varphi_2(x)-(x-x_1)\varphi_2'(x)}{\varphi_2^2(x)}$$

$$\varphi_2'(x)=\frac{\varphi_3(x)-(x-x_2)\varphi_3'(x)}{\varphi_3^2(x)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_{i-1}'(x)=\frac{1}{a_i}$$

$$\varphi_i'(x)=0$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots$$

做计算时，首先在实验范围 $[a,\ b]$ 内任取三个初始实验点

x_0、x_1 和 x_2 做实验，测出相应的目标函数值 f_0、f_1 和 f_2，再代入式（2-7）计算出 $\varphi'(x_1)$、$\varphi'(x_2)$，把 $(x_1, \varphi'(x_1))$ 和 $(x_2, \varphi'(x_2))$ 代入式（2-6），得出新的实验点

$$x_3 = b_0 - \frac{y_0}{b_1}$$

若 $|\varphi'(x_3)| \leqslant \varepsilon$，$\varepsilon$ 为计算精度，则 x_3 即为所求的极值点。否则继续实验，直到满足精度为止。在计算中，当实验点已用到 x_7 仍然不能满足 10^{-8} 的精度要求，则去掉 x_0 点，把点列 (x_1, f_1)，(x_2, f_2)，…，(x_7, f_7) 代入式（2-6），求出新的实验点 x_7，继续上述实验和计算。

若极值点已经求出，则可以利用函数 $\varphi(x)$ 的二阶导数 $\varphi''(x)$ 的性质来判断其是极大值点还是极小值点。也即，若不等式

$$\varphi(x+\Delta x) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\Delta x) \leqslant 0$$

成立，则 x 为极大值点；反之，x 为极小值点。本方法不但适于目标函数 $f(x)$ 在实验范围〔a，b〕内单峰的情况，也适于目标函数 $f(x)$ 在实验范围〔a，b〕内为下凹的情况。后一情况，利用式（2-6）可以求出目标函数 $f(x)$ 在区间〔a，b〕内的极小值点。

例 1 应用极值有理逼近法，求目标函数 $f(x) = (x-1) \times (10-x)$ 在区间〔1，10〕内的极值点。

解 首先在区间〔1，10〕内任取三个初始实验点 x_0、x_1 和 x_2，其值分别为 0.50、0.75 和 1.00，计算出相应的目标函数值，然后代入式（2-6）。计算结果如下：

次数 i	x_i	f_i	φ_i	式(2-6)算出的极值点 x
0	0.50	−4.75	9.749999	0.75
1	0.75	−2.3125	9.0128205	4.0562173
2	1.00	0.291038×10^{-10}	2.8869565	6.60890049
3	4.0565217	18.1663705	−2.2178009	5.49995218
4	6.60890049	19.0203396	0.956238×10^{-4}	5.5

由于$f_5-2f_4+f_3\leqslant 0$，所以$x=5.5$为极大值点，与目标函数$f(x)$的精确极大值点5.5一致。

例2 为了检验极值有理逼近法，本例采用修正费波那奇(Fibonacci)数方法● 及其计算实例。

设求目标函数$f(x)=(x-30)^2$在区间〔0，100〕内的极小值。

解 为了计算方便，在$f(x)$前加一个负号，把求函数$f(x)$的极小值问题变成求$-f(x)$的极大值问题。

首先在实验范围内任取三点x_0、x_1和x_2，其值分别为0.50、0.75和1.00。计算结果如下：

次数 i	x_i	f_i	φ_i'	用式(2-6)算出的极值点 x
0	0.50	−870.25		
1	0.75	−855.5625	58.7499	0.75
2	1.00	−841.000	58.0021	20.389
3	20.389	−92.3704	19.2219	39.2091
4	39.2091	−84.8082	−18.4182	29.999
5	29.999	0	0.324529×10^{-5}	30
6	30	0	-0.593×10^{-7}	30

计算表明，用极值有理逼近法经过七次实验就得出精确极大值点$x=30$。而用修正费波那奇数方法，同样做七次实验得出近似极大值点为29.20，其精度只达到小数点后一位，要想满足10^{-8}精度要求，必须增加实验次数，其计算结果如下：

次　数	20	30	35	40
结　果	29.9967542	29.999995	29.9999985	30.0000001
精　度	0.00325	0.000005	0.0000015	0.0000009

● Gordon S. G. Beveridge and Robert S. Schechter, Optimization: Theory and Practice, p189～p193, McGraw-Hill Book Company, 1970.

7. 函数极值有理法

设函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$上有单调下降（或上升）连续的一阶导数$f'(x)$存在，并且$f'(a)$与$f'(b)$异号。那么，函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$上有唯一的极大（或极小）值点，其计算公式为

$$x=b_0+\frac{g(0)-g_0}{b_1}+\frac{g(0)-g_1}{b_2}+\cdots+\frac{g(0)-g_{i-1}}{b_i}+\cdots \tag{2-8}$$

其中

$$b_0=x_0$$

$$b_i=-\frac{(x_iQ_{i-2}-P_{i-2})(g(y_i)-g_{i-1})}{x_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

而

$$P_i=b_iP_{i-1}+(g(y)-g_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(g(y)-g_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$y_i=\frac{f(x_i+\Delta x)-f(x_i)}{\Delta x}$$

$$g_i=g(y_i)$$

$g(y)$为$y(x)(=f'(x))$的经验反函数。令$y=0$，代入式$x(y)$中即得到极值点的计算公式（2-8）。

证明　由于$f'(a)$与$f'(b)$异号，并$f'(x)$在区间$[a,\ b]$内连续，所以$f'(x)$从正值变到负值时，必然经过$f'(x)$的零点x_0，使$f'(x_0)=0$成立。

现在证明极值点x_0的唯一性。假设$f(x)$在区间$[a,\ b]$内极值点不是唯一的，即除了x_0点外，还有一个极大值点x_1，不

妨设 $x_0<x_1$，于是 $f(x)$ 在区间〔a，b〕上满足不等式

$$f(x)<f(x_0) \quad 和 \quad f(x)<f(x_1)$$

由此推知，从点 x_0 变化到 x_1 时，$f'(x)$ 由负值变到正值，这就与函数 $f(x)$ 的一阶导数是单调下降的假设相矛盾，所以极大值点 x_0 是唯一的。

既然，函数 $f(x)$ 在区间〔a，b〕内有唯一的极大值点存在，那么，如何求出极大值点？能否建立极值点的解析表达式？下面就来讨论这个问题。

从函数理论可知，函数 $f(x)$ 的极值点必须满足其导数方程

$$y(x)=f'(x)=0$$

由于 $f'(x)$ 在区间〔a，b〕是单调下降的，所以 $f'(x)$ 的反函数存在，故可以根据函数 $f'(x)$ 的具体特点，给出经验反函数 $g(y)$，再用 $g(y)$ 来构造 $f'(x)$ 的近似反函数

$$\psi(y)=b_0+\frac{g(y)-g_0}{b_1}+\frac{g(y)-g_1}{b_2}+\cdots+\frac{g(y)-g_{i-1}}{b_i}+\cdots \tag{2-9}$$

并规定 $\psi(y_i)=x_i$，利用 $\psi(y)$ 的渐近分式可得方程式

$$\frac{b_iP_{i-1}+(g(y_i)-g_{i-1})P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+(g(y_i)-g_{i-1})Q_{i-2}}=x_i$$

从中解出未知系数，有

$$b_0=x_0$$

$$b_i=-\frac{(x_iQ_{i-2}-P_{i-2})(g(y_i)-g_{i-1})}{x_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

又因极值点满足导数方程 $f'(x)(=y(x))=0$，所以令 $y=0$ 代入式（2-9）中得出计算函数 $f(x)$ 的极值点的近似公式为

$$x=b_0+\frac{g(0)-g_0}{b_1}+\frac{g(0)-g_1}{b_2}+\cdots+\frac{g(0)-g_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

这样求出的极值点 x 需加上 $\frac{\Delta x}{2}$ 作为修正值。

式中的 $g_i = g(y_i)$，$y_i = \dfrac{f(x_i+\Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$。

例 1　应用函数极值有理法，求目标函数 $f(x)=\sin x$ 在区间〔0，3.1415〕的极值点。

解　首先选经验反函数 $g(y)=g(f')=\arccos f'$，并任取三个初始实验点 x_0、x_1 和 x_2，其次求出各初始点处的导函数值 f'_0、f'_1 和 f'_2，再利用等式 $\psi(y_i)=x_i$ 分别得出

$$x(f'_0)=b_0+\frac{g(f'_0)-g(f'_0)}{b_1}=x_0$$

$$x(f'_1)=b_0+\frac{g(f'_1)-g(f'_0)}{b_1}+\frac{g(f'_1)-g(f'_1)}{b_2}=x_1$$

由于 $g(f'_0)-g(f'_0)=\arccos f'_0-\arccos f'_0=0$，所以 $b_0=x_0$。又因为 $\dfrac{g(f'_1)-g(f'_0)}{x_1-x_0}=1$，所以 $b_1=1$。

同样，把 $(f'_2,\ x_2)$ 代入，$\psi(f'_2)=x_2$，得出

$$x(f'_2)=b_0+$$
$$\frac{g(f'_2)-g(f'_0)}{b_1}+\frac{g(f'_2)-g(f'_1)}{b_2}+\frac{g(f'_2)-g(f'_2)}{b_3}=x_2$$

上式可以写成

$$b_1+\frac{x_2-x_1}{b_2}=\frac{x_2-x_0}{x_2-b_0}$$

由于 $b_1=1$，必须使 $\dfrac{x_2-x_1}{b_2}=0$。已知 x_1 与 x_2 是不相同的二点，故 $x_2-x_1\neq 0$，所以只有 $b_2=\infty$。把上面求出的系数代入 $\psi(y)$ 中，得出

$$\psi(f')=b_0+\frac{g(f')-g(f'_0)}{b_1}+\frac{g(f')-g(f'_1)}{b_2}$$

$$=x_0+\frac{\arccos f'-\arccos f'_0}{1}$$

令 $f'=0$ 代入 $\psi(f')$ 中，得出极值点

$$x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

例 2　求目标函数 $f(x) = -x^2 + x + 1$ 在区间〔0，1〕上的极值点。

解　首先选经验反函数 $g(y) = g(f') = -\frac{y}{2}$，并任取三个初始点 x_0、x_1 和 x_2，其值分别为 0.25、0.50 和 0.75，代入 $f'(x)$ 中得出相应的导数值 $f'_0 = 0.50$，$f'_1 = 0$ 和 $f'_2 = -0.50$。其次由系数公式得出 $b_0 = 0.25$，$b_1 = 1$，$b_2 = \infty$。于是 $\psi(y)$ 的函数形式为

$$\psi(y) = 0.25 + \frac{g(y) - g(0.5)}{b_1} = 0.5 + \frac{y}{2}$$

令 $y = 0$ 代入上式，即得极值点

$$x(0) = 0.5 - \frac{0}{2} = 0.5$$

上述二例，目标函数较为简单，选经验反函数也较容易，只要经验反函数选得合适，仅做几点实验，就可以求出精确的极值点。

例 3　求目标函数 $f(x) = -(x^3 - 3x^2 + 4x - 3)^2$ 在〔0，3〕内的极大值点。

解　选经验反函数 $g(y) = g(f') = \frac{\Delta f}{\Delta x}$，再取三个初始点 $x_0 = 2.30345774$，$x_1 = 2.803457$，$x_2 = 3.303457$，代入函数极值点公式，计算结果如下：

次数 i	x_i	f'_i	近似极值点	b_i
0	2.30345774	−30.8162213	2.30345774	2.30345774
1	2.80345774	−143.852221	2.16714621	−226.071998
2	3.30345774	−458.564344	2.07329282	1.5604828
3	2.07329282	−11.7269099	1.84595388	−701.034116
4	1.84595388	−2.86460840	1.71902311	0.159781594
5	1.71902311	−0.476540840	1.68376474	−128.516115
6	1.68376474	-0.279089×10^{-1}	1.68136019	0.0742124016
7	1.68136019	-0.112199×10^{-3}	1.68135042	−99.3118490

利用上述计算结果，函数$f(x)$的极大值点为

$$x=x_7+\frac{\Delta x}{2}=1.68135042+0.9765625\times10^{-3}=1.68232698$$

准确到10^{-7}。

8. n维极值有理逼近法

设目标函数$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$，在实验区间$R_n$：$(a_1\leqslant x_1\leqslant b_1, a_2\leqslant x_2\leqslant b_2, \cdots, a_n\leqslant x_n\leqslant b_n)$内单峰（或下凹），则目标函数$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$在区间$R_n$内有极大值，并由极值点的逼近公式求出。

本方法的基本思想是，首先固定n个因素中的$n-1$个因素$(x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$，于是把求目标函数$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$的$n$个因素的最优化问题，变成先求一个（第$j$个）因素的最优化问题，在对第$j$个因素优化后，把$x_j$固定在最优值，再对其余因素依次进行单因素的最优化。x_j的计算公式为

$$x_j=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\cdots-\frac{y_{i-1}}{b_i}-\cdots \tag{2-10}$$

其中

$$b_0=x_{j1}$$

$$b_i=-\frac{(x_{j\,i+1}Q_{i-2}-P_{i-2})(y_i-y_{i-1})}{x_{j\,i+1}Q_{i-1}-P_{i-1}}$$

而

$$P_i=b_iP_{i-1}+(y-y_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(y-y_{i+1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$y=\varphi'(x_j)$$

$$y_{i+1}=\varphi^{j}(x_{j\,i+1})$$

x_j 表示第 j 个因素

又

$$\varphi_0(x_j)=a_0+\frac{x_j-x_{j0}}{\varphi_1(x_j)}$$

$$\varphi_1(x_j)=a_1+\frac{x_j-x_{j1}}{\varphi_2(x_j)}$$

……

$$\varphi_{i-1}(x_j)=a_{i-1}+\frac{x_j-x_{j\,i-1}}{\varphi_i(x_j)}$$

$$\varphi_i(x_j)=a_i$$

而函数 $\varphi(x_i)$ 的导数计算公式为

$$\varphi'(x_j)=\frac{\varphi_1(x_j)-(x_j-x_{j0})\varphi_1'(x_j)}{\varphi_1^2(x_j)}$$

$$\varphi_1'(x_j)=\frac{\varphi_2(x_j)-(x_j-x_{j1})\varphi_2'(x_j)}{\varphi_2^2(x_j)}$$

……

$$\varphi_{i-1}'(x_j)=\frac{1}{a_{i-1}}$$

$$\varphi_i'(x_j)=0$$

函数 $\varphi(x_i)$ 的系数计算公式为

$$a_0=f_0$$

$$a_i=-\frac{(f_i\overline{Q}_{i-2}-\overline{P}_{i-2})(x_{ji}-x_{j\,i-1})}{f_i\overline{Q}_{i-1}-\overline{P}_{i-1}}$$

其中

$$\overline{P}_i=a_i\overline{P}_{i-1}+(x_j-x_{j\,i-1})\overline{P}_{i-2}$$

$$\overline{Q}_i=a_i\overline{Q}_{i-1}+(x_j-x_{j\,i-1})\overline{Q}_{i-2}$$

$$\overline{P}_{-1}=1$$

$$\overline{P}_0=a_0$$

$$\overline{Q}_{-1}=0$$

$$\overline{Q}_0=1$$

证明 由于目标函数 $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 是 n 维的，所以当固定其中（$n-1$）个变量 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}, \cdots, x_{j-1\,0}, x_{j+1\,0}, \cdots, x_{n0})$ 时，函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 就变成了只含有一个变量 x_j 的函数了，记作

$$F_j(x_j)=f(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{j-1\,0}, x_j, x_{j+1\,0}, \cdots, x_{n0})$$

根据函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 R_n 上单峰，所以函数 $F_j(x_j)$ 在区间 $[a_j \leqslant x_j \leqslant b_j]$ 上也是单峰，由此单峰性质可知 $F_j'(x_j)$ 在 $[a_j, b_j]$ 上是单调下降的，并从正值变到负值，故 $F_j'(x)$ 的反函数存在。

为了建立 $F_j(x_j)$ 与 x_j 的函数关系式，通过实验点列 (x_{j0}, f_0)，(x_{j1}, f_1)，(x_{j2}, f_2)，…，(x_{ji}, f_i) 构造一个近似有理函数

$$\varphi(x)=a_0+\frac{x-x_{j0}}{\varphi_1(x)}$$

其中

$$\varphi_1(x)=a_1+\frac{x-x_{j1}}{\varphi_2(x)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_{i-1}(x)=a_{i-1}+\frac{x-x_{j\,i-1}}{\varphi_i(x)}$$

$$\varphi_i(x)=a_i$$

并且规定 $\varphi(x_{ji})=f_i$，$i=0, 1, 2, \cdots$。根据这个条件不难确定系数 a_i 的计算公式

$$a_0=f_0$$

$$a_i=-\frac{(f_iQ_{i-2}-P_{i-2})(x_{ji}-x_{j\,i-1})}{f_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

现在已经获得了函数 $F_j(x)$ 的近似有理函数 $\varphi(x)$。下面讨论极值点的计算问题。

从函数理论得知，函数 $F_j(x)$ 的极值点必须满足方程

$$\frac{dF_j(x)}{dx_j}=0$$

由于$\varphi(x)$是$F_j(x)$的近似有理函数，所以，可以用$\varphi'(x)=0$的解来代替导数方程的解。为了解方程

$$y(x)=\varphi'(x)=0$$

设其反函数为

$$\psi(y)=b_0+\frac{y-y_0}{b_1}+\frac{y-y_1}{b_2}+\cdots+\frac{y-y_{i-1}}{b_i}+\cdots$$

并且规定$\psi(y_i)=x_{j\,i+1}$，根据$\psi(y)$的渐近分式可得方程

$$\frac{b_iP_{i-1}+(y_i-y_{i-1})P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+(y_i-y_{i-1})Q_{i-2}}=x_{j\,i+1}$$

由此方程解出未知系数，有

$$b_0=x_{j1}$$

$$b_i=-\frac{(x_{j\,i+1}Q_{i-2}-P_{i-2})(y_i-y_{i-1})}{x_{j\,i+1}Q_{i-1}-P_{i-1}}$$

因为$y=0$为导数方程的解。所以令$y=0$代入$\psi(y)$中得出目标函数$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$在$x_j$方向上的极值点$x_j^*$的计算公式

$$x_j^*=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\cdots-\frac{y_{i-1}}{b_i}-\cdots$$

故式（2-10）成立。

应用式（2-10）求出的对x_j的最优点，记作$x_j^{(1)}$，$j=1$，2，3，…，n。再以$X^{(1)}=(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\cdots,\ x_n^{(1)})$为新的初始点，重复进行计算，又求出最优点$X^{(2)}=(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\cdots,\ x_n^{(2)})$，若

$$\|X^{(2)}-X^{(1)}\|\leqslant\varepsilon$$

成立，ε为计算精度，则$X^{(2)}$为目标函数$f(x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,\ x_n)$的最大值点，否则以$X^{(2)}$为新的初始点，继续上述计算。这里模为

$$\|X^{(2)}-X^{(1)}\|$$
$$=\sqrt{(x_1^{(2)}-x_1^{(1)})^2+(x_2^{(2)}-x_2^{(1)})^2+\cdots+(x_n^{(2)}-x_n^{(1)})^2}$$

表示点 $X^{(2)}$ 与点 $X^{(1)}$ 的距离。

具体的求算过程是：在其余因素均固定的情况下，首先对第 j 个因素 x_j 进行最优化，即在 x_j 因素上取三个初始实验点 x_{j0}、x_{j1} 和 x_{j2} 处做实验，测出 f_0、f_1 和 f_2。其次通过点列 $(x_{j0},\ f_0)$、$(x_{j1},\ f_1)$ 和 $(x_{j2},\ f_2)$，建立近似的有理逼近函数 $\varphi(x_{ji})$，并且算出点 $(x_{ji},\ f_i)$，$i=0,\ 1,\ 2$，处的 $\varphi'(x_{ji})$，$\varphi'(x_{ji})$ 表示 $\partial f(x_{ji})/\partial x_j$ 的近似值，代入式（2-10），得出第一次近似值 x_{j3}，测出点 x_{j3} 处的 $f(x_{j3})$ 值 f_3，计算出 $\varphi'(x_{j3})$，如果满足计算精度要求，则 x_{j3} 为目标函数 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 在 x_j 方向上的极大值点。若 $\varphi'(x_{j3})$ 不能满足精度要求，则把点 $(x_{j3},\ \varphi'(x_{j3}))$ 作为第四点，使 $\varphi(x_j)$ 经过点 $(x_{j3},\varphi'(x_{j3}))$，再由式（2-10）求出 x_{j4}，直到满足精度要求为止。

9. n 维极值解法

设目标函数 $f(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$ 在实验区间 R_n:〔$a_j\leqslant x_j\leqslant b_j$，$j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$〕内单峰，求证极值点的计算公式。

本方法的基本思想是：首先固定目标函数 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 的 $n-1$ 个因素，使其变成单因素问题。其次在第 j 个因素 x_j 上取 m 个离散实验点 x_{ji}，$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m$，并求出相应的目标函数值 f_i。最后把点列 $(x_{ji},\ f_i)$ 代入极值有理逼近法的计算公式

$$x_j^*=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\cdots-\frac{y_{i-1}}{b_i}-\cdots$$

求出第 j 个因素 x_j 上的极值点 x_j^*。上式系数 b_i 的计算公式为

$$b_0=x_{j0}$$

$$b_i=-\frac{(x_{ji}Q_{i-2}-P_{i-2})(y_i-y_{i-1})}{x_{ji}Q_{i-1}-P_{i-1}}$$

而

$$P_i = b_i P_{i-1} + (y - y_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = b_i Q_{i-1} + (y - y_{i-1}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = b_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$y(x) = \varphi'(x_j)$$

$$y_i = \varphi'(x_{ji})$$

式中

$$\varphi(x_j) = a_0 + \frac{x_j - x_{j0}}{\varphi_1(x_j)}$$

$$\varphi_1(x_j) = a_1 + \frac{x_j - x_{j1}}{\varphi_2(x_j)}$$

……

$$\varphi_k(x_j) = a_k + \frac{x_j - x_{jk}}{\varphi_{k+1}(x_j)}$$

……

$$\varphi_m(x_j) = a_m$$

而函数 $\varphi(x_j)$ 的导数计算公式为

$$\varphi'(x_j) = \frac{\varphi_1(x_j) - (x_j - x_{j0})\varphi_1'(x_j)}{\varphi_1^2(x_j)},$$

其中

$$\varphi_1'(x_j) = \frac{\varphi_2(x_j) - (x_j - x_{j1})\varphi_2'(x_j)}{\varphi_2^2(x_j)}$$

……

$$\varphi_{m-1}'(x_j) = \frac{1}{a_m},$$

$$\varphi_m'(x_j) = 0$$

系数 a_i 的计算公式

$$\varphi_0(x_{ji}) = f_i$$

$$a_i = \varphi(x_{ji})$$

$$\varphi_k(x_{ji}) = \frac{x_{ji} - x_{j\,k-1}}{\varphi_{k-1}(x_{ji}) - a_{k-1}}$$

$$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ i-1$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

证明 由于目标函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 含有 n 个因素，当固定其中 $n-1$ 个因素时，如固定 x_{10}，x_{20}，$\cdots$，$x_{j-1\,0}$，$x_{j+1\,0}$，$x_{j+2\,0}$，$\cdots$，x_{n0}。这样，目标函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 就变成了只含有一个因素 x_j 的函数。为了找到在 x_j 方向上的极值点，在 x_j 方向上取点 x_{ji}，$i = 0, 1, 2, \cdots, m$，并求出在点 x_{ji} 处的函数值 f_0，f_1，f_2，$\cdots$，f_m。为了描述点列

$$\begin{matrix} x_{j0} & x_{j1} & x_{j2} & x_{j3} & \cdots & x_{jm} \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_m \end{matrix}$$

的变化规律，可以用函数

$$\varphi_0(x) = a_0 + \frac{x - x_{j0}}{\varphi_1(x)}$$

$$\varphi_1(x) = a_1 + \frac{x - x_{j1}}{\varphi_2(x)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_{m-1}(x) = a_{m-1} + \frac{x - x_{j\,m-1}}{\varphi_m(x)}$$

$$\varphi_m(x) = a_m$$

近似表示，使 $\varphi(x_{ji}) = f_i$ 成立。其中

$$\varphi(x_{ji}) = f_i$$

$$\varphi_{k+1}(x_{ji}) = \frac{x_{ji} - x_{jk}}{\varphi_k(x_{ji}) - a_k}$$

$$a_j = \varphi_j(x_{ji})$$

$$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ i-1$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

由于目标函数 $f(x)$ 在 x_j 方向的极值点满足方程

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=0$$

又因为$\varphi(x)$为$f(x)$的近似函数，故可以用求方程

$$y(x)=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}=0$$

的解来代替。设其反函数为

$$\psi(y)=b_0+\frac{y-y_0}{b_1}-\frac{y-y_1}{b_2}-\cdots-\frac{y-y_{i-1}}{b_i}-\cdots$$

并根据$\psi(y_l)=x_{jl}$可解出系数b_i。

令$y=0$代入$\psi(y)$中，可得目标函数在x_j方向上的极值点计算公式

$$x_j^*=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\cdots-\frac{y_{i-1}}{b_i}-\cdots$$

当x_j方向的极值点求出后，可以把x_j固定在极值点x_j^*处。然后再求其余变量，依此类推，直至第k次$X^{(k)}$与第$k+1$次$X^{(k+1)}$二点之距离很小时，即满足

$$\|X^{(k+1)}-X^{(k)}\|\leqslant\varepsilon$$

ε为计算精度，此时$X^{(k)}$即为所求的结果。

10. 极值有理法的余项

设目标函数$f(x)$在实验区间〔a，b〕内存在极值，极值点近似计算公式为

$$x_i=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\cdots-\frac{y_{i-1}}{b_i}$$

这是具有i节的近似计算公式，系数b_i的计算公式详见本章1. 极值有理法。

为了估计近似极值点x_i与函数$f(x)$的极值点x之间的差，设

$$R_i(y)=\psi_{i+1}(y)-\psi_i(y)$$

而称 $\lim\limits_{y\to 0} R_i(y)$ 为极值有理法的余项。

欲求出 $R_i(y)$ 的简单表达式，先固定所讨论的点 y，并设 y 与 y_0，y_1，…，y_i 都不同。再做经过 $i+2$ 个孤立的点

$$(y_0,\ x_0),\ (y_1,\ x_1),\ \cdots,\ (y_i,\ x_i),\ (y_{i+1},\ x_{i+1})$$

的有理函数

$$\psi_{i+1}(y)=b_0+\cfrac{y-y_0}{b_1+\cfrac{y-y_1}{b_2+\cdots+\cfrac{y-y_i}{b_{i+1}}}}$$

$\psi_{i+1}(y)$ 与 $\psi_i(y)$ 不同之处是，$\psi_i(y)$ 为经过如下 $i+1$ 个点

$$(y_0,\ x_0),\ (y_1,\ x_1),\ \cdots,\ (y_i,\ x_i)$$

的有理函数

$$\psi_i(y)=b_0+\cfrac{y-y_0}{b_1+\cfrac{y-y_1}{b_2+\cdots+\cfrac{y-y_{i-1}}{b_i}}}$$

两者比较，$\psi_{i+1}(y)$ 比 $\psi_i(y)$ 多用了一个点 $(y_{i+1},\ x_{i+1})$，而且 $\psi_{i+1}(y_{i+1})=x_{i+1}$。这里 y 为函数 $f(x)$ 的导数，y_i 为 $f(x)$ 在 x_i 点的导数。

根据有理函数 $\psi_i(y)$ 的渐近分式

$$\psi_i(y)=\frac{P_i}{Q_i}=\frac{b_iP_{i-1}+(y-y_{i-1})P_{i-2}}{b_iQ_{i-1}+(y-y_{i-1})Q_{i-2}}$$

可以导出相邻两个渐近分式的差

$$\begin{aligned}\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}&=\frac{P_{i+1}Q_i-P_iQ_{i+1}}{Q_iQ_{i+1}}\\&=\frac{1}{Q_iQ_{i+1}}\{[b_{i+1}P_i+(y-y_{i-1})P_{i-1}]Q_i\\&\quad-[b_{i+1}Q_i+(y-y_{i-1})Q_{i-1}]P_i\}\\&=\frac{1}{Q_iQ_{i+1}}[b_{i+1}P_iQ_i+(y-y_i)P_{i-1}Q_i\\&\quad-b_{i+1}Q_iP_i-(y-y_{i-1})Q_{i-1}P_i]\\&=(-1)(y-y_i)\frac{P_iQ_{i-1}-P_{i-1}Q_i}{Q_iQ_{i+1}}\end{aligned}$$

对于 $P_iQ_{i-1}-P_{i-1}Q_i$ 施行同样的变换，即得

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}=(-1)^2(y-y_i)(y-y_{i-1})\frac{P_{i-1}Q_{i-2}-P_{i-2}Q_{i-1}}{Q_iQ_{i+1}}$$

重复上述同样的变换，得出

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}=(-1)^{i+1}(y-y_0)(y-y_1)\cdots(y-y_i)\frac{1}{Q_iQ_{i+1}}$$

由于 $\psi_{i+1}(y)=\dfrac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}$，所以

$$\psi_{i+1}(y)=\psi_i(y)+(-1)^{i+1}\frac{(y-y_0)(y-y_1)\cdots(y-y_i)}{Q_iQ_{i+1}}$$

又因为函数 $f(x)$ 的极值点 x 为其导数方程

$$\frac{df(x)}{dx}=y(x)=0$$

的解。于是对 $\psi_{i+1}(y)$ 两边取极限，得

$$\lim_{y\to0}\psi_{i+1}(y)=x_{i+1}$$

$$\lim_{y\to0}\psi_i(y)=b_0-\frac{y_0}{b_1}-\frac{y_1}{b_2}-\cdots-\frac{y_{i-1}}{b_i}$$

$$\lim_{y\to0}R_i(y)=(-1)^{2(i+1)}\frac{y_0y_1\cdots y_i}{Q_iQ_{i+1}}$$

最后，得出极值有理法的余项

$$|R_i(0)|=\left|\frac{1}{Q_iQ_{i+1}}y_0y_1y_2\cdots y_i\right|$$

11. 极值迭代法的余项

极值迭代法是离散点极值有理法的特殊情况。极值迭代法使用的离散点列是“0.618”法产生的点列

$$(x_0,\ f_0),\ (x_1,\ f_1),\ \cdots,\ (x_i,\ f_i)$$

经过这些点列的有理函数为

$$\varphi(x)=a_0+\frac{x-x_0}{a_1}+\frac{x-x_1}{a_2}+\cdots+\frac{x-x_{i-1}}{a_i}$$

通过求 $\varphi'(x)=0$ 的解，导出目标函数 $f(x)$ 的极值点公式为

$$x=b_1-\frac{y_1}{b_2}-\frac{y_2}{b_3}-\cdots-\frac{y_{i-1}}{b_i}-\cdots$$

其中

$$b_1=x_1$$

$$b_i=-\frac{(x_{i+1}Q_{i-2}-P_{i-2})(y_i-y_{i-1})}{x_{i+1}Q_{i-1}-P_{i-1}}$$

而

$$P_0=1$$
$$P_1=b_1$$
$$Q_0=0$$
$$Q_1=1$$
$$P_i=b_iP_{i-1}+(y-y_{i-1})P_{i-2}$$
$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(y-y_{i-1})Q_{i-2}$$
$$y=\varphi'(x)$$
$$y_i=\varphi'(x_i)$$

应用极值迭代法时，求出的是 $\varphi(x)$ 的极值点，它与 $f(x)$ 的极值点是有差别的。为了分析其误差大小，现在讨论函数 $\varphi(x)$ 逼近 $f(x)$ 的精度。为此，设极值点为 (x, f)，令 $\varphi_{i+1}(x)$ 通过点列

$$(x_0, f_0),\ (x_1, f_1),\ \cdots,\ (x_i, f_i),\ (x, f)$$

建立有理函数

$$\varphi_{i+1}(x)=a_0+\frac{x-x_0}{a_1}+\frac{x-x_1}{a_2}+\cdots+\frac{x-x_i}{a_{i+1}}$$

而 $\varphi_i(x)$ 是经过点列

$$(x_0, f_0),\ (x_1, f_1),\ \cdots,\ (x_i, f_i)$$

的有理函数。从而，函数 $\varphi_{i+1}(x)$ 比 $\varphi_i(x)$ 多取用了一个点 (x, f)。

根据 $\varphi_i(x)$ 的渐近分式，有

$$\varphi_i(x)=\frac{P_i}{Q_i}=\frac{a_iP_{i-1}+(x-x_{i-1})P_{i-2}}{a_iQ_{i-1}+(x-x_{i-1})Q_{i-2}}$$

可以导出 $\varphi_{i+1}(x)$ 与 $\varphi_i(x)$ 的差值

$$\begin{aligned}R_i(x)&=\varphi_{i+1}(x)-\varphi_i(x)=\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}\\&=\frac{P_{i+1}Q_i-Q_{i+1}P_i}{Q_iQ_{i+1}}\\&=\frac{1}{Q_iQ_{i+1}}\{[a_{i+1}P_i+(x-x_i)P_{i-1}]Q_i\\&\quad-[a_{i+1}Q_i+(x-x_i)Q_{i-1}]P_i\}\\&=-(x-x_i)\frac{P_iQ_{i-1}-P_{i-1}Q_i}{Q_iQ_{i+1}}\end{aligned}$$

对于 $P_iQ_{i-1}-P_{i-1}Q_i$ 施行同样的变换，即得

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}=(-1)^2(x-x_i)(x-x_{i-1})\frac{P_{i-1}Q_{i-2}-P_{i-2}Q_{i-1}}{Q_iQ_{i+1}}$$

重复上述同样的变换，得出

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}=(-1)^{i+1}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_i)\frac{1}{Q_iQ_{i+1}}$$

由于 $\varphi_{i+1}(x)=f(x)$，所以

$$f(x)=\varphi_i(x)+R_i(x)$$

故其误差余项为

$$R_i(x)=(-1)^{i+1}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_i)\frac{1}{Q_iQ_{i+1}}$$

又由于点列

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_i$$

是用“0.618”法产生的，所以有以下估计式

$$|R_0|=\left|\frac{x-x_0}{Q_0Q_1}\right|\leqslant\frac{b_0-a_0}{|b_1|}$$

$$|R_1| = \left| \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{Q_1 Q_2} \right| \leqslant \frac{(b_0-a_0)(b_1-a_1)}{\min\limits_{a_1 \leqslant x \leqslant b_1} (Q_1 Q_2)}$$

……

$$|R_i| = \left| \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_i)}{Q_i Q_{i+1}} \right|$$

$$\leqslant \left| \frac{(b_0-a_0)(b_1-a_1)\cdots(b_i-a_i)}{\min\limits_{a_i \leqslant x \leqslant b_i} (Q_i Q_{i+1})} \right|$$

再利用关系式

$$0.618(b_i - a_i) = (b_{i+1} - a_{i+1})$$

可以得出

$$(b_i - a_i) = 0.618(b_{i-1} - a_{i-1}) = 0.618^i (b_0 - a_0)$$

代入 R_i 中，得

$$|R_i \leqslant \frac{0.618^{(1+2+3+\cdots+i)}(b_0-a_0)^{i+1}}{|\min(Q_i Q_{i+1})|} \leqslant \frac{0.618^{0.5i(i+1)}}{C}$$

当 $b_0 - a_0 = 1$ 时，有

$$\frac{R_i}{R_{i-1}} = 0.618^i$$

12. 极值有理法的过程

（一）职能

本过程 LMAX 应用极值有理法可以求出实验范围内目标函数 $f(x)$ 的极值点。并印出极值点为极大值点标志 MAX 或者极小值点标志 MIN。

（二）用法

访问过程 LMAX(X, Y, E, DF);

简变X, Y; 过程 DF; 值 E;

其中

X——初始实验点的简变;

Y——存放极值点的简变;

E—— 实验的精度；

DF——计算目标函数 $f(x)$ 的过程，即：

过程 DF(X, Y)；值 X；简变 Y；

始···终；

（三）源程序[一]

页 001

行01　过程 LMAX(X, Y, E, DF)；值 E；

行02　简变 X, Y；过程 DF；

行03　始　场 A〔1:2, 1:10〕, H〔1:2〕；

行04　简变 I, Z, Y1, DX, Y※10-5⇒DY, ·

行04　若 J = 0 则始对于 I = 1 步长 1 次数 N
行05　执行H〔I〕⇒A〔I，1〕；转 A11 终否则；
行06　H〔1〕⇒A〔1，J + 1〕；H〔2〕⇒I1；
行07　对于 I = 1 步长 1 次数 J 执行
行08　若 § ABS(I1 − A〔2，I〕)⩽ϕ−35 则始
行09　ϕ35⇒A〔2，J + 1〕；转 AA 终否则
行10　(H〔1〕− A〔2，J + 1〕)/(I1 − A〔2，I〕)⇒I1；
行11　I1⇒A〔2，J + 1〕；
行12　AA：0 ⇒I1；对于 I = J 步长 − 1 次数 J
行13　执行（X − A〔1，I〕)/(A〔2，J + 1〕+ I1)⇒I1；
行14　A〔2，1〕+ I1⇒H〔2〕；A11：终；

13．离散点极值有理法的过程

（一）职能

本过程 LMA 能够根据已知实验点 x_0，x_1，…，x_m 和相应各点上的实验值（或计算值）f_0，f_1，…，f_m，求出目标函数 $f(x)$ 的极值点。

（二）用法

访问过程 LMA(X，Y，A)；简变 X，Y；
场 A；始・・・终；

其中

X——存初值和极大值点的简变；
Y——存极小值点的简变；
A——A〔m，x_0，x_1，…，x_{m-1}，f_0，f_1，…，f_{m-1}〕；
m——实验点数。

（三）源程序

页 001
行01　过程 LMA(X，Y，A)；简变 X，
行02　Y；场 A；

```
行03  始场 A1, A2〔1:2, 1:20〕, I1, HY〔1:2〕;
行04  简变 J, Z, W, N;
行05  A〔1〕⇒N; 5⇒W; ϕ5⇒#8;
行06  AA: 0⇒#9;
行07  对于 I=1 步长 1 次数W执行始
行08  A〔1+I〕⇒Z; A〔1+N+I〕⇒H〔2〕;
行09  Z⇒H〔1〕; PAK(I-1, Z, 2, H, HY
行10  , A1); Z⇒HY〔2〕;
行11  若 2≤I 则 PBK(I-2, 0, 2, HY, A2) 否则;
行12  若 2≤I∧§ABS(HY〔1〕)<ϕ-7 则
行13  转 CC 否则; 终;
行14  1⇒#9; 0⇒J; BB:
行15  若 J≤2 则 X+X/10*J⇒Z 否则
行16  HY〔2〕⇒Z; Z⇒H〔1〕;
行17  PAK(W, Z, 2, H, HY, A1);
行18  Z⇒HY〔2〕; PBK(J, 0, 2, HY, A2);
行19  若§ABS(HY〔1〕)≤ϕ-8 则转 CC 否则;
行20  1+J⇒J; 若 J≤8 则转 BB 否则;
行21  CC: 若§ABS(#8-HY〔1〕)≤ϕ-8 则转 DD
行22  否则始W+1⇒W; HY〔1〕⇒#8;
行23  若W≤N则转 AA 否则暂停 LMANO; 终;
行24  DD: HY〔2〕⇒Y;
行25  PAK(W, Y, 2, H, HY, A1); H〔2〕⇒J;
行26  PAK(W, Y-Y*ϕ-5, 2, H, HY, A1); H〔2〕⇒Z;
行27  PAK(W, Y+Y*ϕ-5, 2, H, HY, A1); H〔2〕⇒W;
行28  ϕ39⇒X;
行29  若 (W-2*J+Z)<0 则始 Y⇒X;
行30  ϕ39⇒Y 终否则; 终;
页 002
```

```
行01  过程PAK(J, X, N, H, Y, A1);
行02  值J, X, N; 场H, Y, A1;
行03  始  简变I1, I2;
行04  若0.5≤#9则转A9否则;
行05  若J = 0则始对于I = 1步长1次数N
行06  执行H〔I〕⇒A1〔I, 1〕; 0⇒Y; 转A11
行07  终否则; H〔1〕⇒A1〔1, 1 + J〕;
行08  对于K = 2步长1次数N − 1执行始
行09  H〔K〕⇒I1; 对于I = 1步长1次数J执行
行10  若§ABS(I1 − A1〔K, I〕)≤φ − 35则始
行11  φ35⇒A1〔K, 1 + J〕; 转A12终否则
行12  (H〔1〕− A1〔1, 1〕)/(I1 − A1〔K, I〕)⇒I1;
行13  I1⇒A1〔K, 1 + J〕; A12: 终;
行14  A9: 对于K = 2步长1次数N − 1执行
行15  始φ35⇒I1; 0⇒I2;
行16  对于I = 1 + J步长−1次数J执行始
行17  A1〔K, I〕+(X − A1〔1, I〕)/I1⇒I1;
行18  (I1 − (X − A1〔1, I − 1〕)×I2)/I1/I1⇒I2终;
行19  A1〔K, 1〕+(X − A1〔1, 1〕)/I1⇒H〔K〕;
行20  I2⇒Y〔K − 1〕终; A11: 终;
```

页 003

```
行01  过程PBK(J, X, N, H, A2);
行02  值J, X, N; 场H, A2;
行03  始  简变I1;
行04  若J = 0则始对于I = 1步长1次数N
行05  执行H〔I〕⇒A2〔I, 1〕; 转A11终否则;
行06  H〔1〕⇒A2〔1, 1 + J〕;
行07  对于K = 2步长1次数N − 1执行始
行08  H〔K〕⇒I1;
```

```
行09  对于 I ＝ 1 步长 1 次数 J 执行若
行10  §ABS(I1－A2〔K， I〕)≤ϕ－35 则始
行11  ϕ35⇒A2〔K， 1 ＋ J〕；转 AA 终否则
行12  (H〔I〕－A2〔1， I〕)/(I1－A2〔K， I〕)⇒I1；
行13  I1⇒A2〔K， 1 ＋ J〕；
行14  AA：终；
行15  对于 K＝ 2 步长 1 次数N － 1 执行始
行16  0 ⇒I1；
行17  对于 I ＝ J 步长－ 1 次数 J 执行
行18  (X－A2〔1， I〕)/(A2〔K， 1 ＋ I〕＋I1)⇒I1；
行19  A2〔K， 1〕＋I1⇒H〔K〕；终；A11：终；
```

14．控制参数的选优过程

（一）职能

本过程 LIMAI 可以求解一个控制参数的调整或选取的问题。

（二）用法

访问过程 LIMAI(X， Y， F)；

简变 X， Y；过程 F；

其中

X——初始值；

Y——$f(x)=0$ 的解；

F——测试或计算目标函数 $f(x)$ 的过程，即：

过程 F(X， Y)；简变 X， Y；始・・・终；

（三）方法

设控制方程

$$f(x)=0$$

其中 $f(x)$ 表示满足一定技术条件的控制过程的目标函数或调控对象。$f(x)$ 可以是非线性方程或实验的测试结果。满足方程的解 x 为

$$x=\varphi(f)=a_0-\frac{f_0}{a_1}-\frac{f_1}{a_2}-\cdots-\frac{f_{i-1}}{a_i}-\cdots \tag{2-11}$$

其中系数 a_0, a_1, a_2, …, a_i 的计算公式为

$$a_0=x_0$$
$$\varphi_0(f_i)=x_i$$
$$\varphi_{j+1}(f_i)=\frac{f_i-f_j}{\varphi_j(f_i)-a_j}$$
$$a_i=\varphi_i(f_i)$$
$$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ i-1$$
$$i=1,\ 2,\ \cdots$$
$$f_i=f(x_i)$$
x_0 为初值

如果 $|x_{i+1}-x_i|\leqslant10^{-8}$，则 x_i 为解，否则将点 $(x_{i+1},\ f_{i+1})$ 代入式（2-11）继续计算。在计算过程中，一般取 $i\leqslant7$，若 $i\geqslant8$，则去掉 x_0，以 x_1, x_2, …, x_7 代替原序列。

（四）源程序

页 001

```
行01  过程 LIMAI(X, Y, F); 简变 X,
行02  Y; 过程 F;
行03  始  场 A〔1:2, 1:8〕, H〔1:2〕;
行04  简变 J, Z;
行05  CC: 0 ⇒ J; DD:
行06  若 J ≤ 2 则 X + (X + 0.1)/10 * J ⇒ Z 否则
行07  H〔2〕⇒ Z; F(Z, Y); Y ⇒ H〔1〕;
行08  Z ⇒ H〔2〕; PBK(J, 0, 2, H, A);
行09  若 § ABS(Y) ≤ ϕ-8 则转 EE 否则;
行10  1 + J ⇒ J; 若 J ≤ 7 则转 DD 否则;
行11  H〔2〕⇒ X; 转 CC;
行12  EE: H〔2〕⇒ Y; 终;
```

```
页 002
行01  过程 PBK(J，X，N，H，A)；
行02  值 J，X，N；场H，A；
行03  始  简变 I1；
行04  若 J = 0 则始对于 I = 1 步长 1 次数 N
行05  执行H〔I〕⇒A〔I，1〕；转 A11 终否则；
行06  H〔1〕⇒A〔1，J + 1〕；H〔2〕⇒I1；
行07  对于 I = 1 步长 1 次数 J 执行
行08  若 § ABS(I1 − A〔2，I〕)≤ϕ − 35 则始
行09  ϕ35⇒A〔2，J + 1〕；转 AA 终否则
行10  (H〔1〕− A〔2，J + 1〕)/(I1 − A〔2，I〕)⇒I1；
行11  I1⇒A〔2，J + 1〕；
行12  AA：0 ⇒I1；对于 I = J 步长 − 1 次数 J
行13  执行 (X − A〔1，I〕)/(A〔2，J + 1〕+I1)⇒I1；
行14  A〔2，1〕+I1⇒H〔2〕；A11：终；
```

15．极值有理逼近法的过程

(一) 职能

本过程 LIMA 能够求出目标函数 $f(x)$ 在初始实验点 x_0 附近的极值点。

(二) 用法

访问过程 LIMA(X，Y，F)；简变 X，Y；

过程 F；始…终；

其中

X——初始实验点；

Y——存放极值点的简变；

F——计算目标函数 $f(x)$ 的过程，其形式为：

过程 F(X，Y)；值 X：简变 Y；

始…终；

（三）源程序

```
页 001
  行01  过程 LIMA(X, Y, F); 简变 X, Y;
  行02  过程 F;
  行03  始场 A1, A2〔1:2, 1:10〕, H, HY〔1:2〕;
  行04  简变 J, Z, I;
  行05  0 ⇒ J; 0 ⇒ #9;
  行06  CC: 若 J ≤ 3 则 X + X/10 * J ⇒ Z
  行07  否则 HY〔2〕⇒ Z; 若 #9<0.5 则
  行08  始 J ⇒ I; F(Z, Y); Y ⇒ H〔2〕 终否则;
  行09  若 2 ≤ I ∧ § ABS(HY〔1〕) ≤ ф − 8 则转
  行10  CA 否则; Z ⇒ H〔1〕;
  行11  PAK(I, Z, 2, H, HY, A1);
  行12  Z ⇒ HY〔2〕; 若 1 ≤ J 则 PBK(J − 1, 0
  行13  , 2, HY, A2) 否则;
  行14  1 + J ⇒ J;
  行15  若 J ≤ 9 则转 CC 否则;
  行16  HY〔2〕⇒ X; 0 ⇒ #9; 0 ⇒ J;
  行17  转 CC; CA: HY〔2〕⇒ Y; 终;
页 002
  行01  过程 PAK(J, X, N, H, Y, A1);
  行02  值 J, X, N; 场 H, Y, A1;
  行03  始  简变 I1, I2;
  行04  若 0.5 ≤ #9 则转 A9 否则;
  行05  若 J = 0 则始对于 I = 1 步长 1 次数 N
  行06  执行 H〔I〕⇒ A1〔I, 1〕; 0 ⇒ Y; 转 A11
  行07  终否则; H〔1〕⇒ A1〔1, 1 + J〕;
  行08  对于 K = 2 步长 1 次数 N − 1 执行始
  行09  H〔K〕⇒ I1; 对于 I = 1 步长 1 次数 J 执行
```

```
行10  若§ABS(I1－A1〔K， I〕)≤ϕ－35 则始
行11  ϕ35⇒A1〔K， 1＋J〕；转 A12 终否则
行12  (H〔1〕－A1〔1， I〕)/(I1－A1〔K， I〕)⇒I1；
行13  I1⇒A1〔K， 1＋J〕；A12：终；
行14  A9：对于K＝2 步长 1 次数N－1 执行
行15  始 ϕ35⇒I1； 0⇒I2；
行16  对于 I＝1＋J 步长－1 次数 J 执行始
行17  A1〔K， I〕＋(X－A1〔1， I〕)/I1⇒I1；
行18  (I1－(X－A1〔1， I－1〕)×I2)/I1/I1⇒I2 终；
行19  A1〔K， 1〕＋(X－A1〔1， 1〕)/I1⇒H〔K〕；
行20  I2⇒Y〔K－1〕 终；A11：终；
页 003
行01  过程 PBK(J， X， N， H， A2)；
行02  值 J， X， N；场H， A2；
行03  始  简变 I1；
行04  若 J＝0 则始对于 I＝1 步长 1 次数 N
行05  执行H〔I〕⇒A2〔I， 1〕；转 A11 终否则；
行06  H〔1〕⇒A2〔1， 1＋J〕；
行07  对于K＝2 步长 1 次数N－1 执行始
行08  H〔K〕⇒I1；
行09  对于 I＝1 步长 1 次数 J 执行若
行10  §ABS(I1－A2〔K， I〕)≤ϕ－35 则始
行11  ϕ35⇒A2〔K， 1＋J〕；转 AA 终否则
行12  (H〔1〕－A2〔1， I〕)/(I1－A2〔K， I〕)⇒I1；
行13  I1⇒A2〔K， 1＋J〕；
行14  AA：终；
行15  对于K＝2 步长 1 次数N－1 执行始
行16  0⇒I1；
行17  对于 I＝J 步长－1 次数 J 执行
行18  (X－A2〔1， I〕)/(A2〔K， 1＋I〕＋I1)⇒I1；
行19  A2〔K， 1〕＋I1⇒H〔K〕；终；A11：终；
```

第三章 积 分 法

1 曲边梯形的面积

在初等几何学中，已经知道如何计算由直线段和圆弧所围成的平面图形的面积。但是，计算由任意形状的曲线所围成的平面图形的面积是一个一般的几何问题，若采用无穷小量求和的方法求解这个问题，其计算结果只能是近似的。任意一条曲线围成的图形（图 3-1），总可以用两组互相垂直的平行直线把它分成若干"长方形"（图 3-1 中的 S_1）和"曲边梯形"（图 3-1 中的 S_2）。

所谓"曲边梯形"是这样的图形，它的三条边是直线，这三条直线边中的两条互相平行，并与第三条边相垂直，而第四条边是一曲线的一段弧，该弧与它相邻的两条平行的直线边最多只各交于一点，如图 3-2 所示的图形。

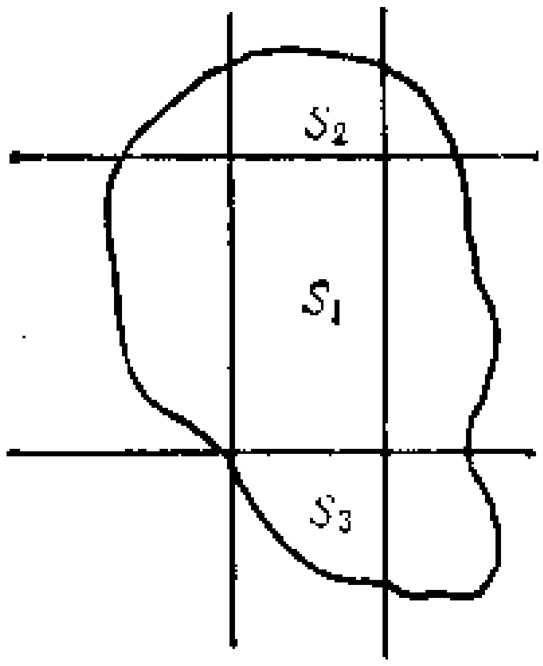


图 3-1

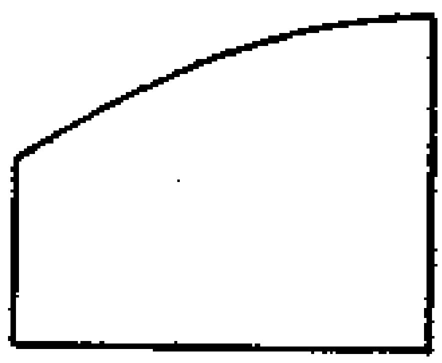


图 3-2

若两条平行的直线边中有一条缩成了一个点，则曲边梯形就变成了曲边三角形（图 3-1 中的 S_3）。因为长方形的面积容易求得，这样一来，求解任意形状的曲线所围成的平面图形的面积问题，就变成求解曲边梯形面积的问题了。

在这里，试图给面积定义一个适当的函数表示形式，并且提供计算这个面积的一种方法。

为了叙述方便，现在这样取直角坐标系，使曲边梯形曲边的对边作为底边，并与 ox 轴重合，而曲边梯形位于第一象限，如图 3-3 所示。令 a 和 b 分别表示曲边梯形底边两个端点的坐标，并且假设曲边是函数 $y=f(x)$ 的曲线。为了度量曲边梯形的面积，用下面方法来处理。通过点 (a, y_0) 做平行于 x 轴的直线与 bc 边交于点 c_1。由图 3-3 不难看出，在曲边梯形内只含有一个这样的长方形 ay_0c_1b，其面积记为 S_0，显然 $S_0=(b-a)y_0=h_0f(a)$。S_0 可以视为曲边梯形面积 S 的第一次近似值。为了进一步求出曲边梯形面积的大小，把底边 ab 分成 m 等分。当 $m=2$ 时，得出曲边梯形内的两个长方形，其面积记为 S_1，显然 $S_1=(x_2-a)y_0+(b-x_2)y_2=h_1[f(a)+f(x_2)]$，$S_1$ 可以视为曲边梯形面积的第二次近似值。同样，当 $m=4$ 时，就得出曲边梯形内含有的四个长方形，其面积 $S_2=h_2[f(a)+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)]$。一般情况下，可把曲边梯形的底边分成 2^i 等分，每一等分的长度记为

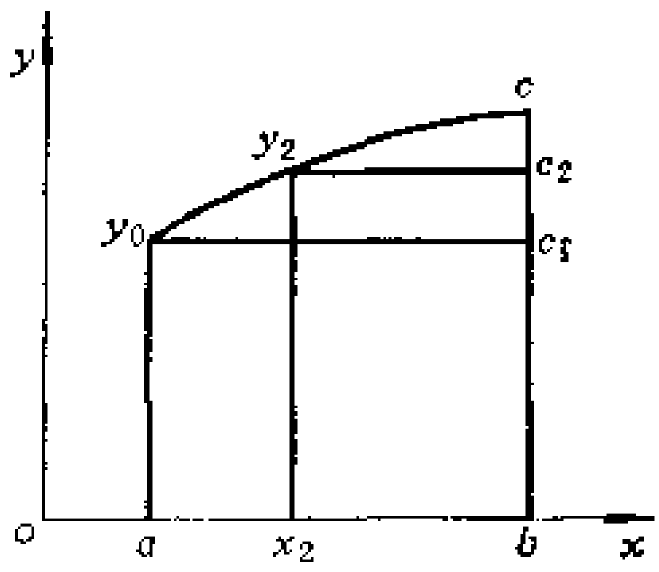


图 3-3

$$h_i=\frac{b-a}{2^i},\ i=0,1,2,\cdots$$

各分点记为

$$x_0=a,\ x_1=a+h_1,\cdots,\ x_i=a+ih_i$$
$$i=1,2,3,\cdots$$

通过上述分点 x_i 做 x 轴的垂线，与曲边 $f(x)$ 相交，过这些交点 $f(x_i)$ 做 x 轴的平行线，并与各分点右邻的 x 轴垂线相交。于是就得到 2^i 个矩形，不难求得这些矩形面积的和，记为 S_i，显然

$$S_i = h_i \sum_{i=0}^{2^i-1} f(x_i)$$

S_i可以视为曲边梯形面积的第 i 次近似值。

综上所述，可以把上面一系列划分面积的方法视为对曲边梯形面积的一个认识过程。在这个认识过程中，把h_i作为认识过程的自变量，把 S_i 作为认识过程的因变量。为了醒目，把这个认识过程所产生的序列表示如下：

i	0	1	2	3	4	…
h_i	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	…
S_i	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	…

从上述序列的变化过程中，能否找到当 h_i 趋于零时，S_i 趋于曲边梯形面积的变化规律，也即用数学表达式建立起 h_i 与 S_i 的函数关系。为此，这样来构造描述认识过程的函数。设函数

$$\varphi(h) = b_0 + \cfrac{h-h_0}{b_1 + \cfrac{h-h_1}{b_2 + \cdots + \cfrac{h-h_{i-1}}{b_i + \cdots}}}$$

在点 h_i 处的值为$\varphi(h_i) = S_i$。由此得出系数 b_i 的计算公式为

$$b_0 = S_0$$

$$b_i = -\frac{(S_i Q_{i-2} - P_{i-2})(h_i - h_{i-1})}{S_i Q_{i-1} - P_{i-1}}$$

$$P_i = b_i P_{i-1} + (h - h_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = b_i Q_{i-1} + (h - h_{i-1}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = b_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$h_i = \frac{b-a}{2^i}$$

$$S_i = h_i \sum_{i=0}^{2^i-1} f(x_i)$$

$$i = 1, 2, \cdots$$

当 $i \to \infty$时，对应于每一个 h_i 的函数 $\varphi(h_i)$ 都取值 S_i，于是在等式

$$S_i = \varphi(h_i)$$

的两边取极限

$$\lim_{i\to\infty} S_i = \lim_{i\to\infty} \varphi(h_i)$$

由黎曼积分得知，上式左边

$$\lim_{i\to\infty} S_i = \int_a^b f(x)dx$$

由于 $\lim\limits_{i\to\infty} h_i = 0$，所以前述上式右边

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = b_0 - \cfrac{h_0}{b_1 - \cfrac{h_1}{b_2 - \cdots - \cfrac{h_{i-1}}{b_i - \cdots}}}$$

因此得

$$\int_a^b f(x)dx = b_0 - \cfrac{h_0}{b_1 - \cfrac{h_1}{b_2 - \cdots - \cfrac{h_{i-1}}{b_i - \cdots}}}$$

下面把$\varphi_i(0)$的变化列举如下：

当 $i = 0$ 时，$\varphi_0(0) = \overline{S}_0 = b_0$

当 $i = 1$ 时，$\varphi_1(0) = \overline{S}_1 = b_0 - \dfrac{h_0}{b_1}$

当 $i = 2$ 时，$\varphi_2(0) = \overline{S}_2 = b_0 - \cfrac{h_0}{b_1 - \cfrac{h_1}{b_2}}$

……

为了醒目，把这个过程也列举如下：

i	0	1	2	3	4	…
h_i	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	…
S_i	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	…
$\bar{S}_i$	$\bar{S}_0$	$\bar{S}_1$	$\bar{S}_2$	$\bar{S}_3$	$\bar{S}_4$	…

从序列的变化中可知，$\bar{S}_i$就是要找的随h_i而变化的量，$\varphi(0)$就是描述这个变化规律的一种数学表达式。把$\varphi(h)$称为曲边梯形的认识函数。这里提出的概念与传统的积分概念有所不同，在传统的积分学中，函数$f(x)$在区间$[a,b]$的积分以

$$\lim_{i\to\infty} S_i=\int_a^b f(x)dx$$

定义。这样的定义$\lim\limits_{i\to\infty} S_i$，除了极限的表示形式之外，并没有给出$S_i$随$h_i$趋于零变化的纵向关系。这里，曲边梯形面积是以

$$\lim_{i\to\infty} \bar{S}_i=\varphi(0)=\int_a^b f(x)dx$$

定义的，并给出了$\lim\limits_{i\to\infty} \bar{S}_i$的数学表达式

$$\varphi(h)=b_0+\cfrac{h-h_0}{b_1+\cfrac{h-h_1}{b_2+\cdots+\cfrac{h-h_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

这样，有利于对曲边梯形面积的研究。

曲边梯形面积是客观存在的，它将不因人们的认识途径的不同而改变。因此，在认识曲边梯形面积的过程中，对h_i和S_i也可以分别取其它形式，如

$$h_i=\frac{b-a}{i}$$

$$S_i=\frac{b-a}{2i}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{i-1} f(a+jh_i)\right]$$

把h_i和S_i代入函数$\varphi(h)$中，如果函数$\varphi(0)$值与所取h_i和

S_i 的形式无关，即认为 $\varphi(0)$ 为曲边梯形的面积。如果对于所取 h_i 与 S_i 的不同形式，$\varphi(0)$ 取不同的值，在这种情况下，则认为极限不存在或不确定。现在归纳如下：

定义一 设在区间〔a，b〕上一个以函数 $f(x)$ 为曲边的梯形，如果曲边梯形面积的认识函数 $\varphi(h)$ 的极限

$$S=b_0-\cfrac{h_0}{b_1-\cfrac{h_1}{b_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{b_i-\cdots}}}$$

存在，且此值与 h_i 趋于零的方式及 S_i 的形式均无关，就把 S 定义为曲边梯形的面积。记为

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

2．离散变力所做的功

设一个物体在力 $P(x)$ 的作用下沿 ox 轴方向运动，力 $P(x)$ 的作用方向与该物体(刚体)运动的方向一致。如果力 $P(x)$ 在 ox 轴上的一切点 x 处的值都可以测定（或计算），假设物体在力 $P(x)$ 作用之下，从 a 点移动到 b 点，求力 $P(x)$ 所做的功。

为此，试图给离散变力所做的功定义一个函数表示形式，并且提供计算这个功的一种方法。首先，对力 $P(x)$ 是否有函数形式并不要求，只假设力 $P(x)$ 在所要求点处的值可以测出来，就是说已知任一离散点 x_i 处的 $P(x_i)$ 值，把这样的力 $P(x_i)$ 称为离散变力。

现在讨论怎样利用这些离散点来计算变力所做的功，计算变力所做的功要多少点。从传统的概念得知，离散变力 $P(x)$ 的测点越多，计算出的功越精确。但是，这样做是很繁琐的，是否能够利用有限多个测点值就可求出功的较为精确的数值，对离散变力所做的功建立数学表达式，这就是本节的任务。

对离散变力 $P(x)$ 采取等距测量。第一次，测量一个点的力

值，记为$P(a)$，其近似功记为$W_1=P(a)(b-a)$；第二次，测量两个点的力值，测点距离为$h_2=\frac{b-a}{2}$，变力分别记为$P(a)$、$P(a+h_2)$，其近似功记为$W_2=h_2[P(a)+P(a+h_2)]$；…；第i次，测量i个点的力值，测点距离$h_i=\frac{b-a}{i}$，各离散点处的变力分别为$P(a)$、$P(a+h_i)$、…、$P(a+(i-1)h_i)$，其近似功记为$W_i=h_i\sum\limits_{j=0}^{i-1}P(a+jh_i)$。

事实上，变力$P(x)$在区间$[x_i, x_{i+1}]$上不同点处的值不同，所以$P(x)$在区间$[x_i, x_{i+1}]$上所做的功与上述近似功W_i一般是不相等的。然而，如果测点距离很小，可以认为力$P(x)$在区间$[x_i, x_{i+1}]$上所做的功与常力$P(x_i)$在同一段测点距离上所做的功相差很小。为了找出各信息量的变化规律，把上述认识过程所提供的信息整理如下：

i	0	1	2	3	4	…
h_i	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	…
W_i	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	…

从上述序列的变化可以看出，当h_i越小，即i的值越大时，所得出的功W_i就越精确。这里h_i表示测点距离，把它称为认识函数的自变量；W_i表示力$P(x)$所做的功，把它称为h_i的因变量，即W_i是h_i的函数。

为了建立(h_i, W_i)变化规律的数学表达形式，设函数

$$\varphi(h)=a_0+\cfrac{h-h_0}{a_1+\cfrac{h-h_1}{a_2+\cdots+\cfrac{h-h_{i-1}}{a_i+\cdots}}}$$

经过点(h_i, W_i)，即$\varphi(h)$在h_i点处取值$\varphi(h_i)=W_i$。显然，函数$\varphi(h)$能够描述信息的变化情况，因为，当$h=h_i$时，$\varphi(h_i)=W_i$，$i=0, 1, 2, \cdots$。所以，$\varphi(h)$是要找的信息变化规律的一种函数表达形式，故把$\varphi(h)$称为功的认识函数。

事实上，当离散测点越多，即 h_i 越小时，W_i 也越精确。于是，令 $h=0$ 代入函数 $\varphi(h)$ 中，即得出计算功的公式

$$\overline{W}=a_0-\cfrac{h_0}{a_1-\cfrac{h_1}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{a_i-\cdots}}}$$

为了确定这个功 $\overline{W}$ 值的精确程度，再缩小测点距离，对 $(i+2)$ 个离散测点进行测量，其信息整理如下：

i	0	1	2	3	4	…	i	$i+1$
h_i	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	…	h_i	h_{i+1}
W_i	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	…	W_i	W_{i+1}

这样，又可以利用 $(i+2)$ 个离散测点的信息，建立经过这些点的认识函数

$$\varphi(h)=a_0+\cfrac{h-h_0}{a_1+\cfrac{h-h_1}{a_2+\cdots+\cfrac{h-h_i}{a_{i+1}+\cdots}}}$$

令 $h=0$ 代入 $\varphi(h)$ 中，得

$$\overline{W}=a_0-\cfrac{h_0}{a_1-\cfrac{h_1}{a_2-\cdots-\cfrac{h_i}{a_{i+1}-\cdots}}}$$

若 $|\overline{W}_{i+1}-\overline{W}_i|\leqslant\varepsilon$ 成立，ε 为任意小的正数，则把 $\overline{W}_i$ 称为在认识函数 $\varphi(h)$ 意义下，满足 ε 精度的功。若继续增加测点数，就可以得出一系列的功，整理如下：

i	0	1	2	3	4	…	i	$i+1$
h_i	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	…	h_i	h_{i+1}
W_i	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	…	W_i	W_{i+1}
$\overline{W}_i$	$\overline{W}_0$	$\overline{W}_1$	$\overline{W}_2$	$\overline{W}_3$	$\overline{W}_4$	…	$\overline{W}_i$	$\overline{W}_{i+1}$

若存在 $N\geqslant 0$，当 $i\geqslant N$ 时，W_i 逼近到一个共同值 W，即 $\varphi_i(0)=\varphi_{i-1}(0)=W$，这时则把 W 称为离散变力在认识函数 $\varphi(h)$ 意义下的功，记为 W_φ。如果对任意数学表达形式的认识

函数$f(h)$，当$i \geqslant N$时，都有$f_i(0)=f_{i+1}(0)=W$成立，则把W称为离散变力$P(x)$在区间$[a, b]$上所做的功，记为

$$W=\int_a^b P(x)dx$$

事实上，离散变力$P(x)$推动物体从a点移动到b点所做的功W是客观存在的，它将不因人们对它的认识方式的不同而变化。因此离散变力所做的功W与认识函数的自变量h_i趋于零的方式无关，也与W_i的近似计算公式无关。如果对于h_i趋于零的方式不同时，$\overline{W}_i$趋于不同的极限，在这种情况下，应该认为极限不存在。综上所述，归纳如下：

定义二 设变力$P(x)$在区间$[a, b]$任一离散点x处的值可以测定，如果变力所做功的认识函数$\varphi(h)$的极限

$$W=a_0-\cfrac{h_0}{a_1-\cfrac{h_1}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{a_i-\cdots}}}$$

存在，且与h_i趋于零的方式无关，也与W_i的近似计算无关，则把W称为变力在区间$[a, b]$上所做的功。记为

$$W=\int_a^b P(x)dx$$

关于认识函数$\varphi(h)$的系数a_i的计算，可以根据$\varphi(h_i)=W_i$及$\varphi(h)$的渐近分式，得方程

$$\frac{a_iP_{i-1}+(h_i-h_{i-1})P_{i-2}}{a_iQ_{i-1}+(h_i-h_{i-1})Q_{i-2}}=W_i$$

从中解出a_i，得

$$a_0=W_0$$

$$a_i=-\frac{(W_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{W_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$W_i=h_i\sum_{j=0}^{i-1}P(a+jh_i)$$

$$h_i=\frac{b-a}{1+i}$$

$$P_{-1}=1$$
$$P_0=a_0$$
$$Q_{-1}=0$$
$$Q_0=1$$
$$P_i=a_iP_{i-1}+(h-h_{i-1})P_{i-2}$$
$$Q_i=a_iQ_{i-1}+(h-h_{i-1})Q_{i-2}$$
$$i=1,2,3,\cdots$$

8. 离散点积分

设已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上各等距离散点 $x_0=a$, x_1, x_2, $\cdots$, x_{m-1}, $x_m=b$ 处的相应函数值分别为 f_0, f_1, f_2, $\cdots$, f_{m-1}, f_m。求函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分。

首先讨论能否充分利用点列 (x_i, f_i), $i=0,1,\cdots,m$,给出更高计算精度，并进一步建立离散点积分的概念。

令 h_i 表示离散点的间距，如 $h_i=\dfrac{b-a}{2^i}$，利用上述点列可以产生一系列的矩形面积

$$I_0=h_0f_0$$
$$I_1=h_1(f_0+f_1)=h_1\left[f_0+f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)\right]$$
$$\cdots\cdots$$
$$I_m=h_m(f_0+f_1+\cdots+f_{m-1})$$

由于间距 h 取不同的值时相应的矩形面积 I 的精度也发生变化的事实，可以认为矩形面积 I 是间距 h 的函数。于是，设间距 h 为矩形面积 I 的自变量，I 为因变量。为了用数学表达式形式描述 h_i 与 I_i 之间的变化关系。设函数

$$\varphi(h)=a_0+\cfrac{h-h_0}{a_1+\cfrac{h-h_1}{a_2+\cdots+\cfrac{h-h_{i-1}}{a_i+\cdots}}}$$

经过点(h_i, I_i)，即函数$\varphi(h)$在h_i点处取值$\varphi(h_i)=I_i$。由此不难确定系数a_i的计算公式。于是，得到了积分I与间距h之间的近似函数$\varphi(h)$。

再者，由于间距越小，其相应矩形面积也越精确的事实，令$h=0$代入$\varphi(h)$中，得到离散点积分的近似值

$$\bar{I}_i=a_0-\cfrac{h_0}{a_1-\cfrac{h_1}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{a_i}}}$$

当i依次为0，1，2，…，m时，这个逼近过程可以归纳如下：

i	0	1	2	3	…	m
h_i	h_0	h_1	h_2	h_3	…	h_m
I_i	I_0	I_1	I_2	I_3	…	I_m
$\bar{I}_i$	$\bar{I}_0$	$\bar{I}_1$	$\bar{I}_2$	$\bar{I}_3$	…	$\bar{I}_m$

事实上，这个序列变化，当$i\to\infty$时，$\bar{I}_i$或趋于不定值，或趋于定值。若$\bar{I}_i$趋于定值时，也就是说，存在$N\geqslant 0$，当$i\geqslant N$时，$\bar{I}_i=\bar{I}_{i+1}=I$。在这种情况下，把$I$称为函数$f(x)$在认识函数$\varphi(h)$意义下的离散积分。

描述间距h与函数积分I的关系的认识函数可以取各种形式。如

$$\begin{aligned}P_m(h)&=g_0+g_1(h_0h_1)(h-h_0)+g_2(h_0h_1h_2)(h-h_0)(h-h_1)\\&\quad+\cdots+g_{m-1}(h_0h_1h_2\cdots h_{m-1})(h-h_0)\cdots(h-h_{m-2})\\&\quad+g_m(h_0h_1\cdots h_m)\cdot(h-h_0)\cdots(h-h_{m-1})\end{aligned}$$

其中

$$g_m(h_0h_1h_2\cdots h_m)=\frac{g_{m-1}(h_1h_2h_3\cdots h_m)-g_{m-1}(h_0h_1h_2\cdots h_{m-1})}{h_m-h_{m-1}}$$

设$P_m(h)$在点h_i处的值为$P_m(h_i)=I_i$，同样令$h=0$代入$P_m(h)$中，得出积分$\bar{I}_m=P_m(0)$。还可以选择其它认识函数形式，每一种认识函数形式都反映人们对函数$f(x)$积分的不同认识方式。若选择任意的认识函数$F(h)$，都趋于共同值，即$F(0)=I$，则把I称为离散积分。

若采用不同形式的认识函数，当 h 趋于零时，$\bar{I}_m$ 趋于不同的值，则认为函数 $f(x)$ 的积分值不定，或积分不存在。综上所述，可以归纳如下：

定义三 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上任一离散点 x_i 处的值可以测定，测点距离 $h_i=\frac{b-a}{i+1}$，积分和 $I_i=h_i\sum\limits_{j=0}^{i-1}f_j$，$i=0, 1, \cdots$。如果积分的认识函数 $\varphi(h)$ 的极限

$$I=a_0-\cfrac{h_0}{a_1-\cfrac{h_1}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{a_i-\cdots}}}$$

存在，并且与 h_i 趋于零的方式无关，也与 I_i 的近似计算公式无关，则称 I 为函数的离散积分，记为

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

或对任意小的 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$，当 $h_i<\delta$ 时，有

$$|I-\varphi(h_i)|\leqslant\varepsilon$$

成立。

4. 一维积分计算方法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，选取步长 $h_i=\frac{b-a}{1+i}$，并计算相应积分和 $I_i=h_i\sum\limits_{j=0}^{i-1}f_j$，$i=0, 1, 2, \cdots$。

根据离散点积分的定义三，可以得出一维积分的计算公式

$$I=a_0-\cfrac{h_0}{a_1-\cfrac{h_1}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{a_i-\cdots}}} \tag{3-1}$$

把 (h_i, I_i) 依次代入系数 a_i 的计算公式，求得 a_i 后，再由式(3-1)可以得出函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的近似积分。

式(3-1)中系数的计算公式如下：

$$a_0 = I_0$$

$$a_i = -\frac{(I_i Q_{i-2} - P_{i-2})(h_i - h_{i-1})}{I_i Q_{i-1} - P_{i-1}}$$

$$P_i = a_i P_{i-1} + (h - h_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = a_i Q_{i-1} + (h - h_{i-1}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = a_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$I_i = h_i \sum_{j=0}^{i-1} f_j$$

$$h_i = \frac{b-a}{1+i}$$

$$i = 1, 2, \cdots$$

例 1　求积分 $I = \int_1^2 10dx$

解　任取 $h_0 = 0.5$，$h_1 = 0.2$，$h_2 = 0.3$，而 $I_0 = I_1 = I_2 = 10$，代入式(3-1)可得系数 $a_0 = 10$，$a_1 = \infty$，于是

$$I = a_0 - \frac{h_0}{a_1} = 10 - \frac{0.5}{\infty} = 10$$

例 2　求积分 $I = \int_1^2 xdx$

解　取积分步长 $h_i = \frac{1}{2^i}$，$i = 0, 1, 2, \cdots$，则相应的积分和 $I_i = 1$，1.25，$1.375, \cdots$；系数 $a_i = 1, -2$，∞，于是代入式(3-1)得

$$I = a_0 - \frac{h_0}{a_1} - \frac{h_1}{a_2} = 1 - \frac{1}{-2} - \frac{0.5}{\infty} = 1.5$$

例 3　求积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{[(x+1)x+1]x+1\}dx$

解 根据式(3-1)计算结果如下：

h_i	I_i(梯形)	系数a_i	式(3-1)
$\frac{\pi}{2}$	7.7864233	7.7864233	
$\frac{\pi}{4}$	6.1604374	0.48302890	
$\frac{\pi}{6}$	5.8593289	−4.3359622	
$\frac{\pi}{8}$	5.7539408	−0.48302894	5.6184421

例4 求积分$\int_a^b f(x)dx$，其中$f(x)=2x\sin x-x^2\cos x$，$a=0$，$b=1$。

解 为便于比较计算速度和精度，采用一维积分计算方法、矩形积分法和辛普生积分法等三种计算方法，这三种积分方法的计算结果如下：

项目 \ 方法	一维积分计算方法	矩形积分法	辛普生积分法
计算$f(x)$次数	64	128	256
计算结果	0.36320373	0.35875313	0.36320373
计算精度	10^{-8}	0.455×10^{-2}	10^{-8}

精确积分值为0.36320373。

例5 求积分$\int_a^b f(x)dx$，其中$f(x)=2xe^x+x^2e^x$，$a=0$，$b=1$。

解 为便于比较计算速度和精度，采用一维积分计算方法、矩形积分法和辛普生积分法等三种计算方法，这三种积分方法的计算结果如下：

项目 \ 方法	一维积分计算方法	矩形积分法	辛普生积分法
计算$f(x)$次数	128	512	4096
计算结果	29.556224	29.440899	29.556224
计算精度	10^{-8}	0.1153	10^{-6}

精确积分值为29.556224。

5. 二维积分计算方法

设函数 $f(x, y)$在积分域 R_2:($a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$)上可积，则二维积分

$$\int_a^b\int_c^d f(x, y)dxdy$$

的计算公式为

$$I=a_0-\cfrac{h_0}{a_1-\cfrac{h_1}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{a_i-\cdots}}} \tag{3-2}$$

其中

$$a_0=I_0$$

$$a_i=-\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

而

$$P_i=a_iP_{i-1}+(h-h_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=a_iQ_{i-1}+(h-h_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=a_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$I_i=h_i\sum_{j=1}^{(1+i)^2}f_j$$

$$h_i=\frac{(b-a)(d-c)}{(1+i)^2}$$

f_j 为第 j 小块积分域中点的 $f(x, y)$值

$i=1, 2, \cdots$

证明 首先确定积分步长序列

$$h_0=\frac{(b-a)(d-c)}{1},\quad h_1=\frac{(b-a)(d-c)}{4},\cdots,$$

$$h_i=\frac{(b-a)(d-c)}{(1-i)^2}$$

其次按积分步长 h_i 把积分域 R_2 进行分割，第一次取 R_2 的中点 $f(x,y)$ 值，做积分和

$$I_0=h_0f\left(a+\frac{b-a}{2},\quad c+\frac{d-c}{2}\right)$$

第二次分为四块，取每块中点的 $f(x,y)$值，做积分和

$$I_1=h_1\sum_{j=1}^{4}f_j$$

依次分割积分域 R_2 并做积分和，获得积分和序列

$$\begin{array}{ccccccc} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_i & \cdots \\ I_0 & I_1 & I_2 & I_3 & \cdots & I_i & \cdots \end{array}$$

最后，建立积分和与积分步长之间的函数关系。为了描述积分和序列，设积分和的认识函数

$$\varphi(h)=a_0+\cfrac{h-h_0}{a_1+\cfrac{h-h_1}{a_2+\cdots+\cfrac{h-h_{i-1}}{a_i+\cdots}}}$$

并且规定 $\varphi(h)$ 在点 h_i 处取值为 $\varphi(h_i)=I_i$，再根据 $\varphi(h)$的渐近分式，可得方程

$$\frac{a_iP_{i-1}+(h_i-h_{i-1})P_{i-2}}{a_iQ_{i-1}+(h_i-h_{i-1})Q_{i-2}}=I_i$$

从上列方程中解出未知系数 a_i，有

$$a_0=I_0$$

$$a_i=-\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

由于当 $h_i\to 0$ 时，$I_i\to I$，所以令 $h=0$ 代入 $\varphi(h)$ 中，即得积分公式(3-2)。

如果

$$|\varphi_{i+1}(0)-\varphi_i(0)|\leqslant\varepsilon$$

ε 为计算精度，则 $\varphi_i(0)$ 为所求的积分值，否则继续加密积分网格，一直达到满足精度要求为止。

例 1 求积分 $\int_0^1\int_0^1(x^3+y+1)dxdy$

解 取积分步长序列为 $h_i=\dfrac{1}{1+i}$，积分和 $I_i=h_i^2\Sigma f_j$，式中

$f_j=f\left(x_j+\dfrac{h_i}{2},\ y_j+\dfrac{h_i}{2}\right)$，$i=0,1,2,\cdots$

本例试算中，取 h_i 为 $\dfrac{1}{1+i}$，而不是取 $\dfrac{1}{(1+i)^2}$ 形式，结果仍然是正确的。计算结果如下：

i	h_i	I_i	I	a_i
0	1	1.625	1.625	1.625
1	0.5	1.71875	1.8085	-5.3333333
2	0.3333	1.736111	1.7613636	0.25000001
3	0.25	1.7421875	1.7500000	5.3333282

计算积分值1.75与精确积分值1.75一致。

例 2 求积分 $\int_0^1\int_0^1(x^3+y+1)dxdy$

解 取积分步长序列为 $h_i=\dfrac{1}{2^{(1+i)}}$，积分和 $I_i=h_i\Sigma f_j$，$i=0,1,2,\cdots$

计算结果如下：

i	h_i	I_i	I	a_i
0	0.5	1.71875	1.71875	1.71875
1	0.25	1.7421875	1.765625	-10.666667
2	0.125	1.7480469	1.7522321	0.05859375
3	0.0625	1.7495117	1.7500000	10.666667

6. 三维积分计算方法

设函数 $f(x, y, z)$ 在积分域 R_3：$(a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant$

$y \leqslant d$，$e \leqslant z \leqslant g$）上可积，则三维积分

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x, y, z) dx dy dz$$

的计算公式为

$$I = a_0 - \cfrac{h_0}{a_1 - \cfrac{h_1}{a_2 - \cdots - \cfrac{h_{i-1}}{a_i - \cdots}}} \tag{3-3}$$

其中

$$a_0 = I_0$$

$$a_i = -\frac{(I_i Q_{i-2} - P_{i-2})(h_i - h_{i-1})}{I_i Q_{i-1} - P_{i-1}}$$

$$P_i = a_i P_{i-1} + (h - h_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = a_i Q_{i-1} + (h - h_{i-1}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = a_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$I_i = h_i \sum_{j=1}^{n_i} f_j$$

$$h_i = \frac{(b-a)(d-c)(g-e)}{(i+1)^3}$$

n_i 为以步长 h_i 分割 R_3 的网格总块数

f_j 为第 j 小块积分域中点的 $f(x, y, z)$ 值

$i = 1, 2, \cdots$

证明 首先确定积分步长序列

$$h_0 = \frac{(b-a)(d-c)(g-e)}{1},$$

$$h_1 = \frac{(b-a)(d-c)(g-e)}{8}, \cdots,$$

$$h_i = \frac{(b-a)(d-c)(g-e)}{(1+i)^3}$$

其次按积分步长 h_i 把积分域 R_3 进行分割，第一次取 R_3 的中点 $f(x, y, z)$ 值，做积分和

$$I_0=h_0 f\left(a+\frac{b-a}{2},\ c+\frac{d-c}{2},\ e+\frac{g-e}{2}\right)$$

第二次把积分域 R_3 分割为八块，取每块中点的 $f(x, y, z)$ 值，做积分和

$$I_1=h_1\sum_{j=1}^{8} f_j$$

依次分割积分域并做积分和，获得积分和序列

$$\begin{array}{ccccccc} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_i & \cdots \\ I_0 & I_1 & I_2 & I_3 & \cdots & I_i & \cdots \end{array}$$

最后，建立积分和与积分步长之间的函数关系。为了描述积分和序列，设积分和的认识函数

$$\varphi(h)=a_0+\cfrac{h-h_0}{a_1+\cfrac{h-h_1}{a_2+\cdots+\cfrac{h-h_{i-1}}{a_i+\cdots}}}$$

并且规定 $\varphi(h)$ 在点 h_i 处取值为 $\varphi(h_i)=I_i$，再根据 $\varphi(h)$ 的渐近分式，可得方程

$$\frac{a_i P_{i-1}+(h_i-h_{i-1})P_{i-2}}{a_i Q_{i-1}+(h_i-h_{i-1})Q_{i-2}}=I_i$$

从上列方程中解出未知系数 a_i，有

$$a_0=I_0$$

$$a_i=-\frac{(I_i Q_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{I_i Q_{i-1}-P_{i-1}}$$

由于当 $h_i\to 0$ 时，$I_i\to I$，所以令 $h=0$ 代入 $\varphi(h)$ 中，即得积分公式（3-3）。如果

$$|\varphi_{i+1}(0)-\varphi_i(0)|\leqslant \varepsilon$$

ε 为计算精度，则 $\varphi_i(0)$ 为所求的积分值，否则继续加密积分网格，一直达到满足精度要求为止。

关于三维积分的计算问题，也可以用逐次积分方法来实现，

按一维积分计算方法的式（3-1）逐次先对内层，继之对第二层，最后对最外层做积分。

7．四维积分化为累次积分法

设函数 $f(x, y, z, r)$ 在积分域 R_4：$(a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d, l_1 \leqslant z \leqslant l_2, r_1 \leqslant r \leqslant r_2)$ 上连续，则四维积分

$$\int_a^b \int_c^d \int_{l_1}^{l_2} \int_{r_1}^{r_2} f(x, y, z, r)\, dx dy dz dr$$

的计算公式为

$$I = a_0 - \cfrac{h_0}{a_1 - \cfrac{h_1}{a_2 - \cdots - \cfrac{h_{i-1}}{a_i - \cdots}}} \tag{3-4}$$

其中

$$a_0 = I_0$$

$$a_i = -\frac{(I_i Q_{i-2} - P_{i-2})(h_i - h_{i-1})}{I_i Q_{i-1} - P_{i-1}}$$

而

$$P_i = a_i P_{i-1} + (h - h_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = a_i Q_{i-1} + (h - h_{i-1}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = a_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$I_i = h_i \sum_{j=1}^{n_i} q_j$$

$$h_i = \frac{(b-a)(d-c)}{(1+i)^2}$$

n_i 为用积分步长 h_i 分割积分域（$a \leqslant x \leqslant b$，$c \leqslant y \leqslant d$）的总块数；$q_j$ 为第 j 块中点的 $\overline{F}(x, y)$值，而

$$\overline{P}(x,y)=\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2} f(x,y,z,r)dzdr$$

证明 为了把四维积分化为二维累次积分，设函数

$$\overline{P}(x,y)=\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2} f(x,y,z,r)dzdr$$

于是四维积分变成二维积分

$$\int_a^b\int_c^d \overline{P}(x,y)dxdy$$

为了计算此积分，首先确定积分步长序列

$$h_i=\frac{(b-a)(d-c)}{(1+i)^2},\quad i=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

然后做积分和

$$I_i=h_i\sum_{j=1}^{n_i}\overline{P}_j$$

再建立 I_i 与 h_i 的函数关系，为此设积分的认识函数

$$\varphi(h)=a_0+\cfrac{h-h_0}{a_1+\cfrac{h-h_1}{a_2+\cdots+\cfrac{h-h_{i-1}}{a_i+\cdots}}}$$

在点 h_i 处取值为 $\varphi(h_i)=I_i$。根据 $\varphi(h)$ 的渐近分式可以得到方程

$$\frac{a_iP_{i-1}+(h_i-h_{i-1})P_{i-2}}{a_iQ_{i-1}+(h_i-h_{i-1})Q_{i-2}}=I_i$$

由此方程中解出未知系数 a_i，即得到式（3-4）的系数公式。

又根据被积函数 $f(x,y,z,r)$ 在积分域上连续，可知 $\overline{P}(x,y)$ 在积分域 $R_2:(a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d)$ 必然连续，由于当 $h_i\to 0$ 时，$I_i\to I$，所以令 $h=0$ 代入 $\varphi(h)$ 中，即得积分公式（3-4）。

在计算二维积分

$$\overline{P}(x,y)=\int_{l_1}^{l_2}\int_{r_1}^{r_2} f(x,y,z,r)dzdr$$

时，当给定某点 $(x_j,\ y_j)$ 后，即可以根据二维积分计算方法的

式（3-2）进行计算。在应用四维积分式（3-4）时，积分步长序列的选取可以是其它任意趋于零的序列，如

$$h_i=\frac{(b-a)(d-c)}{(2^{1+i})^2},\quad i=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

8．平面曲线的计算法一

设平面曲线方程

$$y=f(x)$$

且函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上连续，计算平面曲线的弧长。如果把区间 $[a,\ b]$ 分成 n_i 段，于是曲线也相应地被分成 n_i 段，每一段弧 $\overset{\frown}{(x_i,\ f_i),\ (x_{i+1},\ f_{i+1})}$ 的弧长可以近似地用与此弧长相对应的弦长来表示，则平面曲线的弧长近似地就用这些弦长的和来表示。不难想像，当段数 n_i 越大时，这些弦长的和越接近平面曲线 $f(x)$ 的弧长，据此，得到了 $f(x)$ 弧长的计算公式

$$L=a_0-\cfrac{h_0}{a_1-\cfrac{h_1}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{a_i-\cdots}}}\tag{3-5 a}$$

其中

$$a_0=l_0$$

$$a_i=-\frac{(l_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{l_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$h_i=\frac{b-a}{n_i},\quad n_i\text{ 为任意正整数}$$

$$l_i=\sum_{j=1}^{n_i}\sqrt{(x_j-x_{j-1})^2+(y_j-y_{j-1})^2}$$

$$P_i=a_iP_{i-1}+(h-h_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=a_iQ_{i-1}+(h-h_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=a_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

证明 设函数

$$\varphi(h)=a_0+\cfrac{h-h_0}{a_1+\cfrac{h-h_1}{a_2+\cdots+\cfrac{h-h_{i-1}}{a_i+\cdots}}}$$

通过点列 (h_i, l_i)，即 $\varphi(h_i)=l_i$，可得方程

$$\frac{a_iP_{i-1}+(h_i-h_{i-1})P_{i-2}}{a_iQ_{i-1}+(h_i-h_{i-1})Q_{i-2}}=l_i$$

从上列方程中解出未知系数 a_i，即系数的计算公式。令 $h=0$ 代入 $\varphi(h)$ 中，即得弧长的计算公式（3-5 a）。

在计算中，可以取 $h_{i+1}=\frac{h_i}{2}$，也可以取 $h_{i+1}=\frac{h_0}{i+1}$，$i=0，1，2，3，\cdots$。

9. 平面曲线的计算法二

设平面曲线方程

$$x=x(t), \quad y=y(t)$$

而且函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则弧长的计算公式为

$$L=a_0-\cfrac{h_0}{a_1-\cfrac{h_1}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{a_i-\cdots}}} \qquad (3\text{-}5\text{ b})$$

其中

$$h_i=\frac{1}{2^i}, \quad i=1, 2, \cdots$$

$$a_0=l_0$$

$$a_i=-\frac{(l_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{l_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$l_i=\sum_{j=1}^{2^i}\sqrt{[x(t_j)-x(t_{j-1})]^2+[y(t_j)+y(t_{j-1})]^2}$$

$$P_i=a_iP_{i-1}+(h_i-h_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=a_iQ_{i-1}+(h_i-h_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=a_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

证明 设函数

$$F(h)=a_0+\frac{h-h_0}{a_1+}\frac{h-h_1}{a_2+}\cdots+\frac{h-h_{i-1}}{a_i+}\cdots$$

通过点列 (h_i, l_i)，再根据$F(h)$的渐近分式可得方程

$$\frac{a_iP_{i-1}+(h_i-h_{i-1})P_{i-2}}{a_iQ_{i-1}+(h_i-h_{i-1})Q_{i-2}}=l_i$$

由上列方程中解出未知系数 a_i，又根据

$$F(h_i)=l_i$$

两边取极限，

$$\lim_{h_i\to 0}F(h_i)=a_0-\frac{h_0}{a_1-}\frac{h_1}{a_2-}\cdots-\frac{h_{i-1}}{a_i-}\cdots$$

$$\lim_{h_i\to 0}l_i=L$$

故

$$L=a_0-\frac{h_0}{a_1-}\frac{h_1}{a_2-}\cdots-\frac{h_{i-1}}{a_i-}\cdots$$

10. 函数的可积性

设函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上有界，假定把区间$[a, b]$分成m等分，分点为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b$$

分成的若干个小区间为$[x_i, x_{i+1}]$，小区间及其长度记作 h_i。如果

M_i 和 m_i 分别表示函数 $f(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的最大值和最小值，求做积分和

$$S_{m-1}=h_m\sum_{i=0}^{m-1}M_i$$

$$\overline{S}_{m-1}=h_m\sum_{i=0}^{m-1}m_i$$

并有序列

$$\begin{array}{llllll} h_i & h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_m \\ S_i & S_0 & S_1 & S_2 & \cdots & S_m \\ \overline{S}_i & \overline{S}_0 & \overline{S}_1 & \overline{S}_2 & \cdots & \overline{S}_m \end{array}$$

为了描述序列的变化，设函数 $S(h)$ 和 $\overline{S}(h)$ 分别通过点列 (h_i, S_i) 和 $(h_i, \overline{S}_i)$，$i=0, 1, 2, \cdots, m$

$$S(h)=a_0+\cfrac{h-h_0}{a_1+\cfrac{h-h_1}{a_2+\cdots+\cfrac{h-h_{i-1}}{a_i+\cdots}}}$$

$$\overline{S}(h)=b_0+\cfrac{h-h_0}{b_1+\cfrac{h-h_1}{b_2+\cdots+\cfrac{h-h_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

由 $S(h)$ 和 $\overline{S}(h)$ 分别经过点列 (h_i, S_i) 和 $(h_i, \overline{S}_i)$ 这一性质，不难得出系数 a_i、b_i 的计算公式

$$a_0=S_0$$

$$b_0=\overline{S}_0$$

$$a_i=-\frac{(S_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{S_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$b_i=-\frac{(\overline{S}_i\overline{Q}_{i-2}-\overline{P}_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{\overline{S}_i\overline{Q}_{i-1}-\overline{P}_{i-1}}$$

$$P_i=a_iP_{i-1}+(h-h_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=a_iQ_{i-1}+(h-h_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=a_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$\overline{P}_i=b_i\overline{P}_{i-1}+(h-h_{i-1})\overline{P}_{i-2}$$

$$\overline{Q}_i=b_i\overline{Q}_{i-1}+(h-h_{i-1})\overline{Q}_{i-2}$$

$$\overline{P}_{-1}=1$$

$$\overline{P}_0=b_0$$

$$\overline{Q}_{-1}=0$$

$$\overline{Q}_0=1$$

利用$S(h)$和$\overline{S}(h)$可以建立可积性的准则如下：

定理一（可积性的准则） 函数$f(x)$在区间$[a, b]$上可积的充分必要条件是

$$\lim_{h_i\to 0}[S(h_i)-\overline{S}(h_i)]=0 \tag{3-6}$$

或对无论怎样小的$\varepsilon>0$，都存在着这样一个$\delta>0$，当$h_i<\delta$时，就有

$$|S(h_i)-\overline{S}(h_i)|\leqslant\varepsilon$$

成立。

证明 先证明必要性。假定函数$f(x)$在区间$[a, b]$上可积，把积分记作I。根据积分定义三可知，对于任意的$\frac{\varepsilon}{2}>0$，都存在$\delta>0$，只要当$h_i<\delta$时，就有

$$|I-S(h_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

和

$$|I-\overline{S}(h_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

成立，这里

$$S(h_i)=a_0+\frac{h_i-h_0}{a_1+\frac{h_i-h_1}{a_2+\cdots+\frac{h_i-h_{i-1}}{a_i}}}$$

和

$$\overline{S}(h_i)=b_0+\frac{h_i-h_0}{b_1+}\frac{h_i-h_1}{b_2+}\cdots+\frac{h_i-h_{i-1}}{b_i}$$

于是得出

$$\begin{aligned}|S(h_i)-\overline{S}(h_i)|&=|S(h_i)-I+I-\overline{S}(h_i)|\\&\leqslant|S(h_i)-I|+|I-\overline{S}(h_i)|\\&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\&=\varepsilon\end{aligned}$$

故必要性得证。

下面证明充分性。如式（3-6）成立，把积分和 $S(h_i)$ 的极限记为 $I=\lim\limits_{h_i\to 0}S(h_i)$，由于对任意 h_i 分法，$f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的积分和 I_i，都满足不等式

$$\overline{S}_i\leqslant I_i\leqslant S_i$$

由于 $\overline{S}_i=\overline{S}(h_i)$，$S_i=S(h_i)$，$I_i=I(h_i)$，所以上面不等式可以记成

$$\overline{S}(h_i)\leqslant I(h_i)\leqslant S(h_i)$$

其中

$$I(h)=c_0+\frac{h-h_0}{c_1+}\frac{h-h_1}{c_2+}\cdots+\frac{h-h_{i-1}}{c_i+}\cdots$$

$$c_0=I_0$$

$$c_i=-\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$I_i=h_i\sum_{j=0}^{i-1}f(x_j+\theta h_i),\quad 0<\theta<1$$

$$P_i=c_iP_{i-1}+(h-h_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=c_iQ_{i-1}+(h-h_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0 = c_0$$
$$Q_{-1} = 0$$
$$Q_0 = 1$$

又由于大和与小和的性质可得不等式

$$\overline{S}(h_i) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant S(h_i)$$

利用上述不等式可得

$$\left| I(h_i) - \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant |S(h_i) - \overline{S}(h_i)|$$

两边取极限，当 $h_i \to 0$ 时，由假设条件可知

$$|S(h_i) - \overline{S}(h_i)| \to 0$$

故

$$\int_a^b f(x)dx = I(0)\cdot$$

即

$$\int_a^b f(x)dx = c_0 - \cfrac{h_0}{c_1 - \cfrac{h_1}{c_2 - \cdots - \cfrac{h_{i-1}}{c_i - \cdots}}}$$

充分性得证。

11. 一维函数积分和法

设函数 $f(x)$ 在区间〔a，b〕上连续，把区间〔a，b〕分成 m 等分，则经过点列（x_i，F_i）的函数为

$$\varphi(x) = a_0 + \cfrac{x - x_0}{a_1 + \cfrac{x - x_1}{a_2 + \cdots + \cfrac{x - x_{i-1}}{a_i + \cdots}}}$$

其中

$$a_0 = F(x_0)$$
$$a_i = -\frac{(F_iQ_{i-2} - P_{i-2})(x_i - x_{i-1})}{F_iQ_{i-1} - P_{i-1}}$$

而

$$F_i = h_i \sum_{j=1}^{i} f_j$$

$$f_j = f(a + jh_i)$$

$$h_i = \frac{b-a}{i}$$

$$P_i = a_i P_{i-1} + (x - x_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = a_i Q_{i-1} + (x - x_{i-1}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = a_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$i = 1, 2, 3, \cdots, m$$

证明 首先把区间$[a, b]$分为m等分，其分点记为

$$x_j = a + jh_i, \quad j = 0, 1, \cdots, m$$

然后求出积分和

$$F_i = h_i \sum_{j=1}^{i} f_j$$

可以通过点列 (x_i, F_i) 构造一个函数

$$\varphi_m(x) = a_0 + \cfrac{x - x_0}{a_1 + \cfrac{x - x_1}{a_2 + \cdots + \cfrac{x - x_{m-1}}{a_m}}}$$

于是，对应一个m，就有一个近似原函数$\varphi_m(x)$存在。由于$\varphi_m(x_i) = F_i$，所以可确定系数a_i。证完。

12. 近似原函数存在性

设函数$f(x)$在区间$[a, x]$上可积，x属于区间$[a, b]$，于是积分

$$\int_a^x f(x)dx$$

存在。为了表达方便，把函数 $f(x)$ 在区间$[a, x]$上的积分写成

$$\int_a^x f(u)du$$

现在把积分的下限 a 算作是固定的，让积分上限 x 在区间$[a, b]$上任意变化，于是上述积分就成为 x 的一个函数，把这个函数记作 $F(x)$。现在来证明下列定理。

定理二 如果函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上连续，则函数

$$\varphi(x)=b_1+\cfrac{x-x_1}{b_2+\cfrac{x-x_2}{b_3+\cdots+\cfrac{x-x_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

就是函数 $f(x)$ 在该区间上的一个近似原函数，并且对于任意小的 $\varepsilon\geqslant 0$，都有 $\delta>0$ 存在，只要$|x_i-x|\leqslant\delta$ 时，都有

$$|F(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon$$

成立。其中

$$F(x)=\int_a^x f(u)du$$

证明 首先对区间$[a, b]$任意采取一个分法H，分点记为

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_{m-1}<x_m=b$$

令 T_i 和 t_i 分别表示 $f(x)$ 在小区间$[x_i, x_{i+1}]$的上、下确界，于是函数 $f(x)$ 在区间$[x_i, x_{i+1}]$上的积分

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

满足不等式

$$t_ih_i\leqslant\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx\leqslant T_ih_i$$

其中 $h_i=x_{i+1}-x_i$。

再做和，有

$$t_0h_0\leqslant\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx\leqslant T_0h_0$$

$$t_0h_0+t_1h_1\leqslant\int_{x_0}^{x_2}f(x)dx\leqslant T_0h_0+T_1h_1$$

……

$$\sum_{i=0}^{k}t_ih_i\leqslant\int_{x_0}^{x_k}f(x)dx\leqslant\sum_{i=0}^{k}T_ih_i$$

或

$$t_0h_0\leqslant F(x_1)-F(x_0)\leqslant T_0h_0$$

$$t_0h_0+t_1h_1\leqslant F(x_2)-F(x_0)\leqslant T_0h_0+T_1h_1$$

……

$$\sum_{i=0}^{k}t_ih_i\leqslant F(x_k)-F(x_0)\leqslant\sum_{i=0}^{k}T_ih_i$$

现在利用原函数$F(x)$，在点x_k的上、下界$\sum_{i=0}^{k}T_ih_i$和$\sum_{i=0}^{k}t_ih_i$，可以记为如下点列：

x_1	x_2	x_3	…	x_k	…
t_0h_0	$t_0h_0+t_1h_1$	$\sum_{i=0}^{2}t_ih_i$	…	$\sum_{i=0}^{k-1}t_ih_i$	…
T_0h_0	$T_0h_0+T_1h_1$	$\sum_{i=0}^{2}T_ih_i$	…	$\sum_{i=0}^{k-1}T_ih_i$	…

根据有理插值函数，分别得出近似函数

$$\varphi(x)=b_1+\frac{x-x_1}{b_2+}\frac{x-x_2}{b_3+}\cdots+\frac{x-x_{m-1}}{b_m}+\cdots$$

和

$$\psi(x)=a_1+\frac{x-x_1}{a_2+}\frac{x-x_2}{a_3+}\cdots+\frac{x-x_{m-1}}{a_m}+\cdots$$

其中

$$b_1=t_0h_0$$

$$a_1 = T_0 h_0$$

$$b_k = -\frac{(x_k - x_{k-1})\left(\sum_{i=0}^{k-1} t_i h_i Q_{k-2} - P_{k-2}\right)}{\sum_{i=0}^{k-1} t_i h_i Q_{k-1} - P_{k-1}}$$

$$a_k = -\frac{(x_k - x_{k-1})\left(\sum_{i=0}^{k-1} T_i h_i \overline{Q}_{k-2} - \overline{P}_{k-2}\right)}{\sum_{i=0}^{k-1} T_i h_i \overline{Q}_{k-1} - \overline{P}_{k-1}}$$

而

$$P_0 = 1$$
$$P_1 = b_1$$
$$Q_0 = 0$$
$$Q_1 = 1$$
$$\overline{P}_0 = 1$$
$$\overline{P}_1 = a_1$$
$$\overline{Q}_0 = 0$$
$$\overline{Q}_1 = 1$$

由于有，当 $k \neq m$ 时，$\sum_{i=0}^{k} t_i h_i \neq \sum_{i=0}^{m} t_i h_i \neq 0$。可知

$$\sum_{i=0}^{k-1} t_i h_i Q_{k-1} - P_{k-1} \neq 0$$

成立。同样，由于有，当 $k \neq m$ 时，$\sum_{i=0}^{k} T_i h_i \neq \sum_{i=0}^{m} T_i h_i \neq 0$。可知

$$\sum_{i=0}^{k-1} T_i h_i \overline{Q}_{k-1} - \overline{P}_{k-1} \neq 0$$

成立。故$\varphi(x)$和$\psi(x)$两个近似函数存在。

又根据$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，所以对任意小$\varepsilon>0$，都存在$\delta_1>0$，只要$H(h)=\max\{x_i-x_{i+1}\}\leqslant\delta_1$时，有$|\Sigma T_ih_i-\Sigma t_ih_i|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}$成立。

由于$\varphi(x)$和$\psi(x)$的构造，可知它们在区间内是连续的。故对任意小$\varepsilon>0$，同样存在$\delta_2>0$，当$|x_i-x|<\delta_2$时，有$|\varphi(x_i)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$成立。

于是，取$H(h)=\min\{\delta_1, \delta_2\}$所建立的分割，产生的近似原函数$\varphi(x)$满足不等式

$$\begin{aligned}
|F(x)-\varphi(x)| &= |F(x)-\Sigma T_ih_i+\Sigma T_ih_i-\varphi(x)| \\
&\leqslant |F(x)-\Sigma T_ih_i|+|\Sigma T_ih_i-\Sigma t_ih_i \\
&\quad +\Sigma t_ih_i-\varphi(x)|\leqslant|F(x)-\Sigma T_ih_i| \\
&\quad +|\Sigma T_ih_i-\Sigma t_ih_i|+|\Sigma t_ih_i-\varphi(x)| \\
&\leqslant 2|\Sigma T_ih_i-\Sigma t_ih_i|+|\varphi(x_k)-\varphi(x)| \\
&\leqslant 2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

故$|F(x)-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon$成立。同样可得$|F(x)-\psi(x)|\leqslant\varepsilon$成立。定理得证。

13. 一维三点求积法

求积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

$f(x)$为实被积函数。

为了计算积分，采用复辛普生求积公式，取积分步长

$h_i=\dfrac{b-a}{2^{i+1}}$，$i=0$，1，2，…，计算出积分I_i。于是得到点列(h_i, I_i)。为了建立I_i与h_i之间的函数关系式，设通过点列(h_i, I_i)的函数为

$$\varphi(h)=b_0+\cfrac{h-h_0}{b_1+\cfrac{h-h_1}{b_2+\cdots+\cfrac{h-h_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

由于$\varphi(h)$在点h_i处取值为$\varphi(h_i)=I_i$，据此导出系数公式

$$b_0=I_0$$

$$b_i=-\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i=b_iP_{i-1}+(h-h_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(h-h_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$I_i=-(S_i+J_i)$$

$$S_i=h_i\sum_{j=1}^{2^i}f(a+(j-1)h_i)$$

$$J_i=J_{i-1}+S_{i-1}$$

$$S_{-1}=0$$

$$J_{-1}=b_0$$

又根据，积分步长h_i越小，积分I_i越精确的事实，令$h=0$代入$\varphi(h)$中，得出积分公式

$$I=b_0-\cfrac{h_0}{b_1-\cfrac{h_1}{b_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{b_i-\cdots}}}$$

如果上式中第i节的值$\bar{I}_i$与第$i+1$节的值$\bar{I}_{i+1}$满足不等式

$$|\bar{I}_{i+1}-\bar{I}_i|\leqslant\varepsilon$$

ε 为计算精度，则 $\bar{I}_i$ 为所求积分的近似值。否则，加密分点，把步长 h_i 缩小为原步长的一半，继续计算，直到满足精度要求为止。

例 1 求积分 $\int_0^1 \cos x dx$

解 计算结果如下：

计算 $f(x)$ 的次数	一维三点求积法	梯形积分	精确积分
1024	0.84147107	0.84278352	0.84147098

例 2 求积分 $\int_0^1 (x^3+x^2+x+1)+(3x^2+2x+1)e^x dx$

解 用一维三点求积法，计算过程中 h_i、b_i 的值为

i	h_i	b_i
0	0.5	12.029764
1	0.25	−0.17689094
2	0.125	−0.080591096
3	0.0625	0.21415887
4	0.03125	−0.02987759
5	0.015625	−0.36212335
6	0.0078125	0.061018033
7	0.00390625	0.40813778
8	0.001953125	−0.51704195

计算结果如下：

计算 $f(x)$ 的次数	一维三点求积法	梯形积分
1024	9.8731273	9.8837712

在应用一维三点求积法时，积分步长可以取 $h_i=\dfrac{b-a}{1+i}$，也可以取其它等距分法。

14. n 维积分法

设函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在积分域 R_n 中可积，求积分

$$\int_{R_n} f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

为了讨论方便起见，假定积分域为单位超立方体，即 R_n：$(0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \cdots, 0 \leqslant x_n \leqslant 1)$。首先采用积分步长 $h_i = \dfrac{1}{1+i}$，$i = 0, 1, 2, \cdots$，分割积分域 R_n，把分割后的每一小块记为 ΔR_j，把分割的总块数记为 n_i。

其次取 ΔR_j 的中点，记为 X_j，并求出函数值 $f(X_j)$，记为 f_j。再做积分和

$$I_i = h_i^n \sum_{j=1}^{n_i} f_j$$

最后依次取 $i = 0, 1, 2, \cdots$ 时，就产生了一个点列

$$(h_0, I_0),\ (h_1, I_1),\ (h_2, I_2), \cdots, (h_i, I_i), \cdots$$

为了建立积分步长 h_i 与 I_i 的函数关系式，设函数 $\varphi(h)$ 通过点列 (h_i, I_i)，其形式为

$$\varphi(h) = b_0 + \cfrac{h^{\gamma_0} - h_0^{\gamma_0}}{b_1 + \cfrac{h^{\gamma_1} - h_1^{\gamma_1}}{b_2 + \cdots + \cfrac{h^{\gamma_i} - h_i^{\gamma_i}}{b_{i+1} + \cdots}}}$$

由于 $\varphi(h)$ 在 h_i 点处取值为 $\varphi(h_i) = I_i$，不难导出系数 b_i 的计算公式

$$b_0 = I_0$$

$$b_i = -\frac{(I_i Q_{i-2} - P_{i-2})(h_i^{\gamma_{i-1}} - h_{i-1}^{\gamma_{i-1}})}{I_i Q_{i-1} - P_{i-1}}$$

$$P_i = b_i P_{i-1} + (h^{\gamma_{i-1}} - h_{i-1}^{\gamma_{i-1}}) P_{i-2}$$

$$Q_i = b_i Q_{i-1} + (h^{\gamma_{i-1}} - h_{i-1}^{\gamma_{i-1}}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = b_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

由于 h_i 为积分步长，h_i 越小，则 I_i 越精确。于是，令 $h = 0$

代入φ(h)中，得出n维积分的近似计算公式

$$\bar{I}=b_0-\cfrac{h_0^{\gamma_0}}{b_1-\cfrac{h_1^{\gamma_1}}{b_2-\cdots-\cfrac{h_i^{\gamma_i}}{b_{i+1}-\cdots}}}$$

这里的实数序列$\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_i, \cdots$，要适当地选取，以便提高计算精度。

在应用n维积分法时，初始积分步长h_0可以为适当小的数，不一定取$h_0=1$。对于一般积分域R_n:($a_1\leqslant x_1\leqslant b_1$, $a_2\leqslant x_2\leqslant b_2$, $\cdots$, $a_n\leqslant x_n\leqslant b_n$)，积分步长可以是一个向量，即$h_i=\left(\frac{b_1-a_1}{1+i}, \frac{b_2-a_2}{1+i}, \cdots, \frac{b_n-a_n}{1+i}\right)^T$，$i=0, 1, 2, \cdots$。

计算中如果满足不等式

$$|\bar{I}_{i+1}-\bar{I}_i|\leqslant \varepsilon$$

ε为计算精度，则$\bar{I}_i$为所求积分$\bar{I}$的近似值。其中

$$\bar{I}_i=b_0-\cfrac{h_0^{\gamma_0}}{b_1-\cfrac{h_1^{\gamma_1}}{b_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}^{\gamma_{i-1}}}{b_i}}}$$

若不满足上列不等式要求时，则增大i值继续计算，直到满足精度要求为止。

15. n维积分平均值法

设函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在R_n上可积，积分域R_n:($a_1\leqslant x_1\leqslant b_1$, $a_2\leqslant x_2\leqslant b_2$, $\cdots$, $a_n\leqslant x_n\leqslant b_n$)，为了计算积分

$$J=\int\int_{R_n}\cdots\int f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

引入变换

$$x_i=a_i+(b_i-a_i)y_i$$
$$i=1, 2, \cdots, n$$

于是上述积分化为

$$J=(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_n-a_n)J^*$$

其中 J^*为在单位超立方体 ω 上的积分。这样，在 R_n 上求积的问题就归结为求单位立方体上的积分问题。

$$J^*=\iint_{\omega}\cdots\int f(a_1+(b_1-a_1)y_1,\cdots,a_n+(b_n-a_n)y_n)dy_1\cdots dy_n$$

积分域 ω：$(0\leqslant y_1\leqslant 1,\ 0\leqslant y_2\leqslant 1,\cdots,0\leqslant y_n\leqslant 1)$。

为了计算 J^*，在区间〔0，1〕上按均匀分布取随机点 $Y(y_1,y_2,\cdots,y_n)$。如第一次取 100 点，令 $h_0=\frac{1}{100}$；第二次取 500 点，令 $h_1=\frac{1}{500}$，…。把相应的积分和记为 I_i，$I_i=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}f(Y_j)$，$N=100+i(400)$，$i=0,1,2,\cdots$。于是，获得积分的逼近序列 (h_0,I_0)，(h_1,I_1)，(h_2,I_2)，…。然后，进一步设法利用序列 (h_i,I_i)，建立 h_i 与 I_i 之间的函数关系。为此，设函数 $\varphi(h)$ 在点 h_i 处取值为 $\varphi(h_i)=I_i$。$\varphi(h)$ 的表达式为

$$\varphi(h)=b_0+\cfrac{h-h_0}{b_1+\cfrac{h-h_1}{b_2+\cdots+\cfrac{h-h_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

再根据 N 越大 I_i 越精确的事实，令 $h=0$ 代入上式，得到积分 J^*的近似计算公式

$$J^*=b_0-\cfrac{h_0}{b_1-\cfrac{h_1}{b_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{b_i-\cdots}}}$$

其中

$$b_0=I_0$$

$$b_i=-\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i=b_iP_{i-1}+(h-h_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(h-h_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0 = b_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

如果满足不等式

$$|J_{i+1}^* - J_i^*| \leqslant \varepsilon$$

ε 为计算精度，则 J_i^* 为所求积分 J^* 的近似值。若不满足上列不等式要求时，则继续增大N值继续计算，直到满足精度要求为止。

16. 平面曲线积分

设函数 $f(x, y)$ 定义在曲线C上，曲线C的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

而函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在区间$[a, b]$上连续。下面给出平面曲线积分的一种计算方法。

为此，我们把区间$[a, b]$用步长 h_i 进行分割，对应 t_{j-1} 到 t_j 点的一段弧的弦为

$$l_j = \sqrt{[x(t_j) - x(t_{j-1})]^2 + [y(t_j) - y(t_{j-1})]^2}$$

在这一段弧上的近似积分为

$$f(x(t_{j-1} + \theta h_i), \quad y(t_{j-1} + \theta h_i)) l_j$$

把曲线C在区间$[a, b]$的所有小段上的近似积分都做和，得积分和

$$I_i = \sum f(x(t_{j-1} + \theta h_i), \quad y(t_{j-1} + \theta h_i)) \cdot \sqrt{[x(t_j) - x(t_{j-1})]^2 + [y(t_j) - y(t_{j-1})]^2}$$

如果把积分步长 h_i 再缩小一半，取 $h_{i+1} = \dfrac{h_i}{2}$，同样得出积分和 I_{i+1}，依此类推，当 i 充分大时，就得到一个序列

$$(h_0, I_0), \ (h_1, I_1), \ (h_2, I_2), \ \cdots, (h_i, I_i), \ \cdots$$

并设函数 $\varphi(h)$ 在 h_i 点处取值为 $\varphi(h_i) = I_i$，由此不难确定

$$\varphi(h) = b_0 + \cfrac{h - h_0}{b_1 + \cfrac{h - h_1}{b_2 + \cdots + \cfrac{h - h_{i-1}}{b_i + \cdots}}}$$

的系数的计算公式

$$b_0 = I_0$$

$$b_i = -\frac{(I_i P_{i-2} - Q_{i-2})(h_i - h_{i-1})}{I_i P_{i-1} - Q_{i-1}}$$

$$P_i = b_i P_{i-1} + (h - h_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = b_i Q_{i-1} + (h - h_{i-1}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = b_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$h_i = \frac{b-a}{i+1}$$

$$i = 1, 2, \cdots$$

根据积分步长越小积分和越精确的事实，令 $h=0$ 代入函数 $\varphi(h)$ 中，得平面曲线积分计算公式

$$\bar{I} = b_0 - \cfrac{h_0}{b_1 - \cfrac{h_1}{b_2 - \cdots - \cfrac{h_{i-1}}{b_i - \cdots}}}$$

在应用上述公式时，如果积分步长缩小到第 i 次，不等式

$$|\bar{I}_{i+1} - \bar{I}_i| \leqslant \varepsilon$$

成立，ε 为计算精度，则 $\bar{I}_i$ 为所求的平面曲线积分的近似值。把 $\varphi(h)$ 称为平面曲线积分的有理展开式。其第 i 节的渐近有理分式为

$$\varphi_i(h) = b_0 + \cfrac{h - h_0}{b_1 + \cfrac{h - h_1}{b_2 + \cdots + \cfrac{h - h_{i-1}}{b_i}}}$$

17. n 维曲线弧长计算法

设 n 维曲线 C 的参数方程为

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \cdots, \quad x_n = x_n(t)$$

而且函数 $x_i(t)$ 在区间〔a，b〕上连续。求曲线 C 的弧长。

为此，把区间〔a，b〕用步长 h_i 进行分割，对应从 t_{j-1} 点到 t_j 点的一段弧的弦长为

$$l_i=\sqrt{[x_1(t_j)-x_1(t_{j-1})]^2+\cdots+[x_n(t_j)-x_n(t_{j-1})]^2}$$

把弧 C 上的所有小段的弦长加起来作为近似弧长，记为

$$L_i=\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[x_i(t_j)-x_i(t_{j-1})]^2}$$

近似弧长 L_i 是对应步长 h_i 的弧长，事实上加密分点，如把步长 h_i 缩小一半，同样又得出更精确的弧长 L_{i+1}。依此类推，当 $i=1,2,\cdots,m,\cdots$ 时，就得出弧长的一序列点

$$(h_0,L_0),\ (h_1,L_1),(h_2,L_2),\cdots$$

为了利用点列 (h_i,L_i) 建立 h_i 与 L_i 之间的函数关系，于是令函数

$$L(h)=b_0+\cfrac{h-h_0}{b_1+\cfrac{h-h_1}{b_2+\cdots+\cfrac{h-h_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

在点 h_i 处取值为 $L(h_i)=L_i$。由此，显然可以得出系数计算公式

$$b_0=L_0$$

$$b_i=-\frac{(L_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{L_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i=b_iP_{i-1}+(h-h_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(h-h_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$h_i=\frac{b-a}{1+i}$$

$$i=1,2,\cdots$$

这样就获得了曲线 C 的弧长的认识函数 $L(h)$，根据分点越

密 L_i 越精确的事实，令 $h=0$ 代入 $L(h)$ 中，得出 n 维曲线 C 的弧长计算公式

$$\overline{L}=b_0-\cfrac{h_0}{b_1-\cfrac{h_1}{b_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{b_i-\cdots}}}$$

在计算中，可以把第 i 次的结果 $\overline{L}_i$ 与第 $i+1$ 次的结果 $\overline{L}_{i+1}$ 进行比较，如果满足不等式

$$|\overline{L}_{i+1}-\overline{L}_i|\leqslant \varepsilon$$

ε 为计算精度，就认为 $\overline{L}_i$ 为所求的 n 维曲线 C 的近似弧长。如果不满足要求，则继续缩小步长 h_i，再重复上述计算过程，直到满足计算精度要求为止。

18．原函数的近似计算法

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，$f(x)$ 在 x_0 点处的原函数值为 F_0。求函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的近似原函数。

为此，先计算一系列定积分

$$F_i=\int_{x_0}^{x_i}f(x)dx+F_0,\quad i=0,1,2,\cdots$$

于是，获得了函数 $f(x)$ 在 x_i 点处的原函数近似值序列如下：

$$(x_0,F_0),\ (x_1,F_1),\ (x_2,F_2),\cdots$$

根据经验，选用 $F(x)$ 的近似函数为 $g(x)$，并设函数 $f(x)$ 的近似原函数为

$$\varphi(x)=a_0+\cfrac{g(x)-g_0}{a_1+\cfrac{g(x)-g_1}{a_2+\cdots+\cfrac{g(x)-g_{i-1}}{a_i+\cdots}}}$$

规定 $\varphi(x)$ 在 x_i 点处取值为 $\varphi(x_i)=F_i$。从而利用 $\varphi(x)$ 的渐近分式，可得方程

$$\frac{a_iP_{i-1}+(g_i-g_{i-1})P_{i-2}}{a_iQ_{i-1}+(g_i-g_{i-1})Q_{i-2}}=F_i$$

从方程解出未知系数，得

$$a_0 = F_0$$

$$a_i = -\frac{(F_i Q_{i-2} - P_{i-2})(g_i - g_{i-1})}{F_i Q_{i-1} - P_{i-1}}$$

而

$$P_i = a_i P_{i-1} + [g(x) - g_{i-1}] P_{i-2}$$

$$Q_i = a_i Q_{i-1} + [g(x) - g_{i-1}] Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = a_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$g_i = g(x_i)$$

$$F_i = F(x_i)$$

这样，就获得了函数 $f(x)$ 的近似原函数 $\varphi(x)$。在计算中，有时取 $g(x) = x$。

第四章　微　分　法

在日常活动中，经常遇到要测量运动物体的速度，怎样测量运动物体的速度呢？按照微分学传统的作法，就是测量某时刻 t_0 物体通过的路程 $s(t_0)$ 及时刻 $t_0+\Delta t$ 物体通过的路程 $s(t_0+\Delta t)$，知道了两个时刻物体通过路程的测量值，就可以计算 t_0 时的近似速度

$$V=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

因为 V 是速度 $\frac{ds}{dt}$ 的近似值，要想提高速度值的精确度，就要缩小测量的时间间隔 Δt。时间间隔 Δt 越小，速度值越精确，按照这个传统的观念进行测量，将产生技术上的困难，Δt 取得很小，将使测量仪器分辨不清，这就要求提高测量仪器的精度；又会使测量中采样点过多，造成处理数据的工作量大幅度增加。例如，在测量卫星轨道参数时，如果时间间隔 Δt 取 0.01 秒，则相应地测量卫星的位置坐标、飞行速度和飞行高度等参数，其工作量将是很可观的。能否将时间间隔 Δt 取得大一些，例如，取为原采用的时间间隔的十倍大、百倍大，仍可以找到一种方法计算出满足精度要求的速度、加速度等值。

为了解决这个问题，回顾一下微分学中速度的定义，即 $V=\frac{ds}{dt}$。按此概念，在测量速度时，是取 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 作为近似值，在 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 中，仅用了两点信息 $s(t_0+\Delta t)$ 和 $s(t_0)$。现在，放宽时间间隔 Δt 的要求，采用更多的信息，如 s_0、s_1、s_2、…、s_i，而不是仅用两个信息 s_0 和 s_1，以换取时间间隔 Δt 的增大，这是第一步；其次是找出 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 与 Δt 的函数关系；第三步是利用所建立的 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 与

Δt 的函数关系，找出当 $\Delta t \to 0$ 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的数学表达式形式；最后，再运用 $\frac{ds}{dt}$ 的数学表达式解决上述运动物体的速度问题。

根据上述思路，先从非匀速运动的瞬时速度、非匀质棒的局部密度等问题着手，阐述本章给出的计算方法，并把它应用到各种实际问题，以满足科学研究和工程技术的需要。

1. 非匀速运动的瞬时速度

假定已知运动物体的运动距离 s 与运动时间 t 的函数关系

$$s = f(t)$$

为了进一步研究物体运动的瞬时速度，一方面要给出物体运动瞬时速度定义的一种数学表达形式，另一方面提供一种利用距离的离散信息计算瞬时速度的方法。为此，考察一个运动物体在时刻 t 时的速度 V 是多少？可以这样去做，如取时间间隔较大的前一时刻（$t-\Delta t_0$）的路程 $f(t-\Delta t_0)$ 做为出发点。那么，物体从时刻（$t-\Delta t_0$）运动到时刻 t 时的路程改变量为

$$\Delta s = f(t) - f(t-\Delta t_0)$$

于是，在时间 Δt_0 内，物体运动的平均速度为

$$V_0 = \frac{\Delta s}{\Delta t_0}$$

因为物体的运动在这一时间间隔内变化是很大的，所以 V_0 只能作为物体在 t 时运动速度的粗略近似。

为了进一步认识在 t 时的速度，把时间间隔缩小一半，取 $\Delta t_1 = \frac{\Delta t_0}{2}$ 内的平均速度，即

$$V_1 = \frac{f(t) - f(t-\Delta t_1)}{\Delta t_1}$$

因为 Δt_1 比 Δt_0 缩小了一半，所以 V_1 就更接近 t 时的速度 V。

如果 Δt_i 很小时，就可以期望在时间间隔 Δt_i 内，物体的速度来不及有很大的变化，因而就可以把在 Δt_i 内的平均速度看作

是物体在 t 时的瞬时速度的一个很好的近似值。

综上所述，可以把上面一系列对测量的时间间隔Δt_i的取法，视为对物体运动瞬时速度的一个认识过程。在这个认识过程中，把 Δt_i 叫做认识过程的自变量，把$\frac{\Delta s}{\Delta t_i}$叫做认识过程的因变量。为了醒目起见，把这个认识过程所产生的信息列表如下：

i	0	1	2	3	…	i
Δt_i	Δt_0	Δt_1	Δt_2	Δt_3	…	Δt_i
V_i	V_0	V_1	V_2	V_3	…	V_i

从上列信息变化过程中，能否找到Δt_i趋于零时，V_i趋于运动瞬时速度V的变化规律，也即建立起Δt_i与V_i之间的函数关系。如果能够用数学表达式来描述这个变化规律，则对于认识物体运动的瞬时速度是有益的。

为此，可以这样来构造描述瞬时速度认识过程的函数。设函数

$$\varphi(\Delta t)=b_0+\cfrac{\Delta t-\Delta t_0}{b_1+\cfrac{\Delta t-\Delta t_1}{b_2+\cdots+\cfrac{\Delta t-\Delta t_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

在点Δt_i处取值为$\varphi(\Delta t_i)=V_i$。由此性质不难确定系数b_i的计算公式

$$b_0=V_0$$

$$b_i=-\frac{(V_iQ_{i-2}-P_{i-2})(\Delta t_i-\Delta t_{i-1})}{V_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i=b_iP_{i-1}+(\Delta t-\Delta t_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(\Delta t-\Delta t_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$\Delta t_i=\frac{\Delta t_0}{2^i}$$

$$V_i=\frac{f(t-\Delta t_i)-f(t)}{\Delta t_i}$$

$$i=1,2,3,\cdots$$

由于，当 $i\to\infty$ 时，$\varphi(\Delta t)$ 在每个间隔 Δt_i 处都取值 V_i，所以可在等式

$$V_i=\varphi(\Delta t_i)$$

的两边都取极限

$$\lim_{i\to\infty}V_i=\lim_{i\to\infty}\varphi(\Delta t_i)$$

由微分学可知，上式左边得出

$$\lim_{i\to\infty}V_i=V=\frac{df(t)}{dt}$$

由于 $\lim\limits_{i\to\infty}\Delta t_i=0$，所以令 $\Delta t=0$，代入 $\varphi(\Delta t)$ 中，上式右边得出

$$\lim_{\Delta t\to 0}\varphi(\Delta t)=b_0-\cfrac{\Delta t_0}{b_1-\cfrac{\Delta t_1}{b_2-\cdots-\cfrac{\Delta t_{i-1}}{b_i-\cdots}}}$$

因此，得到瞬时速度的数学表达式

$$V=b_0-\cfrac{\Delta t_0}{b_1-\cfrac{\Delta t_1}{b_2-\cdots-\cfrac{\Delta t_{i-1}}{b_i-\cdots}}}$$

把

$$V(\Delta t)=b_0+\cfrac{\Delta t-\Delta t_0}{b_1+\cfrac{\Delta t-\Delta t_1}{b_2+\cdots+\cfrac{\Delta t-\Delta t_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

称做瞬时速度的有理展开式。

非匀速运动的瞬时速度是客观存在的，它将不依赖于人们认识途径的不同而改变。因此，在对非匀速运动瞬时速度认识的过程中，时间间隔 Δt_i 和速度 V_i 可以分别取其它形式，如

$$\Delta t_i = \frac{\Delta t_0}{1+i}$$

$$V_i = \frac{f(t+\Delta t_i) - f(t-\Delta t_i)}{2\Delta t_i}$$

若把Δt_i、V_i代入$\varphi(\Delta t)$中，$\varphi(0)$的值与Δt_i和V_i的形式无关，即认为$\varphi(0)=V$为非匀速运动的瞬时速度。若对于Δt_i和V_i的不同形式，$\varphi(0)$取不同的值，在这种情况下，即认为极限不存在或不确定。现归纳如下：

定义一 设物体的运动距离s为时间t的函数$s=f(t)$，如果描述非匀速运动瞬时速度的认识函数$\varphi(\Delta t)$的极限

$$V = b_0 - \cfrac{\Delta t_0}{b_1 - \cfrac{\Delta t_1}{b_2 - \cdots - \cfrac{\Delta t_{i-1}}{b_i - \cdots}}}$$

存在，并且V值与Δt_i趋于零的方式和V_i的形式均无关，就把V称做非匀速运动在t时的瞬时速度，记为

$$\frac{ds}{dt} = V$$

至此，已经建立了非匀速运动瞬时速度定义的数学表达式形式，同时也提供了一种新的计算方法。这种新的计算方法的特点是充分利用距离的信息，从而时间间隔可以放宽，这就减轻了对测量仪器的要求。它与传统的速度概念不同之处是，它要求t时刻附近的距离信息个数充分地“多”；而按传统的概念在测量速度时，则要求测量间隔充分地“小”。在实际问题中，提供充分多的距离信息并不困难，而提供充分小的间隔信息却不容易办到，这就是速度的新计算方法的实际意义。

2. 非匀质棒的局部密度

物理学中，把形状接近于直线段的物体称为棒。如果棒的任何一段的质量都与它的长度成正比，称这样的棒为匀质棒，取单位长度上棒的质量为匀质棒的密度。

如果棒是非匀质的，即在棒的不同部位上质量分布是不同的。为了方便，取棒的一端为零点，用 x 表示棒上的点相对于原点的横坐标。质量在〔0，x〕段上的分布情况是，质量 m 与 x 呈一个函数关系，把这个函数记作 $m=f(x)$。

为了分析在 x 点处的密度 $d(x)$，在 x 点处附近任取一段 Δx_0，如取 $\Delta x_0=1$，于是分布在〔x，$x+\Delta x_0$〕上的质量显然是

$$\Delta m=f(x+\Delta x_0)-f(x)$$

那么，在〔x，$x+\Delta x_0$〕上的平均密度为

$$d_0(x)=\frac{\Delta m}{\Delta x_0}$$

可以把 $d_0(x)$ 视为 x 点处的局部密度的第一次近似。如果把〔x，$x+\Delta x_0$〕这一段缩小一半，取 $\Delta x_1=\frac{\Delta x_0}{2}$，在〔$x$，$x+\Delta x_1$〕上进

$$\varphi(\Delta x)=b_0+\cfrac{\Delta x-\Delta x_0}{b_1+\cfrac{\Delta x-\Delta x_1}{b_2+\cdots+\cfrac{\Delta x-\Delta x_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

经过点（Δx_i, $d_i(x)$），即$\varphi(\Delta x)$在Δx_i点处取值为$\varphi(\Delta x_i)=d_i(x)$。显然，函数$\varphi(\Delta x_i)$能够描述信息（$\Delta x_i, d_i(x)$），$i=0$，1，2，…，的变化情况。所以$\varphi(\Delta x_i)$就是要找的密度变化规律的一种近似的数学表达式形式，故把$\varphi(\Delta x)$称为棒的局部密度的认识函数。

怎样利用$\varphi(\Delta x)$找出未知的局部密度？可以根据这样的事实，当棒的一段长度Δx_i越小，密度$d_i(x)$也越精确。于是，用$\Delta x=0$代入$\varphi(\Delta x)$中来计算密度$d(x)$的大小，这里$\Delta x=0$表示棒的一段长度缩小到了极限。虽然，无法进行长度为零的质量测量，但是可以利用$\varphi(\Delta x)$求出$\Delta x=0$时极限情况的局部密度$d(x)$。由于

$$\varphi(\Delta x_i)=d_i(x),\quad i=0,\ 1,2,\ \cdots$$

所以两边取极限

$$\lim_{i\to\infty}\varphi(\Delta x)=\lim_{i\to\infty}d_i(x)$$

由微分学知，右边得

$$\lim_{i\to\infty}d_i(x)=d(x)$$

左边得

$$\lim_{i\to\infty}\varphi(\Delta x)=\varphi(0)$$

从而获得

$$d(x)=b_0-\cfrac{\Delta x_0}{b_1-\cfrac{\Delta x_1}{b_2-\cdots-\cfrac{\Delta x_{i-1}}{b_i-\cdots}}}$$

其中

$$b_0=d_0(x)$$

$$b_i=-\frac{(d_iQ_{i-2}-P_{i-2})(\Delta x_i-\Delta x_{i-1})}{d_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i = b_i P_{i-1} + (\Delta x - \Delta x_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = b_i Q_{i-1} + (\Delta x - \Delta x_{i-1}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = b_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$d_i(x) = d_i = \frac{f(x+\Delta x_i) - f(x)}{\Delta x_i}$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots$$

事实上，棒的局部密度$d(x)$是客观存在的，它将不依赖于人们对它的认识方式的不同而变化。因此，棒的局部密度$d(x)$与其认识函数$\varphi(\Delta x)$的自变量Δx_i趋于零的方式无关，也与$d_i(x)$的计算近似公式无关。若对于Δx_i趋于零的方式不同，而$d(x)$得不同的值时，则应认为，在这种情况下极限不存在。综上所述，归纳如下：

定义二 设非匀质棒的质量为坐标x的函数$m = f(x)$，如果描述非匀质棒x点处的局部密度的认识函数$\varphi(\Delta x)$的极限

$$d(x) = b_0 - \cfrac{\Delta x_0}{b_1 - \cfrac{\Delta x_1}{b_2 - \cdots - \cfrac{\Delta x_{i-1}}{b_i - \cdots}}}$$

存在。并且$d(x)$的值与Δx_i趋于零的方式及$d_i(x)$的形式均无关，则称$d(x)$为非匀质棒在x点的局部密度，记为

$$d(x) = \frac{df}{dx}$$

至此，已经建立了非匀质棒的局部密度定义的数学表达式形式，同时也提供了一种新的计算方法。

3. 函数的导数

设函数$f(x)$定义在区间$[a,\ b]$上，如何去求函数$f(x)$在x点处的导数？对于一般的函数$f(x)$而言，借助于数学手册

中的微分表就可以求出在 x 点处的导数。但是，对于比较复杂的函数来说，计算它的导数也是相当复杂的。特别是对于某些问题来说，不能写出数学表达式，只能经过测量给出 x 点处的离散函数值，对于这样的问题，传统的微分方法是无能为力的。在本节中将探讨一种解决方法，一方面要建立函数 $f(x)$ 在 x 点处的导数定义的数学表达式形式，另一方面为计算离散测量值的导数提供一种方法。

为此，在 x 点处测量 $f(x)$ 的函数值，任取 Δx_0，如取 $\Delta x_0=1$，再测量在 $(x+\Delta x_0)$ 点处的函数值 $f(x+\Delta x_0)$，然后算出函数 $f(x)$ 在 $[x,\ x+\Delta x_0]$ 这一段上的平均变化速度

$$I_0=\frac{f(x+\Delta x_0)-f(x)}{\Delta x_0}$$

事实上，测量间距 Δx_0 越小，则 I_0 越接近 $f(x)$ 在 x 点的变化速度 I。于是，取 $\Delta x_1=\frac{\Delta x_0}{2}$，在 $(x+\Delta x_1)$ 点处测量出函数 $f(x+\Delta x_1)$ 的值，然后算出函数 $f(x)$ 在 $[x,x+\Delta x_1]$ 这一段上的平均变化速度

$$I_1=\frac{f(x+\Delta x_1)-f(x)}{\Delta x_1}$$

现在，已经有了两个点 $(\Delta x_0,\ I_0)$ 和 $(\Delta x_1,\ I_1)$ 的信息，那么就先利用这两个点的信息，建立通过这两个点的认识函数

$$\varphi_1(\Delta x)=b_0+\frac{\Delta x-\Delta x_0}{b_1}$$

并且规定 $\varphi(\Delta x)$ 在点 Δx_0 和 Δx_1 分别取 I_0 和 I_1。当 $\Delta x\to 0$ 时，则 $\varphi_1(\Delta x)\to\varphi_1(0)$，于是得

$$\varphi_1(0)=b_0-\frac{\Delta x_0}{b_1}$$

$\varphi_1(0)$ 给出了对 x 点导数的两次测量的认识结果，$\varphi_1(0)$ 可以作为 x 点导数的第一次近似。为了使认识结果更接近 x 点的导数，进一步把测量间距 Δx_1 缩小一半，即取 $\Delta x_2=\frac{\Delta x_1}{2}$，测量出

函数 $f(x)$ 在 $(x+\Delta x_2)$ 点处的函数值 $f(x+\Delta x_2)$，然后，算出函数 $f(x)$ 在 $[x, x+\Delta x_2]$ 上的平均变化速度

$$I_2=\frac{f(x+\Delta x_2)-f(x)}{\Delta x_2}$$

再建立通过点 $(\Delta x_0, I_0)$、$(\Delta x_1, I_1)$ 和 $(\Delta x_2, I_2)$ 的认识函数

$$\varphi_2(\Delta x)=b_0+\cfrac{\Delta x-\Delta x_0}{b_1+\cfrac{\Delta x-\Delta x_1}{b_2}}$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，则得 $\varphi_2(\Delta x)\to\varphi_2(0)$，有

$$\varphi_2(0)=b_0-\cfrac{\Delta x_0}{b_1-\cfrac{\Delta x_1}{b_2}}$$

于是，$\varphi_2(0)$ 给出了对 x 点导数的三次测量的认识结果，故 $\varphi_2(0)$ 可以作为 x 点处导数的第二次近似值。继续上述过程，将得到一信息序列

i	0	1	2	3	…	i
Δx_i	Δx_0	Δx_1	Δx_2	Δx_3	…	Δx_i
I_i	I_0	I_1	I_2	I_3	…	I_i

通过这个序列点，将得到认识函数

$$\varphi_i(\Delta x)=b_0+\cfrac{\Delta x-\Delta x_0}{b_1+\cfrac{\Delta x-\Delta x_1}{b_2+\cdots+\cfrac{\Delta x-\Delta x_{i-1}}{b_i}}}$$

同样，当 $\Delta x\to 0$ 时，则 $\varphi_i(\Delta x)\to\varphi_i(0)$。如果

$$|\varphi_i(0)-\varphi_{i-1}(0)|\leqslant\varepsilon$$

ε 为计算精度，则认为 $\varphi_i(0)$ 为函数 $f(x)$ 在 x 点的导数近似值。

综上所述，对函数 $f(x)$ 离散点的导数定义的数学表达式阐述如下：

定义三 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上任一离散点 x 处的值可以测定，Δx_i 是相对于 x 点的距离，差商 $I_i=\dfrac{f(x+\Delta x_i)-f(x)}{\Delta x_i}$。若导数的认识函数 $\varphi(\Delta x)$ 的极限

$$I=b_0-\cfrac{\Delta x_0}{b_1-\cfrac{\Delta x_1}{b_2-\cdots-\cfrac{\Delta x_{i-1}}{b_i-\cdots}}}$$

存在，并且值 I 与Δx_i 趋于零的方式无关，也与 I_i 的近似计算公式无关，则称 I 为函数 $f(x)$ 的离散点导数。记为

$$I=\frac{df(x)}{dx}$$

或对任意 $\varepsilon\geqslant 0$，存在 $\delta\geqslant 0$，只要$\Delta x=\min\{\Delta x_i\}<\delta$时，都有

$$|I-\bar{I}_i|\leqslant\varepsilon$$

成立。式中

$$\bar{I}_i=b_0-\cfrac{\Delta x_0}{b_1-\cfrac{\Delta x_1}{b_2-\cdots-\cfrac{\Delta x_{i-1}}{b_i}}}$$

又称函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上为在认识函数 $\varphi(\Delta x)$ 意义下可微。这里

$$b_0=I_0$$

$$b_i=\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(\Delta x_i-\Delta x_{i-1})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i=b_iP_{i-1}+(\Delta x-\Delta x_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(\Delta x-\Delta x_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$I_i=\frac{f(\Delta x+\Delta x_i)-f(x)}{\Delta x_i}$$

$$\Delta x_i=\frac{\Delta x_0}{2^i}$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

上述函数 $f(x)$ 导数定义的这种数学表达式形式是很自然

的，事实上，函数 $f(x)$ 在 x 点的导数是客观存在的，人们对于这样一个具体的客观情况，可能采取各种不同的认识途径。但是，导数的大小将不因认识途径的不同而改变。因而在定义的数学表达式形式中规定了"与Δx_i趋于零的方式无关"和"与差商的近似计算公式无关"这样两条内容。至此，已经建立了离散点导数定义的数学表达式形式。

4. 离散点导数的计算方法

设已知函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上各等距离散点 $x_0=a$，x_1，x_2，x_3，…，$x_m=b$ 处的相应函数值分别为 f_0，f_1，f_2，…，f_{m-1}，f_m，计算函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上的导数。

能否充分利用点列 (x_i, f_i)，$i=0, 1, 2, \cdots, m$ 的信息，以进一步建立离散点导数的计算公式。为此，令$\Delta x_i=x_i-x_0$，利用离散点列可以产生一系列的差商，选出在 x_0 点附近的 $k\leqslant m$ 个点，并重新编号，记成

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_k$$

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ \cdots,\ f_k$$

计算各点相对于 x_0 点的距离和相应的差商

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \Delta x_3,\ \cdots,\ \Delta x_{k-1},\ \Delta x_k$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x_1},\ \frac{\Delta f}{\Delta x_2},\ \frac{\Delta f}{\Delta x_3},\ \cdots,\ \frac{\Delta f}{\Delta x_{k-1}},\ \frac{\Delta f}{\Delta x_k}$$

其中

$$\Delta x_i=x_i-x_0$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x_i}=\frac{f_i-f_0}{\Delta x_i}$$

当测量间距 Δx_i 取不同的值时，相应差商$\frac{\Delta f}{\Delta x_i}$的精度也发生变化，据此可以认为差商是间距的函数。于是，设 Δx 为自变量，差商 $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ 为因变量，为了用数学表达式形式描述 Δx 与$\frac{\Delta f}{\Delta x}$之间的变化关系，设函数

$$\varphi(\Delta x)=b_0+\cfrac{\Delta x-\Delta x_0}{b_1+\cfrac{\Delta x-\Delta x_1}{b_2+\cdots+\cfrac{\Delta x-\Delta x_{k-1}}{b_k}}}$$

经过点$\left(\Delta x_i, \dfrac{\Delta f}{\Delta x_i}\right)$，即函数$\varphi(\Delta x)$在$\Delta x_i$处取值为$\varphi(\Delta x_i)=\dfrac{\Delta f}{\Delta x_i}$。由此，不难确定系数$b_i$的计算公式。

根据Δx越小，其相应的差商$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$越接近导数$\dfrac{df}{dx}$的这一事实，令$\Delta x=0$代入$\varphi(\Delta x)$中，就导出了离散点导数的计算公式

$$f'(x_0)=b_0-\cfrac{\Delta x_0}{b_1-\cfrac{\Delta x_1}{b_2-\cdots-\cfrac{\Delta x_{k-1}}{b_k}}} \tag{4-1}$$

其中

$$b_0=\frac{\Delta f}{\Delta x_0}$$

$$b_i=-\frac{\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x_i}Q_{i-2}-P_{i-2}\right)(\Delta x_i-\Delta x_{i-1})}{\dfrac{\Delta f}{\Delta x_i}Q_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i=b_iP_{i-1}+(\Delta x-\Delta x_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(\Delta x-\Delta x_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$\Delta x_i=x_i-x_0$$

式（4-1）也适用于函数$f(x)$为连续的情况。

例 1 求函数$f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$在点x_0处的导数值。

解 选取$\Delta x_i=\dfrac{1}{2^i}$，$i=0, 1, 2, 3, \cdots$。根据式(4-1)，

$\Delta x_0=1$，$\Delta x_1=\frac{1}{2}$，…，其计算结果如下：

x_i	Δx_i	$\Delta f/\Delta x_i$	式(4-1)导数值	精确导数值
6	$\frac{1}{64}$	988.67798	985.0000	985
7	$\frac{1}{64}$	1538.9446	1534.0000	1534
8	$\frac{1}{64}$	2263.3987	2257.0000	2257
9	$\frac{1}{64}$	3186.0402	3178.0000	3178
10	$\frac{1}{64}$	4330.8694	4321.0000	4321

上述计算表明，对函数 $f(x)$ 为多项式情况，用式（4-1）求导数值是精确的，而且当Δx_i取其它形式时，仍然正确，所以说式（4-1）提供了一种计算导数的方法。

例 2　求函数 $f(x)=\sin x$ 在 x_0 点处的一阶导数。

解　应用式（4-1），当 $x_0=0$ 时，计算结果如下：

i	Δx_i	$\Delta f/\Delta x_i$	式(4-1)导数值	精确导数值
1	0.25	0.958851077	0.958851077	1
2	0.125	0.989615837	1.02038059	1
3	0.0625	0.997397867	1.00297901	1
4	0.03125	0.999349085	0.999991616	1
5	0.015625	0.999837247	1.00000001	1

当 $x_0=0.1$ 时，计算结果如下：

i	Δx_i	$\Delta f/\Delta x_i$	式(4-1)导数值	精确导数值
1	0.25	0.929618113	0.929618113	0.995004165
2	0.125	0.972257563	1.01489701	0.995004165
3	0.0625	0.986183563	0.997223486	0.995004165
4	0.03125	0.991237723	0.994995446	0.995004165
5	0.015625	0.993282455	0.995004176	0.995004165

例3 已知温度目标函数$T(t)$，在各离散时间的温度测试记录如下：

时 间 t	0	1	2	3	4	5	…
温 度 T	500	504	514	530	552	580	…

要求利用测试记录计算温度$T(t)$ 在 $t=1$ 时的温度变化率是多少？

解 任取$\Delta t_0=t_2-t_1=1$，$\Delta t_1=t_3-t_1=2$，$\Delta t_2=t_4-t_1=3$，$\Delta t_3=t_6-t_1=4$。计算差商$\frac{\Delta T}{\Delta t_0}=\frac{514-504}{1}=10$，$\frac{\Delta T}{\Delta t_1}=\frac{530-504}{2}=13$，$\frac{\Delta T}{\Delta t_2}=\frac{552-504}{3}=16$，$\frac{\Delta T}{\Delta t_3}=\frac{580-504}{4}=19$。

利用 Δt_i、$\frac{\Delta T}{\Delta t_i}$计算系数$b_i$，$i=0, 1, 2, \cdots$，

得

$$b=10$$

$$b_1=\frac{\Delta t_1-\Delta t_0}{\frac{\Delta T}{\Delta t_1}-\frac{\Delta T}{\Delta t_0}}=\frac{2-1}{13-10}=\frac{1}{3}$$

$$b_{12}=\frac{\Delta t_2-\Delta t_0}{\frac{\Delta T}{\Delta t_2}-\frac{\Delta T}{\Delta t_0}}=\frac{3-1}{16-10}=\frac{1}{3}$$

$$b_2=\frac{\Delta t_2-\Delta t_1}{b_{12}-b_1}=\frac{3-2}{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}=\infty$$

代入式（4-1）得结果如下：

$$T'(t_1)=b_0=10$$

$$T'(t_1)=b_0-\frac{\Delta t_0}{b_1}=10-\frac{1}{\frac{1}{3}}=7$$

$$T'(t)=b_0-\frac{\Delta t_0}{b_1-\frac{\Delta t_1}{b_2}}$$

$$=10-\frac{1}{\frac{1}{3}-\frac{2}{\infty}}$$

$$=7$$

故温度函数 $T(t)$ 在 $t=1$ 时的温度变化率为

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=1}=7$$

5. 二阶导数的计算方法

设已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上连续可微，其二阶导数的计算公式为

$$\frac{d^2f}{dx^2}=b_0-\frac{\Delta x_0^2}{b_1-\frac{\Delta x_1^2}{b_2-\cdots-\frac{\Delta x_{i-1}^2}{b_i-\cdots}}} \tag{4-2}$$

其中

$$b_0=\frac{\Delta^2 f}{\Delta x_0^2}$$

$$b_i=-\frac{\left(\frac{\Delta^2 f}{\Delta x_i^2}Q_{i-2}-P_{i-2}\right)(\Delta x_i^2-\Delta x_{i-1}^2)}{\frac{\Delta^2 f}{\Delta x_i^2}Q_{i-1}-P_{i-1}}$$

而

$$P_i=b_iP_{i-1}+(\Delta x^2-\Delta x_{i-1}^2)P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(\Delta x^2-\Delta x_{i-1}^2)Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$\Delta x_i=\frac{\Delta x_0}{2^i}$$

$i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

Δx_0 为适当的常数

证明 首先假设求任意点 x_0 的二阶导数，取一适当的数 Δx_0，使得 $x_0-\Delta x_0$ 和 $x-\Delta x_0$ 均属于区间 $[a,\ b]$，然后做二阶差商

$$\frac{\Delta^2 f}{\Delta x_0^2}=\frac{f(x_0+\Delta x_0)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x_0)}{\Delta x_0^2}$$

由于 Δx_0 越小，相应的二阶差商 $\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x_0^2}$ 越接近 x_0 点处的二阶导数 $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$，所以把 Δx_0 缩小一半，取 $\Delta x_1=\dfrac{\Delta x_0}{2}$，再计算二阶差商

$$\frac{\Delta^2 f}{\Delta x_1^2}=\frac{f(x_0+\Delta x_1)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x_1)}{\Delta x_1^2}$$

重复上述过程，依次缩小 Δx_i，并计算其二阶差商 $\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x_i^2}$，就得到差商序列

i	0	1	2	3	$\cdots$
Δx_i	Δx_0	Δx_1	Δx_2	Δx_3	$\cdots$
$\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x_i^2}$	$\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x_0^2}$	$\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x_1^2}$	$\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x_2^2}$	$\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x_3^2}$	$\cdots$

其次，设法建立 Δx_i 与 $\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x_i^2}$ 之间的函数关系。设二阶差商的认识函数

$$\varphi(x)=b_0+\cfrac{\Delta x^2-\Delta x_0^2}{b_1+\cfrac{\Delta x^2-\Delta x_1^2}{b_2+\cdots+\cfrac{\Delta x^2-\Delta x_{i-1}^2}{b_i+\cdots}}} \tag{4-3}$$

在点 Δx_i 处取值为 $\varphi(\Delta x_i)=\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x_i^2}$。因为，当 $\Delta x_i\to 0$ 时，则 $\dfrac{\Delta^2 f}{\Delta x_i^2}\to\dfrac{d^2 f}{dx^2}$，所以，令 $\Delta x=0$ 代入 $\varphi(\Delta x)$ 中，就得到了函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的二阶导数计算公式（4-2）。把式（4-3）称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的二阶导数展开式。

6. m阶导数的计算方法

函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上任一点的一阶导数和二阶导数的计算方法已经在前两节中以式（4-1）和式（4-2）给出。如何计算函数 $f(x)$ 的m阶导数？这是本节将要论述的内容。

如果函数 $f(x)$ 的$m-2$阶导数已经得知，则求函数 $f(x)$ 的m阶导数就变成求函数 $f(x)$ 的$m-2$阶导函数$f^{(m-2)}(x)$的二阶导数了。于是，可以根据二阶导数的计算方法式（4-2），导出函数 $f(x)$ 的m阶导数的计算公式

$$\frac{d^m f}{dx^m}=b_0-\cfrac{\Delta x_0^2}{b_1-\cfrac{\Delta x_1^2}{b_2-\cdots-\cfrac{\Delta x_{i-1}^2}{b_i-\cdots}}} \tag{4-4}$$

其中

$$b_0=\frac{\Delta^2 f^{(m-2)}}{\Delta x_0^2}$$

$$b_i=-\frac{\left(\dfrac{\Delta^2 f^{(m-2)}}{\Delta x_i^2}Q_{i-2}-P_{i-2}\right)(\Delta x_i^2-\Delta x_{i-1}^2)}{\dfrac{\Delta^2 f^{(m-2)}}{\Delta x_i^2}Q_{i-1}-P_{i-1}}$$

而

$$P_i=b_iP_{i-1}+(\Delta x^2-\Delta x_{i-1}^2)P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(\Delta x^2-\Delta x_{i-1}^2)Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$\Delta x_i=\frac{\Delta x_0}{2^i}$$

$$\frac{\Delta^2 f^{(m-2)}}{\Delta x_i^2}=\frac{f^{(m-2)}(x_0+\Delta x_i)-2f^{(m-2)}(x_0)+f^{(m-2)}(x_0-\Delta x_i)}{\Delta x_i^2}$$

Δx_0为一个适当小的常数

m为大于 2 的任意整数

在计算函数$f(x)$的$m-2$阶导数时，若$m-2$为偶数，可以反复利用式（4-2）进行逐次微分；若$m-2$为奇数，则可以交替运用式（4-1）和式（4-2）进行逐次微分。

应用式（4-4）还可以求离散点上的m阶导数。具体作法如下：

设已知离散点列

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_i \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \cdots & f_i \end{array}$$

试求其m阶导数。首先进行逐次微分，利用离散点导数的计算方法，由式（4-1）求出每个点处的一阶导数，于是得到一个一阶导数的离散点列

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_i \\ f_0^{(1)} & f_1^{(1)} & f_2^{(1)} & f_3^{(1)} & f_4^{(1)} & \cdots & f_i^{(1)} \end{array}$$

对一阶导数的离散点列再利用式（4-1），又得到二阶导数的离散点列，依此类推，经过$m-1$次微分，即得到了$m-1$阶导数的离散点列

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_i \\ f_0^{(m-1)} & f_1^{(m-1)} & f_2^{(m-1)} & f_3^{(m-1)} & f_4^{(m-1)} & \cdots & f_i^{(m-1)} \end{array}$$

对此点列，再次运用式（4-1），就求出了在各点上的m阶导数。

7．m阶偏导数的计算方法

设函数$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$定义在区域$R_n$：$(a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2, \cdots, a_n \leqslant x_n \leqslant b_n)$上，求函数$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$关于$x_i$的$m$阶偏导数，$i=0, 1, 2, \cdots, n$。

首先，选择趋于零的数列

$$\Delta x_0 \quad \Delta x_1 \quad \Delta x_2 \quad \Delta x_3 \quad \cdots \quad \Delta x_j \quad \cdots$$

若函数$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$，关于$x_i$的$m-2$阶偏导数$\frac{\partial^{(m-2)} f}{\partial x_i^{(m-2)}}$已经得到，那么可以计算函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的差商，于

是有点列

$$\begin{array}{cccccccc} \Delta x_0 & \Delta x_1 & \Delta x_2 & \Delta x_3 & \cdots & \Delta x_j & \cdots \\ I_0 & I_1 & I_2 & I_3 & \cdots & I_j & \cdots \end{array}$$

式中

$$I_j=\frac{1}{\Delta x_j^2}\left[\frac{\partial^{(m-2)} f(x_1, \cdots, x_i+\Delta x_j, \cdots, x_n)}{\partial x_i^{(m-2)}} - \frac{2\partial^{(m-2)} f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)}{\partial x_i^{(m-2)}} + \frac{\partial^{(m-2)} f(x_1, \cdots, x_i-\Delta x_j, \cdots, x_n)}{\partial x_i^{(m-2)}}\right]$$

其次，为建立 Δx_j 与 I_j 之间的函数关系，设其认识函数

$$\varphi(\Delta x)=b_0+\cfrac{\Delta x-\Delta x_0}{b_1+\cfrac{\Delta x-\Delta x_1}{b_2+\cdots+\cfrac{\Delta x-\Delta x_{j-1}}{b_j+\cdots}}}$$

在点 Δx_j 处取值 $\varphi(\Delta x_j)=I_j$，$j=0$，1，2，…，并且在 $\varphi(\Delta x_j)=I_j$ 两边取极限，得出当 $\Delta x\to 0$ 时有

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_i^m}=b_0-\cfrac{\Delta x_0}{b_1-\cfrac{\Delta x_1}{b_2-\cdots-\cfrac{\Delta x_{j-1}}{b_j-\cdots}}} \tag{4-5}$$

其中

$$b_0=I_0$$

$$b_j=-\frac{(I_jQ_{j-2}-P_{j-2})(\Delta x_j-\Delta x_{j-1})}{I_jQ_{j-1}-P_{j-1}}$$

$$P_j=b_jP_{j-1}+(\Delta x-\Delta x_{j-1})P_{j-2}$$

$$Q_j=b_jQ_{j-1}+(\Delta x-\Delta x_{j-1})Q_{j-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

m 为任意正整数

在计算 $\frac{\partial^{(m-2)} f}{\partial x_i^{(m-2)}}$ 时，若 m 为偶数，可以反复利用式(4-5)即

可计算出偏导数；若m为奇数，则除了使用式（4-5）外，再用一次式（4-1）即可。

8．二阶混合偏导数的计算方法

设已知二维函数$f(x, y)$，若函数$f(x, y)$的二阶混合偏导数的认识函数$\varphi(\Delta x)$之极限

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=b_0-\frac{\Delta x_0}{b_1-\frac{\Delta x_1}{b_2-\cdots-\frac{\Delta x_{i-1}}{b_i-\cdots}}} \tag{4-6}$$

的值$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$存在，且此值与$\Delta x_i$趋于零的方式无关，那么，就把$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$在点（$x_0$，$y_0$）处的值叫做在认识函数$\varphi(\Delta x)$意义下的二阶混合偏导数。

又把

$$\varphi(\Delta x)=b_0+\frac{\Delta x-\Delta x_0}{b_1+\frac{\Delta x-\Delta x_1}{b_2+\cdots+\frac{\Delta x-\Delta x_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

叫做函数$f(x, y)$在点（x_0，y_0）处的二阶混合偏导数的展开式。

其中

$$b_0=I_0$$

$$b_i=-\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(\Delta x_i-\Delta x_{i-1})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$I_i=\frac{1}{4\Delta x_i\Delta y_i}[f(x_0+\Delta x_i, y_0+\Delta y_i)-f(x_0+\Delta x_i, y-\Delta y_i)$$
$$-f(x_0-\Delta x_i, y_0+\Delta y_i)+f(x_0-\Delta x_i, y_0-\Delta y_i)]$$

$$P_i=b_iP_{i-1}+(\Delta x-\Delta x_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(\Delta x-\Delta x_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$
$$Q_0=1$$

$$\Delta x_i=\Delta y_i=\frac{1}{2^i}$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

关于 Δx_i 序列的选择，可以取任意趋于零的序列。如取 $\Delta x_0=1$，$\Delta x_1=\frac{1}{2}$，…，$\Delta x_i=\frac{1}{1+i}$，$i=0,1,2,3,\cdots$。

例 1 求函数 $f(x,\ y)=x^2y^2$ 在点 $(x,\ y)=(1,1)$ 处的二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2(x^2y^2)}{\partial x\partial y}$。

解 任取序列 $\Delta x_0=\frac{1}{2}$，$\Delta x_1=\frac{1}{4}$，…，$\Delta x_i=\frac{1}{2^{1+i}}$

计算相应的差商

$$I_i=\frac{f(x+\Delta x_i,\ y+\Delta y_i)-f(x,\ y+\Delta y_i)-f(x+\Delta x_i,\ y)+f(x,\ y)}{\Delta x_i^2}$$

代入二阶混合偏导数的计算公式（4-6），其计算结果如下：

i	Δx_i	I_i	式(4-6)	b_i
0	0.5	6.25	6.25	6.25
1	0.25	5.0625	3.875	−21.96875
2	0.125	4.515625	3.9967949	0.21052662
3	0.0625	4.2539	4.0000000	−0.1294815

函数 $f(x,\ y)=x^2y^2$ 在点 $(x,\ y)=(1,\ 1)$ 处的精确结果为 4。

例 2 求函数 $f(x,\ y)=\cos xe^y$，在点 $(x,\ y)=(1,1)$ 处的二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2(\cos xe^y)}{\partial x\partial y}$。

解 任取序列 $\Delta x_0=1$，$\Delta x_1=\frac{1}{2}$，…，$\Delta x_i=\frac{1}{1+i}$，$i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$，根据式（4-6），其计算结果如下：

i	Δx_i	I_i	式(4-6)	b_i
0	1	-4.4673580	-4.4673580	-4.4673580
1	0.5	-3.3121380	-2.1569180	-0.43281798
2	$0.3333\dot{3}$	-2.952613	-2.2679759	22.877885
3	0.25	-2.7791723	-2.2911169	0.080433304
4	0.2	-2.6773319	-2.2873251	-19.165500
5	$0.1666\dot{6}$	-2.6103834	-2.2873542	1.1280418

函数$f(x, y)=\cos xe^y$在点$(x, y)=(1, 1)$处的精确结果为-2.28735。

9．m阶混合偏导数的计算方法

设函数$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$定义在区域$R_n$：$(a_1\leqslant x_1\leqslant b_1, a_2\leqslant x_2\leqslant b_2, \cdots, a_n\leqslant x_n\leqslant b_n)$上，求函数$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$的$m$阶混合偏导数。若函数$f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$的$m$阶混合偏导数的认识函数

$$\varphi(\Delta x)=b_0+\cfrac{\Delta x-\Delta x_0}{b_1+\cfrac{\Delta x-\Delta x_1}{b_2+\cdots+\cfrac{\Delta x-\Delta x_{i-1}}{b_i+\cdots}}} \tag{4-7}$$

之极限

$$\varphi(0)=b_0-\cfrac{\Delta x_0}{b_1-\cfrac{\Delta x_1}{b_2-\cdots-\cfrac{\Delta x_{i-1}}{b_i-\cdots}}} \tag{4-8}$$

的值$\varphi(0)$存在，且此极限值与Δx_i趋于零的方式无关，那么，就把$\varphi(0)$称为函数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在点$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$处关于变量$x_1, x_2, \cdots, x_j$的$m$阶混合偏导数，更确切地说，称为在认识函数$\varphi(\Delta x)$意义下的$m$阶混合偏导数。式(4-7)中的系数为

$$b_0=I_0$$

$$b_i=-\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(\Delta x_i-\Delta x_{i-1})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i=b_iP_{i-1}+(\Delta x-\Delta x_{i-1})P_{i-2}$$
$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(\Delta x-\Delta x_{i-1})Q_{i-2}$$
$$P_{-1}=1$$
$$P_0=b_0$$
$$Q_{-1}=0$$
$$Q_0=1$$
$$I_i=\frac{\Delta^m f}{\Delta x_i^m}=\frac{\Delta^m f}{(\Delta x_1^{(i)})^{k_1}(\Delta x_2^{(i)})^{k_2}\cdots(\Delta x_j^{(i)})^{k_j}}$$
$$\Delta x_i=\Delta x_1^{(i)}=\Delta x_2^{(i)}=\cdots=\Delta x_n^{(i)}$$
$$m=k_1+k_2+\cdots+k_j$$

10. 微分学中值定理

微分学的中值定理给出了中值点存在性的证明，但是并没有解决中值点如何计算的问题，本节将提供一种解法。

引理 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数，并且对一切充分小的 $h>0$，不等式

$$f(x_0+h)\leqslant f(x_0)$$

和

$$f(x_0-h)\leqslant f(x_0)$$

永远成立，则 $f'(x_0)=0$。

证明 因为 $f'(x)$ 存在，所以当 $h\to+0$ 时，应当有

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\longrightarrow f'(x_0)$$

和

$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\longrightarrow f'(x_0)$$

按假设，对于充分小的 h，第一个分式不能是正的，所以它的极限 $f'(x)\leqslant 0$；同样，对于充分小的 h，第二个分式的极限 $f'(x)\geqslant 0$。导数 $f'(x)$ 既不能是负的又不能是正的，因此，导数 $f'(x)$ 必须为零。引理得证。

定理一　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续、单峰，并且在区间 $[a, b]$ 的任何一个内点都可微，又 $f(a)=f(b)$，那么，在区间 $[a, b]$ 上有内点 θ 存在，并使得 $f'(\theta)=0$，而 θ 的计算公式为

$$\theta = a_0 - \cfrac{f_0}{a_1 - \cfrac{f_1}{a_2 - \cdots - \cfrac{f_{i-1}}{a_i - \cdots}}} \tag{4-9}$$

其中

$$a_0 = x_0$$

$$a_i = -\frac{(x_i Q_{i-2} - P_{i-2})(F_i - F_{i-1})}{x_i Q_{i-1} - P_{i-1}}$$

而

$$P_i = a_i P_{i-1} + (F - F_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = a_i Q_{i-1} + (F - F_{i-1}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = a_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$F_i = f'(x_i)$$

$$i = 1, 2, 3, \cdots$$

证明　首先证明 θ 点的存在。若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上为常数，显然，对于区间 $[a, b]$ 的任何内点 x 都有 $f'(x)=0$。不然的话，可设 $f(x)>f(a)$。又因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，根据外尔斯特拉斯定理，在变量所在闭域 G 上的连续函数，在区域 G 的内部或边界上一定能达到它的最大值。所以，函数 $f(x)$ 一定在区间 $[a, b]$ 上某一点 θ 取到它的最大值，由于 θ 点为最大值点，故对于和 θ 点充分接近的一切 x，都有 $f(x)\leqslant f(\theta)$ 成立，因此应用引理可知，$f'(\theta)=0$。又根据函数 $f(x)$ 单峰，所以 θ 点是唯一的，并且 $f'(x)$ 为单值函数，故其反函数 $x=x(f'(x))$ 存在。

其次，找出θ的计算方法。在区间〔a，b〕上任取点列

i	0	1	2	3	…
x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	…
F_i	F_0	F_1	F_2	F_3	…

设$f'(x)$的反函数$x(f'(x))$的认识函数为

$$\varphi(F)=a_0+\cfrac{F-F_0}{a_1+\cfrac{F-F_1}{a_2+\cdots+\cfrac{F-F_{i-1}}{a_i+\cdots}}}$$

在点F_i处取值$\varphi(F_i)=x_i$，利用$\varphi(F)$的渐近分式，可得方程

$$\frac{a_iP_{i-1}+(F_i-F_{i-1})P_{i-2}}{a_iQ_{i-1}+(F_i-F_{i-1})Q_{i-2}}=x_i$$

从此方程解出未知系数a_i，即得式（4-9）的系数公式。

由于极值点θ满足$f'(\theta)=0$，所以令$F=0$代入$\varphi(F)$，得θ的计算公式（4-9）。关于$F(x)$可以利用式（4-1）进行计算。

在应用式（4-9）计算θ时，首先在区间〔a，b〕内任取三个初始点x_0、x_1、x_2，并计算相应的F_0、F_1、F_2，代入式（4-9）求出

$$x_3=a_0-\cfrac{F_0}{a_1-\cfrac{F_1}{a_2}}$$

若$|f'(x_3)|\leqslant\varepsilon$，ε为计算精度，则$x_3$为所求θ的近似值，否则把点（$x_3$，$F_3$）代入式（4-9），继续求出$x_4$，直到满足要求为止。

定理二 设函数$f(x)$在区间〔a，b〕上连续、单峰，并且在区间〔a，b〕的任一内点都可微，则在区间〔a，b〕上有内点θ存在，使得

$$f'(\theta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

成立。而θ的计算公式为

$$\theta=a_0-\cfrac{F_0}{a_1-\cfrac{F_1}{a_2-\cdots-\cfrac{F_{i-1}}{a_i-\cdots}}} \tag{4-10}$$

其中

$$a_0=x_0$$

$$a_i=-\frac{(x_iQ_{i-2}-P_{i-2})(F_i-F_{i-1})}{x_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i=a_iP_{i-1}+(F-F_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=a_iQ_{i-1}+(F-F_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=a_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$F(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$F_i=F(x_i)$$

证明 引入辅助函数

$$\psi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

显然，$\psi(a)=\psi(b)=0$，由于函数$f(x)$的连续、单峰及可微，可知$\psi(x)$在区间〔a，b〕上连续、单峰且可微。并有

$$\psi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

根据定理一可知函数$\psi(x)$在区间〔a，b〕内有点θ存在，使得

$$\psi'(\theta)=f'(\theta)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

成立。

为了计算θ，由于$\psi(x)$单峰可微的条件，可知$\psi'(x)$单调下降，故有反函数$\varphi(F)$存在，

$$\varphi(F)=a_0+\frac{F-F_0}{a_1+\frac{F-F_1}{a_2+\cdots+\frac{F-F_{i-1}}{a_i+\cdots}}}$$

并规定$\varphi(F_i)=x_i$，再利用$\varphi(F)$的渐近分式可得方程

$$\frac{a_iP_{i-1}+(F_i-F_{i-1})P_{i-2}}{a_iQ_{i-1}+(F_i-F_{i-1})Q_{i-2}}=x_i$$

从此方程中解出未知系数a_i，即得式（4-10）的系数公式。

由于θ点满足方程

$$\psi'(x)=0$$

所以令$F=0$，代入$\varphi(F)$中，即得θ的计算公式(4-10)。

在应用式（4-10）计算θ时，可先任取有限个点（x_i, F_i），$i=0$，1，2，…，k，代入式（4-10）中，求出x_{k+1}作为θ的第一次近似值，若$F(x_{k+1})=0$，则x_{k+1}为所求的θ值，不然，把（x_{k+1}, F_{k+1}）代入式（4-10），继续求出x_{k+2}，直到求出θ为止。

例1　求满足等式

$$f'(\theta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

的θ值，式中$f(x)=\sin x$，$a=0$，$b=\pi$。

解　设求方程

$$F(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

的解。选三个初始点，$x_0=1$，$x_1=1.5$，$x_2=2$，计算出相应的F_0、F_1和F_2，代入式（4-10），其计算结果如下：

i	x_i	$f'(x_i)$
0	1	0.54030236
1	1.5	0.70737082×10^{-1}
2	2.0	-0.41614672
3	1.5737846	-0.29883461×10^{-2}
4	1.5707535	0.42913132×10^{-4}
5	1.5707964	-0.11583324×10^{-7}

精确θ值为$\frac{\pi}{2}$，与计算结果$\theta=1.5707964$在小数点后七位均相同，故为所求的近似值。

例 2 求满足等式

$$f'(\theta)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

的θ值，式中函数$f(x)=x^2+x+1$，$a=0$，$b=\pi-\frac{i}{2}$。

解 根据式（4-10）的计算结果如下：

i	a	b	式(4-10) θ值	精确θ值	精 度
1	0	$\pi-\frac{1}{2}$	1.3207963	1.3207963	10^{-8}
2	0	$\pi-1$	1.0707963	1.0707963	10^{-8}

上述两个例子说明式（4-10）是可行的计算方法。

定理三 设函数$f(x)$与$\varphi(x)$在区间$[a, b]$上连续，并在区间$[a, b]$的任一内点都可微，且$\varphi'(x)\neq 0$和$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$单调连续。则在区间$[a, b]$上有一个内点θ存在，使得

$$\frac{f'(\theta)}{\varphi'(\theta)}=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

成立。θ的计算公式为

$$\theta=a_0-\cfrac{F_0}{a_1-\cfrac{F_1}{a_2-\cdots-\cfrac{F_{i-1}}{a_i-\cdots}}} \tag{4-11}$$

其中

$$a_0=x_0$$

$$a_i=-\frac{(x_iQ_{i-2}-P_{i-2})(F_i-F_{i-1})}{x_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

而

$$P_i=a_iP_{i-1}+(F-F_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=a_iQ_{i-1}+(F-F_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=a_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$F(x)=\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

$$F_i=F(x_i)$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

证明 引入辅助函数

$$\bar{\varphi}(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}[\varphi(x)-\varphi(a)]$$

显然，$\bar{\varphi}(a)=\bar{\varphi}(b)=0$，并且$\bar{\varphi}(x)$在区间$[a,\ b]$上连续可微，根据定理一，在区间$[a,\ b]$内有点$\theta$存在，使

$$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)=\bar{\varphi}'(x)=0$$

成立，由此可得等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\theta)}{\varphi'(\theta)}$$

成立。

由于$\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$单调连续，故

$$F(x)=\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$$

的反函数存在，设反函数为

$$\psi(F)=a_0+\cfrac{F-F_0}{a_1+\cfrac{F-F_1}{a_2+\cdots+\cfrac{F-F_{i-1}}{a_i+\cdots}}}$$

并规定$\psi(F)$在点F_i处取值为$\psi(F_i)=x_i$。由此条件及$\psi(F)$的渐近分式可得方程

$$\frac{a_iP_{i-1}+(F_i-F_{i-1})P_{i-2}}{a_iQ_{i-1}+(F_i-F_{i-1})Q_{i-2}}=x_i$$

解出未知系数，即得式（4-11）中系数a_i的计算公式。

由于θ点满足方程

$$\bar{\varphi}'(x)=0$$

所以，令$F=0$代入$\psi(F)$中，即得θ的计算公式

$$\theta=a_0-\cfrac{F_0}{a_1-\cfrac{F_1}{a_2-\cdots-\cfrac{F_{i-1}}{a_i-\cdots}}}$$

故式（4-11）成立。

11. 一维有理函数的微分法

设有理函数

$$\varphi(x)=b_0+\cfrac{x-x_0}{b_1+\cfrac{x-x_1}{b_2+\cdots+\cfrac{x-x_{i-1}}{b_i+\cdots}}}$$

其中，x_i、b_i均为实常数。要求建立$\varphi(x)$的微分计算 公式。把$\varphi(x)$改写成如下形式

$$\varphi(x)=b_0+\frac{x-x_0}{\varphi_1(x)}$$

式中

$$\varphi_1(x)=b_1+\frac{x-x_1}{\varphi_2(x)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\varphi_{i-1}(x)=b_{i-1}+\frac{x-x_{i-1}}{\varphi_i(x)}$$

$$\varphi_i(x)=b_i$$

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

再对$\varphi(x)$实行微分，则得

$$\varphi'(x)=\frac{\varphi_1(x)-(x-x_0)\varphi_1'(x)}{\varphi_1^2(x)} \tag{4-12}$$

其中

$$\varphi_1'(x)=\frac{\varphi_2(x)-(x-x_1)\varphi_2'(x)}{\varphi_2^2(x)}$$

……

$$\varphi'_{i-1}(x)=\frac{1}{b_i}$$

$$\varphi'_i(x)=0$$

应用式（4-12）可以对连续函数$f(x)$经过有理逼近算出$f(x)$的近似有理函数$\varphi(x)$在x点的导数，以此作为函数$f(x)$在x点的近似导数。式（4-12）也适用于离散点列(x_i, f_i)，$i=0, 1, 2, \cdots, m$，的微分计算。

在处理上述两类问题时，要根据具体问题选择x_i点，并确定系数b_i，$i=0, 1, 2, 3, \cdots$。

12．导数的余项

设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上有一阶导数，函数$f(x)$在点x处的一阶导数的计算公式为

$$I=b_0-\cfrac{\Delta x_0}{b_1-\cfrac{\Delta x_1}{b_2-\cdots-\cfrac{\Delta x_{i-1}}{b_i-\cdots}}}$$

其中

$$b_0=I_0$$

$$b_i=-\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(\Delta x_i-\Delta x_{i-1})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

而

$$P_i=b_iP_{i-1}+(\Delta x-\Delta x_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(\Delta x-\Delta x_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$I_i=\frac{f(x+\Delta x_i)-f(x)}{\Delta x_i}$$

$$\Delta x_i = \frac{\Delta x_0}{2^i}$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

可以根据 $f(x)$ 的导数公式，求出其余项。为此，设差商序列

$$(\Delta x_0,\ I_0),\ (\Delta x_1,\ I_1),\ \cdots,\ (\Delta x_i,\ I_i)$$

做经过上述点列的有理函数

$$\varphi_i(\Delta x) = b_0 + \cfrac{\Delta x - \Delta x_0}{b_1 + \cfrac{\Delta x - \Delta x_1}{b_2 + \cdots + \cfrac{\Delta x - \Delta x_{i-1}}{b_i}}}$$

并且规定 $\varphi_i(\Delta x_j) = I_j$，$j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ i$，由此不难确定系数 b_i 的计算公式。

设计算 x 点的导数，假定函数 $f(x)$ 的导数为 $I = f'(x)$，$\Delta\bar{x} = 0$，这时把 $(\Delta\bar{x},\ I)$ 作为一个点增加到差商序列里

$$(\Delta x_0,\ I_0),\ (\Delta x_1,\ I_1),\ \cdots,\ (\Delta x_i,\ I_i),\ (\Delta\bar{x},\ I)$$

再做经过这些点列的有理函数

$$\varphi_{i+1}(\Delta x) = b_0 + \cfrac{\Delta x - \Delta x_0}{b_1 + \cfrac{\Delta x - \Delta x_1}{b_2 + \cdots + \cfrac{\Delta x - \Delta x_{i-1}}{b_i + \cfrac{\Delta x - \Delta x_i}{b_{i+1}}}}}$$

并且同样规定 $\varphi_{i+1}(\Delta x_j) = I_j$，$j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ i+1$。为了导出

$$\varphi_{i+1}(\Delta x) - \varphi_i(\Delta x)$$

的差值利用 $\varphi_i(\Delta x)$ 的渐近分式

$$\varphi_i(\Delta x) = \frac{P_i}{Q_i} = \frac{b_i P_{i-1} + (\Delta x - \Delta x_{i-1})P_{i-2}}{b_i Q_{i-1} + (\Delta x - \Delta x_{i-1})Q_{i-2}}$$

可以推导出相邻两个渐近分式的差

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}} - \frac{P_i}{Q_i} = \frac{P_{i+1}Q_i - Q_{i+1}P_i}{Q_i Q_{i+1}} = \frac{1}{Q_i Q_{i+1}}$$

$$\cdot \{[b_{i+1}P_i + (\Delta x - \Delta x_{i-1})P_{i-1}]Q_i - [b_{i+1}Q_i + (\Delta x - \Delta x_{i-1})Q_{i-1}]P_i\}$$

$$= -(\Delta x - \Delta x_i)\frac{P_i Q_{i-1} - P_{i-1}Q_i}{Q_i Q_{i+1}}$$

对于 $P_iQ_{i-1}-P_{i-1}Q_i$ 施行同样的变换，得

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}$$

$$=(-1)^2(\Delta x-\Delta x_i)(\Delta x-\Delta x_{i-1})\frac{P_{i-1}Q_{i-2}-P_{i-2}Q_{i-1}}{Q_iQ_{i+1}}$$

重复上述变换，得

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}=(-1)^{i+1}(\Delta x-\Delta x_0)\cdots(\Delta x-\Delta x_i)\frac{1}{Q_iQ_{i+1}}$$

由于

$$\varphi_{i+1}(\Delta\bar{x})=\frac{df(x)}{dx}$$

所以

$$\varphi_{i+1}(\Delta\bar{x})=\varphi_i(\Delta\bar{x})+(-1)^{i+1}(\Delta\bar{x}-\Delta x_0)\cdots(\Delta\bar{x}-\Delta x_i)\frac{1}{Q_iQ_{i+1}}$$

即

$$\frac{df(x)}{dx}=\varphi_i(0)+R_i$$

余项

$$R_i=\left|\Delta x_0\Delta x_1\Delta x_2\cdots\Delta x_i\frac{1}{Q_iQ_{i+1}}\right|$$

令

$$C=\left|\frac{1}{\min\{Q_iQ_{i+1}\}}\right|$$

于是 $R_i\leqslant C|\Delta x_0\Delta x_1\Delta x_2\cdots\Delta x_i|$

如果 取 $\Delta x_0=1$，$\Delta x_{i+1}=\frac{\Delta x_i}{2}$，则有估计式

$$R_i\leqslant C2^{-\left(\frac{i^2}{2}+\frac{i}{2}\right)}$$

18. 二阶导数的余项

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上有二阶导数，函数 $f(x)$ 在 x 点处的二阶导数的计算公式为

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}=b_0-\cfrac{\Delta x_0}{b_1-\cfrac{\Delta x_1}{b_2-\cdots-\cfrac{\Delta x_{i-1}}{b_i-\cdots}}}$$

其中

$$b_0 \doteq I_0$$

$$b_i = -\frac{(I_i Q_{i-2} - P_{i-2})(\Delta x_i - \Delta x_{i-1})}{I_i Q_{i-1} - P_{i-1}}$$

而

$$I_i = \frac{f(x+\Delta x_i) - 2f(x) + f(x-\Delta x_i)}{\Delta x_i^2}$$

$$\Delta x_i = \frac{\Delta x_0}{2^i}$$

$$P_i = b_i P_{i-1} + (\Delta x - \Delta x_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = b_i Q_{i-1} + (\Delta x - \Delta x_{i-1}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = b_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

为了推导出函数 $f(x)$ 的二阶导数计算公式的余项

$$R_i = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \varphi_i(0)$$

首先假设取第 i 节的计算公式，即做通过如下点列

$$(\Delta x_0,\ I_0),\ (\Delta x_1,\ I_1),\ (\Delta x_2,\ I_2),\ \cdots,\ (\Delta x_i,\ I_i)$$

的有理函数

$$\varphi_i(\Delta x) = b_0 + \cfrac{\Delta x - \Delta x_0}{b_1 + \cfrac{\Delta x - \Delta x_1}{b_2 + \cdots + \cfrac{\Delta x - \Delta x_{i-1}}{b_i}}}$$

即 $\varphi_i(\Delta x_j) = I_j$ $j = 0,\ 1,\ 2, \cdots, i$。其次，令 $I_{i+1} = \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$，$\Delta x_{i+1} = 0$，再做通过如下点列

$$(\Delta x_0,\ I_0),\ (\Delta x_1,\ I_1),\ (\Delta x_2,\ I_2),\ \cdots,$$
$$(\Delta x_i,\ I_i),\ (\Delta x_{i+1},\ I_{i+1})$$

的有理函数

$$\varphi_{i+1}(\Delta x)=b_0+\frac{\Delta x-\Delta x_0}{b_1}\,\underset{+}{}\,\frac{\Delta x-\Delta x_1}{b_2}+\cdots+\frac{\Delta x-\Delta x_{i-1}}{b_i}\,\underset{+}{}\,\frac{\Delta x-\Delta x_i}{b_{i+1}}$$

即 $\varphi_{i+1}(\Delta x_j)=I_j$, $j=0$, 1, 2,…, $i+1$。而函数 $\varphi_{i+1}(\Delta x)$ 比 $\varphi_i(\Delta x)$ 多用了一个点 $(\Delta x_{i+1}, I_{i+1})$, 又根据函数 $\varphi_i(\Delta x)$的渐近分式 $\varphi_i(\Delta x)=\dfrac{P_i}{Q_i}$, 可以推导出相邻两个 $\varphi_{i+1}(\Delta x)$ 与 $\varphi_i(\Delta x)$ 的差

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}=\frac{P_{i+1}Q_i-P_iQ_{i+1}}{Q_iQ_{i+1}}$$

$$=\frac{1}{Q_iQ_{i+1}}\{[b_{i+1}P_i+(\Delta x-\Delta x_i)P_{i-1}]Q_i$$

$$-[b_{i+1}Q_i+(\Delta x-\Delta x_i)Q_{i-1}]P_i\}=-(\Delta x-\Delta x_i)\frac{P_iQ_{i-1}-P_{i-1}Q_i}{Q_iQ_{i+1}}$$

对于 $P_iQ_{i-1}-P_{i-1}Q_i$ 施行同样的变换，得

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}$$

$$=(-1)^2(\Delta x-\Delta x_i)(\Delta x-\Delta x_{i-1})\frac{P_{i-1}Q_{i-2}-P_{i-2}Q_{i-1}}{Q_iQ_{i+1}}$$

重复上述变换，得

$$\frac{P_{i+1}}{Q_{i+1}}-\frac{P_i}{Q_i}$$

$$=(-1)^{i+1}(\Delta x-\Delta x_0)(\Delta x-\Delta x_1)\cdots(\Delta x-\Delta x_i)\frac{1}{Q_iQ_{i+1}}$$

由于$\varphi_{i+1}(\Delta x_{j+1})=\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$, 所以

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}=\varphi_i(0)-\Delta x_0\Delta x_1\Delta x_2\cdots\Delta x_i\frac{1}{Q_i(0)Q_{i+1}(0)}$$

于是得出二阶导数的余项

$$R_i\leqslant C|\Delta x_0\Delta x_1\Delta x_2\cdots\Delta x_i|$$

其中

$$C=\left|\frac{1}{\min\{Q_iQ_{i+1}\}}\right|$$

如果，令 $\Delta x_0 = 1$，$\Delta x_i = \frac{1}{2^i}$，$i = 0$，1，2，…，那么，二阶导数的计算公式余项变成

$$R_i \leqslant C2^{-\frac{1}{2}(i^2+i)}$$

其中，i 为采用的节数。

14. 求一、二阶导数过程

（一）职能

过程 DIFF(X, Y, F) 能够求出函数 $f(x)$ 在 x 点处的一阶导数。

过程 DIF2(X, Y, F) 能够求出函数 $f(x)$ 在 x 点处的二阶导数。

（二）用法

在源程序中说明部分定义该过程，即：

过程 DIFF(X, Y, F)；值 X；简变 Y；
过程 F；始…终；

其中

X ——求导数的点；
Y ——存放一阶导数的简变；
F——计算 $f(x)$值的过程。其形式为：
过程 F(X, Y)；值 X；简变 Y；始…终；

在源程序的语句部分中，如求 X＝1 点的一阶导数时，其写法如下：

始…DIFF(1, Y, F)；…终；

在求函数 $f(x)$的二阶导数时，同样，在源程序的说明部分中，定义该过程，即：

过程 DIF2(X, Y, F)；值 X；简变 Y；
过程 F；始…终；

其中

X——求导数的点；

Y——存放二阶导数的简变；

F——计算 $f(x)$ 值的过程。其形式为：

过程 F(X, Y)；值 X；简变 Y；始…终；

（三）源程序

```
页 001
  行01  过程 DIFF(X, Y, F)；值 X；
  行02  简变 Y；过程 F；
  行03  始简变 H, J, Z, Y1, Y2；场 H1〔1:2〕；
  行04  0 ⇒J；ϕ9⇒Z；F(X, Y1)；
  行05  CC：1/2↑(1 + J)⇒H；F(X + H, Y2)；
  行06  (Y2 − Y1)/H⇒H1〔2〕；H⇒H1〔1〕；H1〔2〕⇒Y；
  行07  PBH(J, H1)；若 § ABS(H1〔2〕− Z)⩽ϕ − 9 则转
  行08  BB 否则；若 § KG1≡1(8)则 § YJGYW(“
  行09  DIFF”H”, J, X, Y, H1〔2〕, H) 否则；
  行10  H1〔2〕⇒Z；1 + J⇒J；
  行11  若 J⩽10 则转 CC 否则；
  行12  BB：H1〔2〕⇒Y；终；
  行13  过程 PBH(J, H)；值 J；场 H；
  行14  始场 A〔1:2, 1:10〕；简变 I1；
  行15  若 J = 0 则否则转 B；H〔1〕⇒A〔1, 1〕；
  行16  H〔2〕⇒A〔2, 1〕；转 A11；
  行17  B：H〔1〕⇒A〔1, 1 + J〕；H〔2〕⇒I1；
  行18  对于 I = 1 步长 1 次数 J 执行若 § ABS(
  行19  I1 − A〔2, I〕)⩽ϕ − 30 则始ϕ30⇒A〔2, 1 + J〕；
  行20  转 AA 终否则 (H〔1〕− A〔1, I〕)/(I1 − A〔2,
  行21  I〕)⇒I1；I1⇒A〔2, 1 + J〕；
  行22  AA：0 ⇒I1；
```

```
行23  对于 I ＝ J 步长－ 1 次数 J 执行
行24  －A〔1， I〕/(A〔2， 1＋I〕＋I1)⇒I1；
行25  I1＋A〔2， 1〕⇒H〔2〕；
行26  A11：终；
页 002
行01  过程 DIF2(X， Y， F)； 值 X； 简变 Y；
行02  过程 F；
行03  始简变 H， J， Z2， Y12； 场H2〔1：2〕； 简变 Y22；
行04  0 ⇒J； ф10⇒Z2；
行05  DIFF(X， Y12， F)；
行06  CC：1/2↑(J＋1)⇒H； DIFF(X＋H， Y22， F)；
行07  (Y22－Y12)/H⇒H2〔2〕； H⇒H2〔1〕；
行08  H2〔2〕⇒Y； PBK(J， H2)；
行09  若§ABS(H2〔2〕－Z2)≤ф－6 则转 BB否则
行10  若§KG4＝1(8) 则§YJGYW(“DIF2”H”， J，
行11  X， H， H2〔2〕) 否则； H2〔2〕⇒Z2；
行12  1＋J⇒J； 若 J≤10 则转 CC 否则；
行13  BB：H2〔2〕⇒Y；
行14  终；
行15  过程 PBK(J， H)； 值 J； 场H；
行16  始场A〔1：2， 1：10〕； 简变 I1；
行17  若 J ＝ 0 则否则转 B； H〔1〕⇒A〔1， 1〕；
行18  H〔2〕⇒A〔2， 1〕； 转 A11；
行19  B：H〔1〕⇒A〔1， 1＋J〕； H〔2〕⇒I1；
行20  对于 I ＝ 1 步长 1 次数 J 执行
行21  若§ABS(I1－A〔2， I〕)≤ф－30 则
行22  始ф30⇒A〔2， 1＋J〕； 转 AA 终否则
行23  (H〔1〕－A〔1， I〕)/(I1－A〔2， I〕)⇒I1；
行24  I1⇒A〔2， 1＋J〕；
```

行25　AA：0 ⇒I1；

行26　对于 I = J 步长 -1 次数 J 执行

行27　-A〔1，I〕/(A〔2，1+I〕+I1)⇒I1；

行28　I1+A〔2，1〕⇒H〔2〕；

行29　A11：终；

（四）应用举例

求函数 $f(x)$ 分别为 $\sin x$、$\mathrm{tg}\,x$、e^x 和 $\sqrt{x}$ 时，$x=0.1$、0.2、0.3、1、1.5、2、2.5、3 各点处的一阶和二阶导数，并与拉格朗日三点微商的结果进行比较。

根据求一阶导数的过程 DIFF(X，Y，F）和求二阶导数的过程 DIF2(X，Y，F)，对函数 $f(x)$ 进行了计算，计算结果及其与拉格朗日三点微商的结果的比较情况列于表 4-1～表 4-6。计算结果表明，本章提供的微分方法允许取较大的 Δx 值，而拉格朗日三点微商方法允许 Δx 取值较小。如计算 sin0.1 的一、二阶导数，当 $\Delta x=\frac{1}{64}$ 时，应用本章提供的微分方法求出的一、二阶导数值的精度分别达到 10^{-9} 和 10^{-6}，而应用拉格朗日三点微商方法求出的一、二阶导数值的精度分别达到 10^{-5} 和 10^{-1}。当缩小 Δx，使 $\Delta x=\frac{1}{2048}$ 时，应用拉格朗日三点微商方法求出的一、二阶导数值的精度分别为 10^{-8} 和 10^{-3}。

表4-1　$f(x)=\sin 0.1$两种计算方法对比

逼近次数 n	步长 Δx	微分法 一阶导数 $f'(x)$	精度 ε	微分法 二阶导数 $f''(x)$	精度 ε	拉格朗日三点微商 一阶导数 $f'(x)$	精度 ε	拉格朗日三点微商 二阶导数 $f''(x)$	精度 ε
0	$1/2$	0.929618113499		-0.339337099907		0.100010956455×10		-0.192907123218	
1	$1/2^2$	0.101489701301×10		-0.105714521059		0.996291883657		-0.146407958996	
2	$1/2^3$	0.997223486736		$-0.991167905680\times10^{-1}$		0.995327187603		-0.123135400939	
3	$1/2^4$	0.994995466706		$-0.998029226669\times10^{-1}$		0.995085036807		-0.111488781873	
4	$1/2^5$	0.995004176516		$-0.998333307146\times10^{-1}$		0.995024396284		-0.105662263002	
5	$1/2^6$	0.995004165224		$-0.998334442869\times10^{-1}$	10^{-6}	0.995009224690		-0.102748192850	10^{-1}
6	$1/2^7$	0.995004165186	10^{-9}			0.995006430366	10^{-5}	-0.101290866736	
7	$1/2^8$					0.995004480824		-0.100560963157	
8	$1/2^9$					0.995004244152		-0.100198507312	
9	$1/2^{10}$					0.995004187807		-0.100031852725	
10	$1/2^{11}$					0.995004167783	10^{-8}	$-0.998649597171\times10^{-1}$	10^{-3}

表4-2　$f(x)=tg0.3$两种计算方法对比

逼近次数 n	步长 Δx	微分法 一阶导数 $f'(x)$	精度 ε	微分法 二阶导数 $f''(x)$	精度 ε	拉格朗日三点微商 一阶导数 $f'(x)$	精度	拉格朗日三点微商 二阶导数 $f''(x)$	精度 ε
0	$1/2$	0.144060461489×10		0.192893323353×10		0.107637459036×10		0.953249944290	
1	$1/2^2$	0.989547094493		0.312739476386		0.109157653880×10		0.814398105960	
2	$1/2^3$	0.109267319319×10		0.682044399021		0.109471983771×10		0.745165070988	
3	$1/2^4$	0.109560346974×10		0.678218405973		0.109545324934×10		0.711231896657	
4	$1/2^5$	0.109568898649×10		0.677860889223		0.109563077960×10		0.694476585838	
5	$1/2^6$	0.109568891464×10		0.677872696000		0.109567447370×10		0.686156138781	
6	$1/2^7$	0.109568891477×10	10^{-9}	0.677872709398	10^{-5}	0.109568531130×10	10^{-6}	0.682011902335	10^{-1}
7	$1/2^8$					0.109568800453×10		0.679951429370	
8	$1/2^9$					0.109568868114×10		0.678903570715	
9	$1/2^{10}$					0.109568882364×10		0.678531646732	
10	$1/2^{11}$					0.109568878639×10	10^{-7}	0.679138183597	10^{-2}

表4-3 $f(x)=e^{1.5}$两种计算方法对比

分法		拉格朗日三点微商			
二阶导数 $f''(x)$	精度 ε	一阶导数 $f'(x)$	精度 ε	二阶导数 $f''(x)$	精度 ε
0.581473424015×10		0.445602504672×10		0.491576887297×10	
0.436857408363×10		0.447557183753×10		0.469533984738×10	
0.448065672801×10		0.448019549045×10		0.458763147149×10	
0.448169823896×10		0.448132004592×10		0.453443558517×10	
0.448168963666×10		0.448159735095×10		0.450800657275×10	
0.448167644822×10		0.448166620548×10		0.449483394626×10	
0.448168812454×10		0.448168333230×10		0.448825645449×10	
0.448170498404×10		0.448168764267×10		0.448497009279×10	
0.448168804017×10		0.448168876770×10		0.448318481448×10	
0.448174810224×10		0.448168897763×10		0.448278808597×10	
0.448163131628×10	10^{-6}	0.448168939356×10	10^{-7}	0.447827148440×10	10^{-2}

表4-4　$f(x)=\sqrt{2.5}$ 两种计算方法对比

逼近次数 n	步长 Δx	微分法 一阶导数 $f'(x)$	精度 ε	微分法 二阶导数 $f''(x)$	精度 ε	拉格朗日三点微商 一阶导数 $f'(x)$	精度 ε	拉格朗日三点微商 二阶导数 $f''(x)$	精度 ε
0	1/2	0.301823954974		$-0.551052645627\times10^{-1}$		0.316047251882		$-0.598159952791\times10^{-1}$	
1	$1/2^2$	0.315566565800		$-0.626261122510\times10^{-1}$		0.316130580619		$-0.614983278795\times10^{-1}$	
2	$1/2^3$	0.316223580723		$-0.632441857105\times10^{-1}$		0.316215696922		$-0.623639663685\times10^{-1}$	
3	$1/2^4$	0.316227727902		$-0.632455665074\times10^{-1}$		0.316224713697		$-0.628028027716\times10^{-1}$	
4	$1/2^5$	0.316227765812		$-0.632455517110\times10^{-1}$	10^{-6}	0.31622699811		$-0.630235970023\times10^{-1}$	10^{-2}
5	$1/2^6$	0.315227766496	10^{-9}			0.316227573905	10^{-6}	$-0.631345510486\times10^{-1}$	
6	$1/2^7$					0.316227718260		$-0.631895065311\times10^{-1}$	
7	$1/2^8$					0.316227752718		$-0.632123947147\times10^{-1}$	
8	$1/2^9$					0.316227752718		$-0.631942749027\times10^{-1}$	
9	$1/2^{10}$					0.316227748993		$-0.631408691409\times10^{-1}$	
10	$1/2^{11}$					0.316227763894	10^{-8}	$-0.632324218753\times10^{-1}$	10^{-3}

表4-5　两种方法计算结果与精确解对比

函数 $f(x)$	一阶导数 \ x	0.1 结果	n ①	0.2 结果	n	0.3 结果	n	1.0 结果	n
$\sin x$	精确解	0.995004165280		0.980066577847		0.955336489127		0.540302305869	
	拉格朗日三点微商	0.995004167783	10	0.980066578838	10	0.955336481336	10	0.540302396824	10
	微分法	0.995004165186	6	0.980066577723	6	0.955336489529	6	0.540302306999	6
$\mathrm{tg}\,x$	精确解	0.101006704644 × 10		0.104109135851 × 10		0.109568891535 × 10		0.342551882087 × 10	
	拉格朗日三点微商	0.101006702894 × 10	10	0.104109137508 × 10	10	0.109568878639 × 10	10	0.342551863197 × 10	10
	微分法	0.101006704635 × 10	6	0.104109135811 × 10	6	0.109568891477 × 10	6	0.342551881985 × 10	6
e^x	精确解	0.110517091810 × 10		0.122140275818 × 10		0.134985880760 × 10		0.271828182849 × 10	
	拉格朗日三点微商	0.110517092062 × 10	10	0.122140270474 × 10	10	0.134985873106 × 10	10	0.271828177574 × 10	10
	微分法	0.110517073300 × 10	10	0.122140275801 × 10	6	0.134985883625 × 10	10	0.271828182741 × 10	10
$\sqrt{x}$	精确解	0.158113883011 × 10		0.111803398876 × 10		0.912870929176		0.500000000000	
	拉格朗日三点微商	0.158113824207 × 10	10	0.111803387480 × 10	10	0.912870854142	10	0.499999985102	10
	微分法	0.158113883109 × 10	10	0.111803398933 × 10	8	0.912870928483	7	0.499999999607	6

函数 $f(x)$	一阶导数 \ x	1.5 结果	n	2 结果	n	2.5 结果	n	3 结果	n
$\sin x$	精确解	$0.707372016635\times10^{-1}$		-0.416146836554		-0.801143615577		-0.989992496606	
	拉格朗日三点微商	$0.707372426990\times10^{-1}$	10	-0.416146852079	10	-0.801143676046	10	-0.989992517981	10
	微分法	$0.707372007149\times10^{-1}$	10	-0.416146837176	8	-0.801143616970	7	-0.989992496472	5
$\operatorname{tg} x$	精确解	$0.199850044555\times10^{3}$		0.577439920396×10		0.155804231257×10		0.102031951697×10	
	拉格朗日三点微商	$0.199848854545\times10^{3}$	10	0.577439829710×10	10	0.155804228041×10	10	0.102031956126×10	10
	微分法	$0.199850044835\times10^{3}$	10	0.577439921407×10	10	0.155804231182×10	6	0.102031951682×10	5
e^x	精确解	0.448168907038×10		0.738905609900×10		$0.121824939611\times10^{2}$		$0.200855369235\times10^{2}$	
	拉格朗日三点微商	0.448168939356×10	10	0.738905632499×10	10	$0.121824930909\times10^{2}$	10	$0.200855352881\times10^{2}$	10
	微分法	0.448168907407×10	10	0.738905619415×10	10	$0.121824938863\times10^{2}$	10	$0.200855369694\times10^{2}$	10
$\sqrt{x}$	精确解	0.408248290466		0.353553390596		0.316227766019		0.288675134597	
	拉格朗日三点微商	0.408248290423	10	0.353553354743	10	0.316227763894	10	0.288675129447	10
	微分法	0.408248290046	6	0.353553390588	5	0.316227766496	5	0.288675134215	5

❶ n 为逼近次数。

表4-6　两种方法计算结果与精确解对比

函数 $f(x)$	二阶导数 \ x	0.1 结果	n	0.2 结果	n	0.3 结果	n	1.0 结果	n
$\sin x$	精确解	$-0.998334166475\times10^{-1}$		-0.198669330799		-0.295520206665		-0.841470984809	
	拉格朗日三点微商	$-0.998649597171\times10^{-1}$	10	-0.198692321780	10	-0.295455032620	10	0.842529296878	10
	微分法	$-0.998334442869\times10^{-1}$	5	-0.198669306164	5	-0.295520229434	5	-0.841471141167	5
$\operatorname{tg} x$	精确解	0.202689491778		0.422079332498		0.677872599619		$0.106698589454\times10^{2}$	
	拉格朗日三点微商	0.203109741214	10	0.421745300296	10	0.679138183597	10	$0.106734008792\times10^{2}$	10
	微分法	0.202689477866	6	0.422079628551	6	0.677872709398	6	$0.106702611140\times10^{2}$	10
e^{x}	精确解	0.110517091810×10		0.122140275818×10		0.134985880760×10		0.271828182849×10	
	拉格朗日三点微商	0.110534667972×10	10	0.122168486331×10	10	0.135028076174×10	10	0.271899414065×10	10
	微分法	0.110519111942×10	5	0.122140304170×10	5	0.134985573389×10	5	0.271828164073×10	5
$\sqrt{x}$	精确解	-0.790569415039×10		-0.279508497189×10		-0.152145154865×10		-0.250000000003	
	拉格朗日三点微商	-0.789482116702×10	10	-0.279306030277×10	10	-0.152026367190×10	10	-0.249633789066	10
	微分法	-0.790569498458×10	10	-0.279508482319×10	7	-0.152145133308×10	6	-0.250000071415	5

函数 $f(x)$	二阶导数 \ x	1.5 结果	n	2 结果	n	2.5 结果	n	3 结果	n
$\sin x$	精确解	-0.997494986606		-0.909297426829		-0.598472144103		-0.141120008056	
	拉格朗日三点微商	-0.997528076175	10	-0.909332275394	10	-0.597869873050	10	-0.140518188480	10
	微分法	-0.997491209884	10	-0.909297446240	5	-0.598471572682	5	-0.141120318850	7
$\mathrm{tg}\, x$	精确解	$0.563633880976\times10^{4}$		$-0.252345848941\times10^{2}$		-0.232778460502×10		-0.290886039929	
	拉格朗日三点微商	$0.565823828128\times10^{4}$	10	$-0.252171630861\times10^{2}$	10	-0.232699584963×10	10	-0.291496276859	10
	微分法	$0.563633815654\times10^{4}$	10	$-0.252345952121\times10^{2}$	10	-0.232778396428×10	6	-0.290886199943	6
e^x	精确解	0.448168907038×10		0.738905609900×10		$0.121824939611\times10^{2}$		$0.200855369235\times10^{2}$	
	拉格朗日三点微商	0.447827148440×10	10	0.738671875004×10	10	$0.121043359377\times10^{2}$	10	$0.201132812502\times10^{2}$	
	微分法	0.448163131628×10	10	0.738753672696×10	10	$0.121825281417\times10^{2}$	8	$0.200856531300\times10^{2}$	
$\sqrt{x}$	精确解	-0.136082763490		$-0.883883476482\times10^{-1}$		$-0.632455532035\times10^{-1}$		$-0.481125224327\times10^{-1}$	
	拉格朗日三点微商	-0.136169433597	10	$-0.880126953128\times10^{-1}$	10	$-0.632324218753\times10^{-1}$	10	$-0.480957031253\times10^{-1}$	10
	微分法	-0.136082726276	4	$-0.883883147931\times10^{-1}$	4	$-0.632455517110\times10^{-1}$	4	$-0.481125077843\times10^{-1}$	3

● n 为逼近次数。

第五章　关于积分和的性质及应用

1. 积分和的性质

性质一　设求函数 $f(x)=x$ 在区间 $[0,1]$ 的积分

$$\int_0^1 x dx$$

则其矩形积分和为

$$S(h)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}h$$

其中　$h=\frac{1}{m}$，$m=1,2,\cdots$。

证明　把积分区间 $[0,1]$ 分成 m 等分，根据矩形公式，得积分和

$$S(h)=h\sum_{i=1}^{m} f(ih)=\frac{1}{m}\left[\frac{1}{m}+\frac{2}{m}+\frac{3}{m}+\cdots+\frac{m}{m}\right]=\frac{1}{m^2}\left[1+2+3+\cdots+m\right]$$

$$=\frac{1}{m^2}\cdot\frac{m(m+1)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}h$$

性质一得证。从而，获得积分

$$\int_0^1 x dx=S(0)=\frac{1}{2}$$

与精确积分值 $\int_0^1 x dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}$ 一致。

性质二　设求函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,1]$ 的积分

$$\int_0^1 x^2 dx$$

则其矩形积分和为

$$S(h)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}h+\frac{1}{6}h^2$$

其中 $h=\frac{1}{m}$，m为任意正整数。

证明 把积分区间〔0，1〕分成m等分，根据矩形公式，得其积分和

$$S(h)=h\sum_{i=1}^{m}f(ih)$$

把$f(x)=x^2$代入$S(h)$中，得出

$$S(h)=\frac{1}{m}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^2+\left(\frac{2}{m}\right)^2+\left(\frac{3}{m}\right)^2+\cdots+\left(\frac{m}{m}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{m^3}\left[1^2+2^2+3^2+\cdots+m^2\right]$$

$$=\frac{1}{m^3}\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{m}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{m^2}$$

由于$h=\frac{1}{m}$，所以

$$S(h)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}h+\frac{1}{6}h^2$$

因为m是任意的正整数，故性质二得证。从而利用性质二，可得积分值

$$S(0)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

性质三 设求多维积分

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 x_1x_2\cdots x_ndx_1dx_2\cdots dx_n$$

则其矩形积分和为积分步长h的n次多项式

$$S(h)=\frac{1}{2^n}(1+C_n^1h+C_n^2h^2+\cdots+C_n^nh^n)$$

其中，$h=\frac{1}{m}$，m为任意正整数。

证明 取任意正整数m，把区间〔0，1〕分成m等分，根据矩形公式，得出其积分和

$$S(h)=h^n\sum_{i,j,\cdots,k=1}^{m}f(ih,\ jh,\cdots,kh)$$

再把$f(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2\cdots x_n$代入$S(h)$中，得出

$$\begin{aligned}S(h)&=\left(\frac{1}{m}\right)^n\left(\frac{1}{m}\right)^n\left[\frac{m(1+m)}{2}\right]^n\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{m}\right)^n(m+1)^n\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{m}\right)^n(C_n^0m^n+C_n^1m^{n-1}+\cdots+C_n^n)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^n(1+C_n^1h+C_n^2h^2+\cdots+C_n^nh^n)\end{aligned}$$

故积分和$S(h)$为积分步长h的n次多项式。令$h=0$代入$S(h)$中，得积分精确结果

$$S(0)=\frac{1}{2^n}$$

显然

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 x_1x_2\cdots x_ndx_1dx_2\cdots dx_n=\frac{1}{2^n}$$

性质三得证。

推论 设被积函数$f(x,\ y)=xy$，积分域$R:(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$，其积分和

$$S(h)=h^2\sum_{i,j=1}^{m}f(ih,\ jh)$$

是积分步长h的二次多项式函数，式中$h=\frac{1}{m}$，m为任意正整

数，积分是该二次多项式的常数项。

证明 把积分域R用积分步长$h\left(=\frac{1}{m}\right)$分割成$m^2$个小块，取每小块的一点$(ih,\ jh)$的函数值$f(ih,\ jh)$乘其面积$h^2$，然后把所有乘积相加，得积分和

$$\begin{aligned}S(h)&=h^2[f(h,\ h)+f(h,\ 2h)+\cdots+f(h,\ mh)\\&\quad+f(2h,\ h)+f(2h,\ 2h)+\cdots+f(2h,\ nh)\\&\quad+\cdots+f(mh,\ h)+f(mh,2h)+\cdots+f(mh,mh)]\\&=h^2h^2[(1+2+\cdots+m)+2(1+2+\cdots+m)+\cdots\\&\quad+m(1+2+\cdots+m)]\\&=\frac{1}{m^4}\left[\frac{m(m+1)}{2}\cdot\frac{m(m+1)}{2}\right]=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{m}\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{m^2}\right)=\frac{1}{4}(1+2h+h^2)\end{aligned}$$

当$h\to 0$时，则$S(0)=\frac{1}{4}$，推论得证。

2．积分和原理

定理一 设被积函数$f(x)=x^n$，则积分和

$$S(h)=h\sum_{i=1}^{m}f(ih)$$

是积分步长h的n次多项式。

证明 不失问题的一般性，设积分区间$[0,1]$，取积分步长$h=\frac{1}{m}$，$m=1,2,3,\cdots$，再做积分和

$$S(h)=h\sum_{i=1}^{m}(ih)^n$$

并引入记号

$$E_m^n=1^n+2^n+3^n+\cdots+m^n$$

首先证明E_m^n是m的$n+1$次多项式，并含有m这个因子。

显然，当 $n=0$ 时，有

$$E_m^0=1^0+2^0+3^0+\cdots+m^0=m$$

故 E_m^0 是 m 的一次多项式，并且含有 m 因子。

对于一般情况，根据二项式展开公式，有

$$(1+1)^{n+1}=1^{n+1}+C_{n+1}^1 1^n+C_{n+1}^2 1^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^n 1+1^0$$

$$(1+2)^{n+1}=2^{n+1}+C_{n+1}^1 2^n+C_{n+1}^2 2^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^n 2+2^0$$

$$\cdots$$

$$(1+m)^{n+1}=m^{n+1}+C_{n+1}^1 m^n+C_{n+1}^2 m^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^n m+m^0$$

相加得

$$(1+m)^{n+1}=1+C_{n+1}^1 E_m^n+C_{n+1}^2 E_m^{n-1}+\cdots+C_{n+1}^n E_m^1+E_m^0$$

故

$$E_m^n=\frac{1}{n+1}[(1+m)^{n+1}-1-C_{n-1}^2 E_m^{n-1}-\cdots-C_{n+1}^n E_m^1-E_m^0]$$

其中

$$(1+m)^{n+1}-1=m^{n+1}+C_{n+1}^1 m^n+\cdots+C_{n+1}^n m$$

由归纳法可知，对任意 m、n，E_m^n 必为 m 的 $(n+1)$ 次多项式，并含有 m 这个因子。由此可以推得 $S\left(\frac{1}{m}\right)=\left(\frac{1}{m}\right)^{n+1}\sum\limits_{i=1}^{m} i^n$ 为 $\frac{1}{m}$ 的 n 次多项式，由于 $h=\frac{1}{m}$，所以 $S(h)$ 为 h 的 n 次多项式。定理得证。

定理二 设被积函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$，则在单位积分域 R_n：$(0\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1, 2, \cdots, n)$ 上的积分和

$$S(h)=h^n\sum_{i, j, \cdots, k=1}^{m} f(ih, jh, \cdots, kh)$$

是积分步长 h 的 $(k_1+k_2+\cdots+k_n)$ 次多项式。

证明 首先把区间 $[0, 1]$ 分成 m 等分，取小块的任一点 $(ih, jh, \cdots, kh)$ 的函数值 $f(ih, jh, \cdots, kh)$，并乘其小块的“体积” h^n。然后把所有小块的近似积分加起来做积分和

$$S(h)=h^{n}\sum_{i,j,\cdots,k=1}^{m}f(ih,\ jh,\cdots,kh)$$

$$=\left(\frac{1}{m}\right)^{n}\left(\frac{1}{m}\right)^{\bar{n}}(1+2^{k_1}+\cdots+m^{k_1})(1+2^{k_2}+\cdots+m^{k_2})$$

$$\cdots(1+2^{k_n}+3^{k_n}+\cdots+m^{k_n})$$

$$\bar{n}=(k_1+k_2+\cdots+k_n)$$

令 $$E_m^N=1+2^N+3^N+\cdots+m^N$$

由于

$$(1+1)^{N+2}=1^{N+2}+C_{N+2}^{1}1^{N+1}+\cdots+C_{N+2}^{N+1}1^{1}+C_{N+2}^{N+2}1^{0}$$

$$(2+1)^{N+2}=2^{N+2}+C_{N+2}^{1}2^{N+1}+\cdots+C_{N+2}^{N+1}2+C_{N+2}^{N+2}2^{0}$$

$$\cdots$$

$$(m+1)^{N+2}=m^{N+2}+C_{N+2}^{1}m^{N+1}+\cdots+C_{N+2}^{N+1}m+C_{N+2}^{N+2}m^{0}$$

把上面的等式两边加起来，得

$$(m+1)^{N+2}-1=C_{N+2}^{1}E_m^{N+1}+C_{N+2}^{2}E_m^{N}+\cdots+C_{N+2}^{N+1}E_m^{1}+C_{N+2}^{N+2}m$$

于是 E_m^{N+1} 是 m 的 $N+2$ 次多项式，并且含有 m 这个因子。

因而积分和可以写成如下形式

$$S(h)=\frac{1}{m^{n}}\ \frac{1}{m^{\bar{n}}}(E_m^{k_1}E_m^{k_2}\cdots E_m^{k_n})$$

$$=\left(\frac{1}{m^{k_1+1}}E_m^{k_1}\right)(\cdots)\left(\frac{1}{m^{k_n+1}}E_m^{k_n}\right)$$

由上述说明可知 $E_m^{k_i}$ 是 m 的 k_i+1 次多项式，并含有 m 这个因子，故知 $\frac{1}{m^{k_i+1}}E_m^{k_i}$ 是积分步长 $h\left(=\frac{1}{m}\right)$ 的 k_i 次多项式，所以积分和 $S(h)$ 为 $(k_1+k_2+\cdots+k_n)$ 次多项式。定理得证。

推论一 设 $(k_1^{(0)}+\cdots+k_n^{(0)})\geqslant(k_1^{(1)}+\cdots+k_n^{(1)})\geqslant\cdots$ 和 $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,\ x_n)=a_0x_1^{k_1(0)}x_2^{k_2(0)}\cdots x_n^{k_n(0)}+a_1x_1^{k_1(1)}x_2^{k_2(1)}\cdots x_n^{k_n(1)}+\cdots+a_{n-1}x_1x_2\cdots x_n+a_n$

则其在单位积分域 R_n 上的积分和

$$S(h)=h^n\sum_{i,j,\cdots,k=1}^{m} f(ih,\ jh,\cdots,kh)$$

是积分步长 h 的 $(k_1^{(0)}+k_2^{(0)}+\cdots+k_n^{(0)})$ 次多项式。$h=\frac{1}{m}$，$m=1,2,3,\cdots$。

证明 首先，把积分和展开

$$S(h)=h^n\sum_{i,j,\cdots,k=1}^{m} f(ih,\ jh,\cdots,kh)$$

$$=h^n\sum_{i,j,\cdots,k=1}^{m}[a_0(ih)^{k_1^{(0)}}(jh)^{k_2^{(0)}}\cdots(kh)^{k_n^{(0)}}]+h^n\sum_{i,j,\cdots,k=1}^{m}[a_1(ih)^{k_1^{(1)}}\cdots(kh)^{k_n^{(1)}}]+\cdots+h^n\sum_{i,j,\cdots,k=1}^{m}a_n$$

其次，根据定理二可知 $f(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ 的积分和是积分步长 h 的 $(k_1+k_2+\cdots+k_n)$ 次多项式，故积分和 $S(h)$ 的第一个积分和

$$h^n\sum[a_0(ih)^{k_1^{(0)}}(jh)^{k_2^{(0)}}\cdots(kh)^{k_n^{(0)}}]$$

为$(k_1^{(0)}+k_2^{(0)}+\cdots+k_n^{(0)})$ 次多项式，同理其第 i 个积分和

$$h^n\sum[a_i(ih)^{k_1^{(i)}}(jh)^{k_2^{(i)}}\cdots(kh)^{k_n^{(i)}}]$$

为 $(k_1^{(i)}+k_2^{(i)}+\cdots+k_n^{(i)})$ 次多项式。合并 h 的同幂次项，得

$$S(h)=b_0h^N+b_1h^{N-1}+\cdots+b_N$$

其中

$$N=k_1^{(0)}+k_2^{(0)}+\cdots+k_n^{(0)}$$

故推论一得证。

推论二 设求积分

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1\cdots dx_n$$

被积函数为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=a_0x_1^{k_1^{(0)}}x_2^{k_2^{(0)}}\cdots x_n^{k_n^{(0)}}+a_1x_1^{k_1^{(1)}}x_2^{k_2^{(1)}}\cdots x_n^{k_n^{(1)}}+\cdots+a_{n-1}x_1x_2\cdots x_n+a_n$$

其中 a_0, $a_1, \cdots$, a_n 为实数。

根据推论一，可知积分和

$$S(h)=h^n\sum_{i,j,\cdots,k=1}^{m} f(ih, jh, \cdots, kh)$$

是积分步长 h 的 N 次多项式，$N=k_1^{(0)}+k_2^{(0)}+\cdots+k_n^{(0)}$。

利用多项式的性质可知，只要任选 $(N+1)$ 点 (h_0, S_0), $(h_1, S_1), \cdots(h_N, S_N)$，做过这组 $(N+1)$ 点的牛顿插值多项式 $P_N(h)$。根据上节性质三有

$P_N(0)=\lim\limits_{m\to\infty}P_N(h)=\lim\limits_{m\to\infty}S(h)=S(0)$ 成立。所以有

推论二

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n=P_N(0)$$

其中

$$P_N(0)=S_0+g_1(h_0h_1)(-h_0)+g_2(h_0h_1h_2)(-h_0)(-h_1)+\cdots+g_N(h_0h_1\cdots h_N)(-h_0)(-h_1)\cdots(-h_N)$$

而

$$g_N(h_0h_1\cdots h_N)=\frac{g_{N-1}(h_1h_2\cdots h_N)-g_{N-1}(h_0h_1\cdots h_{N-1})}{h_N-h_0}$$

……

$$g_1(h_0h_1)=\frac{S(h_1)-S(h_0)}{h_1-h_0}$$

……

$$g_1(h_1h_2)=\frac{S(h_2)-S(h_1)}{h_2-h_1}$$

……

N为多项式的次数，n为多维空间的维数。推论二得证。

定理三 设求n维积分

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, x_2,\cdots, x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

其中被积函数$f(x_1, x_2,\cdots,x_n)$为可积实函数，其积分计算公式为

$$P_N(0)=S_0-g_1(h_0h_1)h_0+g_2(h_0h_1h_2)h_0h_1+\cdots$$
$$+(-1)^N g_N(h_0h_1\cdots h_N)h_0h_1\cdots h_{N-1}$$
$$+R_N(0)$$

其中

$$S(h)=h^n\sum_{i,j,\cdots,k=1}^{m} f(ih, jh,\cdots kh)$$

$$S_i=S(h_i)$$

$$g_2(h_i, h_j)=\frac{S(h_i)-S(h_j)}{h_i-h_j}$$

……

$$g_N(h_0h_1\cdots h_N)=\frac{g_{N-1}(h_1h_2\cdots h_N)-g_{N-1}(h_0h_1\cdots h_{N-1})}{h_N-h_0}$$

余项

$$R_N(h)=\frac{1}{(N+1)!}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\Big[(x_1-x_1^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_1}$$
$$+(x_2-x_2^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots$$
$$+(x_n-x_n^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_n}\Big]^{(N+1)}f^{(N+1)}(\theta)d\Omega$$

证明 首先，任取积分步长序列$h_0, h_1,\cdots,h_m,\cdots,h_N$，并计算积分和序列$S_0, S_1,\cdots,S_m,\cdots,S_N$。

其次，做插值多项式

$$P_N(h)=S_0+g_1(h_0h_1)(h-h_0)+g_2(h_0h_1h_2)(h-h_0)(h-h_1)+\cdots+g_N(h_0h_1\cdots h_N)(h-h_0)\cdots(h-h_{N-1})$$

通过插值点 (h_0, S_0), $(h_1, S_1), \cdots, (h_N, S_N)$，即

$$P_N(h_i)=S_i,\quad i=0,1,2,\cdots,m,\cdots,N$$

由此等式解出系数 $g_i(h_0h_1\cdots h_i)$，即获得积分计算公式。

最后，推导积分公式的余项 $R_N(h)$，如果被积函数 $f(x_1, x_2,\cdots x_n)$在积分区域有N阶导数存在时，可以把 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 展成泰勒级数

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)= & f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}) \\
& +\left[(x_1-x_1^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_2-x_2^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_2}\right. \\
& \left.+\cdots+(x_n-x_n^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_n}\right]f_0' \\
& +\frac{1}{2!}\left[(x_1-x_1^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_1}\right. \\
& +(x_2-x_2^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots \\
& \left.+(x_n-x_n^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^2 f_0''+\cdots \\
& +\frac{1}{N!}\left[(x_1-x_1^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_1}\right. \\
& +(x_2-x_2^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots \\
& \left.+(x_n-x_n^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^N f_0^{(N)} \\
& +\frac{1}{(N+1)!}\left[(x_1-x_1^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_1}\right. \\
& +(x_2-x_2^{(0)})\frac{\partial}{\partial x_2}+\cdots
\end{aligned}$$

$$+\left(x_n-x_n^{(0)}\right)\frac{\partial}{\partial x_n}\Big]^{(N+1)} f^{(N+1)}(\theta)$$

简记成

$$f(X)=P_N(X)+\frac{1}{(N+1)!}\Big[\left(x_1-x_1^{(0)}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots$$

$$+\left(x_n-x_n^{(0)}\right)\frac{\partial}{\partial x_n}\Big]^{(N+1)} f^{(N+1)}(\theta)\quad (0\leqslant\theta\leqslant 1)$$

两边积分得

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(X)\,d\Omega=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 P_N(X)d\Omega+R_N$$

然后，做右端第一项的积分和

$$S(h)=h^n\sum_{i,j,\cdots,k=1}^{m} P_N(ih,jh,\cdots,kh)$$

因为$P_N(X)$为N次多项式，根据定理二的推论二可知

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 P_N(X)d\Omega=\overline{P}_N(0)$$

其中

$$\overline{P}_N=S_0+g_1(h_0h_1)(-h_0)+g_2(h_0h_1h_2)(h_0h_1)+\cdots$$
$$+(-1)^{(N+1)}g_N(h_0h_1\cdots h_N)(h_0h_1\cdots h_{N-1})$$

故得积分公式的余项

$$R_N(h)=\int_0^1\cdots\int_0^1 f(X)\,d\Omega-\int_0^1\cdots\int_0^1 P_N(X)d\Omega$$

$$=\frac{1}{(N+1)!}\int_0^1\cdots\int_0^1\Big(\left(x_1-x_1^{(0)}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$+\cdots+\left(x_n-x_n^{(0)}\right)\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{(N+1)} f^{(N+1)}(\theta)d\Omega$$

其中$0<\theta<1$。定理得证。

定理四　认识函数存在性准则

函数$f(x)$在区间$[a,b]$上有认识函数

$$\varphi_m(x)=a_0+\frac{g(x)-g_0}{a_1+}\frac{g(x)-g_1}{a_2+\cdots+}\frac{g(x)-g_{m-1}}{a_m}$$

存在的充分必要条件是：在区间〔a，b〕上任取（$m+1$）个点 x_0，x_1，…，x_m，都有

$$f(x)Q_m-P_m=0 \quad (\text{当} x\in〔a, b〕\text{时})$$

成立，其中 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的近似函数，记 $g_i=g(x_i)$。

证明 首先证明必要性。如果函数 $f(x)$ 在区间〔a，b〕上有认识函数，即

$$f(x)=\varphi_m(x)$$

对一切点 $x\in$〔a，b〕成立。利用 $\varphi_m(x)$ 的渐近分式，

$$\varphi_m(x)=\frac{P_m(x)}{Q_m(x)}$$

故有

$$f(x)Q_m-P_m=0$$

必要性得证。

再来证明充分性。由于对确定在区间〔a，b〕上的函数 $f(x)$，在区间〔a，b〕上任取（$m+1$）个点 x_0，x_1，x_2，…，x_m，都有

$$f(x)Q_m-P_m=0$$

成立。就是说 $f(x)$ 在区间〔a，b〕上不可能再有新的认识函数 $\varphi_{m+1}(x)=f(x)$。

如若不然，令 $x=x_{m+1}$，再利用 $\varphi_{m+1}(x)$ 的渐近分式，可得方程

$$\frac{a_{m+1}P_m+[g(x_{m+1})-g_m]P_{m-1}}{a_{m+1}Q_m+[g(x_{m+1})-g_m]Q_{m-1}}=f(x_{m+1})$$

解出 a_{m+1}，得

$$a_{m+1}=-\frac{[f(x_{m+1})Q_{m-1}-P_{m-1}][g(x_{m+1})-g_m]}{f(x_{m+1})Q_m-P_m}$$

由于分母为零，可知 a_{m+1} 必为∞，即 $\varphi_m(x)=\varphi_{m+1}(x)$。故

得出 $f(x)$ 的认识函数为

$$\varphi_m(x)=a_0+\frac{g(x)-g_0}{a_1+}\,\frac{g(x)-g_1}{a_2+}\cdots+\frac{g(x)-g_{m-1}}{a_m}$$

因为 $x\in[a, b]$ 是任意的，所以充分性得证。

例如，求函数 $f(x)=x^2$ 的有理展开式。任取点 x_0, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_m, 及相应的函数值 $f_0=x_0^2$, $f_1=x_1^2$, $\cdots$, 代入

$$\varphi(x)=a_0+\frac{x-x_0}{a_1+}\,\frac{x-x_1}{a_2+}\cdots+\frac{x-x_m}{a_{m+1}}$$

中，逐次根据 $\varphi(x_i)=f_i$, 求出 a_i, $i=0, 1, 2, \cdots$。显然，

$$a_0=x_0^2$$

$$a_1=\frac{1}{x_1+x_0}$$

现在求 a_2, 由于

$$\varphi(x_2)=a_0+\frac{x_2-x_0}{a_1+}\,\frac{x_2-x_1}{a_2}$$

可得

$$\frac{x_2-x_0}{x_2^2-x_0^2}=a_1+\frac{x_2-x_1}{a_2}$$

$$\frac{1}{x_2+x_0}-\frac{1}{x_1+x_0}=\frac{x_2-x_1}{a_2}$$

所以，

$$a_2=-(x_1+x_0)(x_2+x_0)$$

同样，求得

$$a_3=-\frac{1}{x_1+x_0}$$

现在再求 a_4, 根据

$$\varphi(x_4)=a_0+\frac{x_4-x_0}{a_1+}\,\frac{x_4-x_1}{a_2+}\,\frac{x_4-x_2}{a_3+}\,\frac{x_4-x_3}{a_4}$$

可得

$$\frac{1}{x_0+x_4}=a_1+\frac{x_4-x_1}{a_2+}\frac{x_4-x_2}{a_3+}\frac{x_4-x_3}{a_4}$$

又有

$$-(x_4+x_0)(x_1+x_0)=a_2+\frac{x_4-x_2}{a_3+}\frac{x_4-x_3}{a_4}$$

再经计算，得

$$-\frac{1}{x_0+x_1}=a_3+\frac{x_4-x_3}{a_4}$$

由于，$a_3=-\frac{1}{x_0+x_1}$，代入上式得出$\frac{x_4-x_3}{a_4}=0$。因为$x_4 \neq x_3$，所以，

$$a_4=\infty$$

把系数a_0，a_1，a_2，a_3代入$\varphi(x)$中，即得$f(x)$的展开式

$$\varphi(x)=a_0+\frac{x-x_0}{a_1+}\frac{x-x_1}{a_2+}\frac{x-x_2}{a_3}$$

3. 余项估计

引入认识函数描述各种序列过程，如求极值序列过程、求微分的序列过程和求积分的序列过程，在设计计算中已收到了显著效果。关于计算公式的收敛性问题，已在本书的第一章做了初步阐述；而关于计算公式的余项估计或误差大小的问题，将在本节中做较系统的讨论。

定理五（余项定理）　设$\varphi_m(x)$为经过点列(x_i, f_i)，$i=0, 1, 2, \cdots, m$，的函数其形式为

$$\varphi_m(x)=a_0+\frac{x-x_0}{a_1+}\frac{x-x_1}{a_2+}\cdots+\frac{x-x_{m-1}}{a_m}$$

设 $\varphi_{m+1}(x)$ 为经过点列 (x_i, f_i)，$i=0, 1, 2, \cdots, m+1$，的函数，其形式为

$$\varphi_{m+1}(x)=a_0+\frac{x-x_0}{a_1+}\frac{x-x_1}{a_2}+\cdots+\frac{x-x_m}{a_{m+1}}$$

则 $\varphi_{m+1}(x)-\varphi_m(x)$ 的差 $R_m(x)$ 为

$$R_m(x)=\frac{(-1)^{m+1}}{Q_m(x)Q_{m+1}(x)}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_m)$$

$Q_{-1}=0$，$Q_0=1$，$Q_m=a_mQ_{m-1}+(x-x_{m-1})Q_{m-2}$。

证明 根据 $\varphi_m(x)$ 的渐近分式

$$\varphi_m(x)=\frac{P_m}{Q_m}=\frac{a_mP_{m-1}+(x-x_{m-1})P_{m-2}}{a_mQ_{m-1}+(x-x_{m-1})Q_{m-2}}$$

可以推导出 $\varphi_m(x)$ 和 $\varphi_{m+1}(x)$ 相应的两个相邻渐近分式的差

$$\begin{aligned}\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}-\frac{P_m}{Q_m}&=\frac{P_{m+1}Q_m-Q_{m+1}P_m}{Q_mQ_{m+1}}\\&=\frac{1}{Q_mQ_{m+1}}\{[a_{m+1}P_m+(x-x_{m-1})P_{m-1}]Q_m\\&\quad-[a_{m+1}Q_m+(x-x_{m-1})Q_{m-1}]P_m\}\\&=-(x-x_m)\frac{P_mQ_{m-1}-P_{m-1}Q_m}{Q_mQ_{m+1}}\end{aligned}$$

对于 $P_mQ_{m-1}-P_{m-1}Q_m$ 施行同样的变换，得

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}-\frac{P_m}{Q_m}=(-1)^2(x-x_m)(x-x_{m-1})\frac{P_{m-1}Q_{m-2}-P_{m-2}Q_{m-1}}{Q_mQ_{m+1}}$$

重复上述同样的变换，得

$$\frac{P_{m+1}}{Q_{m+1}}-\frac{P_m}{Q_m}=(-1)^{m+1}(x-x_1)(x-x_1)\cdots(x-x_m)\frac{1}{Q_mQ_{m+1}}$$

故余项为

$$R_m(x)=\frac{(-1)^{m+1}}{Q_mQ_{m+1}}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_m)$$

定理（余项定理）得证。

4. 多项式逼近积分和

定理六 如果积分和

$$S(h)=h^{n}\sum_{i,j,\cdots,k=1}^{m} f(ih, jh,\cdots,kh)$$

是积分步长 h 的 N 次多项式，则有

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, x_2,\cdots,x_n)\,dx_1dx_2\cdots dx_n=P_N(0)$$

成立。其中

$$h=\frac{1}{m+1},\quad m=0,1,2,3,\cdots$$

$$\begin{aligned}P_N(h)=&S_0+g_1(h_0h_1)(h-h_0)\\&+g_2(h_0h_1h_2)(h-h_0)(h-h_1)+\cdots\\&+g_N(h_0h_1h_2\cdots h_N)(h-h_0)(h-h_1)\cdots(h-h_{N-1})\end{aligned}$$

$$g_j(h_0h_1\cdots h_j)=\frac{g(h_1h_2\cdots h_j)-g(h_0h_1\cdots h_{j-1})}{h_j-h_0}$$

$$j=1,2,3,\cdots N$$

证明 设积分和 $S(h)$ 的 N 次多项式如下：

$$S(h)=a_0h^N+a_1h^{N-1}+a_2h^{N-2}+\cdots+a_{N-1}h+a_N$$

为确定多项式 $S(h)$ 的 $N+1$ 个系数 a_i，$i=0,1,2,\cdots,N$，由多项式的性质可知，只需要有 $(N+1)$ 个点

$$(h_0, S_0), (h_1, S_1), (h_2, S_2),\cdots,(h_N, S_N)$$

就够了。使得 $S(h_i)=S_i$，$N+1$ 个系数 a_i 满足方程组

$$a_0h_0^N+a_1h_0^{N-1}+\cdots+a_{N-1}h_0+a_N=S_0$$

$$a_0h_1^N+a_1h_1^{N-1}+\cdots+a_{N-1}h_1+a_N=S_1$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_0h_N^N+a_1h_N^{N-1}+\cdots+a_{N-1}h_N+a_N=S_N$$

将此方程组写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} h_0^N & h_0^{N-1} & \cdots & h_0 & 1 \\ h_1^N & h_1^{N-1} & \cdots & h_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & & & \\ h_N^N & h_N^{N-1} & \cdots & h_N & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix}$$

由此方程不难得出，因为 $(S_0, S_1, \cdots, S_N)^T$ 非零，所以只要矩阵方程的系数行列式不为零，矩阵方程就有唯一解 $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_N)^T$。为此，只要选择积分步长 h_i，使其满足如下不等式

$$h_i \neq h_j,\quad 当\ i \neq j\ 时$$

即可。由上述证明可知，积分步长 h_i 的选取，并不要求 $h_i \to 0$；当 $i \to \infty$时，只要求积分步长序列为相异不等且足够多的实数。

根据假设 $S(h)$ 是 h 的 N 次多项式，不妨选用牛顿插值多项式

$$\begin{aligned} P_N(h) = & S_0 + g_1(h_0 h_1)(h-h_0) \\ & + g_2(h_0 h_1 h_2)(h-h_0)(h-h_1) + \cdots \\ & + g_N(h_0 h_1 \cdots h_N)(h-h_0)(h-h_1)\cdots(h-h_{N-1}) \end{aligned}$$

来逼近 $S(h)$，并使 $P_N(h)$ 通过如下点列

$$(h_0, S_0),\ (h_1, S_1), \cdots, (h_{N-1}, S_{N-1}),\ (h_N, S_N)$$

即 $P_N(h_i) = S_i$，$i = 0, 1, 2, \cdots, N$。因为在 $N+1$ 个点上取相同值的 N 次多项式是唯一的，所以

$$P_N(h) = S(h)$$

从而当 $\bar{N} \geqslant N$ 时，有

$$P_{\bar{N}}(h) \equiv P_N(h)$$

又因为

$$\lim_{h \to 0} S(h) = \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

和

$$\lim_{h \to 0} P_N(h) = P_N(0)$$

所以

$$P_N(0)=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

成立。定理得证。

5. 多项式逼近积分的余项

定理七 设 n 维积分

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\ x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

的近似数值积分公式为

$$P_N(h)=S_0-g_1(h_0h_1)h_0$$
$$-\cdots(-1)^N g_N(h_0h_1\cdots h_N)h_0h_1\cdots h_{N-1}$$

则其余项公式为

$$R_N=|g_{N+1}(h_0h_1\cdots h_N0)h_0h_1\cdots h_N|$$

或

$$R_N\leqslant\frac{M_{N+1}}{(N+1)!}h_0h_1h_2\cdots h_N$$

其中

$$g_i(h_0h_1h_2\cdots h_i)=\frac{g_{i-1}(h_1h_2\cdots h_i)-g_{i-1}(h_0h_1\cdots h_{i-1})}{h_i-h_0}$$

$$i=1,2,3,\cdots,N$$

$$g_2(h_ih_{i+1})=\frac{S(h_{i+1})-S(h_i)}{h_{i+1}-h_i}$$

$$S(h)=h^n\sum f(ih,\ jh,\cdots,kh)$$

证明 设

$$R_N=S-P_N$$

称 R_N 为近似积分公式 P_N 的余项。这里

$$S=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

为了推导出 R_N 的数学表达式，选取一个积分步长点列 h_i，并 计算相应的积分和

$$S_i(h_i)=h_i^n\sum f(jh_i, rh_i, \cdots, kh_i)$$

$$i=0, 1, 2, 3, \cdots, N$$

做经过如下点列

$$\begin{matrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_N \\ S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_N \end{matrix}$$

的插值多项式

$$P_N(h)=S_0+g_1(h_0h_1)(h-h_0)+\cdots$$
$$+g_N(h_0h_1\cdots h_N)(h-h_0)\cdots(h-h_{N-1})$$

即 $\quad P_N(h_i)=S_i$。

把所讨论的点 (h_{N+1}, S) 固定下来，并设 h_{N+1} 与 h_0, h_1, h_2, $\cdots$, h_N 均不相同。再做经过如下点列

$$\begin{matrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_N & h_{N+1} \\ S_0 & S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_N & S \end{matrix}$$

的插值多项式

$$P_{N+1}(h)=S_0+g_1(h_0h_1)(h-h_0)+\cdots$$
$$+g_N(h_0h_1\cdots h_N)(h-h_0)\cdots(h-h_{N-1})$$
$$+g_{N+1}(h_0h_1h_2\cdots h_{N+1})(h-h_0)(h-h_1)\cdots(h-h_N)$$

即 $P_{N+1}(h_i)=S_i$。$P_{N+1}(h)$ 与 $P_N(h)$ 相比较仅多用了一个点 (h_{N+1}, S)，于是根据牛顿插值多项式的性质可知，当 $h=0$ 时，得

$$|P_{N+1}(h)-P_N(h)|=|g_{N+1}(h_0h_1\cdots h_N\,0)(h_0h_1\cdots h_N)|$$

因为 $P_{N+1}(0)=S$，所以余项

$$R_N=|S-P_N(0)|=|g_{N+1}(h_0h_1h_2\cdots h_N\,0)(h_0h_1\cdots h_N)|$$

假设积分和 $S(h)$ 关于 h 有 $(N+1)$ 阶微分，于是

$$R_N(h)=P_{N+1}(h)-S(h)$$

在区间 $[\min(h_0, h_1\cdots, h_{N+1}),\ \max(h_0, h_1, \cdots, h_{N+1})]$ 内有 $(N+2)$ 个零点 h_0, h_1, h_2, $\cdots$, h_{N+1}。反复应用洛尔定理，可知存在一个 θ 点，使得

$$R_N^{(N+1)}(\theta)=(N+1)!\,g(h_0h_1\cdots h_{N+1})-S^{(N+1)}(\theta)=0$$

所以

$$g_{N+1}(h_0h_1h_2\cdots h_{N+1})=\frac{1}{(N+1)!}S^{(N+1)}(\theta)$$

如果令

$$M_{N+1}=\max S^{(N+1)}(h)$$

于是，得

$$R_N\leqslant\frac{M_{N+1}}{(N+1)!}h_0h_1h_2\cdots h_N$$

定理得证。如果取 $h_i=\frac{1}{1+i}$， $i=0, 1, 2,\cdots, N$，代入R_N，

得 $R_N\leqslant C\left[\frac{1}{(N+1)!}\right]^2$。

6. 一维积分计算方法的余项

设求积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

其积分的计算公式为

$$I=a_0-\cfrac{h_0^n}{a_1-\cfrac{h_1^n}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}^n}{a_i-\cdots}}}$$

系数 a_i 的计算公式见第三章第 4 节。其余项为

$$R_m=Ch_0^nh_1^n\cdots h_m^n$$

其中

$$C=\left|\frac{1}{Q_m(0)Q_{m+1}(0)}\right|$$

证明 设 $\varphi_m(h)$ 为通过 $(m+1)$ 个点列 (h_i^n, I_i), $i=0$, 1, 2, …, m的函数

$$\varphi_m(h)=a_0+\cfrac{h^n-h_0^n}{a_1+\cfrac{h^n-h_1^n}{a_2+\cdots+\cfrac{h^n-h_{m-1}^n}{a_m}}}$$

又设 $\varphi_{m+1}(h)$ 为通过 $(m+2)$ 个点列 (h_i^n, I_i)，$i=0, 1, 2, \cdots, m, m+1$ 的函数

$$\varphi_{m+1}(h)=a_0+\cfrac{h^n-h_0^n}{a_1+\cfrac{h^n-h_1^n}{a_2+\cdots+\cfrac{h^n-h_m^n}{a_{m+1}}}}$$

其中

$$h_{m+1}^n=0, \quad I_{m+1}=\int_a^b f(x)dx$$

根据余项定理，可知

$$R_m(h)=\varphi_{m+1}(h)-\varphi_m(h)$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{Q_m Q_{m+1}}(h^n-h_0^n)\cdots(h^n-h_m^n)$$

令 $h=0$，可得

$$R_m=\left|\int_a^b f(x)dx-\varphi_m(0)\right|=Ch_0^n h_1^n\cdots h_m^n$$

$$C=\left|\frac{1}{Q_m(0)Q_{m+1}(0)}\right|$$

定理得证。

7. 一维积分和法的余项

设求积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

其计算公式为

$$I=a_0-\cfrac{h_0^n}{a_1-\cfrac{h_1^n}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}^n}{a_i-\cdots}}}$$

系数 a_i 的计算公式见第三章第 4 节。这里选的积分和序列为

$$(h_0^n, I_0), \quad (h_1^n, I_1), \cdots, (h_m^n, I_m)$$

其中

$$h_i=\frac{b-a}{1+i},\quad I_i=\sum_{j=0}^{i}S_j$$

S_j为$\int_{a_j}^{b_j}f(x)dx$的四点高斯积分，即

$$S_j=\sum_{k=1}^{4}C_kx_k$$

其余项 $$R_m=Ch_0^nh_1^n\cdots h_m^n$$

$$C=\left|\frac{1}{Q_m(0)Q_{m+1}(0)}\right|$$

证明 设$\varphi_m(h)$为通过点$(h_0^n,I_0),(h_1^n,I_1),\cdots,(h_m^n,I_m)$的函数

$$\varphi_m(h)=a_0+\cfrac{h^n-h_0^n}{a_1+\cfrac{h^n-h_1^n}{a_2+\cdots+\cfrac{h^n-h_{m-1}^n}{a_m}}}$$

又设$\varphi_{m+1}(h)$为通过点列$(h_0^n,I_0),(h_1^n,I_1),\cdots,(h_m^n,I_m),(0,I)$的函数

$$\varphi_{m+1}(h)=a_0+\cfrac{h^n-h_0^n}{a_1+\cfrac{h^n-h_1^n}{a_2+\cdots+\cfrac{h^n-h_m^n}{a_{m+1}}}}$$

其中 $I=\int_a^b f(x)dx$。利用余项定理可得

$$\begin{aligned}R_m(h)&=\varphi_{m+1}(h)-\varphi_m(h)\\&=\frac{(-1)^{m+1}}{Q_mQ_{m+1}}(h^n-h_0^n)(h^n-h_1^n)\cdots(h^n-h_m^n)\end{aligned}$$

令$h=0$代入上式，得

$$R_m(0)=\left|\int_a^b f(x)dx-\varphi_m(0)\right|=Ch_0^nh_1^n\cdots h_m^n$$

其中

$$C=\left|\frac{1}{Q_m(0)Q_{m+1}(0)}\right|$$

证完。

8. 二维积分计算方法的余项

设求积分

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dx\,dy$$

其计算公式为

$$I = a_0 - \cfrac{h_0^{\gamma_0}}{a_1 - \cfrac{h_1^{\gamma_1}}{a_2 - \cdots - \cfrac{h_{i-1}^{\gamma_{i-1}}}{a_i - \cdots}}}$$

系数 a_i 的计算公式见第三章第5节。则其余项

$$R_m = C h_0^{\gamma_0} h_1^{\gamma_1} \cdots h_m^{\gamma_m}$$

$$C = \left| \frac{1}{Q_m(0) Q_{m+1}(0)} \right|$$

其中 $Q_m = a_m Q_{m-1} + (h^{\gamma m-1} - h_{m-1}^{\gamma m-1}) Q_{m-2}$，$Q_1 = 0$，$Q_0 = 1$。

证明 首先选取积分和序列

$$(h_0^{\gamma_0},\ I_0),\ (h_1^{\gamma_1},\ I_1),\ \cdots,\ (h_m^{\gamma_m},\ I_m)$$

其中

$$h_i = \frac{(b-a)(d-c)}{(1+i)^2}$$

$$I_i = h_i \sum_{j=1}^{(1+i)^2} f_j$$

$$i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

f_j 为第 j 块上 $f(x, y)$ 中点值

其次，为导出余项估计式，设 $\varphi_m(h)$ 为通过点列 $(h_0^{\gamma_0}, I_0)$，$(h_1^{\gamma_1},\ I_1)$，$\cdots$，$(h_m^{\gamma_m},\ I_m)$ 的函数

$$\varphi_m(h) = a_0 + \cfrac{h^{\gamma_0} - h_0^{\gamma_0}}{a_1 + \cfrac{h^{\gamma_1} - h_1^{\gamma_1}}{a_2 + \cdots + \cfrac{h^{\gamma_{m-1}} - h_{m-1}^{\gamma_{m-1}}}{a_m}}}$$

又设 $\varphi_{m+1}(h)$ 为通过点列 $(h_0^{\gamma_0},\ I_0)$，$(h_1^{\gamma_1},\ I_1)$，$\cdots$，$(h_m^{\gamma_m}, I_m)$，$(h_{m+1}^{\gamma_{m+1}},\ I_{m+1})$ 的函数

$$\varphi_{m+1}(h)=a_0+\frac{h^{\gamma_0}-h_0^{\gamma_0}}{a_1+\frac{h^{\gamma_1}-h_1^{\gamma_1}}{a_2+\cdots+\frac{h^{\gamma_m}-h_m^{\gamma_m}}{a_{m+1}}}}$$

令 $h_{m+1}=0$，$I_{m+1}=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy$。根据余项定理，可知

$$\varphi_{m+1}(h)-\varphi_m(h)=\frac{(-1)^{m+1}}{Q_m(h)Q_{m+1}(h)}(h^{\gamma_0}-h_0^{\gamma_0})\cdots(h^{\gamma_m}-h_m^{\gamma_m})$$

令 $h=0$，可得

$$R_m=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy-\varphi_m(0)=Ch_0^{\gamma_0}h_1^{\gamma_1}\cdots h_m^{\gamma_m}$$

其中

$$C=\left|\frac{1}{Q_m(0)Q_{m+1}(0)}\right|$$

证完。

9. 四维积分和法的余项

设求积分

$$\int_a^b\int_c^d\int_e^f\int_g^l f(x,y,z,w)\,dxdydzdw$$

其计算公式为

$$I=a_0-\frac{h_0^{\gamma_0}}{a_1-\frac{h_1^{\gamma_1}}{a_2-\cdots-\frac{h_{i-1}^{\gamma_{i-1}}}{a_i}}}$$

系数 a_i 的计算公式见第三章第 14 节。其余项

$$R_m=Ch_0^{\gamma_0}h_1^{\gamma_1}h_2^{\gamma_2}\cdots h_m^{\gamma_m}$$

$$C=\left|\frac{1}{Q_m(0)Q_{m+1}(0)}\right|$$

其中 $Q_m=a_mQ_{m-1}+(h^{\gamma_{m-1}}-h_{m-1}^{\gamma_{m-1}})Q_{m-2}$，$Q_{-1}=0$，$Q_0=1$。

证明 首先选取积分和序列

$$(h_0^{\gamma_0},I_0),\ (h_1^{\gamma_1},I_1),\ \cdots,\ (h_m^{\gamma_m},I_m)$$

其中

$$h_i=\frac{(l-g)(f-e)(d-c)(b-a)}{(1+i)^4}$$

$$I_i=h_i\sum_{j=1}^{(1+i)^4}f_j$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

f_j 为第 j 块上 $f(x,y,z,w)$ 中点值

其次，为了导出余项的估计式，设 $\varphi_m(h)$ 为通过如下点列

$$(h_0^{\gamma_0},I_0),\ (h_1^{\gamma_1},I_1),\cdots,(h_m^{\gamma_m},I_m)$$

的函数

$$\varphi_m(h)=a_0+\cfrac{h^{\gamma_0}-h_0^{\gamma_0}}{a_1+\cfrac{h^{\gamma_1}-h_1^{\gamma_1}}{a_2+\cdots+\cfrac{h^{\gamma_{m-1}}-h_{m-1}^{\gamma_{m-1}}}{a_m}}}$$

又设 $\varphi_{m+1}(h)$ 为通过点列

$$(h_0^{\gamma_0},I_0),\ (h_1^{\gamma_1},\ I_1),\cdots,(h_m^{\gamma_m},\ I_m),\ (h_{m+1}^{\gamma_{m+1}},\ I_{m+1})$$

的函数

$$\varphi_{m+1}(h)=a_0+\cfrac{h^{\gamma_0}-h_0^{\gamma_0}}{a_1+\cfrac{h^{\gamma_1}-h_1^{\gamma_1}}{a_2+\cdots+\cfrac{h^{\gamma_m}-h_m^{\gamma_m}}{a_{m+1}}}}$$

取$h_{m+1}=0$，$I_{m+1}=\int_a^b\int_c^d\int_e^f\int_g^l f(x,y,z,w)\,dxdydzdw$

根据余项定理可知

$$\varphi_{m+1}(h)-\varphi_m(h)=\frac{(-1)^{m+1}}{Q_mQ_{m+1}}(h^{\gamma_0}-h_0^{\gamma_0})\cdots(h^{\gamma_m}-h_m^{\gamma_m})$$

令 $h=0$，代入上式得

$$R_m=|I_{m+1}-\varphi_m(0)|=Ch_0^{\gamma_0}h_1^{\gamma_1}\cdots h_m^{\gamma_m}$$

其中

$$C=\left|\frac{1}{Q_m(0)Q_{m+1}(0)}\right|$$

证完。

10. n 维积分和法的余项

本文将讨论用极限外推思想计算多维积分

$$I=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

的方法，并给出该方法的余项 $R_m(h)$。

为了论述方便，不失问题的一般性，设积分域为单位超立方体。设实函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在积分域 R_n 上连续，则 n 维积分

$$\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n$$

的计算公式为

$$I=a_0-\cfrac{h_0^{\gamma_0}}{a_1-\cfrac{h_1^{\gamma_1}}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{m-1}^{\gamma_{m-1}}}{a_m-\cdots}}}$$

其中

$$a_0=I_0$$

$$a_i=-\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i^{\gamma_i}-h_{i-1}^{\gamma_{i-1}})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

而

$$P_i=a_iP_{i-1}+(h^{\gamma_i}-h_{i-1}^{\gamma_{i-1}})P_{i-2}$$

$$Q_i=a_iQ_{i-1}+(h^{\gamma_i}-h_{i-1}^{\gamma_{i-1}})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=a_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$I_i=h_i^n\sum_{j=1}^{n_i}f(X_j)$$

$$h_i=\frac{1}{1+i},\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

n_i 为用步长 h_i 分割积分域 R_n 的块数

X_j 为第 j 小块中的一点

其余项为

$$R_m = Ch_0^{\gamma_0}h_1^{\gamma_1}h_2^{\gamma_2}\cdots h_m^{\gamma_m}$$

式中

$$C = \left|\frac{1}{Q_m(0)Q_{m+1}(0)}\right|$$

证明 首先任取积分步长序列 h_0, h_1, …, h_i, …, 然后用积分步长 h_i 对积分区域进行分割，再在分割后的小块中任取一点 X_j, 做积分和

$$I_i = h_i^n \sum_{1}^{n_i} f(X_j)$$

于是依次得出了积分和的序列

h_0, h_1, $h_2\cdots$, h_m, …

I_0, I_1, I_2, …, I_m, …

其次为了描述这个积分和序列，并找出其变化规律，设认识函数

$$\varphi(h) = a_0 + \cfrac{h^{\gamma_0} - h_0^{\gamma_0}}{a_1 + \cfrac{h^{\gamma_1} - h_1^{\gamma_1}}{a_2 + \cdots + \cfrac{h^{\gamma_{m-1}} - h_{m-1}^{\gamma_{m-1}}}{a_m + \cdots}}}$$

通过上述点列，即 $\varphi(h_i) = I_i$。再根据 $\varphi(h)$ 的渐近分式可得方程

$$\frac{a_iP_{i-1} + (h_i^{\gamma_i} - h_{i-1}^{\gamma_{i-1}})P_{i-2}}{a_iQ_{i-1} + (h_i^{\gamma_i} - h_{i-1}^{\gamma_{i-1}})Q_{i-2}} = I_i$$

从中解出未知系数 a_i, 有

$$a_0 = I_0$$

$$a_i = -\frac{(I_iQ_{i-2} - P_{i-2})(h_i^{\gamma_i} - h_{i-1}^{\gamma_{i-1}})}{I_iQ_{i-1} - P_{i-1}}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

由于 $h_i \to 0$, 则 $I_i \to I$, 所以令 $h = 0$ 代入 $\varphi(h)$ 中，即得 n 维积分计算公式。

如果

$$|\varphi_{m+1}(0)-\varphi_m(0)|\leqslant\varepsilon$$

ε 为计算精度，则 $\varphi_m(0)$ 为所求的积分值，否则继续加密分割，直至满足计算精度要求为止。

为了导出余项的估计式，设 $\varphi_m(h)$ 为通过点列

$$(h_0^{\gamma_0},I_0),\quad (h_1^{\gamma_1},I_1),\cdots,\quad (h_m^{\gamma_m},I_m)$$

的函数

$$\varphi_m(h)=a_0+\cfrac{h^{\gamma_0}-h_0^{\gamma_0}}{a_1+\cfrac{h^{\gamma_1}-h_1^{\gamma_1}}{a_2+\cdots+\cfrac{h^{\gamma_{m-1}}-h_{m-1}^{\gamma_{m-1}}}{a_m}}}$$

又设 $\varphi_{m+1}(h)$ 为通过点列

$$(h_0^{\gamma_0},I_0),\quad (h_1^{\gamma_1},I_1),\cdots,\quad (h_m^{\gamma_m}-I_m),\quad (h_{m+1}^{\gamma_{m+1}},I_{m+1})$$

的函数

$$\varphi_{m+1}(h)=a_0+\cfrac{h^{\gamma_0}-h_0^{\gamma_0}}{a_1+\cfrac{h^{\gamma_1}-h_1^{\gamma_1}}{a_2+\cdots+\cfrac{h^{\gamma_m}-h_m^{\gamma_m}}{a_{m+1}}}}$$

令 $h_{m+1}=0$，$I_{m+1}=I$。根据余项定理可知

$$\varphi_{m+1}(h)-\varphi_m(h)=\frac{(-1)^{m+1}}{Q_mQ_{m+1}}(h^{\gamma_0}-h_0^{\gamma_0})\cdots(h^{\gamma_m}-h_m^{\gamma_m})$$

令 $h=0$，代入上式，得

$$R_m=|I-\varphi_m(0)|=Ch_0^{\gamma_0}h_1^{\gamma_1}\cdots h_m^{\gamma_m})$$

其中

$$C=\left|\frac{1}{Q_m(0)Q_{m+1}(0)}\right|$$

证完。

11. 一维积分和法的过程

(一) 职能

本过程GAUSS能够求一维定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

其中 $f(x)$ 为实函数。在应用时一般可以达到计算精度 10^{-8}。

（二）用法

访问过程 GAUSS（A，B，Y，N，DF）；

值 A，B，N；简变 Y；过程 DF；

其中

A——积分下限；

B——积分上限；

Y——存积分结果的简变；

N——适当的正整数；

DF——计算 $f(x)$ 的过程，即：

过程 DF(X，Y)；值 X；简变 Y；始…终；

在计算时，适当选取 N 可加快收敛。

（三）方法

设求积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

其计算公式为

$$I=a_0-\cfrac{h_0^n}{a_1-\cfrac{h_1^n}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}^n}{a_i-\cdots}}}$$

系数 a_i 的计算公式为

$$a_0=S_0$$

$$a_i=\varphi_i(h_i)$$

$$\varphi_j(h_i)=\frac{h_i^n-h_{j-1}^n}{\varphi_{j-1}(h_i)-a_{j-1}}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ i$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ \cdots$$

$$\varphi_0(h_i)=a_0+\frac{h_i^n-h_0^n}{\varphi_1(h_i)}=S_i$$

其中

$$\varphi_1(h)=a_1+\frac{h^n-h_1^n}{\varphi_2(h)}$$

……

$$\varphi_{m-1}(h)=a_{m-1}+\frac{h^n-h_{m-1}^n}{\varphi_m(h)}$$

$$\varphi_m(h)=a_m$$

$$S_i=\sum_{j=0}^{i} I_j$$

$$I_j=\int_{a_j}^{b_j} f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{4} c_k x_k$$

$$a_j=a+(j-1)h_i$$

$$b_j=a_j+h_i$$

$$h_i=\frac{b-a}{1+i}$$

c_k 和 x_k 分别为四点高斯积分系数和结点坐标，其数值如下：

k	x_k	c_k
1	−0.8611363116	0.3478548451
2	−0.3399810436	0.6521451549
3	0.3399810436	0.6521451549
4	0.8611363116	0.3478548451

（四）源程序

页001

行 01　过程 GAUSS (A，B，Y，N，DF)；

行 02　值 A，B，N；简变 Y；过程 DF；

行 03　始场 T，T1〔1:4〕，H〔1:2〕，A1〔1:2，1:10〕；

行 04　简变 A2，B2，S，S1，X；

行 05　ϕ5⇒S1；

行 06　−0.8611363116⇒T〔1〕；−0.3399810436⇒T〔2〕；

行 07　−T〔2〕⇒T〔3〕；−T〔1〕⇒T〔4〕；

```
行 08  0.3478548451⇒T1〔1〕；0.6521451549⇒T1〔2〕；
行 09  T1〔2〕⇒T1〔3〕；T1〔1〕⇒T1〔4〕；
行 10  对于 J = 0 步长 1 次数 8 执行
行 11  始 0 ⇒ S；(B－A)/(1 + J)⇒Z1；
行 12  对于 I = 0 步长 1 次数 J + 1 执行始
行 13  A＋I *Z1⇒A2；A2＋Z1⇒B2；
行 14  对于 K = 1 步长 1 次数 4 执行始
行 15  (B2＋A2)/2＋T〔K〕*(B2－A2)/2⇒X；
行 16  DF(X, Y)；(B2－A2)/2* Y *T1〔K〕＋ S ⇒ S；
行 17  终  终；
行 18  Z1↑N⇒H〔1〕；S ⇒H〔2〕；
行 19  PBH(J, 0, 2, 0, H, A1)；
行 20  若 § ABS(S1－S)≤ φ－8 则转 AB 否则
行 21   S ⇒S1  终；
行 22  AB：H〔2〕⇒Y  终；
```

页002

```
行 01  过程 PBH(J, X, N, W, H, A)；
行 02  值 J, X, N, W；场 H, A；
行 03  始简变 I1；
行 04  若 W≤0.5 则否则转 BB；
行 05  若 J = 0 则始对于 I = 1 步长 1 次数 N
行 06  执行 H〔I〕⇒A〔I, 1〕；转 A11 终否则；
行 07  H〔1〕⇒A〔1, 1 + J〕；
行 08  对于 K = 2 步长 1 次数 N－1 执行始
行 09  H〔K〕⇒I1；对于 I = 1 步长 1 次数 J 执行
行 10  若 § ABS(I1－A〔K, I〕)≤ φ-35 则始
行 11  φ35⇒A〔K, 1 + J〕；转 AA  终  否则
行 12  (H〔1〕－A〔1, I〕)/(I1－A〔K, I〕)⇒I1；
行 13  I1⇒A〔K, 1 + J〕；AA：终；
```

行 14　BB;

行 15　对于K＝2 步长 1 次数N－1 执行始

行 16　 0 ⇒I1;

行 17　对于 I ＝ J 步长－1 次数 J 执行始

行 18　A〔K，1 ＋ I 〕＋I1⇒I1;

行 19　若 § ABS(I1)≤ϕ－35 则 ϕ35⇒I1 否则;

行 20　(X－A〔1，I〕)/I1⇒I1　终;

行 21　A〔K，1〕＋I1⇒H〔K〕　终;

行 22　A11: 终;

例　求积分

$$\int_0^1 \ln\frac{e}{x}dx$$

解　取 $h_i=\frac{1}{1+i}$，经验函数 $g(h)=h^2$，$S_i=\sum_{j=1}^{i+1} I_j$，其中 I_j 为 $\int_{a_j}^{b_j}\ln\frac{e}{x}dx$ 的四点高斯积分，$a_j=(j-1)h_i$，$b_j=jh_i$，$i=0, 1, 2, \cdots$，积分的计算公式为

$$S=a_0-\cfrac{h_0^2}{a_1-\cfrac{h_1^2}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}^2}{a_i-\cdots}}}$$

其中系数 a_i 的计算公式为

$$a_i=\varphi_i(h_i^2)$$

$$\varphi_0(h_i^2)=S_i$$

$$\varphi_i(h_j^2)=\frac{h_j^2-h_{i-1}^2}{\varphi_{i-1}(h_j^2)-a_{i-1}}$$

$$j=1, 2, \cdots, i$$

$$i=1, 2, 3, \cdots$$

计算结果如下:

j	高斯S_i	本节公式S	h_j^2	a_j
0	1.96853597	1.96853597	1	1.96853597
1	1.98426792	1.98951190	0.25	-0.476737039×10^{2}
2	1.98951194	1.99475599	0.111111111	$-0.262194591\times10^{-1}$
3	1.99213396	1.99685357	0.0625	-0.185405455×10^{2}
4	1.99370716	1.99790239	0.04	$-0.141577159\times10^{-1}$
5	1.99475597	1.99850170	0.027777777	-0.116548571×10^{2}
6	1.99550512	1.99887628	0.0204081632	$-0.973732428\times10^{-2}$
7	1.99606698	1.99912599	0.015625	-0.851482492×10
8	1.99650398	1.99930076	0.012345679	$-0.742826371\times10^{-2}$
精度	0.00349602	0.00069924		

本例精确值为 2。

12. 一维积分极限法的过程

（一）职能

本过程 INT 是根据一维积分极限法设计的，可以求积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

其中 $f(x)$ 为可积实函数。

（二）用法

访问过程 INT(A, B, Y, N, DF);

值 A, B, N; 简变 Y; 过程 DF;

其中

A——积分下限;

B——积分上限;

Y——存积分结果的简变;

N——选适当的数;

DF——计算 $f(x)$ 的过程，即:

过程 DF(X, Y); 值 X; 简变 Y; 始…终;

在计算时，适当选取 N，使计算收敛加快。

（三）方法

设求积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

其计算公式为

$$I = a_0 - \frac{h_0^n}{a_1 - \frac{h_1^n}{a_2 - \cdots - \frac{h_{i-1}^n}{a_i - \cdots}}}$$

系数 a_i 的计算公式为

$$a_0 = S_0$$

$$a_i = \varphi_i(h_i)$$

$$\varphi_i(h_j) = \frac{h_j^n - h_{i-1}^n}{\varphi_{i-1}(h_j) - a_{i-1}}$$

$$j = 1,\ 2,\ \cdots,\ i$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots$$

$$\varphi_0(h_i) = a_0 + \frac{h_i^n - h_0^n}{\varphi_1(h_i)} = S_i$$

其中

$$\varphi_1(h) = a_1 + \frac{h^n - h_1^n}{\varphi_2(h)}$$

$$\cdots$$

$$\varphi_{m-1}(h) = a_{m-1} + \frac{h^n - h_{m-1}^n}{\varphi_m(h)}$$

$$\varphi_m(h) = a_m$$

$$S_i = \frac{h_i}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{j=0}^{i} f(a + jh_i)\right]$$

$$h_i = \frac{b-a}{i+1}$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots$$

(四）源程序

页 001

行 01　过程 INT(A, B, Y, N, DF);

```
行 02  值 A, B, N; 简变 Y; 过程 DF;
行 03  始  场 H〔1:2〕, A1〔1:2, 1:10〕;
行 04  简变 S, S1, X, Z, Z1;
行 05  φ5⇒S1;
行 06  对于 J = 0 步长 1 次数 9 执行
行 07  始  0⇒S; (B－A)/(1＋J)⇒Z1;
行 08  若 J = 0 则始 DF(A, Y); DF(B, Z);
行 09  Z＋Y⇒Z; 转 AA  终  否则;
行 10  对于 I = 1 步长 1 次数 J 执行始
行 11  A＋I*Z1⇒X; DF(X, Y); Z*Y＋S⇒S
行 12  终;
行 13  AA: (Z＋S)*Z1/2⇒H〔2〕;
行 14  Z1↑N⇒H〔1〕;
行 15  PBH(J, 0, 2, 0, H, A1);
行 16  若 § ABS(S1－H〔2〕)≤φ－8  则转 AB
行 17  否则  H〔2〕⇒S1  终;
行 18  AB: H〔2〕⇒Y  终;
```

注：本节源程序中行 15 过程 PBH 可参见本章第 11 节源程序页 002。

13. 积分有理逼近法的过程

（一）职能

本过程 LIMINT 是根据一维有理逼近积分法设计的，可以求积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

其中 $f(x)$ 为可积实函数。

（二）用法

访问过程 LIMINT(A, B, Y, N, DF);

值A，B，N；简变Y；过程DF；

其中

A——积分下限；

B——积分上限；

Y——存积分结果的简变；

N——选适当的数；

DF——计算 $f(x)$ 的过程，即：

过程DF(X，Y)；值X；简变Y；始…终；

在计算时，适当选取N，使计算收敛加快，开始也可用N＝1进行积分。

（三）方法

设求积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

其计算公式为

$$I=a_0-\cfrac{h_0^n}{a_1-\cfrac{h_1^n}{a_2-\cdots-\cfrac{h_{m-1}^n}{a_m-\cdots}}}$$

系数 a_i 的计算公式

$$a_0=S_0$$

$$a_i=\varphi_i(h_i)$$

$$\varphi_i(h_j)=\frac{h_j^n-h_{i-1}^n}{\varphi_{i-1}(h_j)-a_{i-1}}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ i$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots$$

$$\varphi_0(h_i)=a_0+\frac{h_i^n-h_0^n}{\varphi_1(h)}=S_i$$

其中

$$\varphi_1(h)=a_1+\frac{h^n-h_1^n}{\varphi_2(h)}$$

……

$$\varphi_{m-1}(h)=a_{m-1}+\frac{h^n-h_{m-1}^n}{\varphi_m(h)}$$

$$\varphi_m(h)=a_m$$

$$S_i=\sum_{j=0}^{i} I_j$$

I_j为$\int_{a_j}^{b_j} f(x)dx$ 的有理逼近积分

$$a_j=a+(j-1)h_i$$

$$b_j=a_j+h_i$$

$$h_i=\frac{b-a}{i+1}$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ i+1$$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

计算积分

$$\int_{a_j}^{b_j} f(x)dx$$

的有理逼近积分的计算公式为

$$I_j=c_0-\cfrac{h_0}{c_1-\cfrac{h_1}{c_2-\cdots-\cfrac{h_{i-1}}{c_i-\cdots}}}$$

其中

$$c_0=I_0$$

$$c_i=-\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$h_i=\frac{(b_j-a_j)}{2^{(i+1)}}$$

$$P_i=c_iP_{i-1}+(h-h_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=c_iQ_{i-1}+(h-h_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=c_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0 = 1$$

$$I_j = h_j \sum_{j=1}^{2^{(l+1)}} \varphi_j$$

其中，函数 $\varphi(x)$ 为被积函数 $f(x)$ 在积分区间$[a_j, b_j]$上的 m 点有理逼近函数

$$\varphi(x) = b_0 + \frac{x - x_0}{b_1 + \frac{x - x_1}{b_2 + \cdots + \frac{x - x_{m-1}}{b_m}}}$$

其中

$$b_0 = f_0$$

$$b_i = -\frac{(f_i Q_{i-2} - P_{i-2})(x_i - x_{i-1})}{(f_i Q_{i-1} - P_{i-1})}$$

$$P_i = b_i P_{i-1} + (x - x_{i-1}) P_{i-2}$$

$$Q_i = b_i Q_{i-1} + (x - x_{i-1}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = b_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

而

$$f_i = f(x_i)$$

$$x_i = a_j + \frac{(b_j - a_j)}{m - 1} i, \quad i = 0, 1, \cdots$$

（四）源程序

页 001

```
行 01    过程 LIMINT（A， B， Y， N， DF)；
行 02    值A， B， N； 简变 Y； 过程 DF；
行 03    始  场H[1:2]， A1[1:2， 1:10]；
行 04    简变 A2， B2， S， S1， Z1；
行 05    ф5⇒S1；
行 06    对于 J ＝ 0 步长 1 次数 9 执行始
```

```
行 07    0⇒S; (B-A)/(1+J)⇒Z1;
行 08    对于 I=0 步长 1 次数 1+J 执行始
行 09    A+I*Z1⇒A2; A2+Z1⇒B2;
行 10    INT(A2, B2, 7, Y, DF);
行 11    Y+S⇒S; 终;
行 12    Z1↑N⇒H[1]; S⇒H[2];
行 13    PBH(J, 0, 2, 0, H, A1); H[2]⇒S;
行 14    若§ABS(S1-S)≤ϕ-8 则转 AB 否则
行 15    S⇒S1; 终;
行 16    AB: S⇒Y;
行 17    终;
页 002
行 01    过程 INT(A, B, M, Y, DF);
行 02    值A, B, M; 简变Y; 过程 DF;
行 03    始  简变X, Z, Z1, S1;
行 04    场H[1:2], A1, A2[1:2, 1:20];
行 05    ϕ5⇒S1;
行 06    对于 J=0 步长 1 次数M-1 执行始
行 07    A+(B-A)/(M-1)*J⇒X;
行 08    DF(X, Y); X⇒H[1]; Y⇒H[2];
行 09    PBH(J, X, 2, 0, H, A1) 终;
行 10    0⇒Y; 对于 J=0 步长 1 次数 9 执行
行 11    始 (B-A)/2↑(J-1)⇒Z1; Z1/2⇒Z;
行 12    若 J=0 则A⇒X 否则 A+Z⇒X;
行 13    C: PBH(M-1, X, 2, 1, H, A1);
行 14    Y+H[2]⇒Y; X+Z1⇒X;
行 15    若X<(B-ϕ-9) 则转C 否则;
行 16    Y*Z⇒H[2]; Z⇒H[1];
行 17    PBH (J, 0, 2, 0, H, A2);
```

行 18　若§ABS(S1−H〔2〕)≤φ−9 则转 AB

行 19　否则H〔2〕⇒S1　终；

行 20　AB：H〔2〕⇒Y　终；

注：本节源程序中页 001 行13过程 PBH 可参见本章第 11节源程序页 002。

例 1　求积分

$$\int_0^1 \ln\frac{e}{x}dx$$

解　取 $N=2$，根据过程 LIMINT 的计算结果如下：

j	S_j	$\varphi_j(0)$
0	2.06971852	2.06971852
1	2.03475295	2.02309776
2	2.02310142	2.01145171
3	2.01724329	2.00660556
4	2.01383668	2.00570430
5	2.01150339	2.00797183
6	2.00983908	2.00329758
7	2.00857306	2.00144064

本例精确值为 2。

例 2　求积分

$$\int_0^{4.3} e^{-x^2}dx$$

解　根据过程 INT 的计算结果如下：

j	点　数	结　果
1	2	2.15000002
2	3	8.92185152
3	5	0.924895555
4	8	0.881070842
5	12	0.886203311
6	17	0.886227102
7	23	0.886226923

同几种常用积分方法的计算结果比较如下：

方　法	积分有理逼近法	高斯四点积分	龙贝格积分	切比雪夫积分
结　果	0.886226923	0.886226924	0.886226925	0.886226926
点　数	23	24	65	33

例 3　求积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

其中 $a=9$，$b=10$。

解　几种积分方法计算结果如下：

$f(x)$ ＼ 一维积分 ＼ 项目		结　果	点　数	精　度
$e^x(\cos x+\sin x)$	精确值	-15322.2930		
	积分有理逼近法	-15322.2931	9	10^{-4}
	五点高斯积分法	-15475.4017	45	10^{3}
$-5x^{-6}$	精确值	$-0.693508780\times10^{-5}$		
	积分有理逼近法	$-0.693508780\times10^{-5}$	9	10^{-9}
	五点高斯积分法	$-0.700442186\times10^{-5}$	45	10^{-4}
$x^{14}+4x^3+1$	精确值	0.794108867×10^{15}		
	积分有理逼近法	0.794108867×10^{15}	9	10^{6}
	五点高斯积分法	0.802041904×10^{15}	45	10^{12}

14. 二维有理逼近法的过程

(一) 职能

本过程 INT2 是根据有理逼近积分法设计的，可以计算二维积分

$$\int_a^b\int_c^d f(x,\ y)dxdy$$

的近似积分值，其中 $f(x,\ y)$ 为连续实函数。

（二）用法

访问过程 INT2（A，B，M，Y，DF）；

场 A，B；值 M；简变 Y；过程 DF；

其中

A——存积分下限（a 和 c）的场；

B——存积分上限（b 和 d）的场；

M——积分变量的点数；

Y——存积分结果的简变；

DF——计算被积函数 $f(x, y)$ 的过程，即：

过程 DF(X，Y)；场 X；简变 Y；

在计算时要适当选取 M，一般取 7。

（三）方法

求二维积分

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dxdy$$

首先，把二维积分化成累次积分，设

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)dxdy = \int_a^b E(x)dx$$

其中

$$E(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

把积分区间〔a，b〕等分成 m 点

$$x_1 = a, \quad x_2, \quad x_3, \quad \cdots, \quad x_m = b$$

然后对积分

$$E(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$

在 x_i 点进行 m 点逼近积分，求出 $E(x_i)$ 值，$i = 1, 2, \cdots, m$。最后，对积分

$$\int_a^b E(x)dx$$

进行 m 点逼近积分。

计算公式参见本章第13节。

（四）源程序

```
页 001
  行 01    过程 INT2（A，B，M，Y，DF）；
  行 02    场A，B；值M；简变Y；过程 DF；
  行 03    始  简变 H1，H2；场X，S1，S2〔1:M〕；
  行 04    （B〔1〕－A〔1〕）/（M－1）⇒H1；
  行 05    （B〔2〕－A〔2〕）/（M－1）⇒H2；
  行 06    对于 I＝1 步长 1 次数M执行
  行 07    始A〔1〕＋（I－1）*H1⇒X〔1〕；
  行 08    对于 J＝1 步长 1 次数M执行
  行 09    始A〔2〕＋（J－1）*H2⇒X〔2〕；
  行 10    DF（X，Y）；Y⇒S2〔J〕；终；
  行 11    INT（A〔2〕，B〔2〕，M，Y，S2）；
  行 12    Y⇒S1〔I〕终；INT（A〔1〕，B〔1〕，M，Y，S1）终；
页 002
  行 01    过程 INT（A，B，M，Y，S）；
  行 02    值A，B，M；简变Y；场S；
  行 03    始  简变X，Z，Z1，S1；
  行 04    场H〔1:2〕，A1，A2〔1:2，1:20〕；
  行 05    φ5⇒S1；
  行 06    对于 J＝1 步长 1 次数M执行
  行 07    始A＋（B－A）/（M－1）* J⇒X；
  行 08    S〔J〕⇒H〔2〕；X⇒H〔1〕；
  行 09    PBH（J－1，X，2，0，H，A1）终；
  行 10    0⇒Y；对于 J＝0 步长 1 次数 9 执行
  行 11    始（B－A）/2↑（J－1）⇒Z1；Z1/2⇒Z；
  行 12    若 J＝0 则 A⇒X 否则 A＋Z⇒X；
  行 13    C：PBH（M－1，X，2，1，H，A1）；
```

行 14　Y＋H〔2〕⇒Y； X＋Z1⇒X；

行 15　若X≤(B－ϕ－9) 则转C否则；

行 16　Y＊Z⇒H〔2〕； Z⇒H〔1〕；

行 17　PBH(J，0，2，0，H，A2)；

行 18　若§ABS(S1－H〔2〕)≤ϕ－9 则转 AB

行 19　否则H〔2〕⇒S1　终；

行 20　AB： H〔2〕⇒Y　终；

注：本节源程序中页 002 行09、行13和行17过程 PBH 可参见本章第11节源程序页 002。

例 1　求二维积分

$$\int_0^1\int_0^1 (x^2+y+1)dxdy$$

解　根据过程 INT2 的计算结果如下：

m	3	4	5	6	7
结果	1.71170475	1.74732080	1.75038084	1.75000000	1.75000000

本例精确值为1.75。

例 2　求二维积分

$$\int_0^1\int_0^1 e^{x+y}dxdy$$

解　根据过程 INT2 的计算结果如下：

m	3	4	5	6	7	8
结果	2.94854728	2.95218570	2.95249547	2.95249261	2.95249244	2.95249244

15. 二维数值积分法的过程

（一）职能

本过程 INTB 是根据二维积分和法设计的，可以计算二维积分

$$\int_a^b\int_c^d f(x, y)dxdy$$

的近似积分值。

（二）用法

访问过程 INTB(A, B, Y, DF);

场A, B; 简变Y; 过程 DF;

其中

A——存积分下限（a 和 c）的场;

B——存积分上限（b 和 d）的场;

Y——存积分结果的简变;

DF——计算被积函数 $f(x, y)$ 的过程，即：

过程 DF(X, Y); 场X; 简变Y;

如果精度达不到，印 # T1为标志，若调 γ_i 的值，拨在操作变量 # 10上即可。

（三）方法

$$I = a_0 - \cfrac{h_0^{\gamma_0}}{a_1 - \cfrac{h_1^{\gamma_1}}{a_2 - \cdots - \cfrac{h_{i-1}^{\gamma_{i-1}}}{a_i}}}$$

其中

$$a_0 = I_0$$

$$a_i = -\frac{(I_i Q_{i-2} - P_{i-2})(h_i^{\gamma_i} - h_{i-1}^{\gamma_{i-1}})}{I_i Q_{i-1} - P_{i-1}}$$

$$h_i = \frac{(b-a)(d-c)}{(i+1)^2}$$

$$P_i = a_i P_{i-1} + (h^{\gamma_{i-1}} - h_{i-1}^{\gamma_{i-1}}) P_{i-2}$$

$$Q_i = a_i Q_{i-1} + (h^{\gamma_{i-1}} - h_{i-1}^{\gamma_{i-1}}) Q_{i-2}$$

$$P_{-1} = 1$$

$$P_0 = a_0$$

$$Q_{-1} = 0$$

$$Q_0 = 1$$

$$I_i = h_i \sum_{j=1}^{(i+1)^2} f_j$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots$$

f_i为第i块积分域中点的$f(x,y)$值

（四）源程序

```
页 001  过程 INTB（A，B，Y，DF）；
  行 01  场A，B；简变Y；过程DF；
  行 02  始简变 H1，H2，S，S1；
  行 03  场X，H〔1:2〕，A1〔1:2，1:10〕；ϕ5⇒S1；
  行 04  对于J＝0 步长1 次数10执行始
  行 05  （B〔1〕－A〔1〕）/（1＋J）⇒H1；
  行 06  （B〔2〕－A〔2〕）/（1＋J）⇒H2；
  行 07  对于I＝1 步长1 次数1＋J 执行
  行 08  始A〔1〕＋H1/2＊I⇒X〔1〕；
  行 09  对于K＝1 步长1 次数1＋J 执行
  行 10  始A〔2〕＋H2/2＊K⇒X〔2〕；
  行 11  DF（X，Y）；S＋Y⇒S；终终；
  行 12  （H1＊H2）↑（（1＋#10）＊（1＋J））⇒H〔1〕；
  行 13  H1＊H2＊S⇒S；S⇒H〔2〕；
  行 14  PBH（J，0，2，0，H，A1）；
  行 15  若§ABS（S1－H〔2〕）≤ϕ－6 则转 AB
  行 16  否则；H〔2〕⇒S1；终；暂停；
  行 17  AB：H〔2〕⇒Y  终；
```

注：本节源程序中行14过程 PBH可参见本章第11节源程序页 002。

16. 四维有理逼近法的过程

（一）职能

本过程 INT4 是根据积分有理逼近法设计的，可以计算四维积分

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_4}^{b_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4$$

其中 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 为实连续函数。

（二）用法

访问过程 INT4(A, B, M, Y, DF)；场A，B；

值M；简变Y；过程DF；

其中

A——存积分下限（a_1、a_2、a_3 和 a_4）的场；

B——存积分上限（b_1、b_2、b_3 和 b_4）的场；

M——积分变量的点数；

Y——存积分结果的简变；

DF——计算被积函数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的过程，即：

过程DF(X, Y)；场X；简变Y；

始…终；

（三）方法

设求四维积分

$$I=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_4}^{b_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4)\,dx_1dx_2dx_3dx_4$$

把上述积分化为四维累次积分，设

$$I=\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)dx_1$$

其中

$$f_1(x_1)=\int_{a_2}^{b_2} f_2(x_1, x_2)dx_2$$

$$f_2(x_1, x_2)=\int_{a_3}^{b_3} f_3(x_1, x_2, x_3)dx_3$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3)=\int_{a_4}^{b_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_4$$

首先把区间$[a_i, b_i]$等分为$m-1$等分，其次对每层积分采用积分有理逼近法，计算公式参见本章第13节。

（四）源程序

```
页 001
  行 01   过程 INT4 (A, B, M, Y, DF);
  行 02   场A, B; 值M; 简变Y; 过程DF;
  行 03   始场X, H[1:4], S1, S2, S3, S4[1:M];
  行 04   对于 I = 1 步长 1 次数 4 执行
  行 05   (B[I]－A[I])/(M－1)⇒H[I];
  行 06   对于 I1 = 1 步长 1 次数M执行始
  行 07   A[1]+(I1－1)*H[1]⇒X[1];
  行 08   对于 I2 = 1 步长 1 次数M执行始
  行 09   A[2]+(I2－1)*H[2]⇒X[2];
  行 10   对于 I3 = 1 步长 1 次数M执行始
  行 11   A[3]+(I3－1)*H[3]⇒X[3];
  行 12   对于 I4 = 1 步长 1 次数M执行始
  行 13   A[4]+(I4－1)*H[4]⇒X[4];
  行 14   DF(X, Y); Y⇒S4[I4]终;
  行 15   INT (A[4], B[4], M, Y, S4);
  行 16   Y⇒S3[I3]终;
  行 17   INT(A[3], B[3], M, Y, S3);
  行 18   Y⇒S2[I2]终;
  行 19   INT(A[2], B[2], M, Y, S2);
  行 20   Y⇒S1[I1]终;
  行 21   INT (A[1], B[1], M, Y, S1) 终;
```

注：本节源程序中行15、行17和行19过程 INT 可参见本章第12节源程序。

例 1 求积分

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4$$

其中被积函数

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\sin x_1 \cos x_2 \operatorname{tg} x_3)^2 \cos x_4$$

解 根据累次有理逼近积分法，采用过程 INT4，其计算结果如下：

m	点数	结果	误差
3	81	0.263 139 856	0.170 117 657
4	256	0.092 566 777	0.000 455 422
5	625	0.092 915 786	0.000 106 413
6	1296	0.092 968 564	0.000 053 635
7	2401	0.093 023 075	-0.000 000 874

由于被积函数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的原函数为

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{x_1}{2} - \frac{1}{2}\sin x_1 \cos x_1\right) \times \left(\frac{x_2}{2} + \frac{1}{2}\sin x_2 \cos x_2\right)(\operatorname{tg} x_3 - x_3)\sin x_4$$

所以精确积分值为

$$F(1,1,1,1) - F(0,0,0,0) = 0.0930221999$$

把此算例在未周期化的情况下与三种先进的数论网格积分方法● 的计算结果比较如下：

项目 \ 结果 \ 方法	本节方法	华罗庚-王元方法	克罗博夫方法	哈塞格罗尔方法
点数	2401	6000	4097	6000
结果	0.093 023 075	0.093 345 175	0.092 630 126	0.092 379 025
精度	0.000 000 875	0.000 322 9	0.0003 92 9	0.000 643 1

例 2 求积分

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 k(\cos u - 7u\sin u - 6u^2\cos u + u^3\sin u)\,dx\,dy\,dz\,dw$$

● 三种数论网格积分方法的数学式将在本章第19节给出。

其中 $u=kxyzw$， $k=\frac{\pi}{2}$。

解 根据累次有理逼近积分法，采用过程 INT4，其计算结果如下：

m	点　数	结　果	精　度
3	81	71.6 777 521	70.6 777 521
4	256	1.02 329 667	0.02 329 667
5	625	1.00 010 592	0.00 010 592
6	1296	1.00 003 186	0.00 003 186
7	2401	0.999 999 449	0.000 000 551
8	4096	0.999 999 763	0.000 000 237
9	6561	1.000 000 005	0.000 000 005

计算中，在一个积分自变量方向的积分区间〔0，1〕内分成 $m-1$ 等分，因此所取离散点

$$x_0=0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_m=1$$

其中，$x_{i+1}=x_0+ih$，$h=\frac{1}{m-1}$，$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$。

把此算例与三种数论网格积分法的计算结果比较如下：

方　法	本节方法	华罗庚-王元方法	克罗博夫方法	哈塞格罗尔方法
结　果	0.999 999 449	1.01 211 104	1.00 265 738	0.988 461 687
精　度	0.000 000 551	0.01 211 104	0.0 026 578	0.011 538 313
点　数	2401	6000	4097	6000

例 3 求积分

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \cos x\cos y\cos z\cos w\,dxdydzdw$$

解 根据累次有理逼近积分法，采用积分过程 INT4，逐次增加积分点数 m，取 $m=3$，4，5，6，7 和 8，计算结果如下：

m	点　数	结　果	精　度
3	81	0.236 625 253	0.264 732 712
4	256	0.501 814 627	0.000 446 662
5	625	0.501 369 308	0.000 001 343
6	1296	0.501 368 800	0.000 000 835
7	2401	0.501 367 947	0.000 000 018
8	4096	0.501 367 965	0.000 000 000

把此算例在未周期化的情况下与三种数论网格积分法的计算结果比较如下：

方　法	本节方法	华罗庚-王元方法	克罗博夫方法	哈塞格罗尔方法
结　果	0.501 367 965	0.501 255 682	0.501 541 801	0.501 926 916
精　度	0.000 000 001	0.000 112 283	0.000 273 836	0.000 558 951
点　数	4096	6000	4097	6000

17. 四维积分和法的过程

（一）职能

如果被积函数 $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ 在积分域内可积，过程 INTS 可以计算四维数值积分

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_4}^{b_4} f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4$$

的近似积分值。

（二）用法

访问过程 INTS(A，B，N，Y，DF)；

场 A，B；值 N；简变 Y；过程 DF；

其中

A——存积分下限（a_1、a_2、a_3 和 a_4）的场；

B——存积分上限（b_1、b_2、b_3 和 b_4）的场；

N——积分变量的点数；

Y——存积分结果的简变；

DF——计算被积函数的过程，即：

过程 DF(X, Y); 场 X; 简变 Y; 始…终;

（三）方法

设求四重积分

$$I=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\int_{a_3}^{b_3}\int_{a_4}^{b_4} f(x_1, x_2, x_3, x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4$$

其计算公式为:

$$I=a_0-\frac{h_0}{a_1}-\frac{h_1}{a_2}-\cdots-\frac{h_{i-1}}{a_i}-\cdots$$

式中

$$a_0=I_0$$

$$a_i=\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

而

$$P_i=a_iP_{i-1}+(h-h_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=a_iQ_{i-1}+(h-h_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$P_0=a_0$$

$$Q_{-1}=0$$

$$Q_0=1$$

$$I_i=h_i\sum_{j=1}^{n_i}f_j$$

$f_j=f(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}, x_4^{(j)})$ 为 j 块中点的函数值

$$h_i=\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)(b_4-a_4)}{(1+i)^4}$$

$i=0, 1, 2, \cdots$

n_i 为分割积分域的块数

（四）源程序

页001

行01　过程 INTS(A, B, N, Y, DF);

行02　场 A, B; 值 N; 简变 Y; 过程 DF;

行03　始　场 X, H2[1:4], H[1:2], A1[1:2, 1:10];

```
行04  过程 AM(N)；值N；
行05  始  简变H1； 0 ⇒Y；
行06  对于 I = 1 步长 1 次数 4 执行
行07  (B〔I〕－A〔I〕)/N⇒H2〔I〕；
行08  对于 I 1= 1 步长 1 次数N执行始
行09  A〔1〕+H2〔1〕/2 +H2〔1〕*(I 1－1)⇒X〔1〕；
行10  对于 I 2= 1 步长 1 次数N执行始
行11  A〔2〕+H2〔2〕/2 +H2〔2〕*(I 2－1)⇒X〔2〕；
行12  对于 I 3= 1 步长 1 次数N执行始
行13  A〔3〕+H2〔3〕/2 +H2〔3〕*(I 3－1)⇒X〔3〕；
行14  对于 I 4= 1 步长 1 次数N执行始
行15  A〔4〕+H2〔4〕/2 +H2〔4〕*(I 4－1)⇒X〔4〕；
行16  DF(X, H1)； H1+ Y⇒Y 终终终终终；
行17  简变 S, M；
行18  ф5⇒S； 0 ⇒M；
行19  对于 I = 0 步长 1 次数N－1 执行始
行20  AM(1 + I)； H2〔1〕*H2〔2〕*H2〔3〕*H2〔4〕
行21  ⇒H〔1〕； Y⇒H〔2〕；
行22  M+(I + 1)^4⇒M；
行23  PBH(I, 0, 2, 0, H, A1)；
行24  若 § ABS (S－H〔2〕)≤ф－7则转 AB
行25  否则H〔2〕⇒S； 终；
行26  AB：终；
```

注：本节源程序中行 23 过程 PBH 可参见本章第 11 节源 程序页 002。

18. 有理逼近积分法的过程

(一) 职能

本过程 INT 可以计算定积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

其中，$f(x)$ 为实可积函数。

如果把 DF(X, Y) 改为取离散点 (x_i, f_i)，$i=0,1,\cdots,m$，的过程时，过程 INT(A, B, M, Y, DF)；可以用来计算离散点的数值积分。

（二）用法

访问过程 INT(A, B, M, Y, DF)；

值 A, B, M；简变 Y；过程 DF；

其中

A——积分下限；

B——积分上限；

Y——存积分结果的简变；

M——选用被积函数 $f(x)$ 的点数；

DF——计算 $f(x)$ 或取 $f(x)$ 的离散点值的过程，即：

过程 DF(X, Y)；值 X；简变 Y；始…终；

在计算时，可适当选取合适的M点数，使积分值满足计算精度。

（三）方法

设求积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

其计算公式为

$$I=a_0-\frac{h_0}{a_1}-\frac{h_1}{a_2}-\cdots-\frac{h_{i-1}}{a_i}-\cdots$$

其中

$$a_0=I_0$$

$$a_i=-\frac{(I_iQ_{i-2}-P_{i-2})(h_i-h_{i-1})}{I_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

而

$$h_i=\frac{b-a}{2^{(1+i)}}$$

$$P_i=a_iP_{i-1}+(h-h_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=a_iQ_{i-1}+(h-h_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$Q_{-1}=0$$

$$P_0=a_0$$

$$Q_0=1$$

$$I_i=h_i\sum_{j=1}^{2^{(1+i)}}\varphi_j$$

式中，函数 $\varphi(x)$ 为被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上 m 点的有理逼近函数，其公式为

$$\varphi(x)=b_0+\cfrac{x-x_0}{b_1+\cfrac{x-x_1}{b_2+\cdots+\cfrac{x-x_{i-1}}{b_i}}}$$

其中

$$b_0=f_0$$

$$b_i=-\frac{(f_iQ_{i-2}-P_{i-2})(x_i-x_{i-1})}{f_iQ_{i-1}-P_{i-1}}$$

$$P_i=b_iP_{i-1}+(x-x_{i-1})P_{i-2}$$

$$Q_i=b_iQ_{i-1}+(x-x_{i-1})Q_{i-2}$$

$$P_{-1}=1$$

$$Q_{-1}=0$$

$$P_0=b_0$$

$$Q_0=1$$

$$f_i=f(x_i)$$

$$x_i=a+\left(\frac{b-a}{m-1}\right)i$$

$$i=0, 1, \cdots, m-1$$

在应用有理逼近积分法计算积分时，如果第 i 项满足不等式

$$\left|\frac{h_i}{a_{i+1}}\right| \leqslant \varepsilon$$

ε 为计算精度，则认为已经得到 I 值。否则继续计算到第 $i+1$ 项，直至满足计算精度为止。

（四）源程序

页001

```
行01  过程 INT(A, B, M, Y, DF);
行02  值A, B, M; 简变Y; 过程 DF;
行03  始  简变X, Z, Z1, S1;
行04  场  H[1:2], A1, A2[1:2, 1:20];
行05  ϕ5⇒S1;
行06  对于 J = 0 步长 1 次数M执行始
行07  A+(B-A)/(M-1)*J⇒X; DF(X, Y);
行08  X⇒H[1]; Y⇒H[2];
行09  PBH(J, X, 2, 0, H, A1) 终;
行10  0⇒Y; 对于 J = 0 步长 1 次数 8 执行
行11  始(B-A)/2↑(J-1)⇒Z1; Z1/2⇒Z;
行12  若 J = 0 则A⇒X否则A+Z⇒X;
行13  C: PBH(M-1, X, 2, 1, H, A1);
行14  Y+H[2]⇒Y; X+Z1⇒X;
行15  若X≤(B-ϕ-9)则转C否则;
行16  Y*Z⇒H[2]; Z⇒H[1];
行17  PBH(J, 0, 2, 0, H, A2);
行18  若 § ABS(S1-H[2])≤ϕ-8 则转 AB 否则
行19  H[2]⇒S1终; AB:
行20  H[2]⇒Y 终;
```

页002

```
行01  过程 PBH(J, X, N, W, H, A);
```

```
行02  值 J，X，N，W； 场H，A；
行03  始简变 I 1； 若W≤0.5 则否则转 BB；
行04  若 J ＝ 0 则始对于 I ＝ 1 步长 1 次数 N 执行
行05  H〔I〕⇒A〔1，I〕； 转 A11终否则；
行06  H〔1〕⇒A〔1， 1＋J〕； 对于K＝2 步长 1 次数
行07  N－1 执行始H〔K〕⇒ I 1； 对于 I ＝ 1 步长 1
行08  次数 J 执行若 § ABS( I 1－A〔K，I〕)≤ϕ－30
行09  则始ϕ30⇒A〔K，1 ＋ J〕； 转 AA 终否则(H〔1〕
行10  －A〔1，I〕)/( I 1－A〔K，I〕)⇒I 1； I 1⇒A〔K，
      1 ＋ J〕；
行11  AA：终； BB：对于K＝2 步长 1 次数 N－1
行12  执行始 0 ⇒ I 1； 对于 I ＝ J 步长－1 次数 J 执行
行13  始A〔K，1 ＋ J〕＋ I 1⇒ I 1； 若 § ABS( I 1)≤ϕ－30
行14  则ϕ30⇒ I 1 否则(X－A〔1，I〕)/ I 1⇒ I 1终；
行15  A〔K，1〕＋ I 1⇒H〔K〕终； A11：终；
```

19. 应　　用

设求四维数值积分

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4$$

这里引用几种先进的数论网格积分方法，其中有我国数学家华罗庚和王元提出的华罗庚–王元方法，公式为

$$\frac{1}{3000}\sum_{j=-3000}^{3000}\left(1-\frac{|j|}{3000}\right)\varphi\left(2j\cos\frac{2\pi}{11},\ 2j\cos\frac{4\pi}{11},\ 2j\cos\frac{6\pi}{11},\ 2j\cos\frac{8\pi}{11}\right)$$

C. B. 哈塞格罗尔（C. B. Haselgrore）方法，公式为

$$\frac{1}{2N+1}\sum_{i=-N}^{N}\varphi\ (2i\pi\cdot 0.17665781,\ 2i\pi\cdot 0.71327190,$$

$2i\pi\cdot 0.98875216,\ 2i\pi\cdot 0.60299793)$

H. M. 克罗博夫（H. M. Коробов）方法，公式为

$$\frac{1}{4097}\sum_{k=1}^{4097}\varphi\left(\frac{258}{4097}k,\ \frac{1533}{4097}k,\ \frac{105}{4097}k,\ \frac{2196}{4097}k\right)$$

本节用这些方法以及用本章提出的积分方法对几个给定的四维函数做计算，并将计算结果进行比较●。

例 1 求积分

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 16^3(x_1x_2x_3x_4)^3dx_1dx_2dx_3dx_4$$

解 根据四维积分和法公式，取 $h_i=\frac{1}{i}$，$I_i=h_i\Sigma f(\theta_j)$，$\theta_j$ 为第 j 小块积分域的中点。其计算结果如下：

点　数	h_i	I_i	四维积分和法	a_i
1	1	1	1	1
17	$\frac{1}{2}$	9.37890625	17.7578125	−0.0596736
98	$\frac{1}{3}$	12.7299192	20.5477286	−58.7073
354	$\frac{1}{4}$	14.0918121	18.3562781	0.00180872
979	$\frac{1}{5}$	14.7578905	16.1686625	59.3506
2275	$\frac{1}{6}$	15.1294587	15.9979931	0.0930453
3676	$\frac{1}{7}$	15.3568667	15.9991025	−295.114

下面列出的结果是被积函数 $f(x)$ 未周期化时计算的结果：

积　分　方　法	点　　数	结　　果	精　　度
克罗博夫方法	4097	15.3702855	0.6297145
华罗庚-王元方法	6000	15.1626420	0.837358
哈塞格罗尔方法	6000	16.0987014	−0.0987014
四维积分和法	3676	15.9991025	0.0008975

● 这种计算及其计算结果的比较，已在本章第16节中做过。

例 2　求积分

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 2^3(x_1+x_2-x_3+2x_4)^5 dx_1dx_2dx_3dx_4$$

解　计算结果比较如下：

积分方法	点数	结果	精度
克罗博夫方法	4097	48.1 601 486	-0.1 601 486
华罗庚-王元方法	6000	47.9 424 273	0.0 575 727
哈塞格罗尔方法	4000	48.0 694 675	-0.0 694 675
四维积分和法	979	47.9 999 999	0.00 000 001

本例精确值为48。

例 3　求积分

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (\cos x_1 \cos x_2 \cos x_3 \cos x_4)^{-2} dx_1dx_2dx_3dx_4$$

其原函数为

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathrm{tg}\, x_1\, \mathrm{tg}\, x_2\, \mathrm{tg}\, x_3\, \mathrm{tg} x_4$$

故精确积分值为　5.88 314 155。

解　根据四维有理逼近积分法，采用四维有理逼近法的过程INT4，其计算结果如下：

m	点数	结果	精度
3	81	9.12 504 947	3.24 190 792
4	256	5.90 405 581	0.02 091 426
5	625	5.87 352 861	0.00 961 294
6	1296	5.87 839 528	0.00 474 627
7	2401	5.88 321 914	0.00 007 759
8	4096	5.88 314 547	0.00 000 392

此算例在被积函数 $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ 未周期化情况下同三种数论网格积分方法的计算结果比较如下：

积分方法	点数	结果	精度
克罗博夫方法	4097	5.87 458 495	0.0 085 566
华罗庚-王元方法	6000	5.84 903 174	0.03 410 981
哈密格罗尔方法	6000	5.89 308 776	0.00 994 621
四维有理逼近法	4096	5.88 314 547	0.00 000 392

第六章　最优设计概论

1．什么是最优设计

最优设计是近十几年来，在计算机广泛应用的基础上，发展起来的一项新技术。这项新技术就是根据最优化原理、用最优化方法、在计算机上进行自动设计。概括地讲，最优设计就是在现有工程条件下，在许多的方案中，用计算机自动选出最优设计方案。

最优设计的数学描述，可以归纳如下：

目标　　　　　　　$\max F(X)$

约束方程

$$g_i(X)\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,p$$

$$h_j(X)=0,\quad j=1,2,\cdots,m$$

其中，$F(X)$ 为目标函数，$X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为设计变量，$g_i(X)$、$h_j(X)$ 为约束方程。

从数学上讲，最优设计就是在设计变量允许的范围内，找出一组参数X，使 $\max F(X)$ 成立。我们称X为最优设计方案，优选最优设计方案的设计过程称为最优化设计。

最优设计的几何意义是，如果有两个设计变量（x_1，x_2）时，那么目标函数$F(X)$是一个三维空间里的曲面；如果有n个设计变量（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）时，那么目标函数$F(X)$是一个$n+1$维空间里的"超曲面"。n维空间里的图形，虽然从几何学意义上难以想象，但是它可以模仿三维空间里的图形来类比。

优选最优方案的过程就像从山脚下的某一点出发，不断攀登，直至达到峰点的爬山过程。然而，从某一点开始爬山，到达山的

峰点的路径往往不是一条直路，常常需要多次改变方向和每次前进不同的行程。因此，整个优选过程需要进行多次的探索，每一次探索都必须确定“方向”和“行程”两个问题，整个设计过程就需要作一系列的试探和判断。如果需要确定寻优“方向”时，有随机方向法、梯度法、最速下降法等。在寻优“方向”确定之后，沿寻优“方向”求出“行程”时，也需要分成小的步长去探索，再由成功的步长相加，求得总的“行程”。在有了总的“行程”以后，就可以从初始爬山点前进到新的爬山点。然后，再把新的爬山点作初始点，重复上述过程，直到山的峰点为止。

在爬山的过程中，每一点就相当一个设计方案，山的峰点就是最优设计方案。

山可以有许多个峰，每一个峰相当一个局部最优设计方案。要求出最高山峰，就必须把每个山峰都找到，然后进行比较，把最高的山峰找出来，这个最高的山峰就是全局最优设计方案。

2. 问题的提出

电子计算机的广泛应用，已对人类社会生活的各个方面产生了巨大影响。电子计算机已经广泛地应用于国民经济的各个领域，应用于工、农业生产的技术设计、经济管理等各个方面。在工业技术设计方面，早已采用计算机辅助设计和最优设计，目前已经开展自动化设计系统的研制和应用。计算机的应用，已经使设计工作发生了深刻的变化，特别是最近十余年来，由于科学技术的进步，使最优设计的发展十分迅速。最优设计的应用极为广泛，从总体最优设计到分系统最优设计；从初步优选方案到结构最优设计、部件最优设计；从厂房布局到车间内的机床设备的配置；从投资的最优分配到最佳经济管理；……；等等。

在传统的设计过程中，一个设计参数的变化，需要重新对几个或更多个与其相关的参数进行大量的计算工作，因此，对方案探讨的次数是很有限的，一般只能在很少的几个主要参数间做些

调整。这样做出来的设计方案，通常只是一个满足设计技术指标的“可行”方案，而不是所有可行方案中的最优设计方案。随着科学技术的飞速发展，传统的人工设计已经不能满足生产实践的迫切需要，必须采用电子计算机进行最优设计。

应用电子计算机进行最优设计主要有下述四个特点：

（一）设计的思想是最优设计

传统的人工设计，虽然想达到最优设计，但是由于受到设计手段的限制，往往以达到设计指标要求为目的，而最优设计以达到最佳要求为目的。

（二）设计的手段是计算机系统

最优设计以先进的计算机为设计手段，因为计算机的运算速度快，探讨一个设计方案只需要很短的时间，从而就可以从大量的设计方案中，选出最优设计方案。

（三）设计的方法是最优化方法

最优设计的方法是最优化方法，一个设计方案设计变量的调整是计算机根据最优化方法，沿着改善设计方案的方向自动进行。在设计中可能要计算上千个方案，但是并不需要设计者去实际做这样多的方案，而是计算机自动的组成新设计方案。

（四）理论分析为主，试验为辅

传统的设计是以试验为主，而最优设计是以理论分析为主，而以试验为辅。

实际的设计工作需要通过试验来证实设计。由于试验的成本很高，周期又长，而计算机的机时经济，所以设计时先用计算机进行最优设计，选出最优设计方案，再选择有希望的几种方案用试验证实。如果试验测试的结果与最优设计的理论分析结果相符合，就说明理论的数学模型是准确的，从而其他设计方案就可以不必做试验了。这样一来，应用计算机进行最优设计，就可以缩短周期，提高设计质量，节省人力。

3. 参数的种类

工程设计中涉及的全部参数可以分为三种类型：一是设计参数，二是性能参数，三是中间参数。

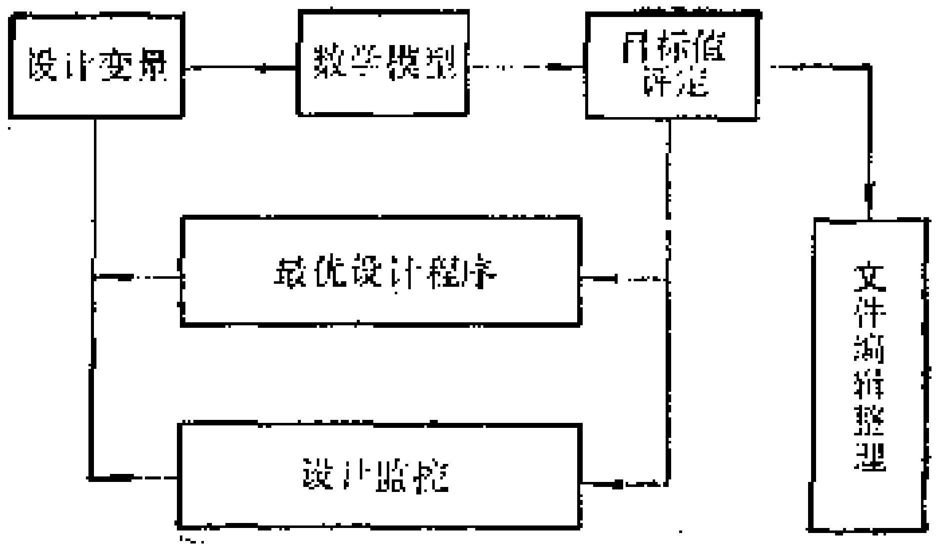
设计参数是设计方案的自变量，一项设计是由设计参数确定的，设计参数选择的不同，设计方案的性能也就不同。因此设计的目的就是如何选择一组恰当的设计参数，使设计的性能最优。

性能参数是用来描述设计性能指标、反映设计方案特点的，它通常由设计指标规定，是设计参数的因变量。设计时，一般不是直接选出所需要的性能参数，而是通过性能分析，才能给出合理的设计参数，再经过理论计算，得到相应的一组性能参数。

中间参数是由设计参数去计算性能参数的过程中产生的一些中间量，它是设计工作中不可缺少的数据。中间参数不但可以帮助分析设计方案的准确性，而且是进行其他各分系统设计的依据。特别是在设计工作过程中所形成的一些技术设计报告和技术文件上，这些中间参数将占有重要地位。有时，把中间参数存贮在数据库中，以备设计和生产时调用。

4. 最优设计系统的组成

各种工程设计专业的最优设计程序，其结构原理大体上是相同的，一般都可以归纳为如下六个主要部分：



（一）设计变量部分

每一组设计变量规定一个设计方案，第一个设计方案的设计变量，可以根据设计经验初步选定，以后的设计变量则是由计算机自动调整。第一个设计方案愈接近最优设计方案，计算机进行最优设计所需的时间就愈短。但是，第一个方案的理想程度仅影响计算机进行最优设计所需要进行计算的时间。这样，在设计时就可以减少确定第一个方案的估算工作量，甚至还可以在设计变量的约束范围内，任意取值组成初始设计方案，再经过计算机根据最优设计程序，自动调整设计变量，也可以获得最优设计方案。

（二）数学模型部分

数学模型部分的职能是，按设计变量部分给出的一组设计参数所组成的设计方案，计算这个方案的性能参数，以供给目标值评定部分使用。

数学模型部分主要依靠描述设计变量与性能参数内在机理的数学模型进行理论计算。因为不同的设计问题，有完全不同的数学模型和不同的要求。所以，数学模型的好坏直接影响设计质量；数学模型的准确性是反映理论水平高低的具体表现。为了提高最优设计的水平，必须充分掌握分系统的性能规律，加强基础理论的研究，充分地开展预先研究，并且要有综合全系统的数学方法。

数学模型的重要作用，不仅是因为设计工作中要用到它，而且数学模型是使设计与生产有机结合的关键，在“设计-生产”一体化系统中，把设计和生产所需要的数据“一元”化了，因而统一了依据。

（三）目标值评定部分

目标值评定部分的职能是，接受数学模型部分的信息，即目标函数的性能参数，并且评定由设计变量所组成的设计方案达到最优设计目标的程度。

如果性能参数满足了最优设计的目标要求，它就转入文件资料编辑整理部分，进行图表的绘制工作。若不满足最优设计的目标要求时，它将转入最优设计程序部分或转入设计监控部分继续进行设计工作。

最优设计的目标要求是设计时事先规定好的，然后以信息的形式输入计算机，目标值评定部分根据这些信息作为衡量设计方案好坏程度的标准。

（四）最优设计程序部分

最优设计程序是由很多个最优化方法的标准过程块所组成。它的职能是，接受数学模型和目标值评定两部分的信息，自动调整设计变量，形成下一次探索的新设计方案，并把继续工作的指令发给设计变量部分，继续进行设计。因此，有时把它称为自动设计过程，是它促使计算机进行不断的工作。

虽然各种工程设计问题各不相同，而且大部分设计模型是非线性问题，但是在设计中，它们所使用的最优化方法是可以通用的，不同的最优化方法，只不过对某个问题更为有效。这样，在设计最优设计程序部分时，就可以建立包含很多个最优化方法的标准过程块，以备使用时灵活调用。

最优化方法的标准过程，即是用某一种算法语言把最优化方法编成程序块，并达到一定的规格化要求。可以按积木式的方式，把各种标准过程组合成最优化程序。

在使用最优化设计程序时，设计工程师必须预先准备好三方面的内容，一是设计变量，二是设计的约束条件，三是最优设计的目标。

在寻求最优设计方案的过程中，往往把设计参数的一部分用常量代替，先固定下来，而去调整另一部分设计参数。作为调整的那一部分设计参数规定为“设计变量”。

在设计过程中，设计变量的个数也是不固定的，在方案探讨阶段，尽量把对设计方案性能有影响的因素都加以考虑。经过初

步计算以后，就会发现有些因素对设计方案性能影响较小，有些因素对设计方案性能影响较大。于是，可以先把影响较小的因素固定下来，再重点去调整那些对性能影响较大的因素。这样一来，在设计过程中，设计变量和设计变量的个数都在发生变化，因此，对它们要根据设计进程适时加以规定。

设计约束条件和最优设计目标一起组成总的设计要求，它们是计算机进行设计时判断每个设计方案“行不行”和“好 不 好”的一个标准。规定了这个标准，输入给计算机，就使计算机在进行设计运算和调整各个设计变量时有了判断依据。设$E(X)$表示不等式的约束条件，形式为：

$$E_1(X)\geqslant C_1$$
$$E_2(X)\geqslant C_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$E_i(X)\geqslant C_i$$

设 $h_j(X)$表示等式约束条件，形式为：

$$h_j(X)=0$$
$$j=1, 2, 3, \cdots, m$$

这里C_1，$C_2, \cdots, C_i$是设计时预先规定好的约束条件的 界 限。总之，每一个设计变量都有一个取值范围，把这个范围输入给计算机，才能进行最优设计。

最优设计的目标是使消耗最少，而经济效果最大，或者说以多、快、好、省地设计为目标。规定一项工程设计的目标以及对设计目标提出合理的要求，是较难做的一件工作，因为设计目标是否合理将直接影响最优设计的效果。如有的设计只偏重技术指标，而忽视技术经济效果，甚至不计经济成本，这样的设计目标，至少是不全面、不合理的。为了提出合理的设计目标，必须研究一项工程设计中都有哪些指标？对每项指标怎样要求？各个指标之间的关系如何？在一系列的指标中，有的是互相矛盾的，这就要求设计者去权衡它们。

在设计中，调整设计变量的目的，在于找到满足设计目标的最优设计方案。为了实现最优设计，需要设计“最优设计系统”。最优设计系统就是完成最优设计工作的一套程序系统，有时也被称为应用程序系统。

最优设计系统已经广泛地受到人们重视，已经研制和应用的如：总体方案最优设计程序系统，一个面向船体建造的集成系统——“HCS”，光学自动设计系统，结构最佳设计程序系统，印刷电路版自动布线程序系统等。

（五）设计监控部分

设计监控部分是在计算机进行最优设计时，为了实现“人-机”对话而设计的程序系统。该系统借助于在显示屏上用字符、数字和图形等方式，把计算机设计过程中的原始数据、中间参数和设计结果显示出来。通过这些显示信息，可以对设计方案进行处理、修改以及追加新的补充内容。在显示屏上可以观察计算机进行最优设计的运算全过程，查询设计的各种参数变化的情况，如果发现设计运算不正常时，可以用光笔调整某些设计参数，使计算机按着新的输入参数继续进行设计工作；或利用打印机输出中间参数，并进行检查。计算机图形显示系统的显示屏作为一个工作面建立起“人-机”联系，充分地发挥了计算机的设计能力，减轻了设计人员的繁琐的事务性工作。

（六）文件编辑整理部分

最优设计是采用电子计算机进行的，它可以提供最优设计方案的全部设计参数、性能参数以及需要的中间参数，还可以提供各种参数间的互相影响的偏导数值等。这样大的数据量，如果仍然靠人工去做数据的分类、整理以及制表、绘图、编辑技术报告等一系列工作，是适应不了计算机的设计效率的。因此，必须用计算机的文件编辑程序系统来完成上述的工作。

文件编辑整理部分的职能是，依靠文件编辑程序系统，完成最优设计的文件工作。文件编辑程序系统由很多个完成一定职能

的独立子程序块组成，它把计算机提供的信息按性质进行分类、编码、记录存档，并储存在数据库中。然后，把需要输出的设计结果，整理成表格、绘制成图、打印出技术报告，提供给用户。这样，设计部门拿到结果后就可以直接应用在设计工作中。

5. 数学模型

数学模型就是用数学方法反映一个系统、一项设计中诸变量之间的变化关系的数学式子，用它来描述设计参数、环境参数与设计的性能参数之间的变化规律，在计算机上利用数学模型进行最优设计，计算设计方案的性能。在不同的设计阶段，采用的数学模型是不同的，如在总体方案设计阶段，常使用解析的总体设计参数选择数学模型。因为在总体方案设计阶段，要求用很少的计算机机时就能完成大量的方案探讨工作，所以采用解析的总体设计参数选择数学模型就很经济。

在设计数学模型的程序时，应考虑的主要问题如下：

（一）各专业过程应独立设计

要进行数学模型的程序设计，应该把各个专业过程独立设计，因为在不同的工程设计中，各专业的数学公式总会有所不同，这样只要修改局部的专业过程就可以满足新工程设计的特殊情况。所以设计数学模型程序时，把数学模型分成若干个独立的部分，然后再进行程序块的设计，使整个数学模型程序成为一个是由独立的程序块组合而成的整体。

（二）处理好计算精度和计算时间的问题

在进行最优设计时，需要反复几千次地访问数学模型程序，如果专业过程需要机时过多，那么整个数学模型程序就要花费很多机时，这是不经济的。这就要求每个专业过程的计算时间尽量短。为了尽量节省计算机机时，对于选择方案的比较性的设计计算，在满足设计要求的前提下，可以把计算网格分得粗些；而在方案确定后的初步设计理论计算中，为了提高参数的精确程度，

应加密分点，使网格分得细些。有时还要省略某些对提高参数精度无明显贡献的迭代运算。

（三）实现方法

在方案设计中，有两种处理方法，一种是分析叠加法，即按专业过程分别计算总量的每个局部量，然后叠加起来；另一种是偏差分析法，即按某一个设计方案为标准，计算新的设计方案的设计性能与标准设计方案性能的偏差，然后估计新的设计方案的特性偏差，以此做进一步改进设计方案的依据。

在数学模型源程序设计时，应按照逐步改善程序质量的原则进行。设计时，首先使程序系统能够稳定工作，然后逐步改进数学模型。

6．目标值评定

在最优设计系统中，根据目标函数来分析、判断设计方案达到最优化的程度。目标函数在不同的工程设计问题中，有完全不同的数学表达形式，在一个设计课题中，怎样具体的规定目标函数和目标值，要根据具体的问题来决定。目标值是衡度设计方案好坏程度，并作为定量评定的指标。关于目标函数的设计问题，阐述如下：

（一）目标函数为常数

设一项设计方案的目标函数$F(X)$，其目标值为

$$F(X)=C$$

其中，$X=X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为设计变量；$C=C(C_1,C_2,\cdots,C_n)$为指标参数值，在这里规定一个方案的目标值等于常数。

（二）最大最小问题

在某些设计方案中，要求某些指标最大，同时又要求指标最大的方案中，某些指标最小。如在某项设计中，要求可靠性高，但成本要最低。这类问题可归纳成如下形式：

$$\min\ \max F(X)$$

这种分层求出每个目标的办法，是解决多目标问题的一种常用方法。

（三）多个物理量最大或最小

在某些设计问题中，要求两个或多个物理量都取最大，这时可以统一用一个目标值来表达。为此，可以定义一个新目标函数值等于这两个物理量模的平方和，然后求总和为最大的方案。如果用A和B表示这些物理参数时，则新目标函数可以规定成如下形式：

$$F(X)=k_1A^2+k_2B^2$$

其中k_1和k_2是加权系数。如果当加权系数为1时，表示对两个物理指标同样重视。应该指出，这两个物理指标可以是两个不同因次的物理量，如k_1A^2是距离单位，k_2B^2是重量单位，两者相加，显然没有什么物理意义，只不过是把两个量相加作为对方案的评价指标。

类似地情况，如果设计中，要求某个性能指标最大，而要求另一个指标最小，这时新的目标函数可以取两个指标相除的形式。设求A最大，求B最小，则目标函数

$$F(X)=\frac{B}{A}$$

于是变成求

$$\min F(X)$$

（四）含有约束条件的目标函数

目标函数是根据工程设计要求具体规定的，它可以用多种方法规定。在目标函数确定之后，计算机对每个设计方案，都计算目标函数的指标值，并且自动地选择指标最高的方案，也就是最优设计方案。为了处理好目标函数与约束条件，通常可以运用如下三种方法之一，将约束条件统一在目标函数里。

（1）将约束条件和某一个设计变量对消的处理办法

有时设计变量与约束条件有较直接的关系。如一个圆柱形容

器的容积有约束，这个容积的约束条件主要由容器的长度和直径两个设计变量来决定，这时，可以只保留一个设计变量长度，而将另一个设计变量直径根据容器容积的约束条件，在程序中计算出来。这样，约束条件和设计变量相对消的办法减少了设计变量，对最优设计程序是十分有利的。

（2）把约束条件作为先决条件

首先，对每一个设计方案，检验它的设计性能参数，看是否在约束范围之内。如果这个设计方案不满足约束条件，就将这个方案废除，另选新的设计方案，进行检验。如果设计方案满足约束条件，再比较目标函数值。也就是说，把设计的约束条件作为“行不行”的先决条件，而将目标函数作为“好不好”的条件。如果经过检验，确定是“不行”的设计方案，就不去考虑“好不好”的问题。这样，就能提高计算机的使用效率。

（3）代价函数法

所谓代价函数就是考虑到，当设计变量超过约束条件时，可以按着设计变量超出约束条件的程度不同，在目标函数值中作相应的处理。采用代价函数法，相当于对目标函数的曲面作一定程度的改造，将超过约束条件的部分，做成一个一次下倾的斜坡。对于不等式约束条件的情况，把超过约束的一边作为单面斜坡；对于等式约束条件的情况，把超过约束条件的部分作为双面斜坡。

设代价函数为

$$P(X)=\sum_{i=1}^{t}(E_i-1)^2+\sum_{j=1}^{p}(F_j-1)^2\delta_j$$

式中，$E_i=1$ 为等式约束条件，$i=1,2,\cdots,t$；$F_j\leqslant1$ 为不等式约束条件，$j=1,2,\cdots,p$。如果 $F_j\leqslant1$，则$\delta_j=0$；反之$\delta_j=1$。

经过用代价函数 $P(X)$ 处理后，新的目标函数具有如下形式：

$$Y(X)=F(X)-WP(X)$$

式中，$F(X)$为原来的目标函数；W为一个加权系数。

除了采用代价函数方法处理约束条件外，还可以用其它办法，如超过约束条件后，目标函数曲面可以按照约束条件内曲面斜率向外继续延拓。

7. 最优设计程序

最优设计程序系统是由一系列完成不同功能的程序块所组成。最优设计程序的功能在于不断地向改善目标函数值的方向自动选择设计变量，组成新的设计方案，逐步实现向目标函数曲面的峰值探索的这一过程。

在整个最优设计过程中，需要有多次的探索，在每次探索中，都必须决定“方向”和“行程”两个问题。虽然可以知道目标函数曲面，但是这个曲面的全貌是不清楚的，只有在对每个具体方案求出性能参数之后，才能知道该点的目标值大小，从而选出每次前进的最优“方向”及前进的最佳“行程”。

在最优设计中，有的课题的目标函数曲面很复杂，会出现多峰现象，有时在最高峰之外还会有次最高峰。在设计中，有时也可能由于采用的方法或程序设计的原因，而使寻优过程在没有到达最高峰之前就停止前进了。为了避免这种情况的出现，可以从另一个初始点出发，重新探索。如果从不同的初始点都能求出相同的极值点，说明这个峰值是最高的峰值。

判断寻优过程何时可以停止，大致有以下几种方法：

（1）设计变量改进很小时，即$|x_{i+1}-x_i|\leqslant\varepsilon$（计算精度）；

（2）目标函数值改进很小，即$|F(X_{i+1})-F(X_i)|\leqslant\varepsilon$（计算精度）；

（3）满足总寻优次数k或超过失败次数m。

为了使目标函数曲面变化规正，需要对设计变量做一定的数学处理。首先对设计变量进行严格的检验，把有相互作用的设计变量排除掉，应使设计变量之间为线性无关。

其次设计变量要进行规格化。有时在某些设计中，设计变量之间的量级相差很大，甚至相差5个数量级以上，这种情况对处理寻优步长很不方便，特别是，对保证设计精度也有一定困难。为了克服上述问题，要对设计变量做规格化处理，其规格化公式为

$$x_i=\frac{\bar{x}_i-A_i}{B_i-A_i}$$

其中，$\bar{x}_i$为实际设计变量；A_i为$\bar{x}_i$的下限，B_i为$\bar{x}_i$的上限。经过规格化后，在最优设计程序中，它所处理的设计变量都是在

$$0\leqslant x_i\leqslant 1$$

范围内。

8. 等式约束条件的处理方法

在最优设计问题中，主要在于选取适当的设计参数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使目标函数$F(x_1, x_2,\cdots,x_n)$为极小，而诸参数$x_1, x_2,\cdots,x_n$又必须满足一定的约束条件。约束条件通常可以分为两类，一类为不等式约束

$$g_i(x_1, x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$$
$$i=1,2,\cdots,p$$

另一类为等式约束

$$h_j(x_1, x_2,\cdots,x_n)=0$$
$$j=1,2,\cdots,m$$

在极小化过程中对约束条件的处理是一个很重要的问题。本节将介绍一些常用的处理等式约束条件的方法。

（一）直接代入法 设约束条件为

$$h_j(x_1, x_2,\cdots,x_n)=0 \tag{6-1}$$
$$j=1,2,\cdots,m,\quad m<n$$

如果从方程组（6-1）可以直接解出m个变数

$$x_1=x_1(x_{m+1}, x_{m+2},\cdots,x_n)$$

$$x_2 = x_2(x_{m+1},\ x_{m+2}, \cdots, x_n)$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_m = x_m(x_{m+1},\ x_{m+2}, \cdots, x_n)$$

把它们代入求极值的目标函数$F(x_1,\ x_2, \cdots, x_n)$中，便得出一个含$n-m$个变数的函数

$$F(x_{m+1},\ x_{m+2}, \cdots,\ x_n)$$

$$= F(x_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n), x_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n), \cdots, x_{m+1}, \cdots, x_n)$$

这样，在约束条件下，求n维函数$F(x_1,\ x_2, \cdots, x_n)$的极值问题就变成了求$n-m$维函数$F(x_{m+1},\ x_{m+2}, \cdots, x_n)$的无约束的极值问题。

这是一种消元的方法，在实际上并不一定要解出其中的m个变数，只要根据等式约束条件消去m个变数就行了。也可以用程序来实现，即根据$x_{m+1}, \cdots, x_n$来计算$x_1,\ x_2, \cdots, x_n$。

（二）制约函数法 制约函数法是处理等式约束的一种常用的方法。设求极小值的目标函数为$F(x_1,\ x_2, \cdots, x_n)$，约束条件为式（6-1）。设

$$\overline{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} p_j h_j^2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中p_j称做制约参数，它们是适当的大值正数，$\sum\limits_{j=1}^{m} p_j h_j^2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称做制约函数。于是把求$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在约束条件式（6-1）下的极小值问题化为求$\overline{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的无约束极值问题。在迭代过程中，制约参数的值应逐次加大。对于一个约束的情形，当p_j趋于无穷大时，无约束问题的解收敛于原来的约束极值问题的解。当应用制约函数法化约束极值问题为无约束极值问题时，制约参数的选择很重要。如果p_j的值取得较小，则所得极小点偏离约束就较远；而p_j值选得很大时，目标函数$\overline{F}(x_1,\ x_2, \cdots, x_n)$的形状变坏，使求极小点的计算发生困难。

上述极值问题也可以应用不定乘数法，把求有约束极值问题

化为求目标函数

$$\overline{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

的无约束极值问题，其中不定乘数 λ_j 应作为独立的变量来看待。从微分学知，在极值点处，极值点将满足方程

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial h_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial x_j} = 0$$

用$\frac{\partial h_k}{\partial x_j}$乘上式，并对 i 求和，得

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial h_k}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial h_k}{\partial x_j}$$

另一方面，目标函数 $\overline{F}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在极值点处应满足方程

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + 2\sum_{j=1}^{m} p_j h_j \frac{\partial h_j}{\partial x_j} = 0$$

用$\frac{\partial h_k}{\partial x_i}$乘上式，并对 i 求和，得

$$2\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} p_j h_j \frac{\partial h_j}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial h_k}{\partial x_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial h_k}{\partial x_i}$$

分析比较上述结果可以得出

$$2p_j h_j = \lambda_j$$

或

$$h_j = \frac{\lambda_j}{2p_j}$$

上式说明偏离量 h_j 与制约参数 p_j 成反比，p_j 取值愈大，所论方案偏离最优方案愈小。

9. 最优化技术的研究和应用概况

对最优化问题，很早以前就有人进行了研究。例如，一定周

长围成的平面图形，其面积为最大时的平面图形是什么？在一定表面积的条件下，什么形状具有最大容积？

在第二次世界大战以前，处理最优化问题的数学方法主要是古典的微分法和变分法。第二次世界大战期间，由于军事上的需要，提出了一些用上述古典方法解决不了的最优化问题。例如，轰炸机的最佳投弹位置问题，防空系统的最佳布局问题等。

随着科学技术的发展和电子计算机的广泛应用，从而产生了一些新的解法。这些方法中，一类为用导数的方法，如最小二乘法、梯度法、共轭斜量法、最速下降法和变尺度法等；另一类为不用导数的，也称直接法。在直接法中，又分为两种，一种是消去法，即通过试验将最优值所在的范围逐步缩小，一直缩小到要求的精度为止，如0.618法、裴波那奇数法、平行线法等；另一种是爬山法，好象爬山一样，从初始方案出发，逐步向更好的设计方案方向移动，使目标值逐步上升，直至找到最优设计方案为止。这一类方法中，还有步长加速法、步长和方向双加速法、方向加速法等。

除了上述两类最优化方法外，还有本书作者提出的最优化方法，如极值有理法、离散点极值有理法、极值迭代法、n维有理逼近法、n维极值有理法等。

最优化技术主要应用在最优设计、最优控制、最佳管理、试验最优设计、数值方法最优化问题等。

最优化技术问题列举如下：

（一）函数的极值问题

设计工作的目的就是在一定条件下实现最优设计，这个最优设计问题常常由一些设计参数$x_1, x_2, \cdots, x_n$来决定方案。

根据数学上外尔斯特拉斯定理，“在变量所在闭区域G上的连续函数，在区域G的内部或边界上一定能达到它的最大值”。如果目标函数$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在设计范围内连续，使目标函数$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$达到极大值的一组设计参数$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

总是存在。如果目标函数$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在设计范围内连续可微，并且在点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$处达到$\min F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则目标函数$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的各一阶导数在点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$处为零。但应该指出，这并不是充分条件。例如，函数$f_1(x)=x^3$，$f_2(x_1, x_2)=x_1x_2$，显然，其一阶导数为零的点并非极值点。因此，判别目标函数的各一阶导数为零的点是否为极值点，还应该由函数的二阶以上的导数来判断。

如果从全局来看函数的极值点可能不止一个，要求出整个区域上的最大或最小值时，就必须将所有内部极值点及边界上的极值点进行比较，找出总的最大值点或总的最小值点。

（二）变分问题

平面内有A、B两点，联接A、B两点的曲线，记为$y(x)$。如果一个质点D在重力作用下，自A点到B点沿着曲线$y(x)$运动。试问，找一条什么样的曲线$y(x)$，能使质点D所花的时间T为最小。这个问题是古典的变分问题。时间T为

$$T=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}dx$$

其中，g为重力加速度。时间T显然与曲线$y(x)$有关，记为$T=T(y(x))$，这里的T是函数$y(x)$的函数，这样的函数在数学上称为“泛函”。

于是，求时间T最小的问题归结为，在那些可能取的函数集合中，找一条曲线$y(x)$，使泛函

$$T=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}dx$$

取极小值，且满足约束的边界条件

$$y(x_A)=0, \quad y(x_B)=C$$

广而言之，求泛函极值问题称为变分问题。

通常，把求函数极值问题称为参数寻优问题，而把求泛函极值问题称为函数寻优问题，也称轨道寻优问题。为了进一步分析

两类寻优问题，下面列出一些例子，它们虽然简单，却有一定的代表性。

例如，两点边值问题。设微分方程

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2 y$$

$$y(0)=0$$

$$y(T)=y_T \qquad \left(T\neq\frac{k\pi}{\omega},\ \ k=0,1,\cdots\right)$$

其中ω为已知。

求初始参数$y'(0)$，使方程的解$y(t)$满足边界条件，也即使目标函数

$$F(y(0))=[y(T)-y_T]^2$$

达到极小值。

又如，模型参数匹配问题。实际物理系统在$x(t)$输入下，输出为$\eta(t)$，$\eta(t)$是已知的。希望找一个二阶环节模拟的实际系统，使其输出也是$\eta(t)$。其二阶环节为

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha_1\frac{dy}{dt}+\alpha_2 y=x(t)$$

$$y(0)=0$$

$$\dot{y}(0)=0$$

目标函数设为

$$F(\alpha_1,\ \alpha_2)=\int_0^{t_1}[y(t)-\eta(t)]^2dt$$

这个问题归结为寻找参数α_1和α_2，使

$$\min F(\alpha_1,\ \alpha_2)$$

成立。

总之，参数寻优问题的一般提法是，设动态系统一阶微分方程

$$\dot{y}(t)=G(Y,A)$$

其中

$$y(t)=(y_1(t),\ y_2(t),\cdots,y_n(t))^T$$

为系统状态向量，

$$A=(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_m)$$

为系统控制向量，

$$G(Y,A)=(f_1(y_1,\ y_2,\cdots,y_m,\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_m,\ t),\cdots,$$
$$f_n(y_1,\ y_2,\cdots,y_m,\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_m,\ t))^T$$

其中元素 α_i 可能是系数、初值、特征值等。

目标函数$F(A)$，可以表示成如下形式之一：

$$F(A)=\int_0^{t_1}G(Y,A,t)dt$$

$$F(A)=G(Y(t_1),A,t_1)$$

$$F(A)=\sum_{i=1}^{k}G_i(Y(t_i),\ A,t_i)$$

其中 t_1、t_i 是给定的时刻。这个问题归结为求参数向量 A，使 $F(A)$达到最小。

最优控制问题是典型的函数寻优问题。例如，简单的最速控制问题。设给定一个飞行体初始位置、初始速度、最终位置、最终速度，通过控制作用在运动体上的有界力函数，使该飞行体从初始位置达到最终位置，同时满足初始速度和最终速度的规定，而所需的飞行时间为最短。设飞行体的运动方程式为

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2 \qquad x_1(0)=x_1^0 \qquad x_1(t_F)=0$$

$$\frac{dx_2}{dt}=u(t) \qquad x_2(0)=0 \qquad x_2(t_F)=0$$

其中，x_1 表示位置，x_2 表示速度，t_F 表示最终时刻。

在$|u(t)|\leqslant 1$的条件下，求出函数$u(t)$，使 t_F 为最小。t_F 为函数$u(t)$的函数，即

$$t_F=F(u(t))$$

如果给定一个函数$u(t)$，就可以求得一个 t_F。把 t_F 称为泛函。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t), U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而$Y(t)$、$G(Y(t), U(t))$都是 n 维向量，$U(t)$为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中V是允许控制函数集合。试求一个控制函数$U(t)$，使系统从给定的初始状态Y_0达到终点状态Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t), U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而$Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$都是 n 维向量，$U(t)$为m维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中V是允许控制函数集合。试求一个控制函数$U(t)$，使系统从给定的初始状态Y_0达到终点状态Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而$Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$都是 n 维向量，$U(t)$为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中V是允许控制函数集合。试求一个控制函数$U(t)$，使系统从给定的初始状态Y_0达到终点状态Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而$Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$都是 n 维向量，$U(t)$为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中V是允许控制函数集合。试求一个控制函数$U(t)$，使系统从给定的初始状态Y_0达到终点状态Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。

这是一个函数寻优问题，也是自动控制中的最速控制问题。

又如，轨道转换和会合问题。设靶机在高度 y_F 上做水平飞行，速度为 v_F。火箭的初始位置在高度 y_0 的水平轨道上，飞行速度为 v_0，推力为常数 T，初始质量为 m_0，质量变化率为 $\dot{m}$，重力加速度为 g。设火箭的运动方程式为

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x} \qquad \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{T\cos u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

$$\frac{dy}{dt}=\dot{y} \qquad \frac{d\dot{y}}{dt}=\frac{T\sin u(t)}{m_0+\dot{m}(t-t_0)}$$

其中，函数 $u(t)$ 为仰角。试求火箭从水平初始轨道

$$x(t_0)=v_0t_0$$

$$\dot{x}(t_0)=v_0$$

转变到靶机轨道，并达到给定位置和速度

$$x(t_F)=v_Ft_F+C \qquad \dot{x}(t_F)=v_F$$

$$y(t_F)=y_F \qquad \dot{y}(t_F)=0$$

在火箭的整个运动过程中，通过控制火箭的仰角，使总燃料消耗量为最小，即 $\dot{m}(t-t_0)$ 或时间 t_F 为最小。在这个问题中，t_0 和 t_F 都是未知的。

总之，函数寻优问题的一般提法是，设动态系统方程为

$$\dot{y}(t)=G(Y(t),\ U(t))$$

其中

$$Y(0)=Y_0$$
$$Y(t_F)=Y_F$$

而 $Y(t)$、$G(Y(t),\ U(t))$ 都是 n 维向量，$U(t)$ 为 m 维控制向量。约束条件为

$$U(t)\in V$$

其中 V 是允许控制函数集合。试求一个控制函数 $U(t)$，使系统从给定的初始状态 Y_0 达到终点状态 Y_F，并使目标函数

$$F(U(t))=\int_0^{t_F}G(Y(t),\ U(t))dt$$

达到最小。