目　录

第一章　微分流形

§1　微分流形的定义

流形的概念是欧氏空间的推广。粗略地说，流形在每一点的近傍和欧氏空间的一个开集是同胚的，因此在每一点的近傍可以引进局部坐标系。流形正是一块块"欧氏空间"粘起来的结果。

我们用 $\boldsymbol{R}$ 表示实数域。设

(1) $$\boldsymbol{R}^m=\{x=(x^1,\cdots,x^m)\mid x^i\in\boldsymbol{R},\ 1\leqslant i\leqslant m\},$$

即 $\boldsymbol{R}^m$ 是全体有序的 m 个实数所形成的数组的集合，实数 x^i 称为点 $x\in\boldsymbol{R}^m$ 的第 i 个坐标。对于任意的 $x,y\in\boldsymbol{R}^m$，$a\in\boldsymbol{R}$，命

(2) $$\begin{cases}(x+y)^i=x^i+y^i,\\(ax)^i\quad=ax^i;\end{cases}$$

这样就在 $\boldsymbol{R}^m$ 中定义了加法和对实数的乘法，使 $\boldsymbol{R}^m$ 成为实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的 m 维矢量空间。

空间 $\boldsymbol{R}^m$ 除上述线性构造外，还有典型的拓扑构造。对 $x,y\in\boldsymbol{R}^m$，命

(3) $$d(x,y)=+\sqrt{\sum_{i=1}^m(x^i-y^i)^2}.$$

容易验证，函数 $d(x,y)$ 满足下面三个条件：

1）$d(x,y)\geqslant0$，且等号只在 $x=y$ 时成立；

2）$d(x,y)=d(y,x)$；

3）对任意的 $x,y,z\in\boldsymbol{R}^m$，有不等式

$$d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z).$$

所以 $d(x,y)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的距离函数，使 $\boldsymbol{R}^m$ 成为度量空间。作为度量空间，$\boldsymbol{R}^m$ 有自然的拓扑结构①：以开球 $B_{x;r}=\{y\in\boldsymbol{R}^m\mid d(x,y)$

① 关于拓扑学的基本概念，可看：江泽涵著"拓扑学引论"，上海科学技术出版社，1978年版。

$<r\}$ $(x\in \boldsymbol{R}^m, r>0)$ 的并集为开集。以(3)为距离函数的 m 维矢量空间 $\boldsymbol{R}^m$ 称为 m 维欧氏空间。

设 f 是定义在开集 $U\subset\boldsymbol{R}^m$ 上的实函数，如果 f 的所有直到 r 阶的偏导数都存在并且连续，则称 f 是 r 次可微的，或称 f 是 C^r 的。这里 r 可以是所有的正整数。如果 f 有任意阶的连续偏导数，则称 f 是 C^∞ 的。如果 f 是解析的，也就是 f 在 U 的每一点的一个邻域内能表成收敛的幂级数，则记 f 是 C^ω 的。

定义1.1 设 M 是 Hausdorff 空间。若对任意一点 $x\in M$，都有 x 在 M 中的一个邻域 U 同胚于 m 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的一个开集，则称 M 是一个 m 维流形(或拓扑流形)。

设定义1.1中提到的同胚映射是 $\varphi_U:U\to\varphi_U(U)$，这里 $\varphi_U(U)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，则称 (U,φ_U) 是 M 的一个坐标卡。因为 φ_U 是同胚，对任意一点 $y\in U$，可以把 $\varphi_U(y)\in\boldsymbol{R}^m$ 的坐标定义为 y 的坐标，即命

$$u^i=(\varphi_U(y))^i,\quad y\in U,\ i=1,\cdots,m, \tag{4}$$

我们称 u^i $(1\leqslant i\leqslant m)$ 为点 $y\in U$ 的局部坐标。

设 (U,φ_U) 和 (V,φ_V) 是流形 M 的两个坐标卡，若 $U\cap V\neq\varnothing$，则 $\varphi_U(U\cap V)$ 和 $\varphi_V(U\cap V)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中两个非空的开集，并且映射

$$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}|_{\varphi_U(U\cap V)}:\varphi_U(U\cap V)\to\varphi_V(U\cap V)$$

建立了这两个开集之间的同胚，其逆映射就是 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}|_{\varphi_V(U\cap V)}$。

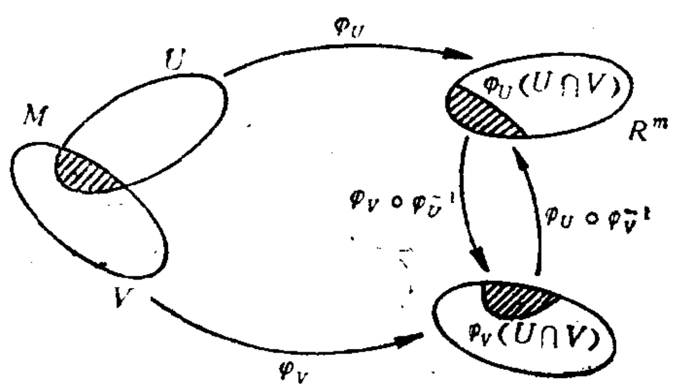

图 1

因它们是从欧氏空间的一个开集到另一个开集的映射，所以用坐标表示时 $\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$ 和 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ 分别表为欧氏空间的开集上的 m 个实函数(见图1)：

(5) $$y^i=f^i(x^1,\cdots,x^m)=(\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}(x^1,\cdots,x^m))^i,$$
$$(x^1,\cdots,x^m)\in\varphi_U(U\cap V);$$

(6) $$x^i=g^i(y^1,\cdots,y^m)=(\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}(y^1,\cdots,y^m))^i,$$
$$(y^1,\cdots,y^m)\in\varphi_V(U\cap V).$$

因为 $\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$ 和 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ 是互逆的同胚映射，所以 f^i 和 g^i 都是连续函数，并且

(7) $$\begin{cases} f^i(g^1(y^1,\cdots,y^m),\cdots,g^m(y^1,\cdots,y^m))=y^i, \\ g^i(f^1(x^1,\cdots,x^m),\cdots,f^m(x^1,\cdots,x^m))=x^i. \end{cases}$$

我们称两个坐标卡 (U,φ_U) 和 (V,φ_V) 是 C^r-相容的，如果 $U\cap V=\varnothing$，或者在 $U\cap V\neq\varnothing$ 时坐标变换函数 $f^i(x^1,\cdots,x^m)$ 和 $g^i(y^1,\cdots,y^m)$ 都是 C^r 的。

定义1.2 设M是一个m维流形。如果在M上给定了一个坐标卡集 $\mathscr{A}=\{(U,\varphi_U),(V,\varphi_V),(W,\varphi_W),\cdots\}$，满足下列条件，则称 $\mathscr{A}$ 是M的一个 C^r 微分结构：

1）$\{U,V,W,\cdots\}$是M的一个开复盖；

2）属于 $\mathscr{A}$ 的任意两个坐标卡是 C^r-相容的；

3）$\mathscr{A}$是极大的，即：对于M的任意一个坐标卡$(\tilde{U},\varphi_{\tilde{U}})$，如果它与属于 $\mathscr{A}$ 的每一个坐标卡都是 C^r-相容的，则它自身必属于 $\mathscr{A}$。

若在M上给定了一个 C^r-微分结构，则称M是一个 C^r-微分流形。属于给定的微分结构的坐标卡称为微分流形M的容许的坐标卡。今后谈到微分流形M上点 p 附近的局部坐标系都是指包含 p 点的容许坐标卡给出的坐标系。

注记1 在定义1.2中条件1)和2)是基本的。不难证明，若坐标卡集 $\mathscr{A}'$满足条件1)和2)，则对任意的正整数 s，$0<s\leqslant r$，存在唯一的一个 C^s-微分结构 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}'\subset\mathscr{A}$。实际上，如果用 $\mathscr{A}$ 表示与 $\mathscr{A}'$ 中的坐标卡都是 C^s-相容的坐标卡的集合，则 $\mathscr{A}$ 是一个 C^s-微分结构，它是由 $\mathscr{A}'$ 唯一确定的。所以在构造微分流形时，只要指出它的一个相容的坐标复盖就可以了。

注记 2 在本书中，我们还假定流形M是满足第二可数公理的拓扑空间。即：M有可数的拓扑基(见第 1 页脚注)。

注记 3 若在M上确定了一个C^∞-微分结构，则简称M为光滑流形；若在M上给定了一个C^ω-微分结构，则称M为解析流形。本书主要讨论光滑流形；在不致引起混淆时，常把光滑流形简称为流形。

例 1 $M=\boldsymbol{R}^m$. 取$U=M$，φ_U是恒同映射，则$\{(U,\varphi_U)\}$是$\boldsymbol{R}^m$的一个坐标复盖，由此确定了$\boldsymbol{R}^m$的光滑流形结构，称为$\boldsymbol{R}^m$的标准微分结构。

例 2 m维单位球面

$$S^m=\{x\in \boldsymbol{R}^{m+1} \mid (x^1)^2+\cdots+(x^{m+1})^2=1\}.$$

以$m=1$为例，取如下的四个坐标卡：

$$(8)\quad \begin{cases} U_1\{x\in S^1 \mid x^2>0\}, & \varphi_{U_1}(x)=x^1, \\ U_2\{x\in S^1 \mid x^2<0\}, & \varphi_{U_2}(x)=x^1, \\ V_1\{x\in S^1 \mid x^1>0\}, & \varphi_{V_1}(x)=x^2, \\ V_2\{x\in S^1 \mid x^1<0\}, & \varphi_{V_2}(x)=x^2. \end{cases}$$

很清楚，$\{U_1,U_2,V_1,V_2\}$构成S^1的一个开复盖。在交集$U_1\cap V_2$上有(见图2)

$$(9)\quad \begin{cases} x^2=\sqrt{1-(x^1)^2}, \\ x^1=-\sqrt{1-(x^2)^2}, \end{cases}$$

$$x^1<0,\quad x^2>0,$$

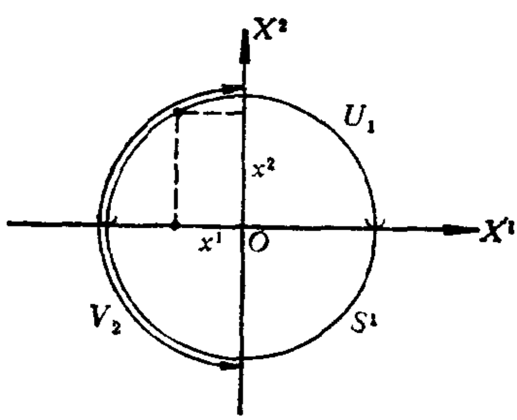

图 2

它们都是C^∞-函数，所以(U_1,φ_{U_1})和(V_2,φ_{V_2})是C^∞-相容的。同理可证，其余的任意两个坐标卡也都是C^∞-相容的。因此，上面给出的坐标卡使S^1成为一维的光滑流形。

当$m>1$时，S^m上的光滑结构可以类似地定义。

例 3 m维射影空间P^m。

在 $\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}$中定义如下的关系～：设 $x,y\in\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}$，$x\sim y$ 当且仅当存在非零实数 α，使 $x=\alpha y$。显然，～是等价关系。对于 $x\in\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}$，$x$ 的～等价类记作

$$[x]=[x^1,\cdots,x^{m+1}].$$

所谓m维射影空间 P^m 就是指商空间

$$P^m=(\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\})/\sim=\{[x]\mid x\in\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}\}. \tag{10}$$

数组$(x^1,\cdots,x^{m+1})$，称为点$[x]$的齐次坐标，它被$[x]$确定到差一个非零实因子。P^m 也就是 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中所有过原点的直线构成的空间。

命

$$\begin{cases} U_i=\{[x^1,\cdots,x^{m+1}]\mid x^i\neq 0\}, \\ \varphi_i([x])=({}_i\xi_1,\cdots,{}_i\xi_{i-1},{}_i\xi_{i+1},\cdots,{}_i\xi_{m+1}), \end{cases} \tag{11}$$

其中$1\leqslant i\leqslant m+1$，${}_i\xi_h=x^h/x^i$ $(h\neq i)$。显然，$\{U_i,\ 1\leqslant i\leqslant m+1\}$构成 P^m 的开复盖。在 $U_i\cap U_j$ $(i\neq j)$上有坐标变换

$$\begin{cases} {}_j\xi_h=\dfrac{{}_i\xi_h}{{}_i\xi_j} \quad (h\neq i,j), \\ \\ {}_j\xi_i=\dfrac{1}{{}_i\xi_j}. \end{cases} \tag{12}$$

所以$\{(U_i,\varphi_i)\}_{1\leqslant i\leqslant m+1}$给出了 P^m 的光滑结构。

注记 上面三个例子给出的坐标复盖都是C^ω-相容的；所以，实际上它们分别确定了 $\boldsymbol{R}^m$, S^m 和 P^m 作为解析流形的结构。

例 4 Milnor 怪球。

在同一个拓扑流形上可能有不同的微分结构。J.Milnor 在1956年给出一个著名的例子(见 *Annals of Math.*,64(1956),399—405)，指出：在同胚的拓扑流形上确实存在彼此不同构的光滑流形结构(见定义 1.3 下面的注记)，因此微分结构有独立于拓扑结构的意义。关于 Milnor 怪球的完全的叙述和证明已超出本书的范围，这里只作简要的说明。

在 S^4 上取两个对径点 A,B。命

(13) $$U_1=S^4-\{A\},\ U_2=S^4-\{B\},$$

则 U_1 和 U_2 构成了 S^4 的开复盖。现在要把平凡的球丛 $U_1\times S^3$ 与 $U_2\times S^3$ 粘起来得到以 S^4 为底空间的三维球丛 Σ^7。

在球极投影下，U_1 和 U_2 分别和 $\boldsymbol{R}^4$是同胚的，而 $U_1\cap U_2$ 与 $\boldsymbol{R}^4-\{0\}$同胚。把 $\boldsymbol{R}^4-\{0\}$中的元素记成四元数。取一奇数 k，使 $k^2-1\not\equiv 0 \bmod 7$。考虑映射 $\tau:(\boldsymbol{R}^4-\{0\})\times S^3\to(\boldsymbol{R}^4-\{0\})\times S^3$，使得对 $(u,v)\in(\boldsymbol{R}^4-\{0\})\times S^3$，有

(14) $$\tau(u,v)=\left(\frac{u}{\|u\|^2},\frac{u^hvu^j}{\|u\|}\right),$$

其中

(15) $$h=\frac{k+1}{2},\quad j=\frac{1-k}{2},$$

且(14)式中的乘法是四元数乘法，$\|\ \|$是四元数的模。显然，映射 τ 是光滑的。我们把 $U_1\times S^3$ 和 $U_2\times S^3$ 通过 τ 粘起来。可以证明，这样得到的 Σ^7 与 7 维单位球面 S^7 同胚，但是其微分构造与 S^7 的典型微分结构(例2)不相同。

在光滑流形上，光滑函数的概念是有意义的。设 f 是定义在 m 维光滑流形 M 上的实函数。若 $p\in M$，(U,φ_U)是包含 p 点的容许坐标卡，那么 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 是定义在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的开集 $\varphi_U(U)$ 上的实函数。如果函数 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 在点 $\varphi_U(p)\in\boldsymbol{R}^m$ 是 C^∞ 的，则称函数 f 在点 $p\in M$ 是 C^∞的。

函数 f 在点 p 的可微性与包含 p 的容许坐标卡的选取是无关的。实际上，若有另一个包含 p 的容许坐标卡(V,φ_V)，则 $U\cap V\neq\varnothing$，且

$$f\circ\varphi_V^{-1}=(f\circ\varphi_U^{-1})\circ(\varphi_U\circ\varphi_V^{-1});$$

因为 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ 是光滑的，所以 $f\circ\varphi_V^{-1}$ 和 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 在相应点都是可微的。

如果实函数 f 在 M 上处处是 C^∞ 的，则称 f 是 M 上的 C^∞-函数，或称 f 是 M 上的光滑函数。M 上全体光滑函数的集合记作

$C^\infty(M)$.

光滑函数是光滑流形之间的光滑映射的重要特例.

✓ **定义1.3** 设 $f:M\to N$ 是从光滑流形 M 到 N 的一个连续映射，$\dim M=m$，$\dim N=n$. 若在一点 $p\in M$，存在点 p 的容许坐标卡 (U,φ_U) 和点 $f(p)$ 的容许坐标卡 (V,ψ_V)，使得映射

$$\psi_V\circ f\circ\varphi_U^{-1}:\varphi_U(U)\to\psi_V(V)$$

在点 $\varphi_U(p)$ 是 C^∞ 的，则称映射 f 在点 p 是 C^∞ 的. 若映射 f 在 M 的每一点 p 都是 C^∞ 的，则称 f 是从 M 到 N 的光滑映射.

注记 因为 $\psi_V\circ f\circ\varphi_U^{-1}$ 是从开集 $\varphi_U(U)\subset\boldsymbol{R}^m$ 到开集 $\psi_V(V)\subset\boldsymbol{R}^m$ 的连续映射，所以它在点 $\varphi_U(p)$ 的可微性是已有定义的. f 在点 p 的可微性显然与容许坐标卡 (U,φ_U) 和 (V,ψ_V) 的选取无关.

如果 $\dim M=\dim N$，并且 $f:M\to N$ 是同胚. 当 f 和 f^{-1} 都是光滑映射时，则我们称 $f:M\to N$ 是可微同胚(如果光滑流形 M 和 N 是可微同胚的，则称 M 和 N 的光滑流形结构是同构的). 上面所举的 Milnor 怪球 Σ^7 与 S^7 是拓扑同胚的，但是它们不是可微同胚的，即它们的光滑流形结构不同构.

光滑映射的另一个重要特例是流形上的参数曲线. 取 $\boldsymbol{R}^1$ 中的一个开区间 $M=(a,b)$，则从 M 到流形 N 的光滑映射 $f:(a,b)\to N$ 称为流形 N 上的一条参数曲线.

✓ 假定 M,N 分别是 m 维和 n 维光滑流形，其微分结构分别是 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$，$\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$. 用下述方法可以构造一个新的 $m+n$ 维光滑流形 $M\times N$：首先，$\{U_\alpha\times V_\beta\}_{\alpha\in A,\beta\in B}$ 构成拓扑积空间 $M\times N$ 的开复盖；其次，定义映射 $\varphi_\alpha\times\psi_\beta:U_\alpha\times V_\beta\to\boldsymbol{R}^{m+n}$，使

$$\varphi_\alpha\times\psi_\beta(p,q)=(\varphi_\alpha(p),\psi_\beta(q)),\quad (p,q)\in U_\alpha\times V_\beta. \tag{16}$$

这样，$(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)$ 是 $M\times N$ 的一个坐标卡. 容易证明，如此得到的坐标卡都是 C^∞-相容的，因此它们决定了 $M\times N$ 上的光滑流形结构.

定义1.4 拓扑积空间$M\times N$上由C^∞-相容的坐标复盖

$$\{(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)\}_{\alpha\in A,\beta\in B}$$

决定的光滑流形结构使$M\times N$成为$m+n$维光滑流形，该流形称为M和N的积流形。

积流形$M\times N$到各因子的自然投影记作

$$\pi_1:M\times N\to M,\quad \pi_2:M\times N\to N,$$

即对于$(x,y)\in M\times N$有

$$\pi_1(x,y)=x,\quad \pi_2(x,y)=y.$$

显然，它们都是光滑映射。

§2 切 空 间

正则的曲线和曲面在每一点分别有切线和切平面的概念。同样，在拓扑流形上给定一个微分结构之后，在每一点的附近可以用线性空间来“近似”，确切地说，可以引进切空间和余切空间等概念。我们从余切空间的概念着手。

设M是m维光滑流形，固定一点$p\in M$。设f是定义在点p的一个邻域上的C^∞-函数①。所有这样的函数的集合记作C_p^∞。自然，属于C_p^∞的两个函数的定义域可以是不同的，但是函数空间C_p^∞中加法和乘法仍然是有意义的：设$f,g\in C_p^\infty$，它们的定义域分别是U和V，那么$U\cap V$仍是包含点p的开邻域；这样，$f+g$与$f\cdot g$可看作定义在$U\cap V$上的C^∞-函数，即$f+g,f\cdot g\in C_p^\infty$。

在C_p^∞中定义如下的关系～：设$f,g\in C_p^\infty$，则$f\sim g$当且仅当存在点p的一个开邻域H，使得$f|_H=g|_H$。显然，～是C_p^∞中的等价关系。我们用$[f]$记f在C_p^∞中的～等价类，称为流形M在点p的C^∞-函数芽(germ)。命

---

① 设f是定义在开集$V\subset M$上的函数，如果对任意的容许坐标卡(U,φ_U)，$U\cap V\neq\varnothing$，函数$f\circ\varphi_U^{-1}$是开集$\varphi_U(U\cap V)\subset\boldsymbol{R}^m$上的$C^\infty$-函数，则称$f$是定义在$V$上的$C^\infty$-函数。实际上，$V$有从$M$诱导的微分构造(§3)，所以$f$是微分流形$V$上的$C^\infty$-函数。

(1) $$\mathscr{F}_p = C_p^\infty/\sim = \{[f] \mid f \in C_p^\infty\},$$
则在$\mathscr{F}_p$中可以定义加法和对实数的乘法，使它成为实数域上的线性空间。实际上，若$[f]$，$[g] \in \mathscr{F}_p$，$\alpha \in \boldsymbol{R}$，只要命

(2) $$[f]+[g]=[f+g], \quad \alpha[f]=[\alpha f].$$
根据定义，上面两式的右端与代表f, g的选取是无关的。请读者自证，$\mathscr{F}_p$是无穷维的实线性空间。

设γ是M上过点p的一段参数曲线，即有正数δ，使$\gamma: (-\delta, \delta) \to M$是$C^\infty$-映射，并且$\gamma(0)=p$。所有这些参数曲线的集合，记作$\Gamma_p$。

对于$\gamma \in \Gamma_p$，$[f] \in \mathscr{F}_p$，命（图 3）

(3) $$\ll \gamma, [f] \gg = \left.\frac{d(f \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0}, \quad -\delta < t < \delta.$$

显然，对于固定的γ，上式右端的数值由$[f]$完全确定，而不依赖于代表f的选取。而且，配合$\ll\ ,\ \gg$关于第二个因子是线性的，即对

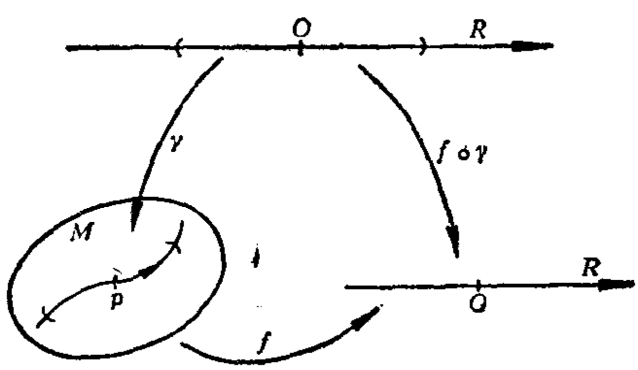

图 3

于任意的$\gamma \in \Gamma_p$，$[f]$，$[g] \in \mathscr{F}_p$，$\alpha \in \boldsymbol{R}$，有

(4) $$\ll \gamma, [f]+[g] \gg = \ll \gamma, [f] \gg + \ll \gamma, [g] \gg, \quad \ll \gamma, \alpha[f] \gg = \alpha \ll \gamma, [f] \gg.$$
设

(5) $$\mathscr{H}_p = \{[f] \in \mathscr{F}_p \mid \ll \gamma, [f] \gg = 0, \ \forall \gamma \in \Gamma_p\},$$
则$\mathscr{H}_p$是$\mathscr{F}_p$的线性子空间。

定理2.1 设$[f]\in\mathscr{F}_p$，对于包含p的容许坐标卡(U,φ_U)，命

(6) $$F(x^1,\cdots,x^m)=f\circ\varphi_U^{-1}(x^1,\cdots,x^m),$$

则$[f]\in\mathscr{H}_p$，当且仅当

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x^i}\right|_{\varphi_U(p)}=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

证明 设$\gamma\in\Gamma_p$，其坐标表示是

(7) $$(\varphi_U\circ\gamma(t))^i=x^i(t),\quad -\delta<t<\delta.$$

则

(8) $$\begin{aligned}\langle\!\langle\gamma,[f]\rangle\!\rangle&=\left.\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)\right|_{t=0}\\&=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}F(x^1(t),\cdots,x^m(t))\\&=\sum_{i=1}^m\left.\frac{\partial F}{\partial x^i}\right|_{\varphi_U(p)}\cdot\left.\frac{dx^i(t)}{dt}\right|_{t=0}.\end{aligned}$$

但是我们可选取γ，使$\left.\frac{dx^i(t)}{dt}\right|_{t=0}$取任意实数值，因此要对任意的$\gamma\in\Gamma_p$都有$\langle\!\langle\gamma,[f]\rangle\!\rangle=0$，必须且只须

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x^i}\right|_{\varphi_U(p)}=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m.$$

定理2.1说明：子空间$\mathscr{H}_p$恰好是在点p关于局部坐标的偏导数都是零的光滑函数的芽所构成的线性空间。

定义2.1 商空间$\mathscr{F}_p/\mathscr{H}_p$称为流形$M$在点$p$的余切空间，记作$T_p^*$。函数芽$[f]\in\mathscr{F}_p$的$\mathscr{H}_p$-等价类记作$\widetilde{[f]}$，也记作$(df)_p$，称为流形$M$在$p$点的余切矢量。

T_p^*是线性空间，它有从线性空间$\mathscr{F}_p$诱导的线性结构，即对于$[f],[g]\in\mathscr{F}_p$，$\alpha\in R$有

(9) $$\begin{cases}\widetilde{[f]}+\widetilde{[g]}=\widetilde{[f]+[g]},\\ \alpha\cdot\widetilde{[f]}=\widetilde{\alpha[f]}.\end{cases}$$

定理 2.2 设 $f^1, \cdots, f^s \in C_p^\infty$，而 $F(y^1, \cdots, y^s)$ 是在点 $(f^1(p), \cdots, f^s(p)) \in \mathbf{R}^s$ 的邻域内的光滑函数，则 $f=F(f^1, \cdots, f^s) \in C_p^\infty$，并且

$$(10) \qquad (df)_p=\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial F}{\partial f^k}\right)_{(f^1(p),\cdots,f^s(p))} \cdot (df^k)_p.$$

证明 设 f^k 的定义域是 $U_k \ni p$，则 f 在 $\bigcap_{k=1}^{s} U_k$ 上有定义，即对于 $q \in \bigcap_{k=1}^{s} U_k$，

$$f(q)=F(f^1(q), \cdots, f^s(q)).$$

由于 F 是光滑函数，故 $f \in C_p^\infty$.

设 $a_k=\left(\frac{\partial F}{\partial f^k}\right)_{(f^1(p),\cdots,f^s(p))}$，则对任意的 $\gamma \in \Gamma_p$，有

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \gamma, [f] \rangle\!\rangle &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(f \circ \gamma) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(f^1 \circ \gamma(t), \cdots, f^s \circ \gamma(t)) \\ &= \sum_{k=1}^{s} a_k \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(f^k \circ \gamma(t)) \\ &= \langle\!\langle \gamma, \sum_{k=1}^{s} a_k [f^k] \rangle\!\rangle.\end{aligned}$$

故

$$[f]-\sum_{k=1}^{s} a_k [f^k] \in \mathscr{H}_p,$$

即

$$(df)_p=\sum_{k=1}^{s} a_k (df^k)_p.$$

系1 对于$f, g\in C_p^\infty$，$\alpha\in \boldsymbol{R}$有

(11) $$d(f+g)_p=(df)_p+(dg)_p,$$

(12) $$d(\alpha f)_p=\alpha\cdot(df)_p,$$

(13) $$d(fg)_p=f(p)\cdot(dg)_p+g(p)\cdot(df)_p.$$

系2 $\dim T_p^*=m$。

证明 任取点p的一个容许坐标卡(U,φ_U)，局部坐标u^i定义为

(14) $$u^i(q)=(\varphi_U(q))^i=x^i\circ\varphi_U(q),\quad q\in U,$$

其中x^i是$\boldsymbol{R}^m$中取定的坐标系，因此$u^i\in C_p^\infty$，$(du^i)_p\in T_p^*$。我们要证明$\{(du^i)_p, 1\leqslant i\leqslant m\}$是$T_p^*$的一个基。

设$(df)_p\in T_p^*$，则$f\circ\varphi_U^{-1}$是定义在$\boldsymbol{R}^m$的一个开集上的光滑函数，命$F(x^1,\cdots,x^m)=f\circ\varphi_U^{-1}(x^1,\cdots,x^m)$。因此

(15) $$f=F(u^1,\cdots,u^m).$$

由定理2.2得

(16) $$(df)_p=\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\right)_{(u^1(p)),\cdots,u^m(p))}\cdot(du^i)_p,$$

所以$(df)_p$是$(du^i)_p$ $(1\leqslant i\leqslant m)$的线性组合。

若有一组实数a_i $(1\leqslant i\leqslant m)$，使得

(17) $$\sum_{i=1}^m a_i(du^i)_p=0,$$

即

$$\sum_{i=1}^m a_i[u^i]\in\mathscr{H}_p,$$

则对任意的$\gamma\in\Gamma_p$，有

(18) $$\langle\!\langle\gamma,\sum_{i=1}^m a_i[u^i]\rangle\!\rangle=\sum_{i=1}^m a_i\left.\frac{d(u^i\circ\gamma(t))}{dt}\right|_{t=0}=0.$$

取$\lambda_k\in\Gamma_p$，$1\leqslant k\leqslant m$，使得

(19) $$u^i\circ\lambda_k(t)=u^i(p)+\delta_k^i t,$$

其中

$$\delta^i_k=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}$$

则

$$\left.\frac{d(u^i\circ\lambda_k(t))}{dt}\right|_{t=0}=\delta^i_k.$$

命$\gamma=\lambda_k$，由(18)式则得

$$a_k=0,\quad 1\leqslant k\leqslant m,$$

即$\{(du^i)_p, 1\leqslant i\leqslant m\}$是线性无关的。于是它们构成$T^*_p$的一个基，称为$T^*_p$关于局部坐标系$u^i$的自然基底。因此$T^*_p$是$m$维线性空间。

根据定义，$[f]-[g]\in\mathscr{H}_p$当且仅当对任意的$\gamma\in\Gamma_p$，有$\ll\gamma, [f]\gg=\ll\gamma, [g]\gg$，所以可以定义

(20) $$\ll\gamma, (df)_p\gg=\ll\gamma, [f]\gg,\quad \gamma\in\Gamma_p, (df)_p\in T^*_p.$$

现在我们在Γ_p中定义关系～如下：设$\gamma, \gamma'\in\Gamma_p$，则$\gamma\sim\gamma'$当且仅当对任意的$(df)_p\in T^*_p$，有

(21) $$\ll\gamma, (df)_p\gg=\ll\gamma', (df)_p\gg.$$

显然，这个关系是等价关系：γ的～等价类记作$[\gamma]$。于是可定义

(22) $$\langle[\gamma], (df)_p\rangle=\ll\gamma, (df)_p\gg.$$

我们要证明：这些$[\gamma]$($\gamma\in\Gamma_p$)组成T^*_p的对偶空间。为此目的，我们利用局部坐标系。

在局部坐标u^i下，设$\gamma\in\Gamma_p$由函数

(23) $$u^i=u^i(t),\quad 1\leqslant i\leqslant m$$

给出，则(22)式可写作

(24) $$\langle[\gamma], (df)_p\rangle=\sum_{i=1}^m a_i\xi^i,$$

其中

(25) $$a_i=\left(\frac{\partial(f\circ\varphi_U^{-1})}{\partial u^i}\right)_{\varphi_U(p)},\quad \xi^i=\left(\frac{du^i}{dt}\right)_{t=0}.$$

系数 a_i 恰是余切矢量 $(df)_p$ 关于自然基底 $(du_i)_p$ 的分量（见(16)式）。显然 $\langle[\gamma],(df)_p\rangle$ 是 T_p^* 上的线性函数，这个函数由分量 ξ^i 完全确定。取 γ 为

(26) $$u^i(t)=u^i(p)+\xi^i t,$$

可见 ξ^i 能取任意的数值。这就是说，$\langle[\gamma],(df)_p\rangle$，$\gamma\in\Gamma_p$ 表示了 T_p^* 上的全体线性函数，它们组成 T_p^* 的对偶空间 T_p，叫做 M 在点 p 的切空间。切空间的元素称为切矢量。

切矢量的几何意义其实很简单：如果 $\gamma'\in\Gamma_p$ 由函数

$$u=u^i(t),\quad 1\leqslant i\leqslant m$$

给出，则 $[\gamma]=[\gamma']$ 的充要条件是

$$\left(\frac{du^i}{dt}\right)_{t=0}=\left(\frac{du'^i}{dt}\right)_{t=0}.$$

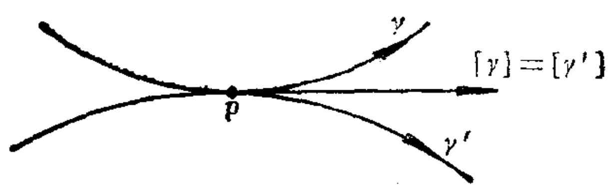

图 4

所以 γ 与 γ' 等价的意思是这两条参数曲线在点 p 有同一个切矢量（如图4）。因此我们所定义的流形 M 在点 p 的切矢量恰是全体在点 p 有相同切矢量的参数曲线的集合。

根据上面的讨论，函数

$$\langle X,(df)_p\rangle,\quad X=[\gamma]\in T_p,\quad (df)_p\in T_p^*$$

是双线性的，即对每一个变元都是线性的。设参数曲线 λ_k $(1\leqslant k\leqslant m)$ 如(19)式给出，则

(27) $$\langle[\lambda_k],(du^i)_p\rangle=\delta_k^i.$$

所以 $\{[\lambda_k],\ 1\leqslant k\leqslant m\}$ 是 $\{(du^i)_p,\ 1\leqslant i\leqslant m\}$ 的对偶基底（关于对偶基底的概念可看第二章§1）。

切矢量 $[\lambda_k]$ 还有另一个意义，即

(28) $$\langle[\lambda_k],(df)_p\rangle$$

$$=\left\langle [\lambda_k], \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)_p \cdot (du^i)_p \right\rangle$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial u^k}\right)_p,$$

这里$\frac{\partial f}{\partial u^i}$表示$\frac{\partial (f\circ\varphi_U^{-1})}{\partial u^i}$；所以对于函数芽$[f]$，$[\lambda_k]$是偏微商算子$\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)$。于是(27)式可写成

(29) $$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^k}\bigg|_p, (du^i)_p \right\rangle = \delta_k^i.$$

我们把$\{(du^i)_p, 1\leqslant i\leqslant m\}$在$T_p$中的对偶基底称为在局部坐标系$(u^i)$下切空间$T_p$中的自然基底。从(24)得到

$$[\gamma]=\sum_{i=1}^{m}\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}\bigg|_p,$$

所以ξ^i是切矢量$[\gamma]$关于自然基底的分量。若$[\gamma']\in T_p$有分量ξ'^i，则$[\gamma]+[\gamma']$由分量$\xi^i+\xi'^i$所确定；同样，切矢量$a\cdot[\gamma]$ $(a\in \boldsymbol{R})$有分量$a\xi^i$。

为了简化记号，在不致引起混淆时常把切矢量和余切矢量的附标p略去不写。

定义2.2 设f是定义在点p附近的C^∞-函数，$(df)_p\in T_p^*$也叫做f在点p的微分。若微分$(df)_p=0$，则称p是f的临界点。

M上的光滑函数的临界点的研究是微分流形的重要课题，称为Morse理论。读者可参考：J.Milnor, Morse Theory, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1963。

定义2.3 设$X\in T_p$，$f\in C_p^\infty$，记

(30) $$Xf=\langle X, (df)_p\rangle.$$

Xf叫做函数f沿切矢量X的方向导数。

定理2.3 方向导数有下列性质：设$X\in T_p$，$f,g\in C_p^\infty$，α,β

$\in \boldsymbol{R}$，则

1）$X(\alpha f+\beta g)=\alpha\cdot Xf+\beta\cdot Xg$；

2）$X(fg)=f(p)\cdot Xg+g(p)\cdot Xf$。

证明 这是定理 2.2 系 1 的推论。以 2)的证明为例：

$$\begin{aligned}X(fg)&=\langle X,d(fg)_p\rangle\\&=\langle X,f(p)dg+g(p)df\rangle\\&=f(p)\langle X,dg\rangle+g(p)\langle X,df\rangle\\&=f(p)\cdot Xg+g(p)\cdot Xf.\end{aligned}$$

注记1 定理2.3的1)说明，当切矢量X看作算子(方向导数)时，X是C_p^∞上的线性算子。由性质1)和2)能得到X在常值函数 c 上的作用为 0 。

注记2 在许多文献① 中，性质1)和2)通常用来定义切矢量。实际上，满足这两条性质的、作用在 C_p^∞ 上 的算子构成一个线性空间，它与 T_p^* 对偶，所以该空间和T_p是一致的。

在局部坐标 u^i 下，切矢量$X=[\gamma]\in T_p$和余切矢量 $\alpha=df\in T_p^*$ 分别可用自然基底线性表示，

$$X=\sum_{i=1}^m\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i},\quad \alpha=\sum_{i=1}^m a_i\,du^i, \tag{31}$$

其中

$$\xi^i=\frac{d(u^i\circ\gamma)}{dt},\quad a_i=\frac{\partial f}{\partial u^i}.$$

若有另一个局部坐标 u^{*i}，X和 α 关于相应的自然基底的分量 分别是 ξ^{*i}和 a_i^*，则它们适合下列变换规律：

$$\xi^{*i}=\sum_{j=1}^m\xi^j\frac{\partial u^{*i}}{\partial u^j}, \tag{32}$$

$$a_i=\sum_{j=1}^m a_j^*\frac{\partial u^{*j}}{\partial u^i}, \tag{33}$$

---

① 例如参考文献[7]。

其中

$$\frac{\partial u^{*j}}{\partial u^i}=\frac{\partial(\varphi_{U^*}\circ\varphi_U^{-1})^j}{\partial u^i}$$

是坐标变换$\varphi_{U^*}\circ\varphi_U^{-1}$的Jacobi 矩阵。在经典的张量分析中，把满足变换规律(32)的矢量称为反变矢量，把满足变换规律(33)的矢量称为协变矢量。

光滑流形之间的光滑映射分别诱导出切空间之间和余切空间之间的线性映射。设 $F:M\to N$是光滑映射，$p\in M, q=F(p)$。定义映射$F^*:T_q^*\to T_p^*$ 如下：

(34) $$F^*(df)=d(f\circ F),\quad df\in T_q^*.$$

显然这是线性映射，称为映射F的微分。

考虑F^*的共轭映射$F_*:T_p\to T_q$，即对于任意的$X\in T_p$，$a\in T_q^*$ 有

(35) $$\langle F_*X, a\rangle=\langle X, F^*a\rangle,$$

F_* 称为由F诱导的切映射。

设u^i是点p附近的局部坐标，v^α是点q附近的局部坐标，则映射F在点p附近可用函数

(36) $$v^\alpha=F^\alpha(u^1,\cdots,u^m),\quad 1\leqslant\alpha\leqslant n$$

表示。因此F^* 在自然基底$\{dv^\alpha,\ 1\leqslant\alpha\leqslant n\}$上的作用是

(37) $$\begin{aligned}F^*(dv^\alpha)&=d(v^\alpha\circ F)\\&=\sum_{i=1}^m\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial u^i}\right)_p du^i.\end{aligned}$$

即F^*在自然基底$\{dv^\alpha\}$和$\{du^i\}$下的矩阵恰是映射(36)的Jacobi矩阵$\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial u^i}\right)_p$。

同样，切映射 F_* 在自然基底$\left\{\frac{\partial}{\partial u^i}\right\}$上的作用是

$$\left\langle F_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right), dv^\alpha\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial u^i},\ F^*(dv^\alpha)\right\rangle$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\langle\frac{\partial}{\partial u^i},du^j\right\rangle\cdot\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial u^i}\right)_p$$

$$=\left\langle\sum_{\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial F^\beta}{\partial u^i}\right)_p\frac{\partial}{\partial v^\beta},dv^\alpha\right\rangle,$$

即

(38) $$F_*\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)=\sum_{\beta=1}^{m}\left(\frac{\partial F^\beta}{\partial u^i}\right)_p\frac{\partial}{\partial v^\beta}.$$

因此切映射 F_* 在自然基底$\left\{\frac{\partial}{\partial u^i}\right\}$和$\left\{\frac{\partial}{\partial v^\alpha}\right\}$下的矩阵仍是映射(36)的Jacobi 矩阵$\left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial u^i}\right)_p$.

§3 子 流 形

在讨论子流形之前，我们先研究光滑流形之间的光滑映射所诱导的切映射。给定光滑映射$\varphi:M\to N$，则对任意一点$p\in M$，在相应的切空间之间有诱导的切映射$\varphi_*:T_p(M)\to T_q(N)$，其中$q=\varphi(p)$。重要的是，切映射$\varphi_*$在点$p\in M$的性质可以决定映射$\varphi$在点$p$的一个邻域内的性质。一个经典的结果是微积分学中熟知的反函数定理：

定理3.1 设W是$\boldsymbol{R}^n$中的一个开子集，$f:W\to\boldsymbol{R}^n$是从W到$\boldsymbol{R}^n$的光滑映射。如果在一点$x_0\in W$，映射f的Jacobi 行列式

$$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)\bigg|_{x_0}\neq 0,$$

则存在点x_0在$\boldsymbol{R}^n$中的一个邻域$U\subset W$，使得$V=f(U)$是点$f(x_0)$在$\boldsymbol{R}^n$中的一个邻域，并且f在V上有光滑的反函数

(1) $$g=f^{-1}:V\to U.$$

根据上一节最后一段的讨论，映射f的Jacobi 矩阵$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)$恰是

线性映射f_*在自然基底下的矩阵，所以$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)\Big|_{x_0}\neq 0$说明线性映射

$$f_*: T_{x_0}(W)\ (\simeq \boldsymbol{R}^n) \to T_{f(x_0)}(\boldsymbol{R}^n)\ (\simeq \boldsymbol{R}^n)$$

是同构。g 是 f 的反函数的意思是

$$(2)\qquad g\circ f = \mathrm{id}: U\to U,\quad f\circ g = \mathrm{id}: V\to V,$$

而且 f 和 g 都是光滑映射，所以 f 限制在U上给出了从U到V的可微同胚。因此，反函数定理说明，如果 f 的切映射f_*在一点是同构，则 f 在该点的一个邻域上是到$\boldsymbol{R}^n$的一个邻域的可微同胚。

利用局部坐标系，不难把定理 3.1 推广到流形上去。

定理3.2 设M与N是两个 n 维光滑流形，$f: M\to N$ 是光滑映射。如果在一点$p\in M$，切映射$f_*: T_p(M)\to T_{f(p)}(N)$是同构，则存在点 p 在M中的邻域U，使得$V=f(U)$是点$f(p)$在N中的一个邻域，并且$f|_U: U\to V$是可微同胚。

证明 由于$f: M\to N$是光滑映射，所以可以取点 p 在M中的局部坐标系(U_0,φ)和点 $q=f(p)$ 在N中的局部坐标系(V_0,ψ)，使得 $f(U_0)\subset V_0$，并且

$$(3)\qquad \tilde{f} = \psi\circ f\circ\varphi^{-1}: \varphi(U_0)\to\psi(V_0)\subset \boldsymbol{R}^n$$

是光滑映射，显然 $\tilde{f}$ 在点$\varphi(p)$的 Jacobi 行列式不为零。由定理 3.1，分别存在点$\varphi(p)$和$\psi(q)$在$\boldsymbol{R}^n$中的邻域$\tilde{U}\subset\varphi(U_0)$，$\tilde{V}\subset\psi(V_0)$，使得$\tilde{f}|_{\tilde{U}}: \tilde{U}\to\tilde{V}$是可微同胚。

命 $U=\varphi^{-1}(\tilde{U})$，$V=\psi^{-1}(\tilde{V})$，则$U$与$V$分别是点 p，q在M和N中的邻域，并且

$$(4)\qquad f=\psi^{-1}\circ\tilde{f}\circ\varphi: U\to V$$

是可微同胚。证毕。

注记 由于定理3.2中的流形M和N有相同的维数，所以“切映射f_*在一点是同构”等价于“f_*在该点是单一的”。如果M是 m 维光滑流形，N是 n 维光滑流形，$f: M\to N$是光滑映射，当切映射 f_* 在点 $p\in M$ 是单一映射时，则称切映射 f_* 在该点是非退

化的。显然，这时必须有$m\leqslant n$，且f的Jacobi矩阵在该点的秩等于m。

作为定理3.2的应用，我们有下面的

定理3.3 设M是m维光滑流形，N是n维光滑流形，$m<n$。设$f:M\to N$是光滑映射。若切映射f_*在点$p\in M$是非退化的，则存在点p的局部坐标系$(U;u^i)$以及点$q=f(p)$的局部坐标系$(V;v^\alpha)$，使得$f(U)\subset V$，并且映射$f|_U$可用局部坐标表示为：对任意的$x\in U$有

$$(5)\qquad \begin{cases} v^i(f(x))=u^i(x), & 1\leqslant i\leqslant m, \\ v^\gamma(f(x))=0, & m+1\leqslant\gamma\leqslant n. \end{cases}$$

证明 设映射f在点p的局部坐标系$(U;u^i)$及点q的局部坐标系$(V;v^\alpha)$下表示为

$$v^\alpha=f^\alpha(u^1,\cdots,u^m),\quad 1\leqslant\alpha\leqslant n.$$

假定$u^i(p)=0$，$v^\alpha(q)=0$。因为f_*在点p是非退化的，不妨设

$$(6)\qquad \left.\frac{\partial(f^1,\cdots,f^m)}{\partial(u^1,\cdots,u^m)}\right|_{u^i=0}\neq 0.$$

命$I_{n-m}=\{(w^{m+1},\cdots,w^n)\mid |w^\gamma|<\delta, m+1\leqslant\gamma\leqslant n\}$，其中$\delta$是某个正数。适当缩小邻域$U$及选取充分小的$\delta$，可以定义光滑映射$\tilde{f}$: $U\times I_{n-m}\to V$，使得

$$(7)\qquad \begin{cases} \tilde{f}^i(u^1,\cdots,u^m,w^{m+1},\cdots,w^n)=f^i(u^1,\cdots,u^m), \\ \tilde{f}^\gamma(u^1,\cdots,u^m,w^{m+1},\cdots,w^n)=w^\gamma+f^\gamma(u^1,\cdots,u^m), \end{cases}$$
$$1\leqslant i\leqslant m,\quad m+1\leqslant\gamma\leqslant n.$$

显然映射$\tilde{f}$在点$(u^i,w^\gamma)=(0,0)$的Jacobi矩阵是非退化的，根据定理3.2，$\tilde{f}$在$(0,0)$点的某个邻域上是可微同胚。不妨假定$\tilde{f}:U\times I_{n-m}\to V$是可微同胚，于是$\{u^i, w^\gamma\}$可以取作点$q$的邻域$V$上的局部坐标系$v^\alpha$；在此坐标系下，映射$\tilde{f}$成为恒同映射，即

$$(8)\qquad v^i=u^i,\quad v^\gamma=w^\gamma,\quad 1\leqslant i\leqslant m,\quad m+1\leqslant\gamma\leqslant n.$$

很明显，$\tilde{f}|_{U\times\{0\}}=f|_U$，所以在上述坐标系下，映射$f|_U$如(5)

式所给出，即

$$f(u^1,\cdots,u^m)=(u^1,\cdots,u^m,0,\cdots,0)。$$

由此可见，如果切映射f_*在点 p 是单一的，则映射 f 在点 p 的附近也是单一的。

定义3.1 设 M 与 N 是两个光滑流形。若有光滑映射 $\varphi:M\to N$，使得

1) φ是单一的；

2) 在任意一点$p\in M$，切映射$\varphi_*:T_p(M)\to T_{\varphi(p)}(N)$都是非退化的，则称$(\varphi,M)$是$N$的一个光滑子流形，或称$(\varphi,M)$是$N$的嵌入子流形。

如果映射 φ 只满足条件2)，则称 φ 是浸入。这时称(φ,M)是N的浸入子流形。

浸入在局部上是单一的，但不能保证在大范围是单一的。浸入子流形和嵌入子流形的区别在于象集 $\varphi(M)$是否有自交点。

例1 开子流形。

设U是N的一个开子集，将N的光滑流形结构限制在U上，便得到U的一个光滑结构，成为与N 同维数的光滑流形。命 $\varphi=\mathrm{id}:U\to N$ 是恒同映射，则(φ,U) 成为 N 的一个嵌入子流形，称为N的开子流形。

例2 闭子流形。

设(φ,M)是N的一个光滑子流形，如果

1) $\varphi(M)$是N的一个闭子集；

2) 对每一点 $q\in\varphi(M)$，存在一个局部坐标系 $(U;u^i)$，使得$\varphi(M)\cap U$ 是由方程

$$u^{m+1}=u^{m+2}=\cdots=u^n=0$$

定义的，其中$m=\dim M$，则称(φ,M)是N的一个闭子流形。

例如，单位球面$S^n\subset\boldsymbol{R}^{n+1}$及恒同映射$\varphi:S^n\to\boldsymbol{R}^{n+1}$给出了$\boldsymbol{R}^{n+1}$的一个闭子流形。

例3 命$F:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$，使得

(9) $$F(t)=\left(2\cos\left(t-\frac{1}{2}\pi\right),\sin2\left(t-\frac{1}{2}\pi\right)\right).$$

则$(F,\boldsymbol{R})$是$\boldsymbol{R}^2$的浸入子流形，不是嵌入子流形(图5)。

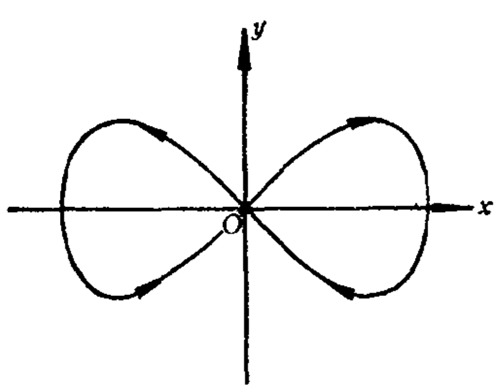

图 5

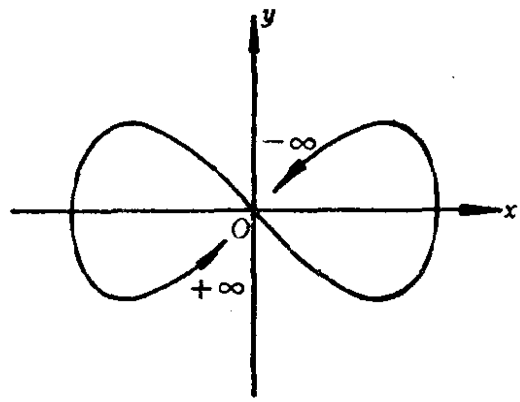

图 6

例4 设$G:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$，使得

$$G(t)=\left(2\cos\left(2\operatorname{arc\,tg}t+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin2\left(2\operatorname{arc\,tg}t+\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

则$(G,\boldsymbol{R})$是$\boldsymbol{R}^2$的嵌入子流形(图 6)。当$t=0$时，$G(0)=(0,0)$，而当$t\to\pm\infty$时，$F(t)\to(0,0)$。

例5 设

(10) $$F(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{3}{t^2},\sin\pi t\right), & 1\leqslant t<+\infty,\\ (0,t+2), & -\infty<t\leqslant-1,\end{cases}$$

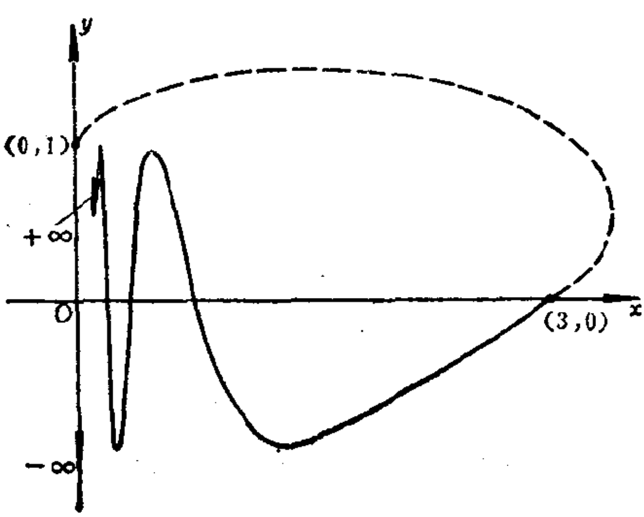

图 7

在区间[-1,1]之间，用曲线把(3,0)和(0,1)两点光滑地连结起来（如图 7 中的虚线部分）。当$t\to+\infty$时，曲线无限地靠近它自己的在$-3\leqslant t\leqslant-1$之间的部分。$(F,\boldsymbol{R})$是$\boldsymbol{R}^2$的嵌入子流形。

例 6 环面$T^2=S^1$

$\times S^1$（图 8）可以看作平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上一个单位正方形把两组对边分别等同起来得到的二维流形。它的点可以用一对有序实数 (x,y) 表示，其中 x,y 都是 mod 1 的实数。

取两个实数 a,b，使 $a:b$ 是无理数。考虑映射 $\varphi:\boldsymbol{R}^1\to\boldsymbol{T}^2$，使得

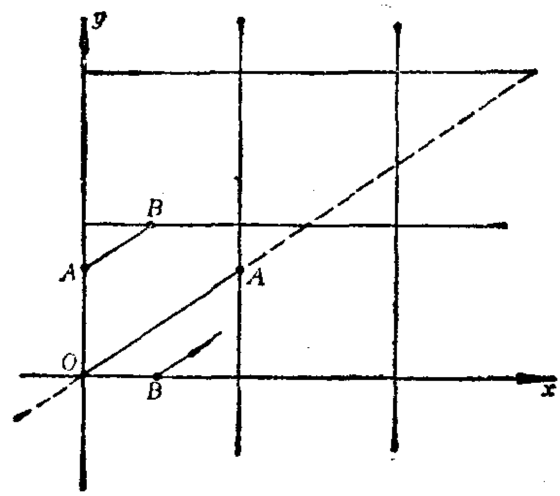

图 8

$$\varphi(t)=(at \bmod 1, bt \bmod 1).$$

显然 $(\varphi,\boldsymbol{R})$ 是 $\boldsymbol{T}^2$ 的嵌入子流形，但是象集 $\varphi(\boldsymbol{R})$ 在 $\boldsymbol{T}^2$ 中是处处稠密的。

在 $a:b$ 是有理数时，$(\varphi,\boldsymbol{R})$ 给出了环面 $\boldsymbol{T}^2$ 的一个浸入子流形。

对于嵌入子流形 (φ,M)，由于 φ 是单一的，所以可以把 M 上的微分结构搬到象集 $\varphi(M)$ 上去，使得 $\varphi:M\to\varphi(M)$ 是可微同胚。另一方面，$\varphi(M)$ 作为 N 的子集，必然有从 N 诱导的拓扑。最后三个例子告诉我们，$\varphi(M)$ 从 M 通过 φ 得到的拓扑与 $\varphi(M)$ 作为 N 的子空间得到的拓扑不见得是一致的。一般说来，从 M 通过 φ 带给 $\varphi(M)$ 的拓扑比从 N 诱导的拓扑要细。这种现象导致下面的定义。

定义3.2 设 (φ,M) 是光滑流形 N 的子流形。如果 $\varphi:M\to\varphi(M)\subset N$ 是同胚映射，则称 (φ,M) 是 N 的正则子流形，或称 φ 是光滑流形 M 在 N 中的正则嵌入。

下面的定理给出了正则子流形的特征。

定理3.4 设 (φ,M) 是 n 维光滑流形 N 的 m 维子流形，则 (φ,M) 是 N 的正则子流形的充分必要条件是：它是 N 的一个开子流形的闭子流形。

证明 对于充分性，只要证明N的闭子流形(φ, M)必是正则子流形。任取一点$p\in M$，根据闭子流形的定义，必有点$q=\varphi(p)$在N中的一个局部坐标系$(V;v^\alpha)$，使得$\varphi(M)\cap V$是由方程

$$v^{m+1}=\cdots=v^n=0 \tag{11}$$

定义的。由φ的连续性，存在点p的局部坐标系$(U;u^i)$，使得$\varphi(U)\subset V$。不妨假定$u^i(p)=0$，$v^\alpha(q)=0$，且$V=\{(v^1,\cdots,v^n)\mid |v^\alpha|<\delta\}$，其中$\delta$是某个正数。因此$\varphi(U)\subset\varphi(M)\cap V$。

我们的目的是要证明$\varphi^{-1}:\varphi(M)\subset N\to M$也是连续的。为此只须证明，可取适当小的$\delta_1>0$，使得$\varphi(M)\cap V_1$在$\varphi$下的完全逆象落在$U$内。由于(11)式，映射$\varphi|_U$在局部上可表为

$$\begin{cases} v^i=\varphi^i(u^1,\cdots,u^m), & 1\leqslant i\leqslant m, \\ v^\gamma=0, & m+1\leqslant\gamma\leqslant n. \end{cases} \tag{12}$$

因此，Jacobi 行列式$\left.\dfrac{\partial(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)}{\partial(u^1,\cdots,u^m)}\right|_{u^i=0}\neq 0$。根据定理3.1，存在$0<\delta_1<\delta$，使得函数组$(\varphi^1,\cdots,\varphi^m)$有反函数

$$u^i=\psi^i(v^1,\cdots,v^m),\quad |v^i|<\delta_1.$$

命$V_1=\{(v^1,\cdots,v^m,v^{m+1},\cdots,v^n)\mid |v^\alpha|<\delta_1\}$，则$\varphi(M)\cap V_1$在$\varphi$下的完全逆象落在$U$内。因此，$\varphi: M\to\varphi(M)\subset N$是同胚，即$(\varphi, M)$是$N$的正则子流形。

反过来，假定(φ, M)是N的正则子流形。设$p\in M$，则对点p的任意一个邻域$U\subset M$，必有点$q=\varphi(p)$在N中的一个邻域V，使得$\varphi(U)=\varphi(M)\cap V$。根据定理3.3，存在点$p$的局部坐标系$(U_1;u^i)$和点$q$的局部坐标系$(V_1;v^\alpha)$，使得$\varphi(U_1)\subset V_1$，并且$\varphi|_{U_1}$可用局部坐标表为

$$\varphi(u^1,\cdots,u^m)=(u^1,\cdots,u^m,0,\cdots,0). \tag{13}$$

不妨设$U_1\subset U$，故可取$V_1\subset V$，因此$\varphi(U_1)=\varphi(M)\cap V_1$。由(13)式可知，$\varphi(M)\cap V_1$是由方程

$$(14) \qquad v^{m+1}=\cdots=v^n=0$$

定义的。

对每一点$q\in\varphi(M)$，用V_q表示上面所构造的、点q在N中的坐标域，使得(14)式成立。命$W=\bigcup_{q\in\varphi(M)}V_q$，则$W$显然是$N$的包含$\varphi(M)$在内的开子流形。要证明的是，集合$\varphi(M)$作为$N$的拓扑子空间是$W$中的相对闭子集，即证明$W\cap\overline{\varphi(M)}=\varphi(M)$，其中$\overline{\varphi(M)}$表示集合$\varphi(M)$在$N$中的闭包。任取一点$s\in W\cap\overline{\varphi(M)}$，根据$W$的定义，存在$q\in\varphi(M)$，使得$s\in V_q$。由(14)式，$\varphi(M)\cap V_q$是$V_q$中的一个坐标面，所以$\varphi(M)\cap V_q$是$V_q$中的相对闭子集。现已假定$s\in\overline{\varphi(M)}\cap V_q$，即$s$属于$\varphi(M)\cap V_q$在$V_q$中的相对闭包，故$s\in\varphi(M)\cap V_q$，所以$W\cap\overline{\varphi(M)}\subset\varphi(M)$。即

$$W\cap\overline{\varphi(M)}=\varphi(M).$$

这就证明了(φ,M)是N的开子流形W中的闭子流形。

在定理的证明过程中，我们已得到如下的

系 子流形(φ,M)是光滑流形N的正则子流形，当且仅当对每一点$p\in M$，存在点$q=\varphi(p)$在N中的坐标卡$(V;v^a)$，$v^a(q)=0$，使得$\varphi(M)\cap V$是由

$$v^{m+1}=v^{m+2}=\cdots=v^n=0$$

定义的。

定理3.5 设(φ,M)是光滑流形N的子流形，若M是紧致的，则$\varphi:M\to N$是正则嵌入。

证明 因为$\varphi(M)$作为N的拓扑子空间是 Hausdorff 空间，而$\varphi:M\to\varphi(M)\subset N$是紧致空间$M$到 Hausdorff 空间的 1-1 连续映射，所以$\varphi:M\to\varphi(M)\subset N$是同胚，即$(\varphi,M)$是$N$的正则子流形。

H. Whitney 证明了：任意一个m维光滑流形都能嵌入到$2m+1$维欧氏空间中作为子流形。这说明尽管流形的概念是欧氏空间的十分一般的推广，但最终仍可作为欧氏空间的嵌入子流形

来实现。因此，高维欧氏空间的子流形的研究是很重要的。Whitney 定理的证明较为困难(见[1])，我们在这里只讨论紧致光滑流形在欧氏空间中的嵌入。为此，我们需要若干引理；这些引理本身是十分重要的，以后还要多次引用。

引理1 设 D_1 与 D_2 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中两个开的同心球，$\bar{D}_1\subset D_2$，则在 $\boldsymbol{R}^m$ 上存在一个光滑的实函数 f，使得

1) $0\leqslant f\leqslant 1$；

2) $$f(x)=\begin{cases}1, & x\in D_1,\\ 0, & x\overline{\in} D_2.\end{cases}$$

证明 不妨设 D_1 与 D_2 以原点为球心，半径分别是 a,b，$0<a<b$；命

$$g(t)=\begin{cases}\exp\dfrac{1}{(t-a^2)(t-b^2)}, & t\in(a^2,b^2),\\ 0, & t\overline{\in}(a^2,b^2).\end{cases}\tag{15}$$

显然 g 是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的光滑函数。再命

$$F(t)=\int_t^{+\infty}g(s)ds\Big/\int_{-\infty}^{+\infty}g(s)ds,\tag{16}$$

则 F 仍是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的光滑函数，并且 $0\leqslant F\leqslant 1$；当 $t\leqslant a^2$ 时，$F(t)=1$，当 $t\geqslant b^2$ 时，$F(t)=0$。命

$$f(x^1,\cdots,x^m)=F((x^1)^2+\cdots+(x^m)^2),\tag{17}$$

则 f 适合引理的要求。

引理2 设 U 与 V 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中两个非空开集，且 $\bar{V}$ 是紧致的，$\bar{V}\subset U$，则在 $\boldsymbol{R}^m$ 上存在光滑的实函数 f，使得

1) $0\leqslant f\leqslant 1$；

2) $$f(x)=\begin{cases}1, & x\in V,\\ 0, & x\overline{\in} U.\end{cases}$$

证明 由于 $\bar{V}$ 的紧致性，且 $\bar{V}\subset U$，所以存在有限多组同心

球$\{D_i^{(1)}, D_i^{(2)}\}_{1\leqslant i\leqslant r}$, 使得

$$\bar{D}_i^{(1)}\subset D_i^{(2)}\subset U, \tag{18}$$

并且$\{D_i^{(1)}\}_{1\leqslant i\leqslant r}$构成$\bar{V}$的开复盖。由引理1, 对每一个$i\,(1\leqslant i\leqslant r)$, 存在光滑函数$f_i: \boldsymbol{R}^m\to\boldsymbol{R}^1$, 使得$0\leqslant f_i\leqslant 1$, 并且

$$f_i(x)=\begin{cases}1, & x\in D_i^{(1)},\\ 0, & x\overline{\in} D_i^{(2)}.\end{cases} \tag{19}$$

命

$$f=1-\prod_{i=1}^{r}(1-f_i), \tag{20}$$

则容易验证f适合引理2的要求。

引理3 设(U,φ_U)是光滑流形M的任意一个坐标卡, V是M的一个非空开集, 使得$\bar{V}$是紧致的, 并且$\bar{V}\subset U$, 则在流形M上存在光滑函数$h: M\to\boldsymbol{R}^1$, 使得

1) $0\leqslant h\leqslant 1$;

2) $h(p)=\begin{cases}1, & p\in V;\\ 0, & p\overline{\in} U.\end{cases}$

证明 由于$\bar{V}$是紧致的, 并且$\bar{V}\subset U$, 利用M的局部紧致性, 不难构造开子集U_1, 使得

$$\bar{V}\subset U_1\subset\bar{U}_1\subset U.$$

设$\dim M=m$, 则$\varphi_U(V)$和$\varphi_U(U_1)$都是$\boldsymbol{R}^m$中的开集。由引理2, 存在$\boldsymbol{R}^m$上的光滑函数f, 使得$0\leqslant f\leqslant 1$, 并且

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\varphi_U(V),\\ 0, & x\overline{\in}\varphi_U(U_1).\end{cases} \tag{21}$$

命

$$h(p)=\begin{cases}f\circ\varphi_U^{-1}(p), & p\in U,\\ 0, & p\overline{\in} U,\end{cases} \tag{22}$$

则h是M上的光滑函数, 而且适合引理的要求。

注记 引理 3 的条件可改成：U与V是光滑流形M的两个非空开集，使得$\bar{V}$是紧致的，并且$\bar{V}\subset U$，则引理所要求的光滑实函数 h 仍然存在。请读者自证。

定理3.6 设M是 m 维紧致的光滑流形，则存在一个正整数 n，以及光滑映射 $\varphi: M\to \boldsymbol{R}^n$，使得 (φ, M)是 $\boldsymbol{R}^n$ 的正则子流形。

证明 因为M是紧致流形，所以存在 M 的有限开复盖 $\{V_j\}_{1\leqslant j\leqslant r}$，使得每一个 $\bar{V}_j$ 是紧致的，并且 $\bar{V}_j$ 包含在某个坐标域 U_j 内，设 U_j 中局部坐标是 $u^i_{(j)}$，$1\leqslant i\leqslant m$。显然，存在开集 W_j，使

$$\bar{V}_j\subset W_j\subset \bar{W}_j\subset U_j.$$

由引理 3，对每一个 j，$1\leqslant j\leqslant r$，存在M上的光滑函数 f_j，使得 $0\leqslant f_j\leqslant 1$，并且

$$f_j(p)=\begin{cases}1, & p\in \bar{V}_j,\\ 0, & p\overline{\in} W_j.\end{cases}\tag{23}$$

在M上定义 $n=r(m+1)$ 个光滑函数：

$$\begin{aligned} & x^0_j=f_j,\\ & x^i_j(p)=\begin{cases}u^i_{(j)}(p)\cdot f_j(p), & p\in U_j,\\ 0, & p\overline{\in} U_j,\end{cases}\end{aligned}\tag{24}$$

其中$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant r$。把(x^0_j, x^i_j)看作 $\boldsymbol{R}^n$ 中一个点，则(24)式给出了映射 $\varphi: M\to\boldsymbol{R}^n$。我们先证明$(\varphi, M)$是 $\boldsymbol{R}^n$的子流形。

若有 $p, q\in M$，使得 $\varphi(p)=\varphi(q)$，则

$$x^0_j(p)=x^0_j(q),\quad x^i_j(p)=x^i_j(q)\tag{25}$$

$$1\leqslant i\leqslant m,\quad 1\leqslant j\leqslant r.$$

因为$\{V_j\}_{1\leqslant j\leqslant r}$是$M$的复盖，故存在 k，$1\leqslant k\leqslant r$，使 $p\in V_k$，因此

$$f_k(q)=x^0_k(q)=x^0_k(p)=f_k(p)=1,\tag{26}$$

$$u^i_{(k)}(q)=u^i_{(k)}(p),\qquad 1\leqslant i\leqslant m.\tag{27}$$

这表明 q 属于 U_k，并且 q 和 p 在 U_k 中有相同的局部坐标，故 $q=p$，即映射 φ 是单一的。

设 $p\in M$，则必有 k，$1\leqslant k\leqslant r$，使 $p\in V_k$，因此 $f_k(p)=1$；于是

$$x_k^i\big|_{V_k}=u_{(k)}^i,$$

所以

$$\left.\frac{\partial(x_k^1,\cdots,x_k^m)}{\partial(u_{(k)}^1,\cdots,u_{(k)}^m)}\right|_p=1.$$

这说明切映射 φ_* 在点 p 是非退化的，也就是说 (φ,M) 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的嵌入子流形。由定理3.5，φ 是正则嵌入。

§4 Frobenius 定理

在§2已经定义过流形 M 在任意一点 $p\in M$ 的切矢量 $X_p\in T_p$。定理2.3把切矢量 X_p 解释为定义在 C_p^∞（流形 M 在点 p 的光滑函数的集合）上的实函数 $X_p:C_p^\infty\to\boldsymbol{R}$。如果对 M 的任意一点 p，指定 M 在点 p 的一个切矢量 X_p，则称 X 是流形 M 上的切矢量场。若 $f\in C^\infty(M)$，命

(1) $$(Xf)(p)=X_pf,$$

则 Xf 是流形 M 上的实函数。

定义4.1 设 X 是光滑流形 M 上的一个切矢量场，若对任意的 $f\in C^\infty(M)$，仍有 $Xf\in C^\infty(M)$，则称 X 是流形 M 上的光滑切矢量场。

由此可见，光滑切矢量场 X 是从 $C^\infty(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 的一个算子。定理2.3可搬过来，得到算子 X 的性质：设 $f,g\in C^\infty(M)$，$\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$，则

1) $X(\alpha f+\beta g)=\alpha(Xf)+\beta(Xg)$；

2) $X(f\cdot g)=f\cdot Xg+g\cdot Xf$。

要研究光滑切矢量场，必须弄清它的局部特征。设 X 是流形

M上的光滑切矢量场，则对M的任意一个非空开子集U，X在U上的限制$X|_U$是开子流形U上的光滑切矢量场。要说明$X|_U$的光滑性，只须证明对任意的$f\in C^\infty(U)$，$X|_U f$仍是U上的光滑函数。任取一点$p\in U$，则有点p的坐标域V，使得$\bar{V}$是紧致的，且$\bar{V}\subset U$。根据§3的引理3，存在光滑函数 $g\in C^\infty(M)$，使得

$$g|_V=1, \quad g|_{M-U}=0;$$

命

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x)\cdot g(x), & x\in U, \\ 0, & x\notin U. \end{cases} \tag{2}$$

则$\tilde{f}\in C^\infty(M)$，且$\tilde{f}|_V=f|_V$。这样

$$(X|_U f)(x)=X_x f=(X\tilde{f})(x), \quad \forall x\in V. \tag{3}$$

因为X是M上光滑的切矢量场，所以$X\tilde{f}\in C^\infty(M)$，因此函数$X|_U f$在点$p\in U$是光滑的，即$X|_U f$是$U$上的光滑函数。

定理4.1 光滑流形M上的切矢量场X是光滑切矢量场的充分必要条件是：对任意一点$p\in M$，存在点p的局部坐标系$(U;u^i)$，使得X限制在U上可以表成

$$X|_U=\sum_{i=1}^{m}\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{4}$$

其中$\xi^i(1\leqslant i\leqslant m)$是$U$上的光滑函数。

证明 充分性是显然的，现在证明必要性。因为X是M上的光滑切矢量场，所以$X|_U$是开子流形U上的光滑切矢量场。切矢量场$X|_U$在自然基底$\left\{\frac{\partial}{\partial u^i}\right\}$下可表成

$$X|_U=\sum_{i=1}^{m}\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}.$$

因为坐标函数u^i是U上的光滑函数，所以

$$X|_U u^i = \xi^i$$

也是U上的光滑函数。

设X与Y是流形M上两个光滑切矢量场，它们的Poisson括号积定义为

$$(5)\qquad [X,Y]=XY-YX.$$

即$[X,Y]$是作用在$C^\infty(M)$上的算子，对任意的$f\in C^\infty(M)$有

$$(6)\qquad [X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf).$$

容易验证，对任意的$f,g\in C^\infty(M)$有

1) $[X,Y](f+g)=[X,Y]f+[X,Y]g$;

2) $[X,Y](fg)=f\cdot[X,Y]g+g\cdot[X,Y]f$.

这说明$[X,Y]$是流形M上的光滑切矢量场。在下面还要用局部坐标表示来说明这一点。我们先研究Poisson括号积的运算规律。

定理4.2 设X,Y,Z是流形M上的光滑切矢量场，$f,g\in C^\infty(M)$，则

1) $[X,Y]=-[Y,X]$;

2) $[X+Y,Z]=[X,Z]+[Y,Z]$;

3) $[fX,gY]=f\cdot(Xg)Y-g\cdot(Yf)X+f\cdot g[X,Y]$;

4) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.

证明 只要按照定义逐条验证即可。以3)为例：设$h\in C^\infty(M)$，则由Poisson括号积的定义得到

$$\begin{aligned}
&[fX,gY]h\\
&\quad=(fX)((gY)h)-(gY)((fX)h)\\
&\quad=f\cdot X(g\cdot Yh)-g\cdot Y(f\cdot Xh)\\
&\quad=f\cdot(Xg)(Yh)+f\cdot g\cdot X(Yh)\\
&\qquad-g\cdot(Yf)(Xh)-g\cdot f\cdot Y(Xh)\\
&\quad=(f(Xg)\cdot Y-g(Yf)\cdot X+f\cdot g[X,Y])h.
\end{aligned}$$

因此 3)式成立。

现在我们可以用局部坐标表示$[X,Y]$。设$(U;u^i)$是流形M上的一个局部坐标系，则可设

(7) $$X|_U=\sum_{i=1}^m \xi^i\frac{\partial}{\partial u^i},\qquad Y|_U=\sum_{i=1}^m \eta^i\frac{\partial}{\partial u^i},$$

其中ξ^i,η^i是U上的光滑函数。由于$\left[\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}\right]=0$ $(1\leqslant i,j\leqslant m)$，根据定理4.2得到

(8) $$\begin{aligned}[X,Y]|_U&=[X|_U,Y|_U]\\&=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m\left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial u^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial u^i}\right)\frac{\partial}{\partial u^j}.\end{aligned}$$

因此，$[X,Y]$是流形M上的光滑切矢量场。

定义4.2 设X是流形M上的光滑切矢量场。若在$p\in M$，$X_p=0$，则称点p是切矢量场X的一个奇点。

矢量场X在奇点p附近的性质是十分复杂的。第299页的图17给出了欧氏平面上具有孤立奇点的矢量场的例子。光滑切矢量场的奇点与流形的拓扑性质密切相关（见第五章定理4.1的系）。例如：在偶维球面上不存在无奇点的光滑切矢量场，而在环面上却存在这样的切矢量场。

光滑切矢量场在非奇点附近的性状是很简单的。我们有下面的定理。

定理4.3 设X是流形M上的光滑切矢量场。若在点$p\in M$，$X_p\neq 0$，则存在点p的一个局部坐标系$(W;w^i)$，使得

(9) $$X|_W=\frac{\partial}{\partial w^1}.$$

证明 由定理4.1，存在点p的局部坐标系$(U;u^i)$，$u^i(p)=0$，使得X限制在U上可表为

(10) $$X|_U=\sum_{i=1}^m \xi^i\frac{\partial}{\partial u^i},$$

其中ξ^i是U上的光滑函数。因为$X_p\neq 0$，不妨设$\xi^1(p)\neq 0$。由于ξ^1连续性，可假定U是p的充分小的邻域，使得函数ξ^1在

U上处处不为0。考虑常微分方程组

(11) $$\frac{du^\alpha}{du^1}=\frac{\xi^\alpha(u^1,\cdots,u^m)}{\xi^1(u^1,\cdots,u^m)},\quad 2\leqslant\alpha\leqslant m,$$

其中u^1是自变量，而$u^\alpha(2\leqslant\alpha\leqslant m)$是未知函数。根据常微分方程理论(参阅[10])，存在正数δ，使得$\{(u^1,\cdots,u^m)\,|\,|u^i|<\delta\}\subset U$，并且对任意给定的初值$(v^2,\cdots,v^m)$，$|v^\alpha|<\delta(2\leqslant\alpha\leqslant m)$，方程组(11)有唯一解

(12) $$u^\alpha=\varphi^\alpha(u^1;v^2,\cdots,v^m),\quad -\delta<u^1<\delta,$$

满足初条件

(13) $$\varphi^\alpha(0;v^2,\cdots,v^m)=v^\alpha,$$

并且函数φ^α光滑地依赖于u^1和初值v^α。

作变量替换

(14) $$\begin{cases}u^1=v^1,\\ u^\alpha=\varphi^\alpha(v^1;v^2,\cdots,v^m),\quad 2\leqslant\alpha\leqslant m,\end{cases}$$

则它的 Jacobi 行列式是

(15) $$\left.\frac{\partial(u^1,\cdots,u^m)}{\partial(v^1,\cdots,v^m)}\right|_{v^1=0}=1,$$

所以存在点p的一个邻域$W\subset U$，以$v^i(1\leqslant i\leqslant m)$为局部坐标系。在这个局部坐标系下，

(16) $$\begin{aligned}X|_W&=\sum_{i=1}^m\xi^i\frac{\partial}{\partial u^i}\\ &=\xi^1\frac{\partial}{\partial u^1}+\sum_{\alpha=2}^m\xi^\alpha\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\\ &=\xi^1\cdot\sum_{i=1}^m\frac{\partial u^i}{\partial v^1}\frac{\partial}{\partial u^i}=\xi^1\frac{\partial}{\partial v^1}.\end{aligned}$$

命

(17)
$$\begin{cases} w^1=\int_0^{v^1}\frac{dv^1}{\xi^1}, \\ w^a=v^a, \qquad 0\leqslant a\leqslant m, \end{cases}$$

则 w^i $(1\leqslant i\leqslant m)$ 是W上的局部坐标系，并且

$$X|_W=\frac{\partial}{\partial w^1}.$$

定理证毕。

设在流形M上有 h 个光滑切矢量场 $X_1,\cdots,X_h$，它们在邻域U内是处处线性无关的。一个自然的问题是：在U的每一点 p 是否存在局部坐标系$(W;w^i)$，使得

$$X_\alpha|_W=\frac{\partial}{\partial w^\alpha}, \quad 1\leqslant \alpha\leqslant h \ ? \tag{18}$$

因为$\left[\frac{\partial}{\partial w^i},\frac{\partial}{\partial w^j}\right]=0$，所以当（18）式成立时，必定有

$$[X_\alpha,X_\beta]=0, \qquad 1\leqslant \alpha,\beta\leqslant h. \tag{19}$$

反过来，(19)式也是满足(18)式的局部坐标系 w^i 存在的充分条件（证明方法可借鉴定理4.4的证明，请读者自己完成）。

条件(19)是比较强的。通常考虑的是下面的类似的问题。设在每一点 $p\in M$，指定了切空间 T_p 的一个 h 维子空间 $L^h(p)$，即 L^h 是M上 h 维切子空间场。若对每一点 $p\in M$，在 p 的一个邻域U上存在 h 个处处线性无关的光滑切矢量场 $X_1,\cdots,X_h$，使得在每一点 $q\in U$，$L^h(q)$是由矢量 $X_1(q),\cdots,X_h(q)$张成的，则称 L^h 是光滑的 h 维切子空间场，或称 L^h 是流形M上光滑的 h 维分布，记

$$L^h|_U=\{X_1,\cdots,X_h\}. \tag{20}$$

切矢量场 $X_1,\cdots,X_h$ 被 L^h 确定到差一个以函数为系数的非退化线性变换。实际上，如果命

$$Y_\alpha=\sum_{\beta=1}^h a_\alpha^\beta X_\beta, \qquad 1\leqslant \alpha\leqslant h, \tag{21}$$

其中 a^β_α 是U上的光滑函数，并且 $\det(a^\beta_\alpha)$ 处处不为零，则 $L^h|_U$ 也是由 $Y_1,\cdots,Y_h$ 张成的。即

$$L^h|_U=\{Y_1,\cdots,Y_h\}.$$

问题是：对于流形M上给定的h维分布 L^h，是否存在局部坐标系$(W;w^i)$，使得

$$L^h|_W=\left\{\frac{\partial}{\partial w^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial w^h}\right\}? \tag{22}$$

当(22)式成立时，则切矢量场 X_α 可表成 $1\leq\alpha\leq h$

$$X_\alpha=\sum_{\beta=1}^h a^\beta_\alpha\frac{\partial}{\partial w^\beta},$$

由于$\left[\frac{\partial}{\partial w^\alpha},\frac{\partial}{\partial w^\beta}\right]=0$，则

$$[X_\alpha,X_\beta]=\sum_{\gamma=1}^h C^\gamma_{\alpha\beta}X_\gamma, \tag{23}$$

其中

$$C^\gamma_{\alpha\beta}=\sum_{\delta,\tau=1}^h\left(a^\delta_\alpha\frac{\partial a^\tau_\beta}{\partial w^\delta}-a^\delta_\beta\frac{\partial a^\tau_\alpha}{\partial w^\delta}\right)\overset{-1}{a}{}^\gamma_\tau. \tag{24}$$

式中 $\overset{-1}{a}$ 表示矩阵 $a=(a^\tau_\beta)$ 的逆矩阵.显然，如果切矢量场$Y_1,\cdots,Y_h$张成同一个h维分布L^h，则当X_α $(1\leqslant\alpha\leqslant h)$ 满足条件(23)时，$[Y_\alpha,Y_\beta]$也可表为Y_γ的线性组合。

定义4.3 设L^h是流形M上的h维光滑分布。如果在任意一个坐标域U上，当L^h由处处线性无关的光滑切矢量场$X_1,\cdots,X_h$张成时，$[X_\alpha,X_\beta]$ $(1\leqslant\alpha,\beta\leqslant h)$都可以表成$X_\gamma$的线性组合，则称分布$L^h$适合Frobenius条件。

定理4.4 设L^h是定义在M的一个开集U上的h维光滑分布，则对任意一点$p\in U$，存在点p的局部坐标系$(W;w^i)$，$W\subset U$，使得

$$L^h|_W=\left\{\frac{\partial}{\partial w^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial w^h}\right\}$$

的充分必要条件是 L^h 适合 Frobenius 条件。

通常把上述定理称为 Frobenius 定理。

证明 必要性在前面已证。为证充分性，我们对分布的维数 h 作归纳法。

当 $h=1$ 时，由定理4.3知命题为真。假定充分性对于 $h-1$ 维分布成立。设分布 L^h 由 U 上处处线性无关的切矢量场 $X_1, \cdots, X_h$ 张成，并且

$$[X_\alpha, X_\beta] \equiv 0 \bmod X_\gamma, \quad 1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant h.$$

由定理4.3，在点 p 存在坐标系 $(y^1, \cdots, y^m)$，使得

$$X_h = \frac{\partial}{\partial y^h}. \tag{25}$$

设

$$X'_\lambda = X_\lambda - (X_\lambda y^h) X_h, \quad 1 \leqslant \lambda, \mu, \nu \leqslant h-1. \tag{26}$$

显然

$$X'_\lambda y^h = 0, \quad X_h y^h = 1. \tag{27}$$

因为 $L^h = \{X'_1, \cdots, X'_{h-1}, X_h\}$，所以这 h 个切矢量场仍适合 Frobenius 条件，故可设

$$[X'_\lambda, X'_\mu] \equiv a_{\lambda\mu} X_h \bmod X'_\nu.$$

将上式两边的算子作用于函数 y^h，则得 $a_{\lambda\mu}=0$。因此 $h-1$ 维分布 $L'^{h-1} = \{X'_1, \cdots, X'_{h-1}\}$ 适合 Frobenius 条件。根据归纳假定，存在点 p 的局部坐标系 $(z^1, \cdots, z^m)$，使得

$$L'^{h-1} = \left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^{h-1}}\right\}. \tag{28}$$

因为 $\frac{\partial}{\partial z^\lambda}$ 和 X'_μ 只差一个非退化线性变换，由(27)式得到

$$\frac{\partial}{\partial z^\lambda} y^h = 0. \tag{29}$$

由于 $L^h = \left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^{h-1}}, X_h\right\}$，根据 Frobenius 条件可设

$$\left[\frac{\partial}{\partial z^\lambda}, X_h\right] \equiv b_\lambda X_h \bmod \frac{\partial}{\partial z^\mu}.$$

将上式两边作用于 y^h，则得 $b_\lambda=0$；所以

(30) $$\left[\frac{\partial}{\partial z^\lambda}, X_h\right]=\sum_{\mu=1}^{h-1} C_\lambda^\mu \frac{\partial}{\partial z^\mu}.$$

在坐标系 $(z^1, \cdots, z^m)$ 下，设 X_h 可表成

(31) $$X_h=\sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial z^i},$$

则

(32) $$\left[\frac{\partial}{\partial z^\lambda}, X_h\right]=\sum_{i=1}^m \frac{\partial \xi^i}{\partial z^\lambda} \frac{\partial}{\partial z^i}.$$

将上式与(30)式对照，则得

(33) $$\frac{\partial \xi^\rho}{\partial z^\lambda}=0, \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant h-1, \quad h \leqslant \rho \leqslant m.$$

这说明 ξ^ρ 只是 $z^h, \cdots, z^m$ 的函数。命

(34) $$X_h'=\sum_{\rho=h}^m \xi^\rho \frac{\partial}{\partial z^\rho},$$

则仍有

$$L^h=\left\{\frac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z^{h-1}}, X_h'\right\}.$$

根据定理4.3，存在从 $(z^h, \cdots, z^m)$ 到 $(w^h, \cdots, w^m)$ 的局部坐标变换，使得 X_h' 可以表成

(35) $$X_h'=\frac{\partial}{\partial w^h}.$$

上面的变换不涉及 $z^1, \cdots, z^{h-1}$。再命 $w^\lambda=z^\lambda$ $(1 \leqslant \lambda \leqslant h-1)$，则 $(w^1, \cdots, w^m)$ 成为点 p 的局部坐标系；在此坐标系下

$$L^h=\left\{\frac{\partial}{\partial w^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial w^h}\right\}.$$

定理证毕。

注记　在应用中，把 Frobenius 定理写成用外微分叙述的对偶形式是方便的，参阅第三章的定理2.4。

第二章　多重线性代数

§1　张　量　积

本章是为深入地研究微分流形作一些代数上的准备。我们先回顾矢量空间的概念。

用F表示数域。在本书中，F通常是指实数域$\boldsymbol{R}$或复数域$\boldsymbol{C}$。

所谓域F上的矢量空间V是指一个集合，在这个集合中定义了两种运算：

1）加法；

2）对F的数乘法（F的元素写在左边）。

要求这两种运算满足下列条件：

1）集合V关于加法运算成为交换群，其单位元素记作0（零矢量）；

2）对于$\alpha,\beta\in F$，$x,y\in V$有

a）$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$，

b）$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$，

c）$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$，

d）$0\cdot x=0$，$1\cdot x=x$。

空间V的元素称为矢量，F的元素称为数量。

如果在V中存在n个元素$a_1,\cdots,a_n$，使得V中任意一个元素可以唯一地表成这n个元素的、系数在F中的线性组合，则称V是n维矢量空间。这样一组矢量$\{a_1,\cdots,a_n\}$称为空间V的一个基底。很明显，在取定基底之后矢量空间V就等同于由有序数组$(a^1,\cdots,a^n)$ $(a^i\in F)$组成的矢量空间。

注记　若把上面的域F换成环R，则按同样的方式可定义环

R 上的线性空间。这样得到的环 R 上的线性空间称为(左) R-模。第三章§1 所定义的矢量从的截面空间构成一个 $C^\infty(M)$-模。

设 $f:V\to F$ 是 V 上的 F-值函数。如果对任意的 $v_1,v_2\in V$ 及 a^1, $a^2\in F$ 有

(1) $$f(a^1v_1+a^2v_2)=a^1f(v_1)+a^2f(v_2),$$

则称 f 是 V 上的 F-值线性函数。显然，如果 f,g 是 V 上的 F-值线性函数，$a\in F$，则 $f+g, af$ 仍然是 V 上的 F-值线性函数。这样，全体 V 上的 F-值线性函数的集合成为域 F 上的矢量空间，记作 V^*，叫做 V 的对偶空间。

如果 V 是域 F 上的 n 维矢量空间，则 V^* 也是 F 上的 n 维矢量空间。设 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 是 V 的一个基底，且

$$v=\sum_{i=1}^{n}v^ia_i\in V,\quad f\in V^*,$$

则

(2) $$f(v)=\sum_{i=1}^{n}v^if(a_i).$$

所以线性函数 f 由它在基底上的值 $f(a_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 所确定。于是可定义线性函数 $a^{*i}\in V^*$，$1\leqslant i\leqslant n$，使得

(3) $$a^{*i}(a_j)=\delta^i_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

那么 $a^{*i}(v)=v^i$，所以

$$f(v)=\sum_{i=1}^{n}f_iv^i=\sum_{i=1}^{n}f_ia^{*i}(v),$$

(4) $$f=\sum_{i=1}^{n}f_ia^{*i},$$

其中 $f_i=f(a_i)$。(4)式说明 V^* 的任意一个元素都可用 $\{a^{*i},1\leqslant i\leqslant n\}$ 线性表示。易见这种表示是唯一的，因此 $\{a^{*i},1\leqslant i\leqslant n\}$ 是 V^* 的基底，称为与 $\{a_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 对偶的基底。所以 V^* 也是域 F 上的 n 维矢量空间。

注记 a^{*i}是矢量空间V在取定基底$\{a_1,\cdots,a_n\}$后的坐标函数。实际上，$a^{*i}(v)=v^i$，即$a^{*i}(v)$是矢量v关于取定基底的第i个分量。

V^*和V的对偶关系是相互的。我们定义

$$\langle v,v^*\rangle=v^*(v),\quad v\in V,\quad v^*\in V^*, \tag{5}$$

则$\langle\ ,\ \rangle$是定义在$V\times V^*$上的F-值函数，并且对每一个变量都是线性的，即：对于$v,v_1,v_2\in V$，$v^*,v^{*1},v^{*2}\in V^*$，及$\alpha_1,\alpha_2\in F$有

$$\begin{cases}\langle\alpha_1v_1+\alpha_2v_2,v^*\rangle=\alpha_1\langle v_1,v^*\rangle+\alpha_2\langle v_2,v^*\rangle,\\ \langle v,\alpha_1v^{*1}+\alpha_2v^{*2}\rangle=\alpha_1\langle v,v^{*1}\rangle+\alpha_2\langle v,v^{*2}\rangle.\end{cases} \tag{6}$$

在(5)式中固定矢量$v\in V$，则$\langle v,\ \rangle$是V^*上的F-值线性函数；反过来，V^*上的F-值线性函数都可如此表示。设φ是V^*上的F-值线性函数，只要命$v=\sum_{i=1}^n\varphi(a^{*i})a_i$，则对任意的$v^*\in V^*$有

$$\begin{aligned}\langle v,v^*\rangle&=\sum_{i=1}^n\varphi(a^{*i})\langle a_i,v^*\rangle\\&=\sum_{i=1}^n v^*(a_i)\cdot\varphi(a^{*i})\\&=\sum_{i=1}^n\varphi(v^*(a_i)\cdot a^{*i})=\varphi(v^*).\end{aligned} \tag{7}$$

因此V可以看作V^*上的F-值线性函数所成的矢量空间，即V是V^*的对偶空间。

现在我们把上面的讨论稍作一些推广。假定V,W,Z都是域F上有限维的矢量空间。

定义1.1 映射$f:V\to Z$称为线性的，如果对于$v_1,v_2\in V$，$\alpha^1,\alpha^2\in F$有

$$f(\alpha^1v_1+\alpha^2v_2)=\alpha^1f(v_1)+\alpha^2f(v_2). \tag{8}$$

映射$f:V\times W\to Z$称为双线性的，如果f对于每一个变量都是线性的，即：对于任意的$v,v_1,v_2\in V$，$w,w_1,w_2\in W$及$\alpha^1,\alpha^2\in F$有

$$(9)\qquad \begin{cases} f(a^1v_1+a^2v_2, w)=a^1f(v_1,w)+a^2f(v_2,w), \\ f(v, a^1w_1+a^2w_2)=a^1f(v,w_1)+a^2f(v,w_2). \end{cases}$$

类似地可以定义 r 重线性映射$f: V_1\times\cdots\times V_r\to Z$，其中 $V_1,\cdots,V_r$ 都是F 上的矢量空间。

当$Z=F$ （看作F上的一维矢量空间）时，定义1.1 给出的就是F-值线性函数、F-值双线性函数和F-值 r 重线性函数。

从$V_1\times\cdots\times V_r$到$Z$的全体 r 重线性映射的集合记作$\mathscr{L}(V_1,\cdots,V_r;Z)$。若$f,g\in\mathscr{L}(V_1,\cdots,V_r;Z)$，$a\in F$，对于任意的$v_i\in V_i$，$1\leqslant i\leqslant r$，命

$$(10)\qquad \begin{cases} (f+g)(v_1,\cdots,v_r)=f(v_1,\cdots,v_r)+g(v_1,\cdots,v_r), \\ (af)(v_1,\cdots,v_r)=a\cdot f(v_1,\cdots,v_r), \end{cases}$$

则$f+g$，af仍属于$\mathscr{L}(V_1,\cdots,V_r;Z)$。显然，集合$\mathscr{L}(V_1,\cdots,V_r;Z)$关于这两种运算成为域$F$上的矢量空间。

空间$\mathscr{L}(V;Z)$的结构比较简单。在V中取基底$\{a_1,\cdots,a_n\}$，在Z中取基底$\{b_1,\cdots,b_m\}$，则$f\in\mathscr{L}(V;Z)$由它在基底$\{a_i\}$上的作用所确定。设

$$(11)\qquad f(a_i)=\sum_{\alpha=1}^{m}f_{i\alpha}b_\alpha,\quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

则f对应于$n\times m$阶矩阵$(f_{i\alpha})$。不难看出，空间$\mathscr{L}(V;Z)$和$n\times m$阶矩阵（元素属于F）所成的矢量空间是同构的。通常我们也用记号

$$(12)\qquad \mathscr{L}(V;Z)=\mathrm{Hom}(V,Z).$$

现在的问题是要把$V\times W$上的双线性映射转化为线性映射；确切些说：对于给定的矢量空间V和W，要构造只依赖V和W的矢量空间Y及双线性映射$h: V\times W\to Y$，使得对于任意的双线性映射$f: V\times W\to Z$，存在唯一的线性映射$g: Y\to Z$，适合

$$(13)\qquad f=g\circ h: V\times W\to Z,$$

或者说有交换图表：

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& Z
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

要构造的空间 Y 就是 V 和 W 的张量积。

为了叙述清楚起见，我们先说明对偶空间V^* 和W^* 的张量积。设$v^* \in V^*$，$w^* \in W^*$，线性函数v^*和w^*的张量积$v^* \otimes w^*$定义为

$$
\begin{aligned}
v^* \otimes w^* (v, w) &= v^* (v) \cdot w^* (w) \\
&= \langle v, v^* \rangle \cdot \langle w, w^* \rangle,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

其中$v \in V$，$w \in W$，则$v^* \otimes w^*$ 是$V \times W$上的双线性函数，即$v^* \otimes w^* \in \mathscr{L}(V, W; F)$。运算$\otimes$是从$V^* \times W^*$到$\mathscr{L}(V, W; F)$的双线性映射。实际上，对于$v_1^*, v_2^* \in V^*$，$w^* \in W^*$及$a_1, a_2 \in F$，我们有

$$
\begin{aligned}
&(a_1 v_1^* + a_2 v_2^*) \otimes w^* (v, w) \\
&= \langle v, a_1 v_1^* + a_2 v_2^* \rangle \cdot \langle w, w^* \rangle \\
&= a_1 \langle v, v_1^* \rangle \langle w, w \rangle + a_2 \langle v, v_2^* \rangle \langle w, w^* \rangle \\
&= (a_1 (v_1^* \otimes w^*) + a_2 (v_2^* \otimes w^*)) (v, w),
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
&(a_1 v_1^* + a_2 v_2^*) \otimes w \\
&\quad = a_1 (v_1^* \otimes w^*) + a_2 (v_2^* \otimes w^*).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

同理，运算$\otimes$对于第二个因子也是线性的。

矢量空间V^*和W^*的张量积$V^* \otimes W^*$是指形如$v^* \otimes w^*$ $(v^* \in V^*, w^* \in W^*)$的元素所生成的矢量空间，它是$\mathscr{L}(V, W; F)$ 的子空间。要指出的是，张量积$V^* \otimes W^*$的元素是形如$v^* \otimes w^*$ 的元素的有限线性组合，一般不能写成单项，如 $v^* \otimes w^*$（请读者举例说明）。张量积$V^* \otimes W^*$中能写成单项$v^* \otimes w^*$ 的元素称为可分解的。

在V^*和W^*中分别取基底 $\{a^{*i}, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 和 $\{b^{*\alpha}, 1 \leqslant \alpha \leqslant m\}$。

因为$\otimes$是双线性映射，所以

(17) $$v^*\otimes w^* = \sum_{i,\alpha} v^*(a_i)w^*(b_\alpha)a^{*i}\otimes b^{*\alpha},$$

其中$\{a_i\}$,$\{b_\alpha\}$分别是在V和W中的对偶的基底，因此$V^*\otimes W^*$中的元素都可以表成$a^{*i}\otimes b^{*\alpha}$的线性组合。容易证明$a^{*i}\otimes b^{*\alpha}$ ($1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant \alpha\leqslant m$)是线性无关的，所以它们构成张量积$V^*\otimes W^*$的基底，因此$V^*\otimes W^*$是$n\times m$维矢量空间。可以证明，任意一个$F$-值双线性函数$f:V\times W\to F$都可以表成$a^{*i}\otimes b^{*\alpha}$的线性组合，因此

$$V^*\otimes W^* = \mathscr{L}(V,W;F).$$

因为矢量空间V和W又分别是V^*和W^*的对偶空间，同理可以定义张量积$V\otimes W$，并且仍然有

$$V\otimes W = \mathscr{L}(V^*,W^*;F).$$

张量积$V\otimes W$和$V^*\otimes W^*$是互为对偶的，只要命

(18) $$\langle v\otimes w, v^*\otimes w^*\rangle = \langle v,v^*\rangle\cdot\langle w,w^*\rangle.$$

特别是

(19) $$\langle a_i\otimes b_\alpha, a^{*j}\otimes b^{*\beta}\rangle = \delta_i^j\delta_\alpha^\beta = \begin{cases}1, & (i,\alpha)=(j,\beta),\\ 0, & (i,\alpha)\neq(j,\beta),\end{cases}$$

所以$\{a_i\otimes b_\alpha, 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant\alpha\leqslant m\}$和$\{a^{*i}\otimes b^{*\alpha}, 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant\alpha\leqslant m\}$是互为对偶的基底。因此

$$V^*\otimes W^* = (V\otimes W)^*.$$

定理1.1 设$h:V\times W\to V\otimes W$是张量积$\otimes$给出的双线性映射，即对于$v\in V$，$w\in W$有

(20) $$h(v,w) = v\otimes w.$$

则对任意的双线性映射$f:V\times W\to Z$，存在唯一的线性映射$g:V\otimes W\to Z$，使得

(21) $$f = g\circ h: V\times W\to Z.$$

证明 定义线性映射$g:V\otimes W\to Z$，使它在基底上的作用是

(22) $$g(a_i \otimes b_\alpha) = f(a_i, b_\alpha),$$
$$1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant m.$$

若设

$$v = \sum_{i=1}^{n} v^i a_i \in V, \quad w = \sum_{\alpha=1}^{m} w^\alpha b_\alpha \in W,$$

则

$$\begin{aligned} g(v \otimes w) &= \sum_{i,\alpha} v^i w^\alpha g(a_i \otimes b_\alpha) \\ &= \sum_{i,\alpha} v^i w^\alpha f(a_i, b_\alpha) \\ &= f(v, w), \end{aligned}$$

所以$f = g \circ h: V \times W \to Z$。显然 g 是唯一确定的。

系 矢量空间$\mathscr{L}(V, W; Z)$与$\mathscr{L}(V \otimes W; Z)$是同构的。

证明 定义映射

$$\varphi: \mathscr{L}(V \otimes W; Z) \to \mathscr{L}(V, W; Z),$$

使得

(23) $$\varphi(g) = g \circ h, \quad g \in \mathscr{L}(V \otimes W; Z),$$

其中 h 如(20)式所定义。定理1.1说明映射φ是 1-1 的满映射。显然 φ 是线性的，因此 φ 建立了这两个矢量空间之间的同构。

线性函数的张量积运算可以推广到任意的多重线性函数。设$f \in \mathscr{L}(V_1, \cdots, V_s; F)$，$g \in \mathscr{L}(W_1, \cdots, W_r; F)$，它们的张量积 $f \otimes g$ 定义如下：设$v_i \in V_i$，$1 \leqslant i \leqslant s$；$w_j \in W_j$，$1 \leqslant j \leqslant r$，则

(24) $$f \otimes g(v_1, \cdots, v_s, w_1, \cdots, w_r) = f(v_1, \cdots, v_s) \cdot g(w_1, \cdots, w_r).$$

显然 $f \otimes g$ 是$V_1 \times \cdots \times V_s \times W_1 \times \cdots \times W_r$上的 F-值$(r+s)$ 重线性函数，张量积运算$\otimes$是 从 $\mathscr{L}(V_1, \cdots, V_s; F) \times \mathscr{L}(W_1, \cdots, W_r; F)$ 到$\mathscr{L}(V_1, \cdots, V_s, W_1, \cdots, W_r; F)$的双线性映射。

定理1.2 张量积运算$\otimes$适合结合律。即：对于任意的$\varphi \in \mathscr{L}(V_1, \cdots, V_s; F)$，$\psi \in \mathscr{L}(W_1, \cdots, W_r; F)$及$\xi \in \mathscr{L}(Z_1, \cdots, Z_t; F)$有

(25) $$(\varphi\otimes\psi)\otimes\xi=\varphi\otimes(\psi\otimes\xi).$$

证明 为简明起见，只对$s=r=t=1$ 的情形进行证明，一般情形是类似的。设$v\in V_1$，$w\in W_1$，$z\in Z_1$，则

$$\begin{aligned}&(\varphi\otimes\psi)\otimes\xi(v,w,z)\\&=\varphi\otimes\psi(v,w)\cdot\xi(z)\\&=\varphi(v)\cdot\psi(w)\cdot\xi(z).\end{aligned}$$

同理

$$\varphi\otimes(\psi\otimes\xi)(v,w,z)=\varphi(v)\cdot\psi(w)\cdot\xi(z).$$

所以

$$(\varphi\otimes\psi)\otimes\xi=\varphi\otimes(\psi\otimes\xi),$$

因此记号 $\varphi\otimes\psi\otimes\xi$ 是有意义的，称为这三个元素的张量积。

我们把形如 $v\otimes w\otimes z$ $(v\in V, w\in W, z\in Z)$ 的元素所生成的矢量空间记作$V\otimes W\otimes Z$，称为矢量空间V,W,Z的张量积。这里v,w,z分别看作V^*,W^*和Z^*上的F-值线性函数。

同理，若$V_1,\cdots,V_s$是F上的矢量空间，则可定义它们的张量积$V_1\otimes\cdots\otimes V_s$。若$V_i$的基底是

$$\{a_1^{(i)},\cdots,a_{n_i}^{(i)}\}$$

则$V_1\otimes\cdots\otimes V_s$的基底是

(26) $$a_{\alpha_1}^{(1)}\otimes a_{\alpha_2}^{(2)}\otimes\cdots\otimes a_{\alpha_s}^{(s)},$$

$$1\leqslant\alpha_i\leqslant n_i,\quad i=1,\cdots,s.$$

所以

(27) $$\dim(V_1\otimes\cdots\otimes V_s)=\dim V_1\cdot\dim V_2\cdot\cdots\cdot\dim V_s.$$

容易证明

$$V_1\otimes\cdots\otimes V_s=\mathscr{L}(V_1^*,\cdots,V_s^*;F).$$

定理1.3 设 $h:V_1\times\cdots\times V_s\to V_1\otimes\cdots\otimes V_s$ 是张量积$\otimes$所定义的 s 重线性映射，即对于$v_i\in V_i$，$1\leqslant i\leqslant s$，有

(28) $$h(v_1,\cdots,v_s)=v_1\otimes\cdots\otimes v_s,$$

则对任意的$f\in\mathscr{L}(V_1,\cdots,V_s;Z)$存在唯一的线性映射$g\in\mathscr{L}(V_1\otimes$

$\cdots\otimes V_s; Z)$，使得

(29) $$f=g\circ h: V_1\times\cdots\times V_s\to Z.$$

证明与定理1.1类似，请读者自己完成。

§2 张 量

在上一节我们讨论了张量积的一般概念。在微分几何中所用的，经常是同一个矢量空间与它自己以及它的对偶空间的张量积。

定义2.1 设V是域F上的n维矢量空间，其对偶空间是V^*。张量积

(1) $$V_s^r=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{个}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{s\text{个}}$$

的元素称为(r,s)型张量，其中r是张量的反变阶数，s是其协变阶数。

特别是，V_0^r的元素叫做r阶反变张量，V_s^0的元素叫做s阶协变张量。还约定$V_0^0=F$，$V_0^1=V$，$V_1^0=V^*$，V的元素称做反变矢量，V^*的元素称做协变矢量。

注记 在应用时，张量积V_s^r中V和V^*的各因子可能是交替出现的。将它们排成(1)的形式，只是为了记号的便利。

根据§1的讨论，$\dim V_s^r=n^{r+s}$，并且

$$V_s^r=\mathscr{L}(\underbrace{V^*,\cdots,V^*}_{r\text{个}},\underbrace{V,\cdots,V}_{s\text{个}};F),$$

也就是说，(r,s)型张量是定义在

$$\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{r\text{个}}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{s\text{个}}$$

上的F-值$(r+s)$重线性函数。设$\{e_i,1\leqslant i\leqslant n\}$和$\{e^{*i},1\leqslant i\leqslant n\}$分别是$V$和$V^*$中彼此对偶的基底，则空间$V_s^r$的基底是

(2) $$e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*k_1}\otimes\cdots\otimes e^{*k_s},$$
$$1\leqslant i_1,\cdots,i_r,k_1,\cdots,k_s\leqslant n.$$

因此(r,s)型张量x可以唯一地表成

(3) $$x=\sum_{\substack{i_1\cdots i_r\\k_1\cdots k_s}}x^{i_1\cdots i_r}{}_{k_1\cdots k_s}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*k_1}\otimes\cdots\otimes e^{*k_s},$$

其中$x^{i_1\cdots i_r}{}_{k_1\cdots k_s}$称为张量$x$在基底(2)下的分量。很明显，

(4) $$x^{i_1\cdots i_r}{}_{k_1\cdots k_s}=x(e^{*i_1},\cdots,e^{*i_r},e_{k_1},\cdots,e_{k_s})$$
$$=\langle e^{*i_1}\otimes\cdots\otimes e^{*i_r}\otimes e_{k_1}\otimes\cdots\otimes e_{k_s},x\rangle.$$

在处理张量时，常用Einstein的和式约定：在一个单项表达式中出现重复的上、下指标，表示该式关于这个指标在它的取值范围内求和，而略去和号不写。例如，在(3)式中原有$r+s$重和号，采用这个约定则可写成

(5) $$x=x^{i_1\cdots i_r}{}_{k_1\cdots k_s}e_{i_1}$$
$$\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*k_1}\otimes\cdots\otimes e^{*k_s}.$$

当矢量空间V的基底改变时，张量的分量是按一定的规律变换的。设$\{\bar{e}_i,1\leqslant i\leqslant n\}$是$V$的另一个基底，相应的对偶基底是$\{\bar{e}^{*i},1\leqslant i\leqslant n\}$。用原基底表示，可设

(6) $$\bar{e}_i=a_i^j e_j,$$

其中$a=(a_i^j)$是行列式不为零的$n\times n$阶方阵。因此

(7) $$\bar{e}^{*i}=\beta_j^i e^{*j},$$

其中$\beta=(\beta_i^j)$是a的逆矩阵，即

(8) $$a_i^j\beta_j^k=\beta_i^j a_j^k=\delta_i^k.$$

若用$\bar{x}^{i_1\cdots i_r}{}_{k_1\cdots k_s}$记张量$x$在新基底下的分量，则

$$x=\bar{x}^{i_1\cdots i_r}{}_{k_1\cdots k_s}\bar{e}_{i_1}\otimes\cdots\otimes\bar{e}_{i_r}\otimes\bar{e}^{*k_1}\otimes\cdots\otimes\bar{e}^{*k_s}$$

$$=\bar{x}^{i_1\cdots i_r}{}_{k_1\cdots k_s}\alpha^{j_1}_{i_1}\cdots\alpha^{j_r}_{i_r}\beta^{k_1}_{l_1}\cdots\beta^{k_s}_{l_s}\;e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\otimes e^{*l_1}\otimes\cdots\otimes e^{*l_s},$$

所以

$$x^{j_1\cdots j_r}{}_{l_1\cdots l_s}=\bar{x}^{i_1\cdots i_r}{}_{k_1\cdots k_s}\alpha^{j_1}_{i_1}\cdots\alpha^{j_r}_{i_r}\beta^{k_1}_{l_1}\cdots\beta^{k_s}_{l_s}. \tag{9}$$

在经典的张量分析中，变换公式(9)是定义张量的根据。

(r,s)型张量的空间V^r_s是矢量空间，所以同类型的张量可以相加；张量也可乘以一个数量。此外，张量还有乘法和缩并两种运算。两个张量相乘就是它们作为多重线性函数的张量积。

定义2.2 设x是(r_1,s_1)型张量，y是(r_2,s_2)型张量，则它们的积$x\otimes y$是(r_1+r_2,s_1+s_2)型张量，其定义是

$$\begin{aligned}(10)\quad & x\otimes y(v^{*1},\cdots,v^{*r_1+r_2},v_1,\cdots,v_{s_1+s_2})\\ &=x(v^{*1},\cdots,v^{*r_1},v_1,\cdots,v_{s_1})\\ &\quad\cdot y(v^{*r_1+1},\cdots,v^{*r_1+r_2},v_{s_1+1},\cdots,v_{s_1+s_2}).\end{aligned}$$

在取定基底后，$x\otimes y$的分量是x和y的分量的积，即

$$\begin{aligned}(11)\quad & (x\otimes y)^{i_1\cdots i_{r_1+r_2}}{}_{k_1\cdots k_{s_1+s_2}}\\ &=x^{i_1\cdots i_{r_1}}{}_{k_1\cdots k_{s_1}}\cdot y^{i_{r_1+1}\cdots i_{r_1+r_2}}{}_{k_{s_1+1}\cdots k_{s_1+s_2}}.\end{aligned}$$

如§1所讨论的，张量的乘法适合分配律和结合律(见定理1.2)。

定义2.3 取两个指标λ,μ，使$1\leqslant\lambda\leqslant r$，$1\leqslant\mu\leqslant s$。对于任意

一个可分解的(r,s)型张量

(12) $$x=v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes v^{*1}\otimes\cdots\otimes v^{*s}\in V^r_s,$$

命

(13) $$C_{\lambda\mu}(x)=\langle v_\lambda,v^{*\mu}\rangle v_1\otimes\cdots\otimes\hat{v}_\lambda\otimes\cdots\otimes v_r\otimes v^{*1}\otimes\cdots\otimes\hat{v}^{*\mu}\otimes\cdots\otimes v^{*s},$$

其中记号"$\wedge$"表示去掉该因子，则$C_{\lambda\mu}(x)\in V^{r-1}_{s-1}$。将映射$x\mapsto C_{\lambda\mu}(x)$作线性扩充所得到的线性映射$C_{\lambda\mu}:V^r_s\to V^{r-1}_{s-1}$叫做缩幷。

若张量x用分量表示为

(14) $$x=x^{i_1\cdots i_r}{}_{k_1\cdots k_s}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*k_1}\otimes\cdots\otimes e^{*k_s},$$

根据缩幷的定义得

(15) $$\begin{aligned}C_{\lambda\mu}(x)&=x^{i_1\cdots i_r}{}_{k_1\cdots k_s}C_{\lambda\mu}(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*k_1}\otimes\cdots\otimes e^{*k_s})\\&=x^{i_1\cdots i_{\lambda-1}ii_\lambda\cdots i_{r-1}}{}_{k_1\cdots k_{\mu-1}ik_\mu\cdots k_{s-1}}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{r-1}}\otimes e^{*k_1}\otimes\cdots\otimes e^{*k_{s-1}}.\end{aligned}$$

因此从分量来看，缩幷$C_{\lambda\mu}$就是关于第λ个上指标与第μ个下指标的对等求和。缩幷降低了张量的阶数，它是一个很基本的运算。例如，设$x=\xi^i_je_i\otimes e^{*j}$是$(1,1)$型张量，则$x$的缩幷就是求矩阵$(\xi^i_j)$的迹$\sum_{i=1}^n\xi^i_i$，所得的是一个与坐标系选取无关的数量。

设

$$T^r(V)=V^r_0=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r个},$$

考虑直和$T(V)=\sum_{r\geq0}T^r(V)$，其元素x可表成形式和

(16) $$x=\sum_{r\geq 0}x^r,\qquad x^r\in T^r(V).$$

和式中除有限多项外其余各项都是零. 这样，$T(V)$ 是无限维矢量空间。张量的乘法通过分配律可以扩充成 $T(V)$ 中的乘法，因此矢量空间 $T(V)$ 关于这种乘法成为一个代数，称为矢量空间 V 的张量代数。

同理，V^* 的张量代数是 $T(V^*)=\sum\limits_{r\geq 0}V^0_r$。

如§1所讨论的，矢量空间 $T^r(V^*)$ 和 $T^r(V)$ 是彼此对偶的，它们的配合是

(17) $$\begin{aligned}&\langle v_1\otimes\cdots\otimes v_r, v^{*1}\otimes\cdots\otimes v^{*r}\rangle\\&=\langle v_1, v^{*1}\rangle\cdot\cdots\cdot\langle v_r, v^{*r}\rangle,\end{aligned}$$

其中 $v_i\in V$，$v^{*i}\in V^*$。

用 $\mathscr{S}(r)$ 记自然数 $\{1,\cdots,r\}$ 的置换群。$\mathscr{S}(r)$ 的任意一个元素 σ 决定了矢量空间 $T^r(V)$ 的一个自同态：设 $x\in T^r(V)$，则定义

(18) $$\sigma x(v^{*1},\cdots,v^{*r})=x(v^{*\sigma(1)},\cdots,v^{*\sigma(r)}),$$

其中 $v^{*i}\in V^*$。易证，如果 $x=v_1\otimes\cdots\otimes v_r$，则

(19) $$\sigma x=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(r)},$$

其中 σ^{-1} 表示 σ 的逆元素。

定义2.4 设 $x\in T^r(V)$。若对任意的 $\sigma\in\mathscr{S}(r)$，都有

(20) $$\sigma x=x,$$

则称 x 是对称的 r 阶反变张量。若对任意的 $\sigma\in\mathscr{S}(r)$，都有

(21) $$\sigma x=\operatorname{sgn}\sigma\cdot x,$$

其中 $\operatorname{sgn}\sigma$ 表示置换 σ 的符号，即

(22) $$\operatorname{sgn}\sigma=\begin{cases}1, & \sigma\text{是偶置换},\\-1, & \sigma\text{是奇置换},\end{cases}$$

则称 x 是反对称 r 阶反变张量。

定理2.1 设 $x\in T^r(V)$，则 x 是对称张量的充要条件是：它

的分量关于各指标是对称的；x 是反对称的充要条件是它的分量关于各指标是反对称的。

证明 设 V 的基底是 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，则当 x 是对称张量时，对任意的 $\sigma\in\mathscr{S}(r)$ 有

$$
\begin{aligned}
(23)\qquad x^{i_1\cdots i_r}&=x(e^{*i_1},\cdots,e^{*i_r})\\
&=\sigma x(e^{*i_1},\cdots,e^{*i_r})\\
&=x(e^{*i_{\sigma(1)}},\cdots,e^{*i_{\sigma(r)}})\\
&=x^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}};
\end{aligned}
$$

反之亦然。若 x 是反对称的，则对任意的 $\sigma\in\mathscr{S}(r)$ 有

$$
\begin{aligned}
(24)\qquad x^{i_1\cdots i_r}&=x(e^{*i_1},\cdots,e^{*i_r})\\
&=\operatorname{sgn}\sigma\cdot\sigma x(e^{*i_1},\cdots,e^{*i_r})\\
&=\operatorname{sgn}\sigma\cdot x^{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(r)}}.
\end{aligned}
$$

反之亦然。

用 $P^r(V)$ 记全体对称的 r 阶反变张量的集合，用 $\Lambda^r(V)$ 记全体反对称的 r 阶反变张量的集合。因为置换 σ 在 $T^r(V)$ 上的作用是自同态，所以对称张量的和仍是对称的，反对称张量的和仍是反对称的，因此 $P^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V)$ 都是 $T^r(V)$ 的线性子空间。

定义2.5 对任意的 $x\in T^r(V)$，命

$$(25)\qquad S_r(x)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(r)}\sigma x,$$

$$(26)\qquad A_r(x)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(r)}\operatorname{sgn}\sigma\cdot\sigma x,$$

则 $S_r(x),A_r(x)\in T^r(V)$。显然，映射 $S_r,A_r:T^r(V)\to T^r(V)$ 都是 $T^r(V)$ 的自同态，分别称为 r 阶反变张量的对称化算子和反对称化算子。

定理2.2 $P^r(V)=S_r(T^r(V))$，$\Lambda^r(V)=A_r(T^r(V))$。

证明 首先证明张量 x 对称化的结果是对称张量，反对称化的结果是反对称张量。设$x\in T^r(V)$，则对任意的$\tau\in\mathscr{S}(r)$有

$$\tau(S_r(x))=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(r)}\tau(\sigma(x))=S_r(x), \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\tau(A_r(x))&=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(r)}\operatorname{sgn}\sigma\cdot\tau(\sigma(x))\\&=\operatorname{sgn}\tau\cdot\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(r)}\operatorname{sgn}(\tau\circ\sigma)\cdot\tau\circ\sigma(x)\\&=\operatorname{sgn}\tau\cdot A_r(x).\end{aligned} \tag{28}$$

所以$S_r(T^r(V))\subset P^r(V)$，$A_r(T^r(V))\subset\Lambda^r(V)$。

此外，容易证明：对称张量在对称化算子作用下不变，反对称张量在反对称化算子作用下不变.因此 $P^r(V)=S_r(P^r(V))$，$\Lambda^r(V)=A_r(\Lambda^r(V))$。所以

$$P^r(V)=S_r(T^r(V)),\quad \Lambda^r(V)=A_r(T^r(V)).$$

上面关于对称张量和反对称张量的讨论同样可用于协变张量。全体对称的 r 阶协变张量的集合记作 $P^r(V^*)$，全体反对称的 r 阶协变张量的集合记作$\Lambda^r(V^*)$。

§3 外 代 数

由于 E. Cartan 系统地发展了外微分方法，使得反对称张量在流形论的研究中占有十分重要的地位。反对称的 r 阶反变张量也叫做外 r 次矢量，空间$\Lambda^r(V)$称为V上的外 r 次矢量空间。为方便起见，还约定 $\Lambda^1(V)=V$，$\Lambda^0(V)=F$。

要紧的是，外矢量有外积运算：两个外矢量相乘得到另一个外矢量。

定义3.1 设ξ是外 k 次矢量，η是外 l 次矢量，命

$$\xi\wedge\eta=A_{k+l}(\xi\otimes\eta), \tag{1}$$

其中 A_{k+l} 是定义2.5所规定的反对称化算子，则 $\xi\wedge\eta$ 是 $(k+l)$ 次外矢量，称为外矢量 ξ 和 η 的外积。

定理3.1 外积适合下列运算规律：设 $\xi,\xi_1,\xi_2\in\Lambda^k(V)$，$\eta,\eta_1,\eta_2\in\Lambda^l(V)$，$\zeta\in\Lambda^h(V)$，则有

1）分配律 $(\xi_1+\xi_2)\wedge\eta=\xi_1\wedge\eta+\xi_2\wedge\eta$，

$$\xi\wedge(\eta_1+\eta_2)=\xi\wedge\eta_1+\xi\wedge\eta_2;$$

2）反交换律 $\xi\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\xi$；

3）结合律 $(\xi\wedge\eta)\wedge\zeta=\xi\wedge(\eta\wedge\zeta)$。

证明 1）分配律是张量积和反对称化算子的的线性性质的推论，因此是明显的。

2）因 $\xi\wedge\eta$ 是反对称张量，所以对任意的 $\tau\in\mathscr{S}(k+l)$ 有

$$\tau(\xi\wedge\eta)=\mathrm{sgn}\,\tau\cdot\xi\wedge\eta.$$

取
$$\tau=\begin{pmatrix}1 & \cdots & k & k+1 & \cdots & k+l\\ l+1 & \cdots & k+l & 1 & \cdots & l\end{pmatrix},$$

则 $\mathrm{sgn}\,\tau=(-1)^{kl}$。所以对任意的 $v^{*1},\cdots,v^{*\,k+l}\in V^*$ 有

$$\begin{aligned}
&\xi\wedge\eta(v^{*1},\cdots,v^{*\,k+l})\\
&=(-1)^{kl}\xi\wedge\eta(v^{*\tau(1)},\cdots,v^{*\tau(k+l)})\\
&=\frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(k+l)}\mathrm{sgn}\,\sigma\cdot\xi(v^{*\sigma\circ\tau(1)},\cdots,v^{*\sigma\circ\tau(k)})\\
&\qquad\cdot\eta(v^{*\sigma\circ\tau(k+1)},\cdots,v^{*\sigma\circ\tau(k+l)})\\
&=\frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(k+l)}\mathrm{sgn}\,\sigma\cdot\eta(v^{*\sigma(1)},\cdots,v^{*\sigma(l)})\\
&\qquad\cdot\xi(v^{*\sigma(l+1)},\cdots,v^{*\sigma(k+l)})\\
&=(-1)^{kl}\eta\wedge\xi(v^{*1},\cdots,v^{*\,k+l}).
\end{aligned}$$

3）设 $v^{*1},\cdots,v^{*\,k+l+h}\in V^*$，则由定义得

$$\begin{aligned}
&(\xi\wedge\eta)\wedge\zeta(v^{*1},\cdots,v^{*\,k+l+h})\\
&=\frac{1}{(k+l+h)!}\cdot\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(k+l+h)}\sum_{\tau\in\mathscr{S}(k+l)}\mathrm{sgn}\,\sigma\\
&\qquad\cdot\mathrm{sgn}\,\tau\cdot\xi(v^{*\sigma\circ\tau(1)},\cdots,v^{*\sigma\circ\tau(k)})
\end{aligned}$$

$$\cdot \eta(v^{*\sigma\circ\tau(k+1)}, \cdots, v^{*\sigma\circ\tau(k+l)})$$
$$\cdot \zeta(v^{*\sigma\circ\tau(k+l+1)}, \cdots, v^{*\sigma\circ\tau(k+l+h)})$$

$$= \frac{1}{(k+l+h)!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}(k+l+h)} \operatorname{sgn} \sigma$$
$$\cdot \xi(v^{*\sigma(1)}, \cdots, v^{*\sigma(k)}) \cdot \eta(v^{*\sigma(k+1)}, \cdots, v^{*\sigma(k+l)})$$
$$\cdot \zeta(v^{*\sigma(k+l+1)}, \cdots, v^{*\sigma(k+l+h)}),$$

因此

(2) $$(\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = A_{k+l+h}(\xi \otimes \eta \otimes \zeta).$$

同理可得

$$\xi \wedge (\eta \wedge \zeta) = A_{k+l+h}(\xi \otimes \eta \otimes \zeta) = (\xi \wedge \eta) \wedge \zeta.$$

注记 若$\xi, \eta \in V = \Lambda^1(V)$，则由反交换律有

(3) $$\xi \wedge \eta = -\eta \wedge \xi, \qquad \xi \wedge \xi = \eta \wedge \eta = 0.$$

一般地，如果一个外积多项式含有两个相同的一次因子，则该式必为零。

设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是V的一个基底，根据结合律的证明我们有

(4) $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} = A_r(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r})$，$1 \leqslant i_1, \cdots, i_r \leqslant n$.

由上面的注记，只有当$i_1, \cdots, i_r$互不相同时，外矢量$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$才不是零．尤其是当$r > n$时，指标$i_1, \cdots, i_r$必有重复者，故相应的外矢量必然是零。

设ξ是r次外矢量，用分量可表成

(5) $$\xi = \xi^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}.$$

因为反对称化算子是线性的，所以

$$\begin{aligned} \xi = A_r \xi &= \xi^{i_1 \cdots i_r} A_r(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r}) \\ &= \xi^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}. \end{aligned}$$

因此，次数大于n的外矢量都是零，即

(6) $$\Lambda^r(V) = 0 \quad (r > n).$$

设$r \leqslant n$。由定理2.1，ξ的分量$\xi^{i_1 \cdots i_r}$关于上指标是反称的，所以ξ可表成

(7) $$\xi = r! \sum_{i_1 < \cdots < i_r} \xi^{i_1 \cdots i_r} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}.$$

现在我们要证明，当$r \leqslant n$时，$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r},\ 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n\}$构成外矢量空间 $\Lambda^r(V)$ 的基底。为此目的，只要证明这

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

个外矢量是线性无关的。我们先导出$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$的求值公式。

设$v^{*1}, \cdots, v^{*r}$是V^*中任意 r 个元素，则

(8) $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}(v^{*1}, \cdots, v^{*r})$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}(r)} \operatorname{sgn} \sigma \cdot \langle e_{i_1}, v^{*\sigma(1)} \rangle \cdot \cdots \cdot \langle e_{i_r}, v^{*\sigma(r)} \rangle$$

$$= \frac{1}{r!} \begin{vmatrix} \langle e_{i_1}, v^{*1} \rangle & \cdots & \langle e_{i_1}, v^{*r} \rangle \\ \langle e_{i_2}, v^{*1} \rangle & \cdots & \langle e_{i_2}, v^{*r} \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle e_{i_r}, v^{*1} \rangle & \cdots & \langle e_{i_r}, v^{*r} \rangle \end{vmatrix}.$$

上式称为$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}$的求值公式。特别是

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}(e^{*j_1}, \cdots, e^{*j_r})$$

$$= \frac{1}{r!} \det(\langle e_{i_\alpha}, e^{*j_\beta} \rangle)$$

$$= \frac{1}{r!} \delta^{j_1 \cdots j_r}_{i_1 \cdots i_r},$$

其中

(10) $$\delta^{j_1 \cdots j_r}_{i_1 \cdots i_r} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i_1, \cdots, i_r \text{ 互不相同，且} \{j_1, \cdots, j_r\} \\ & \text{是} \{i_1, \cdots, i_r\} \text{的偶排列；} \\ -1, & \text{当} i_1, \cdots, i_r \text{互不相同，且} \{j_1, \cdots, j_r\} \\ & \text{是} \{i_1, \cdots, i_r\} \text{的奇排列；} \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

称为广义的 Kronecker 符号。

由(9)式得到

(11) $$e_1\wedge\cdots\wedge e_n(e^{*1},\cdots,e^{*n})=\frac{1}{n!},$$

故 $e_1\wedge\cdots\wedge e_n\neq 0$。对于 $r<n$，如果 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r},1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$ 线性相关，则有不全为零的数量 $a^{i_1\cdots i_r}\in F$，使

(12) $$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n} a^{i_1\cdots i_r}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}=0.$$

不妨设其中一个不为零的数量是 $a^{j_1\cdots j_r}$，$1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n$；假定与它相补的指标组是 $k_1<\cdots<k_{n-r}$，也就是说 $\{j_1,\cdots,j_r,k_1,\cdots,k_{n-r}\}$ 恰是 $\{1,\cdots,n\}$ 的一个排列。用 $e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_{n-r}}$ 外乘(12)式的两边，于是

$$\begin{aligned}&a^{j_1\cdots j_r}e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_r}\wedge e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_{n-r}}\\&\quad=\pm a^{j_1\cdots j_r}e_1\wedge\cdots\wedge e_n=0,\end{aligned}$$

所以

$$a^{j_1\cdots j_r}=0,$$

这是一个矛盾。因此 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r},1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$ 是线性无关的，它们构成 $\Lambda^r(V)$ 的基底。由此可见，外矢量空间 $\Lambda^r(V)$ 的维数是

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

定义3.2 用 $\Lambda(V)$ 记形式和 $\sum_{r=0}^{n}\Lambda^r(V)$，则 $\Lambda(V)$ 是 2^n 维矢量空间。设

(13) $$\xi=\sum_{r=0}^{n}\xi^r,\quad \eta=\sum_{s=0}^{n}\eta^s$$

其中 $\xi^r\in\Lambda^r(V)$，$\eta^s\in\Lambda^s(V)$。命 ξ 和 η 的外积是

(14) $$\xi\wedge\eta=\sum_{r,s=0}^{n}\xi^r\wedge\eta^s.$$

则 $\Lambda(V)$ 关于外积成为一个代数，称为矢量空间 V 的外代数或 Grassmann 代数。

矢量空间 $\Lambda(V)$ 的基底是 $\{1, e_i(1\leqslant i\leqslant n), e_{i_1}\wedge e_{i_2}(1\leqslant i_1<i_2\leqslant n), \cdots, e_1\wedge\cdots\wedge e_n\}$。

同样，我们有对偶空间 V^* 的外代数

$$\Lambda(V^*)=\sum_{0\leqslant r\leqslant n}\Lambda^r(V^*).$$

空间 $\Lambda^r(V^*)$ 的元素称为矢量空间 V 上的 r 次外形式，它是 V 上的反对称 F-值 r 重线性函数。

矢量空间 $\Lambda^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V^*)$ 是彼此对偶的，它们之间的配合 $\langle\ ,\ \rangle$ 定义如下：设

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_r\in\Lambda^r(V),\quad v^{*1}\wedge\cdots\wedge v^{*r}\in\Lambda^r(V^*),$$

则

$$\langle v_1\wedge\cdots\wedge v_r, v^{*1}\wedge\cdots\wedge v^{*r}\rangle=\det(\langle v_\alpha, v^{*\beta}\rangle). \tag{15}$$

这样，$\Lambda^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V^*)$ 的基底 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}, 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$ 和 $\{e^{*j_1}\wedge\cdots\wedge e^{*j_r}, 1\leqslant j_1<\cdots<j_r\leqslant n\}$ 有下面的关系

$$\begin{aligned}\langle e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_r}, e^{*j_1}\wedge\cdots\wedge e^{*j_r}\rangle &=\det(\langle e_{i_\alpha}, e^{*j_\beta}\rangle)\\ &=\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r}\\ &=\begin{cases}1, & \{j_1,\cdots,j_r\}=\{i_1,\cdots,i_r\},\\ 0, & \{j_1,\cdots,j_r\}\neq\{i_1,\cdots,i_r\},\end{cases}\end{aligned} \tag{16}$$

所以这两个基底恰好是彼此对偶的。

注记 在§2的(17)式已定义过张量空间 $T^r(V)$ 和 $T^r(V^*)$ 的配合。因 $\Lambda^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V^*)$ 分别是 $T^r(V)$ 和 $T^r(V^*)$ 的子空间，故§2的(17)式也诱导出 $\Lambda^r(V)$ 和 $\Lambda^r(V^*)$ 之间的配合，但是这与本节(15)式所定义的配合差一个因子 $r!$。所以对于张量空间和外矢量空间分别地定义了配合，其原因是为了在各自的配合下彼此

对偶的基底有简单的形状，避免多余的数量因子。尽管我们用同一个记号< , >表示不同的配合，只要注意到所处理的是哪种空间，是不会产生混淆的。

设$f:V\to W$是从矢量空间V到W的线性映射，则它诱导出外形式空间$\Lambda^r(W)$到$\Lambda^r(V^*)$的线性映射f^*：设$\varphi\in\Lambda^r(W^*)$，对任意的$v_1,\cdots,v_r\in V$，命

(17) $$f^*\varphi(v_1,\cdots,v_r)=\varphi(f(v_1),\cdots,f(v_r)).$$

容易证明f^*是线性的，并且f^*和外积运算是可交换的，因此f^*是外代数$\Lambda(W^*)$到$\Lambda(V^*)$的同态。

定理3.2 设$f:V\to W$是线性映射，则f^*和外积运算是可交换的。即对于任意的$\varphi\in\Lambda^r(W^*)$和$\psi\in\Lambda^s(W^*)$有

(18) $$f^*(\varphi\wedge\psi)=f^*\varphi\wedge f^*\psi.$$

证明 任取$v_1,\cdots v_{r+s}\in V$，则

$$\begin{aligned}
&f^*(\varphi\wedge\psi)(v_1,\cdots,v_{r+s})\\
&=\varphi\wedge\psi(f(v_1),\cdots,f(v_{r+s}))\\
&=\frac{1}{(r+s)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(r+s)}\operatorname{sgn}\sigma\cdot\varphi(f(v_{\sigma(1)}),\cdots,f(v_{\sigma(r)}))\\
&\qquad\cdot\psi(f(v_{\sigma(r+1)}),\cdots,f(v_{\sigma(r+s)}))\\
&=\frac{1}{(r+s)!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(r+s)}\operatorname{sgn}\sigma\cdot f^*\varphi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)})\\
&\qquad\cdot f^*\psi(v_{\sigma(r+1)},\cdots,v_{\sigma(r+s)})\\
&=f^*\varphi\wedge f^*\psi(v_1,\cdots,v_{r+s}).
\end{aligned}$$

所以

$$f^*(\varphi\wedge\psi)=f^*\varphi\wedge f^*\psi.$$

外代数的概念最初是由Grassmann为了研究线性子空间而引进的。后来E.Cartan发展了外微分理论，成功地将它用于微分几何和微分方程的研究。至今，外代数已成为研究微分流形所不可缺少的有力工具。下面我们要讨论几个很有用的命题。

定理3.3 矢量$v_1,v_2,\cdots,v_r\in V$线性相关的充要条件是

(19) $$v_1\wedge\cdots\wedge v_r=0.$$

证明 若 $v_1,v_2,\cdots,v_r$ 线性相关，不妨设 v_r 可以表成 $v_1,\cdots,v_{r-1}$ 的线性组合：

$$v_r=a_1v_1+\cdots+a_{r-1}v_{r-1},$$

因此

$$\begin{aligned}&v_1\wedge\cdots\wedge v_{r-1}\wedge v_r\\&=v_1\wedge\cdots\wedge v_{r-1}\wedge(a_1v_1+\cdots+a_{r-1}v_{r-1})=0.\end{aligned}$$

若 $v_1,v_2,\cdots,v_r$ 线性无关，则可将它们扩充成 V 的一个基底$\{v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_n\}$。因为

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_r\wedge v_{r+1}\wedge\cdots\wedge v_n\neq 0,$$

所以

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_r\neq 0.$$

定理3.4(Cartan引理) 设 $v_1,\cdots,v_r;w_1,\cdots,w_r$ 是 V 中两组矢量，使得

(20) $$\sum_{\alpha=1}^{r}v_\alpha\wedge w_\alpha=0.$$

如果 $v_1,\cdots,v_r$ 线性无关，则 w_α 可表成它们的线性组合

(21) $$w_\alpha=\sum_{\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}v_\beta,\quad 1\leqslant\alpha\leqslant r,$$

并且

(22) $$a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}.$$

证明 因为 $v_1,\cdots,v_r$ 是线性无关的，所以可以将它们扩充成 V 的一个基底$\{v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_n\}$。因此可以假定

(23) $$w_\alpha=\sum_{\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}v_\beta+\sum_{i=r+1}^{n}a_{\alpha i}v_i.$$

代入(20)式得到

(24) $$0=\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}v_\alpha\wedge v_\beta+\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{i=r+1}^{n}a_{\alpha i}v_\alpha\wedge v_i$$

$$= \sum_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant r}(a_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha})v_\alpha\wedge v_\beta$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{i=r+1}^{n}a_{\alpha i}v_\alpha\wedge v_i.$$

由于 $\{v_i\wedge v_j,\ 1\leqslant i<j\leqslant n\}$是 $\Lambda^2(V)$的一个基底，因此从(24)式得到

$$a_{\alpha\beta}-a_{\beta\alpha}=0,\quad a_{\alpha i}=0.$$

即

$$w_\alpha=\sum_{\beta=1}^{r}a_{\alpha\beta}v_\beta,\ \text{且}\, a_{\alpha\beta}=a_{\beta\alpha}.$$

定理3.5 设$v_1,\cdots,v_r$是V中 r 个线性无关的矢量，w 是V上的外 p 次矢量。则存在 $\psi_1,\cdots,\psi_r\in\Lambda^{p-1}(V)$，使 w 能表成

(25) $$w=v_1\wedge\psi_1+\cdots+v_r\wedge\psi_r$$

的充要条件是

(26) $$v_1\wedge\cdots\wedge v_r\wedge w=0.$$

证明 当 $p+r>n$ 时，(25)和(26)两式都是自动成立的。以下假定 $p+r\leqslant n$。

必要性是明显的，只要证明充分性。把$v_1,\cdots,v_r$扩充成V的一个基底$\{v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_n\}$，则 w 可以表示成

(27) $$w=v_1\wedge\psi_1+\cdots+v_r\wedge\psi_r$$
$$+\sum_{r+1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_p\leqslant n}\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}\,v_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge v_{\alpha_p},$$

其中 $\psi_1,\cdots,\psi_r\in\Lambda^{p-1}(V)$。代入(26)式得到

(28) $$\sum_{r+1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_p\leqslant n}\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}v_1\wedge\cdots\wedge v_r\wedge v_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge v_{\alpha_p}=0.$$

而和号后的$v_1\wedge\cdots\wedge v_r\wedge v_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge v_{\alpha_p}$ $(r+1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_p\leqslant n)$正是$\Lambda^{p+r}(V)$的基底的一部分；所以从(28)式得到

$$\xi^{\alpha_1\cdots\alpha_p}=0\quad(r+1\leqslant\alpha_1<\cdots<\alpha_p\leqslant n),$$

即

$$w=v_1\wedge\psi_1+\cdots+v_r\wedge\psi_r.$$

通常我们把(25)式记成 $w\equiv 0 \bmod (v_1;\cdots,v_r)$。

定理3.6 设$v_\alpha,w_\alpha;v'_\alpha,w'_\alpha$ $(1\leqslant\alpha\leqslant k)$是空间$V$中两组矢量。若$\{v_\alpha,w_\alpha,\ 1\leqslant\alpha\leqslant k\}$是线性无关的，并且

(29) $$\sum_{\alpha=1}^{k}v_\alpha\wedge w_\alpha=\sum_{\alpha=1}^{k}v'_\alpha\wedge w'_\alpha,$$

则v'_α,w'_α都是$v_1,\cdots,v_k,w_1,\cdots,w_k$的线性组合，而且它们也是线性无关的。

证明 将(29)式自乘k次得到

(30) $$k!(v_1\wedge w_1\wedge\cdots\wedge v_k\wedge w_k)$$
$$=k!(v'_1\wedge w'_1\wedge\cdots\wedge v'_k\wedge w'_k).$$

因为$\{v_\alpha,w_\alpha,1\leqslant\alpha\leqslant k\}$是线性无关的，故(30)式左边$\neq0$。即$\{v'_\alpha,w'_\alpha,\ 1\leqslant\alpha\leqslant k\}$也线性无关(定理 3.3)。从(30)式还得到

$$v_1\wedge w_1\wedge\cdots\wedge v_k\wedge w_k\wedge v'_\alpha=0,$$

即$\{v_1,w_1,\cdots,v_k,w_k,v'_\alpha\}$是线性相关的，所以$v'_\alpha$能表成$v_1,\cdots,v_k,w_1,\cdots,w_k$的线性组合。上面的结论对$w'_\alpha$也成立。

注记 定理3.6的一个几何应用见Chern S.S.,On a theorem of algebra and its geometrical application, *J. Indian Math. Soc.*, 8(1944), 29—36.

外代数与行列式是密切相关的，如外矢量的求值公式(8)就表现为行列式。设$v_1,\cdots,v_k\in V$，而$w_1,\cdots,w_k$是它们的线性组合，即

(31) $$w_\alpha=\sum_{\beta=1}^{k}t_\alpha^\beta v_\beta,$$

那么

(32) $$w_1\wedge\cdots\wedge w_k=\det(t_\alpha^\beta)v_1\wedge\cdots\wedge v_k,$$

因此外矢量$w_1\wedge\cdots\wedge w_k$和$v_1\wedge\cdots\wedge v_k$只差一个行列式作为数量因

子。

我们用 $G(k,n)$ 表示 n 维矢量空间 V 中 k 维线性子空间 L^k 所构成的集合。$G(k,n)$ 有自然的微分结构①，使 $G(k,n)$ 成为 $k(n-k)$ 维微分流形，称为Grassmann 流形。在 $k=1$ 时，$G(1,n)$ 正是 $n-1$ 维射影空间 P^{n-1}。外矢量在 $G(k,n)$ 中给出了Plücker-Grassmann 坐标。

任取 $L^k\in G(k,n)$，设 $v_1,\cdots,v_k$ 是张成子空间 L^k 的 k 个线性无关的矢量。根据(32)式，外矢量 $\xi=v_1\wedge\cdots\wedge v_k$ 确定到差一个非零的数量因子。我们把外矢量 ξ 称为子空间 L^k 在 $G(k,n)$ 中的 Plücker-Grassmann 坐标，这是射影空间中齐次坐标的推广。

作为例子，我们来考虑 $G(2,4)$。取定 V 的一个基底 $\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，对于任意的 $L^2\in G(2,4)$ 可取彼此线性无关的矢量 $v,w\in L^2$。设

(33) $$v=\sum_{i=1}^{4} v^i a_i,\quad w=\sum_{i=1}^{4} w^i a_i,$$

则

(34) $$\xi=v\wedge w=\sum_{i<k} p^{ik} a_i\wedge a_k,$$

其中 $p^{ik}=v^i w^k-v^k w^i$。数组 $\{p^{ik},i<k\}$ 被 L^2 确定到差一个非零的数量因子，它正是 $G(2,4)$ 中的 Plücker-Grassmann坐标。

因为 $v\wedge w\wedge v\wedge w=0$，所以

$$(p^{12}p^{34}+p^{13}p^{42}+p^{14}p^{23})\,a_1\wedge a_2\wedge a_3\wedge a_4=0,$$

即 p^{ik} 应满足Plücker 方程

(35) $$p^{12}p^{34}+p^{13}p^{42}+p^{14}p^{23}=0.$$

这样，在 6 个数 $p^{ik}(1\leqslant i<k\leqslant 4)$ 中独立的变量只有 4 个，这正说明 $G(2,4)$ 的维数是 4。反过来，Plücker 方程(35) 也是外矢量

① Grassmann流形是十分重要的概念，其微分结构可看[2]，[11]。

$$\sum_{i<k} p^{ik} a_i \wedge a_k$$

可分解的充分条件①，因此满足(35)式的任意一组不全为零的数量p^{ik}决定了 $G(2,4)$ 中一个元素。

设

$$(36)\qquad \begin{aligned} &p^{12}=x^1+y^1,\quad p^{13}=x^2+y^2,\quad p^{14}=x^3+y^3,\\ &p^{34}=x^1-y^1,\quad p^{42}=x^2-y^2,\quad p^{23}=x^3-y^3, \end{aligned}$$

则方程(35)成为

$$(37)\qquad (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2=(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2.$$

将p^{ik}乘上适当的数量因子，可以使(37)式为 1 ，即(x^1,x^2,x^3)和(y^1,y^2,y^3)分别代表单位球面 $S^2\subset \boldsymbol{R}^3$上的点。根据前面的讨论，(36)式给出了映上的映射

$$(38)\qquad \pi: S^2\times S^2 \to G(2,4),$$

而且

$$(39)\qquad \pi(x,y)=\pi(-x,-y),\quad (x,y)\in S^2\times S^2,$$

其中$-x$表示S^2上 x 的对径点。因此 $S^2\times S^2$是$G(2,4)$的二重复叠

---

① 不妨设$p^{12}\neq 0$，则

$$p^{34}=\frac{p^{13}p^{24}}{p^{12}}-\frac{p^{14}p^{23}}{p^{12}},$$

经直接计算得到

$$\begin{aligned}\sum_{i<j} p^{ij} a_i\wedge a_j &= a_1\wedge(p^{12}a_2+p^{13}a_3+p^{14}a_4)\\ &\quad -\frac{p^{23}}{p^{12}}a_3\wedge(p^{12}a_2+p^{13}a_3+p^{14}a_4)\\ &\quad -\frac{p^{24}}{p^{12}}a_4\wedge(p^{12}a_2+p^{13}a_3+p^{14}a_4)\\ &= \left(a_1-\frac{p^{23}}{p^{12}}a_3-\frac{p^{24}}{p^{12}}a_4\right)\wedge(p^{12}a_2+p^{13}a_3+p^{14}a_4).\end{aligned}$$

所以当条件(35)成立时，外矢量$\sum_{i<j} p^{ij}a_i\wedge a_j$是可分解的.

关于Plucker方程的一般讨论，可看[3].

空间①．因为 $S^2\times S^2$ 是单连通的，所以 $S^2\times S^2$ 是 $G(2,4)$ 的通用复叠空间．故 $G(2,4)$ 的基本群 $\pi_1(G(2,4))$ 是 Z_2．

若用 $\tilde{G}(2,4)$ 表示四维矢量空间 V 中有向的二维子空间所成的流形，则 $\tilde{G}(2,4)$ 也是 $G(2,4)$ 的二重复叠空间，故 $\tilde{G}(2,4)$ 与 $S^2\times S^2$ 是同胚的．

---

① 关于复叠空间和基本群可参阅：江泽涵著"不动点类理论"，附录 A和B，科学出版社，1979．

第三章 外微分

§1 张量丛

两个流形的积(第一章§1)是一个很基本的概念。例如，定义在流形M上的实函数$f(x)$的图象$(x,f(x))$就是从M到积流形$M\times\boldsymbol{R}$的一个映射；用纤维丛的语言说，这是纤维丛$M\times\boldsymbol{R}$的一个截面。纤维丛是积流形的推广。在微分几何中所研究的主要是一类特殊的纤维丛——矢量丛，流形上的矢量场就是某个矢量丛的截面。本节先讨论具体的张量丛，然后讨论一般的矢量丛。

设M是m维光滑流形，T_p和T_p^*分别记流形M在点p的切空间和余切空间。因此在流形M的每一点p有(r,s)型张量空间

(1) $$T^r_s(p)=\underbrace{T_p\otimes\cdots\otimes T_p}_{r\text{个}}\otimes\underbrace{T_p^*\otimes\cdots\otimes T_p^*}_{s\text{个}},$$

这是m^{r+s}维的矢量空间。命

(2) $$T^r_s=\bigcup_{p\in M}T^r_s(p).$$

我们要在T^r_s中引进拓扑，使它成为有可数基的Hausdorff空间；进而可在T^r_s上定义C^∞微分结构，使它成为一个光滑流形。这样得到的光滑流形在局部上可微同胚于积流形，我们把T^r_s称为流形M上的(r,s)型张量丛。

我们首先规定一些记法。设V是$\boldsymbol{R}$上的m维矢量空间。用$GL(V)$记矢量空间V的线性自同构群。在V中取定一个基底$\{e_1,\cdots,e_m\}$，则V等同于$\boldsymbol{R}^m$。我们把V的元素y记成坐标行

(3) $$y=(y^1,\cdots,y^m),$$

这样$GL(V)$就是$m\times m$阶非退化矩阵的乘法群，也就是说$GL(V)$正是一般线性群$GL(m;\boldsymbol{R})$。群$GL(V)$在空间V上的作用记成右作用，用矩阵表示则是：

(4) $$y\cdot a=(y^1,\cdots,y^m)\cdot\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^m \end{pmatrix},$$

其中 $\det a=\det(a_i^j)\neq 0$。

V_s^r 表示矢量空间 V 上的 (r,s) 型张量空间(见第二章定义2.1)，它的基底是

(5) $$e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^{*j_1}\otimes\cdots\otimes e^{*j_s},$$
$$1\leqslant i_\alpha,j_\beta\leqslant m.$$

这样，V_s^r 中的元素可以分量表示。如果把 V_s^r 中的元素记成如(3)的坐标行，必须给基底(5)中的元素以一定的次序，例如：指标组 $(i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s)$ 按字序排列给出的次序。

考虑流形 M 的一个坐标 U，局部坐标是 $u^1,\cdots,u^m$. 这样，在任意一点 $p\in U$，T_p 和 T_p^* 分别有彼此对偶的自然基底 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_p,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)_p\right\}$ 和 $\{(du^1)_p,\cdots,(du^m)_p\}$。因此 $T_s^r(p)$ 有基底

(6) $$\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\right)_p\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\right)_p\otimes(du^{j_1})_p\otimes\cdots\otimes(du^{j_s})_p,$$
$$1\leqslant i_\alpha,j_\beta\leqslant m.$$

现在可以定义映射

(7) $$\varphi_U:U\times V_s^r\to\bigcup_{p\in U}T_s^r(p),$$

使得对于任意的 $p\in U$，$y\in V_s^r$，$\varphi_U(p,y)$ 是 $T_s^r(p)$ 的元素，并且 $\varphi_U(p,y)$ 关于基底(6)的分量与 y 关于基底(5)的分量相同。显然，这样定义的映射 φ_U 是一一对应。

取 M 的一个坐标复盖 $\{U,W,\cdots\}$，设由(7)式定义的相应的映射是 $\{\varphi_U,\varphi_W,\cdots\}$。把诸如 $U\times V_s^r$ 的各开子集在 φ_U 下的象的集合取作 T_s^r 的拓扑基①，这样确定的拓扑使 T_s^r 成为有可数基的

① 需要验证这样得到的集合满足拓扑基的条件。实际上，如果 $U\cap W\neq\varnothing$，则
$$\left(\bigcup_{p\in U}T_s^r(p)\right)\cap\left(\bigcup_{q\in W}T_s^r(q)\right)=\bigcup_{p\in U\cap W}T_s^r(p),$$
它是 $U\cap W$ 在 φ_U 下的象，也是在 φ_W 下的象。请读者补足详细的证明。

Hausdorff 空间，并且每一个由(7)式定义的映射是同胚。

固定一点 $p\in U$，则可定义映射 $\varphi_{U,p}:V^r_s\to T^r_s(p)$，使得

(8) $$\varphi_{U,p}(y)=\varphi_U(p,y),\qquad y\in V^r_s.$$

根据 φ_U 的定义，映射 $\varphi_{U,p}$ 是矢量空间 T^r_s 到 $T^r_s(p)$的线性同构。

若W是M的另一个包含 p 的坐标域，局部坐标是 $w^1,\cdots,w^m$；命

(9) $$g_{UW}(p)=\varphi^{-1}_{W,p}\circ\varphi_{U,p}:V^r_s\to V^r_s,$$

则 $g_{UW}(p)$是矢量空间 V^r_s 的自同构，$g_{UW}(p)\in GL(V^r_s)$。按照(4)式所规定的，$GL(V^r_s)$的元素在 V^r_s 上的作用记成右作用。因此，对于 $y,y'\in V^r_s$，使

(10) $$\varphi_U(p,y)=\varphi_W(p,y')$$

的充要条件是

(11) $$y'=y\cdot g_{UW}(p).$$

对于M的任意两个坐标域U,W，如果$U\cap W\neq\varnothing$，则由(9)式定义了映射

(12) $$g_{UW}:U\cap W\to GL(V^r_s),$$

我们要证明，映射 g_{UW} 是光滑的。不失一般性，在此只讨论 $r=s=1$的情形。

切空间 T_p 和余切空间 T^*_p 关于局部坐标 $w^1,\cdots,w^m$ 的自然基底是$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial w^1}\right)_p,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial w^m}\right)_p\right\}$和$\{(dw^1)_p,\cdots,(dw^m)_p\}$。设$y,y'\in V^1_1$，用分量表示是

(13) $$y=y^j_ie_j\otimes e^{*i},\qquad y'=y'^j_ie_j\otimes e^{*i}.$$

因此

(14) $$\begin{cases}\varphi_U(p,y)=y^j_i\left(\dfrac{\partial}{\partial u^j}\right)_p\otimes(du^i)_p,\\[2ex] \varphi_W(p,y')=y'^j_i\left(\dfrac{\partial}{\partial w^j}\right)_p\otimes(dw^i)_p.\end{cases}$$

在$U\cap W$上，自然基底之间有以下关系：

(15)
$$\begin{cases} du^i = \dfrac{\partial u^i}{\partial w^j} dw^j, \\ \dfrac{\partial}{\partial u^i} = \dfrac{\partial w^j}{\partial u^i} \dfrac{\partial}{\partial w^j}, \end{cases}$$

其中 $J_{UW} = \left(\dfrac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)$是局部坐标变换的 Jacobi 矩阵。将 (15)式 代入(14)和(10)两式则得

$$y'^{\,i}_j = y^k_l \left(\frac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)_p \left(\frac{\partial u^l}{\partial w^j}\right)_p,$$

即

(16) $$(y \cdot g_{UW}(p))^i_j = y^k_l \left(\frac{\partial w^i}{\partial u^k}\right)_p \left(\frac{\partial u^l}{\partial w^j}\right)_p.$$

若把 y 记成坐标行$(y^1_1, y^1_2, \cdots, y^m_1, y^m_2, \cdots, y^m_m)$， 上式表 明，$g_{UW}(p)$用 $m^2 \times m^2$阶非退化矩阵表示恰是 Jacobi 矩阵 J_{UW} 和它的 逆矩阵的张量积①：

(17) $$g_{UW} = J_{UW} \otimes J^{-1}_{UW}.$$

因为 Jacobi 矩阵 J_{UW} 和 $J^{-1}_{UW} = J_{WU}$ 都是 $U \cap W$ 上的光 滑 函数组成的，所以 g_{UW} 在$U \cap W$ 上也是光滑的。

按照 T^r_s 的拓扑结构，$\{\varphi_U(U \times V^r_s), \varphi_W(W \times V^r_s), \cdots\}$构成空间 T^r_s 的坐标开复盖；在每一个坐标域 $\varphi_U(U \times V^r_s)$ 上点 $\varphi_U(p, y)$ 的坐标是

(18) $$(u^i(p), y^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}),$$

其中 u^i是流形M的坐标域U上的局部坐 标，$y^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$是 $y \in V^r_s$ 关于基底(5)的分量。当 $U \cap W \neq \varnothing$时，由于 $g_{UW}: U \cap W \to GL(V^r_s)$

---

① 矩阵 $A = (a^i_j)$和 $B = (b^\alpha_\beta)$的张量积是指分块矩阵

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a^1_1 B & \cdots & a^m_1 B \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a^1_m B & \cdots & a^m_m B \end{pmatrix},$$

其元素是 $a^i_j \cdot b^\alpha_\beta$。

是光滑的，(11)式说明上面给出的 T^r_s 的坐标复盖是 C^∞-相容的，因此 T^r_s 成为一个光滑流形。显然，自然投影

$$\pi: T^r_s \to M \tag{19}$$

把 $T^r_s(p)$ 中的元素映到点 $p\in M$，它是光滑的满映射。光滑流形 T^r_s 称为流形 M 上的 (r,s) 型张量丛，π 称为丛投影，$T^r_s(p)$ 称为从 T^r_s 在点 p 上的纤维。

令 $r=1,s=0$，我们得到流形 M 上的切丛，记作 $T(M)$；令 $r=0,s=1$，得到流形 M 上的余切丛，记作 $T^*(M)$。按照张量丛的作法，可以类似地构造 M 上的外矢量丛和外形式丛，分别记作

$$\begin{cases} \Lambda^r(M)=\bigcup\limits_{p\in M}\Lambda^r(T_p), \\ \Lambda^r(M^*)=\bigcup\limits_{p\in M}\Lambda^r(T^*_p). \end{cases} \tag{20}$$

设 $f: M\to T^r_s$ 是光滑映射，如果

$$\pi\circ f=\mathrm{id}: M\to M,$$

即对于任意的 $p\in M$，$f(p)\in T^r_s(p)$，则称 f 是张量丛 T^r_s 的一个光滑截面，或称为 M 上的 (r,s) 型光滑张量场。切丛的截面就是 M 的切矢量场，余切丛的截面称为 M 上的一次微分式。外形式丛 $\Lambda^r(M^*)$ 的光滑截面叫做流形 M 上光滑的 r 次外微分式。

把张量丛的构造抽象化就得到一般矢量丛的概念。矢量丛和下一章所讨论的连络是规范场论的数学基础。

定义1.1 设 E,M 是两个光滑流形，$\pi: E\to M$ 是映上的光滑映射。$V=\boldsymbol{R}^q$ 是 q 维矢量空间。如果给定了 M 的一个开复盖 $\{U,W,Z,\cdots\}$ 及一组映射 $\{\varphi_U,\varphi_W,\varphi_Z,\cdots\}$，使得下列条件成立，则称 (E,M,π) 是流形 M 上的(实) q 维矢量丛，其中 E 称为丛空间，M 称为底空间，π 称为丛投影，V 是纤维型：

1）每一个映射 φ_U 是从 $U\times\boldsymbol{R}^q$ 到 $\pi^{-1}(U)$ 的可微同胚，而且对任意的 $p\in U$，$y\in\boldsymbol{R}^q$，有

$$\pi\circ\varphi_U(p,y)=p; \tag{21}$$

2）对于任意固定的 $p\in U$，命

$$\varphi_{U,p}(y)=\varphi_U(p,y),\qquad y\in\boldsymbol{R}^q, \tag{22}$$

则 $\varphi_{U,p}:\boldsymbol{R}^q\to\pi^{-1}(p)$ 是同胚。当 $U\cap W\neq\varnothing$ 时，对任意的 $p\in U\cap W$，要求

$$g_{UW}(p)=\varphi_{W,p}^{-1}\circ\varphi_{U,p}:\boldsymbol{R}^q\to\boldsymbol{R}^q \tag{23}$$

是矢量空间 $V=\boldsymbol{R}^q$ 的线性自同构，即 $g_{UW}(p)\in GL(V)$；

3）对于 $U\cap W\neq\varnothing$，映射 $g_{UW}:U\cap W\to GL(V)$ 是光滑的。

从条件 2）得到，V 中的元素 y_U,y_W 使

$$\varphi_U(p,y_U)=\varphi_W(p,y_W) \tag{24}$$

成立的充要条件是

$$y_U\cdot g_{UW}(p)=y_W, \tag{25}$$

这里 $g_{UW}(p)$ 看作 $q\times q$ 阶非退化矩阵。

对任意的 $p\in M$，命 $E_p=\pi^{-1}(p)$，称为矢量丛 E 在点 p 上的纤维。设 U 是 M 中包含 p 的坐标域，则纤维型 V 的线性结构通过映射 $\varphi_{U,p}$ 可以搬到纤维 E_p 上来，使 E_p 成为 q 维矢量空间。由于条件 2），E_p 的线性结构与 U 和 φ_U 的选取是无关的（请读者自证）。因此，在直观上可以把矢量丛 E 看作诸如 $U\times\boldsymbol{R}^q$（U 是 M 的坐标域）的积流形沿着同一点 $p\in M$ 上的纤维粘合起来的结果，在粘合时要求纤维上的线性关系保持不变。

积流形 $M\times\boldsymbol{R}^q=E$ 是矢量丛最简单的例子，称为 M 上平凡的矢量丛，或积丛。显然，前面讲到的张量丛 T^r_s 都是矢量丛。

注记 若 V 是 q 维复矢量空间，则按照定义 1.1 所得的是流形 M 上 q 维复矢量丛。此时，$GL(V)$ 同构于 $GL(q;\mathbf{C})$，纤维 $\pi^{-1}(p)$ $(p\in M)$ 是 q 维复矢量空间。本节所讲的内容是对实矢量丛展开的，在作相应的修改之后这些内容完全适用于复矢量丛。

条件 3）给出的映射 $g_{UW}:U\cap W\to GL(V)$ 适合下列相容条件：

1）对于 $p\in U$，$g_{UU}(p)=\mathrm{id}:V\to V$；

2）若 $p\in U\cap W\cap Z\neq\varnothing$，则

$$g_{UW}(p)\cdot g_{WZ}(p)\cdot g_{ZU}(p)=\mathrm{id}:V\to V.$$

$\{g_{UW}\}$称为矢量丛(E,M,π)的过渡函数族，而上述相容条件是使$\{g_{UW}\}$成为过渡函数族的充分条件。确切地说，我们有下面的定理：

定理1.1 设M是m维光滑流形，$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$是$M$的一个开复盖，$V$是$q$维矢量空间。若对每一对指标$\alpha,\beta\in\mathscr{A}$，在$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$时，都指定了一个光滑映射$g_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\to GL(V)$，它们适合相容条件1)和2)，则存在$M$上的$q$维矢量丛$(E,M,\pi)$，它以$\{g_{\alpha\beta}\}$为过渡函数族。

定理1.1的详细证明可看[15，p. 14]。证明的想法是把局部积$U_\alpha\times V$沿各纤维适当地粘起来。大意如下：命

$$\tilde{E}=\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}}\{\alpha\}\times U_\alpha\times V, \tag{26}$$

这自然是微分流形。在$\tilde{E}$中定义等价关系$\sim$，使得对任意的$(\alpha,p,y),(\beta,p',y')\in\tilde{E}$，$(\alpha,p,y)\sim(\beta,p',y')$的充要条件是

$$p=p'\in U_\alpha\cap U_\beta,\quad 且\ y'=y\cdot g_{\alpha\beta}(p). \tag{27}$$

用$E=\tilde{E}/\sim$记$\tilde{E}$关于等价关系$\sim$的商空间，它也是光滑流形。用$[\alpha,p,y]$记(α,p,y)的$\sim$等价类，投影$\pi:E\to M$定义为

$$\pi([\alpha,p,y])=p, \tag{28}$$

这是光滑映射。可以证明(E,M,π)是M上的q维矢量丛，而且它的过渡函数族恰是$\{g_{\alpha\beta}\}$。

从定理可知，过渡函数族$\{g_{\alpha\beta}\}$是矢量丛的核心。构造矢量丛只要指出它的过渡函数族就可以了。

例1 矢量丛E的对偶丛E^*。

设V^*是V的对偶空间，E^*是流形M上以V^*为纤维型的矢量丛，丛投影记作$\tilde{\pi}$。丛E^*的局部积的结构是$\{(U,\psi_U),(W,\psi_W),(Z,\psi_Z),\cdots\}$。如果对任意一点$p\in U\cap W\neq\varnothing$，当$y_U,y_W\in V$，$\lambda_U,\lambda_W\in V^*$分别适合

$$\varphi_U(p,y_U)=\varphi_W(p,y_W),\quad \psi_U(p,\lambda_U)=\psi_W(p,\lambda_W) \tag{29}$$

时，总是有

(30) $$\langle y_U, \lambda_U \rangle = \langle y_W, \lambda_W \rangle,$$

则可定义纤维 $\pi^{-1}(p)$ 和 $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 之间的一个配合，使它们成为互相对偶的矢量空间。纤维 $\pi^{-1}(p)$ 和 $\tilde{\pi}^{-1}(p)$ 的配合定义为

(31) $$\langle \varphi_U(p, y_U), \psi_U(p, \lambda_U) \rangle = \langle y_U, \lambda_U \rangle,$$

这与 U 的选取是无关的。这时我们称矢量丛 E^* 为 E 的对偶丛.

若在 V 和 V^* 中分别取彼此对偶的基底，V 中的元素 y 记作坐标行，V^* 中的元素 λ 记作坐标列，则 V 和 V^* 的配合表现为矩阵的乘法：

(32) $$\langle y, \lambda \rangle = y \cdot \lambda.$$

由(29)的第一式得

$$y_W = y_U \cdot g_{UW}(p),$$

代入(30)式得到

$$y_U \cdot \lambda_U = y_U \cdot g_{UW}(p) \cdot \lambda_W,$$

所以

(33) $$\lambda_U = g_{UW}(p) \cdot \lambda_W.$$

如果仍把 V^* 的元素记成坐标行，$GL(V^*)$ 的元素右作用在 V^* 上，则 E^* 的过渡函数是

(34) $$h_{UW} = {}^t g_{UW}^{-1} = {}^t g_{WU}.$$

当 E 是 M 上的切丛时，其过渡函数族 $\{J_{UW}\}$ 是由坐标变换的 Jacobi 矩阵组成的。余切丛的过渡函数恰是 J_{UW} 的转置逆矩阵，所以余切丛是切丛的对偶丛。

例 2 矢量丛 E 与 E' 的直和 $E \oplus E'$.

设 E 和 E' 都是流形 M 上的矢量丛，纤维型分别是 V 和 V'，过渡函数族是 $\{g_{UW}\}$ 和 $\{g'_{UW}\}$. 命

(35) $$h_{UW} = \begin{pmatrix} g_{UW} & 0 \\ 0 & g'_{UW} \end{pmatrix},$$

则 h_{UW} 是右作用在 $V \oplus V'$ 上的线性自同构，且 $\{h_{UW}\}$ 适合过渡函

数族的相容条件 1) 和 2)。流形M上以$\{h_{UW}\}$为过渡函数族、以$V\oplus V'$为纤维型的矢量丛称为E与E'的直和，记作$E\oplus E'$。

例 3 矢量丛的张量积$E\otimes E'$。

设E和E'与例 2 相同。命h_{UW}是g_{UW}与g'_{UW}的张量积，即$h_{UW}=g_{UW}\otimes g'_{UW}$，它在$V\otimes V'$上的作用定义为

$$(v\otimes v')\cdot h_{UW}=(v\cdot g_{UW})\otimes(v'\cdot g'_{UW}),\tag{36}$$

其中$v\in V$，$v'\in V'$. 显然$\{h_{UW}\}$也适合过渡函数族的相容条件。流形M上以$\{h_{UW}\}$为过渡函数族、以$V\otimes V'$为纤维型的矢量丛称为E与E'的张量积，记作$E\otimes E'$。容易看出，流形M上的(r,s)型张量丛是r个切丛与s个余切丛的张量积。

定义1.2 设$s:M\to E$是光滑映射，如果

$$\pi\circ s=\mathrm{id}:M\to M,\tag{37}$$

则称s是矢量丛(E,M,π)的一个光滑截面。我们用$\Gamma(E)$记矢量丛(E,M,π)的全体光滑截面的集合。

因矢量丛的每一条纤维是与V同构的矢量空间，所以可逐点定义截面的加法和截面与实值函数的乘法。设$s,s_1,s_2\in\Gamma(E)$，α是M上光滑的实值函数，对任意的$p\in M$，命

$$(s_1+s_2)(p)=s_1(p)+s_2(p),$$

$$(\alpha s)(p)=\alpha(p)\cdot s(p),$$

则$s_1+s_2,\alpha s$仍然是矢量丛E的光滑截面。这就证明了$\Gamma(E)$是$C^\infty(M)$-模，当然是实矢量空间。

注记 矢量丛E的处处不为零的光滑截面是不一定存在的，这种截面的存在反映了流形M一定的拓扑性质。

§2 外 微 分

设M是m维光滑流形；M上的r次外形式丛

$$\Lambda^r(M^*)=\bigcup_{p\in M}\Lambda^r(T_p^*)$$

是M上的矢量丛。用$A^r(M)$记r次外形式丛$\Lambda^r(M^*)$的光滑截

面所成的空间：

(1) $$A^r(M)=\Gamma(\Lambda^r(M^*)),$$

$A^r(M)$是一个$C^\infty(M)$-模。$A^r(M)$的元素称为M上的r次外微分式。因此，流形M上的r次外微分式就是光滑的反对称r阶协变张量场。

同理，外形式丛$\Lambda(M^*)=\bigcup\limits_{p\in M}\Lambda(T_p^*)$也是$M$上的矢量丛，其截面空间$A(M)$的元素称为$M$上的外微分式。显然$A(M)$可表成直和

(2) $$A(M)=\sum_{r=0}^{m}A^r(M),$$

即每一个外微分式ω可以表成

(3) $$\omega=\omega^0+\omega^1+\omega^2+\cdots+\omega^m,$$

其中ω^i是i次外微分式。外形式的外积运算可以推广到外微分式空间$A(M)$。设$\omega_1,\omega_2\in A(M)$，对任意的$p\in M$，命

(4) $$\omega_1\wedge\omega_2(p)=\omega_1(p)\wedge\omega_2(p),$$

右端是指两个外形式的外积。显然$\omega_1\wedge\omega_2\in A(M)$。空间$A(M)$关于加法、数乘法和外积成为一个代数，而且是一个分次代数(graded algebra)。所谓"分次"的意思是，$A(M)$是一列矢量空间的直和(2)；外积$\wedge$给出了映射

(5) $$\wedge: A^r(M)\times A^s(M)\to A^{r+s}(M),$$

其中当$r+s>m$时，规定$A^{r+s}(M)$为零。

注记 张量代数$T(V)$和$T(V^*)$关于张量积$\otimes$，外代数$\Lambda(V)$关于外积$\wedge$都是分次代数。

在局部坐标$u^1,\cdots u^m$下，r次外微分式ω限制在坐标域U上可表为

(6) $$\omega=a_{i_1\cdots i_r}du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r},$$

其中$a_{i_1\cdots i_r}$是U上的光滑函数，并且关于下指标是反对称的。

r 次外矢量从$\Lambda^r(M)$和 r 次外形式从$\Lambda^r(M^*)$是对偶的。如§1 例 1 所述，$\Lambda^r(M)$和$\Lambda^r(M^*)$在同一点 $p\in M$上的纤维之间的配合是从 $\Lambda^r(V)$和$\Lambda^r(V^*)$的配合诱导来的，因此由上一章§3 的(16)式得到

$$(7)\qquad \left\langle\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}, du^{j_1}\wedge\cdots\wedge du^{j_r}\right\rangle=\delta^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_r}.$$

所以 ω 在局部坐标系 u^i 下的分量 $a_{i_1\cdots i_r}$ 可表成

$$(8)\qquad a_{i_1\cdots i_r}=\frac{1}{r!}\left\langle\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}, \omega\right\rangle.$$

外微分式空间 $A(M)$之所以在流形论中十分重要，其原因是$A(M)$中有外微分运算 d，而且 d 作用两次为零。

定理2.1 设M是m维光滑流形，则存在唯一的一个映射$d: A(M)\to A(M)$，使得 $d(A^r(M))\subset A^{r+1}(M)$，并且满足下列条件：

1）对任意的 $\omega_1,\omega_2\in A(M)$，$d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$；

2）设 ω_1 是 r 次外微分式，则

$$d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^r\omega_1\wedge d\omega_2;$$

3）若 f 是M上的光滑函数，即$f\in A^0(M)$，则 df 恰是 f 的微分；

4）若 $f\in A^0(M)$，则 $d(df)=0$。

如上所确定的映射 d 称为外微分。

证明 先证：如果外微分算子 d 是存在的，则 d 是局部的算子。即：设 $\omega_1,\omega_2\in A(M)$，如果 ω_1 和 ω_2 在M的一个开集 U 上是相同的，则$d\omega_1$和$d\omega_2$限制在U上也相等。为此，利用条件1)，我们只须证明：如果$\omega|_U=0$，则$(d\omega)|_U=0$。任取一点$p\in U$，利用流形的局部紧致性，必有包含 p 的开邻域W，使得$p\in W\subset\overline{W}\subset U$。由第一章§3引理3，在$M$上存在光滑函数 h，使得

$$h(p')=\begin{cases}1, & p'\in W,\\ 0, & p'\notin U.\end{cases}$$

这样，$h\omega\in A(M)$，且 $h\omega\equiv 0$。因此

$$dh\wedge\omega+hd\omega=0,$$

$$d\omega|_{p}=0.$$

由于 p 在 U 中的任意性，所以 $d\omega$ 限制在 U 上必为零。

设 ω 是定义在开集 U 上的外微分式，利用第一章 § 3 的引理 3，对任意一点 $p\in U$，必有包含 p 的坐标域 $U_1\subset U$，及定义在 M 上的外微分式 $\tilde{\omega}$，使得

(9) $$\tilde{\omega}|_{U_1}=\omega|_{U_1}.$$

于是，可以定义

(10) $$d\omega|_{U_1}=d\tilde{\omega}|_{U_1}.$$

由于外微分算子 d 的局部性，上面的定义与 $\tilde{\omega}$的选择无关，因此 $d\omega$ 有确定的意义。

现在我们在局部坐标域内证明外微分 d 的唯一性。根据条件 1)，只要对单项式证明即可。设在坐标域 U 上，ω 表为

(11) $$\omega=adu^1\wedge\cdots\wedge du^r,$$

其中 a 是 U 上的光滑函数。d 作用在定义在 U 上的外微分式仍然满足条件 1)—4)，所以

(12) $$d\omega=da\wedge du^1\wedge\cdots\wedge du^r ①,$$

其中da是函数 a 的微分。因此 $d\omega$ 限制在坐标域 U 上有完全确定的形式。

假定

(13) $$\omega|_U=a_{i_1\cdots i_r}du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r},$$

---

① 这里是用到如下的事实：坐标函数 u^i 是局部坐标域 U 上的光滑函数，因此由条件 4)得

$$d(du^i)=0.$$

则可定义

$$(14)\qquad d(\omega|_U)=da_{i_1\cdots i_r}\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}.$$

显然$d(\omega|_U)$是U上的$r+1$次外微分式，并且满足条件 1)和 3)。要证明 2)成立，只须取两个单项式

$$\alpha_1=a\,du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r},$$
$$\alpha_2=b\,du^{j_1}\wedge\cdots\wedge du^{j_s}.$$

根据定义(14)，则有

$$\begin{aligned}
&d(\alpha_1\wedge\alpha_2)\\
&\quad=(b\,da+a\,db)\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r}\wedge du^{j_1}\wedge\cdots\wedge du^{j_s}\\
&\quad=(da\wedge du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r})\wedge(b\,du^{j_1}\wedge\cdots\wedge du^{j_s})\\
&\qquad+(-1)^r(a\,du^{i_1}\wedge\cdots\wedge du^{i_r})\\
&\qquad\wedge(db\wedge du^{j_1}\wedge\cdots\wedge du^{j_s})\\
&\quad=d\alpha_1\wedge\alpha_2+(-1)^r\alpha_1\wedge d\alpha_2,
\end{aligned}$$

所以条件 2)成立。

条件 4)：设f是M上的光滑函数，则限制在U上有

$$(15)\qquad df=\frac{\partial f}{\partial u^i}du^i.$$

但是f是C^∞的，它的高阶偏导数与次序无关，即

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^j}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^j\partial u^i},$$

所以

$$\begin{aligned}
d(df)&=d\left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)\wedge du^i\\
&=\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^j}du^j\wedge du^i\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^j}-\frac{\partial^2 f}{\partial u^j\partial u^i}\right)du^j\wedge du^i=0.
\end{aligned}$$

若W是另一个坐标域，由于外微分算子的局部性和在局部坐

标域内的唯一性，我们有

$$d(\omega|_U)|_{U\cap W}=d(\omega|_{U\cap W})$$
$$=d(\omega|_W)|_{U\cap W},\tag{17}$$

所以由(14)式定义的外微分算子 d 在 $U\cap W$ 上是一致的，即 d 是流形 M 上大范围定义的算子，这就证明了满足定理条件的算子 d 的存在性。

定理 2.2(Poincaré引理) $d^2=0$，即对于任意的外微分式 ω，$d(d\omega)=0$。

证明 因为 d 是线性算子，所以只要取 ω 是单项式就够了。由于外微分 d 的局部性，只须设

$$\omega=a du^1\wedge\cdots\wedge du^r,$$

故

$$d\omega=da\wedge du^1\wedge\cdots\wedge du^r.$$

再微一次，利用条件 2)和 4)，则有

$$\begin{aligned}d(d\omega)&=d(da)\wedge du^1\wedge\cdots\wedge du^r\\&\quad-da\wedge d(du^1)\wedge\cdots\wedge du^r+\cdots\\&=0.\end{aligned}$$

证毕。

例 1 设 $\boldsymbol{R}^3$ 中的笛卡儿坐标系是 (x,y,z)。

1) 若 f 是 $\boldsymbol{R}^3$ 上的光滑函数，则

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

其系数构成的矢量 $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$ 是 f 的梯度 grad f。

2) 设 $\alpha=Adx+Bdy+Cdz$，其中 A,B,C 是 $\boldsymbol{R}^3$ 上的光滑函数，则

$$\begin{aligned}d\alpha&=dA\wedge dx+dB\wedge dy+dC\wedge dz\\&=\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)dz\wedge dx\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\wedge dy;$$

若记矢量 $X=(A,B,C)$，则 $d\alpha$ 的系数构成的矢量

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z},\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x},\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

恰是矢量场 X 的旋度 curl X。

3) 设 $\alpha=Ady\wedge dz+Bdz\wedge dx+Cdx\wedge dy$，则

$$d\alpha=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

$$=\operatorname{div} X dx\wedge dy\wedge dz,$$

其中 $X=(A,B,C)$，div X 表示矢量场 X 的散度。

由 Poincaré 引理，立即得到场论的两个基本公式：设 f 是 $\boldsymbol{R}^3$ 上的光滑函数，X 是 $\boldsymbol{R}^3$ 上的光滑切矢量场，则

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f)=0,\\ \operatorname{div}(\operatorname{curl} X)=0.\end{array}\right. \tag{18}$$

定理2.3 设 ω 是光滑流形 M 上的一次微分式，X 和 Y 是 M 上的光滑切矢量场，则

$$\langle X\wedge Y,\ d\omega\rangle=X\langle Y,\omega\rangle-Y\langle X,\omega\rangle-\langle[X,Y],\omega\rangle. \tag{19}$$

证明 因为(19)式两边对于 ω 是线性的，所以不妨假定 ω 是单项式

$$\omega=gdf, \tag{20}$$

其中 f,g 是 M 上的光滑函数。因此

$$d\omega=dg\wedge df. \tag{21}$$

根据第二章 § 3 的(15)式，(19)式的左边是

$$\langle X\wedge Y,dg\wedge df\rangle \tag{22}$$

$$=\begin{vmatrix}\langle X,dg\rangle & \langle X,df\rangle\\ \langle Y,dg\rangle & \langle Y,df\rangle\end{vmatrix}$$

$$=Xg\cdot Yf-Xf\cdot Yg.$$

因为

$$\langle X,\omega\rangle=\langle X,gdf\rangle=g\cdot Xf,$$

故

(23) $$Y\langle X,\omega\rangle=Yg\cdot Xf+g\cdot Y(Xf);$$

同理，

(24) $$X\langle Y,\omega\rangle=Xg\cdot Yf+g\cdot X(Yf).$$

所以(19)式右边是

(25) $$\begin{aligned}&X\langle Y,\omega\rangle-Y\langle X,\omega\rangle-\langle[X,Y],\omega\rangle\\&=Xg\cdot Yf-Yg\cdot Xf\\&\quad+g(X(Yf)-Y(Xf))\\&\quad-g\langle[X,Y],df\rangle\\&=Xg\cdot Yf-Yg\cdot Xf,\end{aligned}$$

故(19)式成立。

注记 对于任意次的外微分式 ω，我们有下面的公式：设 $\omega\in A^r(M)$，$X_1,\cdots,X_{r+1}$ 是 M 上任意 $(r+1)$ 个光滑切矢量场，则

(26) $$\begin{aligned}&\langle X_1\wedge\cdots\wedge X_{r+1},d\omega\rangle\\&=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}X_i(\langle X_1\wedge\cdots\wedge\hat{X}_i\wedge\cdots\wedge X_{r+1},\omega\rangle)\\&\quad+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r+1}(-1)^{i+j}\langle[X_i,X_j]\wedge\cdots\\&\qquad\wedge\hat{X}_i\wedge\cdots\wedge\hat{X}_j\wedge\cdots\wedge X_{r+1},\omega\rangle.\end{aligned}$$

请读者自证公式(26)。

利用定理2.3，第一章讲到的 r 维分布的 Frobenius 条件可改述为它的对偶形式。设 $L^r=\{X_1,\cdots,X_r\}$ 是 M 上一个光滑的 r 维分布，则在任一点 $p\in M$，$L^r(p)$ 是 T_p 的 r 维线性子空间。命

(27) $$(L^r(p))^\perp=\{\omega\in T_p^*\mid 使得对任意的\ X\in L^r(p)\ 有\langle X,\omega\rangle=0\}.$$

$(L^r(p))^\perp$ 自然是 T_p^* 的 $m-r$ 维子空间，称为 $L^r(p)$ 的零化子空间。在任意一点的一个邻域内，存在 $m-r$ 个处处线性无关的一次微分式 $\omega_{r+1},\cdots,\omega_m$，它们在该邻域的每一点 p 张成零化子空间 $(L^r(p))^\perp$。实际上，在一个邻域内分布 L^r 是由 r 个处处线性无关的光滑切矢量场 $X_1,\cdots,X_r$ 张成的，因此可找到 $m-r$ 的光滑切矢量场 $X_{r+1},\cdots,X_m$，使得 $\{X_1,\cdots,X_r,X_{r+1},\cdots,X_m\}$ 在该邻域内是处处线性无关的。设 $\{\omega_1,\cdots,\omega_r,\omega_{r+1},\cdots,\omega_m\}$ 是在该邻域内与之对偶的一次微分式，则在每一点 p，$(L^r(p))^\perp$ 是由 ω_{r+1}，$\cdots,\omega_m$ 张成的。因此，在局部上分布 L^r 等价于方程组

$$\omega_s=0,\qquad r+1\leqslant s\leqslant m. \tag{28}$$

上述方程组常称为 Pfaff 方程组。

由(19)式得到

$$\begin{aligned}
&\langle X_\alpha\wedge X_\beta,d\omega_s\rangle\\
&=X_\alpha\langle X_\beta,\omega_s\rangle-X_\beta\langle X_\alpha,\omega_s\rangle\\
&\quad-\langle[X_\alpha,X_\beta],\omega_s\rangle\\
&=-\langle[X_\alpha,X_\beta],\omega_s\rangle.
\end{aligned}$$

因此，分布 $L^r=\{X_1,\cdots,X_r\}$ 适合 Frobenius 条件，即

$$[X_\alpha,X_\beta]\in L^r,\quad 1\leqslant\alpha,\beta\leqslant r \tag{29}$$

的充分必要条件是

$$\begin{gathered}\langle X_\alpha\wedge X_\beta,d\omega_s\rangle=0,\\ 1\leqslant\alpha,\beta\leqslant r,\quad r+1\leqslant s\leqslant m.\end{gathered} \tag{30}$$

我们要证明，(30)式等价于

$$d\omega_s\equiv0 \bmod(\omega_{r+1},\cdots,\omega_m),\quad r+1\leqslant s\leqslant m. \tag{31}$$

实际上，$d\omega_s$ 可以用 $\omega_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 表示

$$d\omega_s=\sum_{t=r+1}^m\psi_{st}\wedge\omega_t+\sum_{\alpha,\beta=1}^r a^s_{\alpha\beta}\omega_\alpha\wedge\omega_\beta, \tag{32}$$

其中 ψ_{st} 是一次微分式，$a^s_{\alpha\beta}$ 是光滑函数，且关于下指标是反对称的。因为

$$\langle X_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij},$$

所以将(32)式代入(30)式便得

$$a^s_{\alpha\beta} = 0, \quad 1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant r, \quad r+1 \leqslant s \leqslant m,$$

即

$$d\omega_s = \sum_{t=r+1}^{m} \psi_{st} \wedge \omega_t, \tag{33}$$

这就是(31)式。我们把(31)式称为 Pfaff 方程组(28)所适合的 Frobenius 条件。

若存在局部坐标系 u^i，使子流形

$$u^s = \text{const}, \quad r+1 \leqslant s \leqslant m \tag{34}$$

适合 Pfaff 方程组(28)，则称(28)是完全可积的。这样，如果 Pfaff 方程组(28)是完全可积的，则存在局部坐标系 u^i，使该方程组等价于

$$du^s = 0, \quad r+1 \leqslant s \leqslant m. \tag{35}$$

这时分布 L^r 恰好是切矢量场 $\dfrac{\partial}{\partial u^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial u^r}$ 张成的。反过来也对。因此第一章的 Frobenius 定理可以改述为

定理2.4 Pfaff 方程组

$$\omega_\alpha = 0, \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r, \tag{36}$$

完全可积的充要条件是

$$d\omega_\alpha \equiv 0 \bmod (\omega_1, \cdots, \omega_r), \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant r. \tag{37}$$

例 2 设有 $\boldsymbol{R}^3$ 上的全微分方程

$$\Omega \equiv P dx + Q dy + R dz = 0, \tag{38}$$

其中 P, Q, R 是 $\boldsymbol{R}^3$ 上的光滑函数。(38)是完全可积的意思是：在每个充分小的邻域内存在光滑函数 F，使得

$$F = \text{const}$$

是(38)的初积分。根据定理2.4，(38)是完全可积的充要条件是

$$d\Omega \wedge \Omega = 0,$$

即

$$(39)\qquad P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0.$$

换言之，(39)式是方程(38)有积分因子的充要条件。

要指出的是，Frobenius 定理是"局部"的定理，它描述的是 Pfaff 方程组在一点的邻域内的解的性状.但是从这个"局部"定理出发，可研究大范围的积分流形。为此，需要在M上引进新的拓扑：设L^r是M上的r维分布，适合 Frobenius 条件。若把L^r的积分流形的并集定义为M的"开集"，则全体这种"开集"构成M的一个拓扑O。

定理2.5 设L^r是流形M上适合 Frobenius 条件的光滑的r维分布，则过每一点$p\in M$，存在L^r的极大积分流形$\mathscr{L}(p)$，而L^r的任意一个过点p的积分流形关于拓扑O是$\mathscr{L}(p)$的开子流形。

定理中所谓极大积分流形是指它不是另一个积分流形的真子集。详细的讨论可看[7，p. 92]。

设$f:M\to N$是从光滑流形M到N的光滑映射，则它诱导出外微分式空间之间的线性映射

$$f^*:A(N)\to A(M).$$

实际上，f在每一点$p\in M$诱导出切映射$f_*:T_p(M)\to T_p(N)$.而映射$f^*:A(N)\to A(M)$在各齐次部分上定义如下：

若$\beta\in A^r(N)$ $(r\leqslant 1)$，则$f^*\beta\in A^r(M)$，使得对M上任意r个光滑切矢量场$X_1,\cdots,X_r$有

$$(40)\qquad \langle X_1\wedge\cdots\wedge X_r,f^*\beta\rangle_p$$

$$=\langle f_*X_1\wedge\cdots\wedge f_*X_r,\beta\rangle_{f(p)},\quad p\in M,$$

其中$\langle\ ,\ \rangle$是(7)式所定义的配合。

若$\beta\in A^0(N)$，则命

(41) $$f^*\beta=\beta\circ f\in A^0(M).$$

根据第二章定理3.2，映射 f^* 与外积是可交换的，即对任意的$\omega,\eta\in A(N)$，有

(42) $$f^*(\omega\wedge\eta)=f^*\omega\wedge f^*\eta.$$

诱导映射 f^* 的重要性还在于它与外微分 d 是可交换的。

定理2.6 设 $f:M\to N$ 是从光滑流形M到N的光滑映射，则诱导映射 $f^*:A(N)\to A(M)$和外微分 d 是可交换的，即

(43) $$f^*\circ d=d\circ f^*:A(N)\to A(M).$$

或者说有交换图表

$$\begin{array}{ccc} A(N) & \xrightarrow{d} & A(N) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\downarrow \\ A(M) & \xrightarrow{d} & A(M) \end{array}$$

证明 由于f^*和 d 都是线性的，所以只要考虑(43)式两边对单项式 β 的作用。

首先，设 β 是N上的光滑函数，即$\beta\in A^0(N)$。任取M上的光滑切矢量场X，则由(40)式得

$$\begin{aligned}\langle X,f^*(d\beta)\rangle&=\langle f_*X,d\beta\rangle\\&=f_*X(\beta)=X(\beta\circ f)=\langle X,d(f^*\beta)\rangle,\end{aligned}$$

所以

$$f^*(d\beta)=d(f^*\beta).$$

其次，设$\beta=udv$，其中 u,v 是N上的光滑函数，则

$$\begin{aligned}f^*(d\beta)&=f^*(du\wedge dv)=f^*du\wedge f^*dv\\&=d(f^*u)\wedge d(f^*v)=d(f^*\beta).\end{aligned}$$

现在假定(43)式对次数$<r$ 的外微分式成立，要证明它对 r 次外微分式也成立。设 β 是 r 次单项式，$\beta\in A^r(N)$，写作

$$\beta=\beta_1\wedge\beta_2,$$

其中 β_1 是N上的一次微分式，β_2 是N上的 $r-1$ 次外微分式，则

由归纳假设得到

$$
\begin{aligned}
d \circ f^*(\beta_1 \wedge \beta_2) \\
&= d(f^*\beta_1 \wedge f^*\beta_2) \\
&= d(f^*\beta_1) \wedge f^*\beta_2 - f^*\beta_1 \wedge d(f^*\beta_2) \\
&= f^*(d\beta_1 \wedge \beta_2) - f^*(\beta_1 \wedge d\beta_2) \\
&= f^* \circ d(\beta_1 \wedge \beta_2).
\end{aligned}
$$

证毕。

§3 外微分式的积分

把流形的局部性质和整体性质联系起来的最简单方式是外微分式在流形上的积分。要定义积分的概念，需要一些准备知识。

定义3.1 m维光滑流形M称为可定向的，如果在M上存在一个连续的、处处不为零的m次外微分式。若在M上给定了这样一个外微分式ω，则称M是定向的。如果给出M的定向的两个外微分式彼此差一个处处为正的函数因子，则称它们规定了M的同一个定向。

连通的可定向流形恰有两个不同的定向。因为如果ω和ω'是给出M的定向的两个m次外微分式，则存在M上的连续函数f，使

$$
\omega' = f\omega, \tag{1}
$$

其中f处处不为零。由于M是连通流形，f在M上必须保持同一个符号，因此ω'给出的定向或者与ω一致，或者与$-\omega$一致。

设流形M是由外微分式ω定向的。设$(U;u^i)$是M的任一个局部坐标系，则$du^1\wedge\cdots\wedge du^m$与$\omega|_U$差一个处处不为零的因子。如果$du^1\wedge\cdots\wedge du^m$与$\omega|_U$差一个正因子，则称$(U;u^i)$是与$M$的定向相符的坐标系。显然在定向流形上可取定向相符的坐标复盖，对于任意两个相交的坐标域，坐标变换的Jacobi行列式处处取正值。反过来，利用下面要讲的单位分解定理可以证明：如

果流形M上存在一个容许的坐标复盖，对其中任意两个相交的坐标域，坐标变换的 Jacobi 行列式处处取正值，则M是可定向的(请读者补充证明)。

定义3.2 设 $f:M\to\mathbf{R}$ 是M上的实函数，函数 f 的支集(support set)是指使 f 取非零值的点集的闭包，记作

$$\text{supp}\, f=\overline{\{p|\in M, f(p)\neq 0\}}. \tag{2}$$

若 φ 是外微分式，则 φ 的支集是

$$\text{supp}\,\varphi=\overline{\{p|\in M, \varphi(p)\neq 0\}}. \tag{3}$$

很明显，支集 supp φ 的补集恰是M中使 $\varphi=0$ 的最大开子集。

定义3.3 设Σ_0是M的一个开复盖。如果M的任意一个紧致子集只与 Σ_0 中有限多个成员相交，则称 Σ_0 是M的局部有限开复盖。

定理3.1 设 Σ 是流形M的一个拓扑基，则存在 Σ 的一个子集 Σ_0，它是M的局部有限开复盖。

证明 根据流形的定义，M是局部紧致的。已假定流形M满足第二可数公理，因此存在M的一个可数开复盖$\{U_i\}$，使得其中每一个 U_i 的闭包 $\overline{U}_i$是紧致的。记

$$P_i=\bigcup_{1\leqslant r\leqslant i}\overline{U}_r, \tag{4}$$

则 P_i 是紧致的，$P_i\subset P_{i+1}$，并且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}P_i=M$。现在要构造另外一串紧致集 Q_i，使它们满足条件

$$P_i\subset Q_i\subset \mathring{Q}_{i+1}, \tag{5}$$

其中 $\mathring{Q}_{i+1}$ 表示 Q_{i+1} 的内部。

用归纳法，假定 $Q_1,\cdots,Q_i$已造出。因为 $Q_i\cup P_{i+1}$ 是紧致的，所以在$\{U_j\}$中存在有限多个成员U_α, $1\leqslant\alpha\leqslant s$,它们构成 $Q_i\cup P_{i+1}$

的复盖。命

$$(6)\qquad Q_{i+1}=\bigcup_{1\leqslant\alpha\leqslant s}\overline{U}_\alpha,$$

则 Q_{i+1} 满足条件(5)。首先 Q_{i+1} 是紧致的，$P_{i+1}\subset Q_{i+1}$。另外

$$Q_i\subset\bigcup_{1\leqslant\alpha\leqslant s}U_\alpha\subset\mathring{Q}_{i+1}.$$

显然，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}Q_i=M$。

现在命(图9)

$$(7)\qquad L_i=Q_i-\mathring{Q}_{i-1},\quad K_i=\mathring{Q}_{i+1}-Q_{i-2},$$

其中 $1\leqslant i<+\infty$，且规定 $Q_{-1}=Q_0=\varnothing$。这样 L_i 是紧致集，K_i 是开集，并且 $L_i\subset K_i$。

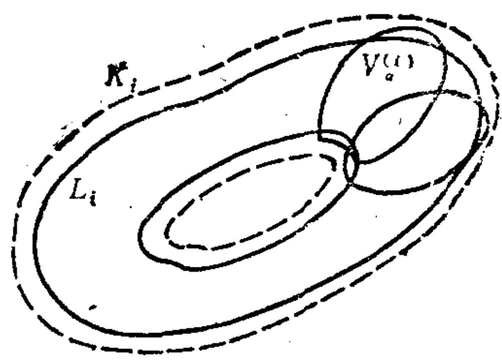

图 9

根据假定，Σ 是 M 的拓扑基，因此 K_i 可以表成 Σ 中一些成员的并集。由于 L_i 的紧致性，$L_i\subset K_i$，所以对每一个 i，在 Σ 中存在有限多个成员 $V_\alpha^{(i)}$，$1\leqslant\alpha\leqslant r_i$，使得

$$(8)\qquad L_i\subset\bigcup_{1\leqslant\alpha\leqslant r_i}V_\alpha^{(i)}\subset K_i.$$

因为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}L_i=M$，所以

$$(9)\qquad \Sigma_0=\{V_\alpha^{(i)},1\leqslant\alpha\leqslant r_i,1\leqslant i<+\infty\}$$

是 Σ 的子复盖。

我们要证明 Σ_0 是局部有限的。设 A 是任意一个紧致集，由(4)式可知必有充分大的整数 i，使 $A\subset P_i\subset Q_i$。当 $k\geqslant i+2$ 时

$$K_k=\mathring{Q}_{k+1}-Q_{k-2}\subset\mathring{Q}_{k+1}-Q_i,$$

故$K_k\cap Q_i=\varnothing$。因此

(10) $$V_\alpha^{(k)}\cap A\subset K_k\cap Q_i=\varnothing,\quad 1\leqslant\alpha\leqslant r_k,\quad k\geqslant i+2,$$

即Σ_0中与A相交的成员至多是有限多个。

定理3.2（单位分解定理） 设Σ是光滑流形M的一个开复盖，则在M上存在一族光滑函数$\{g_\alpha\}$，满足下列条件：

1）对每一个α，$0\leqslant g_\alpha\leqslant 1$，支集$\operatorname{supp} g_\alpha$是紧致的，并且有开集$W_i\in\Sigma$，使$\operatorname{supp} g_\alpha\subset W_i$；

2）每一点$p\in M$有一邻域U，它只与有限多个支集$\operatorname{supp} g_\alpha$相交；

3）$\sum\limits_\alpha g_\alpha=1$。

由于条件2)，在任意一点$p\in M$，条件3)左边只有有限多项不为零，故和式是有意义的。函数族$\{g_\alpha\}$称为从属于开复盖Σ的单位分解。

证明 因为M是流形，所以有M的拓扑基$\Sigma_0=\{U_\alpha\}$，使其中每一个U_α是坐标域，$\bar U_\alpha$是紧致的，并且存在$W_i\in\Sigma$，使$\bar U_\alpha\subset W_i$。由定理3.1，Σ_0有局部有限的子复盖，所以不妨假定Σ_0本身是M的局部有限开复盖，并且有可数多个成员。用归纳法不难证明，Σ_0中每个成员U_α稍作收缩得到V_α，可使$\bar V_\alpha\subset U_\alpha$，且$\{V_\alpha\}$仍构成$M$的开复盖①。

根据第一章§3引理3，在M上存在光滑函数h_α，$0\leqslant h_\alpha\leqslant 1$，并且

---

① 收缩的方法如下：命$W=\bigcup\limits_{i\neq\alpha}U_i$，则$M-W$是包含$U_\alpha$在内的闭集，因$\bar U_\alpha$紧致，$M-W$也是紧致的，故有有限多个坐标域$W_s$（$1\leqslant s\leqslant r$），使$\overline W_s\subset U_\alpha$，且$\bigcup\limits_{s=1}^{r}W_s\subset M-W$。只要命$V_\alpha=\bigcup\limits_{s=1}^{r}W_s$就行了。

$$h_a(p)=\begin{cases}1, & p\in V_a,\\ 0, & p\notin U_a.\end{cases} \tag{11}$$

显然 $\operatorname{supp} h_a\subset\bar{U}_a$。任意一点 $p\in M$ 都有一个邻域 U，使 $\bar{U}$ 是紧致的；由于 Σ_0 的局部有限性，$\bar{U}$ 只与 Σ_0 中有限多个成员相交，和式 $\sum\limits_a h_a(p)$ 中只有有限多项不是零，所以 $h=\sum\limits_a h_a$ 是定义在 M 上的光滑函数。因为 $\{V_a\}$ 构成 M 的复盖，所以点 p 必落在某个 V_a 内，即 $h(p)\geqslant 1$。命

$$g_a=h_a/h, \tag{12}$$

则 g_a 是 M 上的光滑函数。容易验证，函数族 $\{g_a\}$ 适合定理的条件。

有了上述准备，我们可以着手定义外微分式在流形 M 上的积分。设 M 是 m 维定向的光滑流形，φ 是 M 上的 m 次外微分式，且有紧致的支集 $\operatorname{supp}\varphi$。任取 M 的一个定向相符的坐标复盖 $\Sigma=\{W_i\}$，设 $\{g_a\}$ 是从属于 Σ 的单位分解，则

$$\varphi=\left(\sum_a g_a\right)\cdot\varphi=\sum_a(g_a\cdot\varphi). \tag{13}$$

显然，支集 $\operatorname{supp}(g_a\cdot\varphi)\subset\operatorname{supp} g_a$ 包含在某个坐标域 $W_i\in\Sigma$ 内，所以可以定义

$$\int_M g_a\cdot\varphi=\int_{W_i} g_a\cdot\varphi, \tag{14}$$

右端理解为普通的 Riemann 积分，即：如果 $g_a\cdot\varphi$ 关于 W_i 中的坐标系 $u^1,\cdots,u^m$ 表为

$$f(u^1,\cdots,u^m)\,du^1\wedge\cdots\wedge du^m,$$

则(14)式右端的积分就是

$$\int_{W_i} f(u^1,\cdots,u^m)\,du^1\cdots du^m. \tag{15}$$

要说明(14)式是有意义的，只需证明右端与 W_i 的选择无

关。不妨设 $\operatorname{supp}(g_\alpha\cdot\varphi)$ 同时包含在坐标域 W_i 和 W_j 内，设它们的定向相符的局部坐标分别是 u^k 和 v^k，则坐标变换的 Jacobi 行列式

$$(16)\qquad J=\frac{\partial(v^1,\cdots,v^m)}{\partial(u^1,\cdots,u^m)}>0.$$

假定 $g_\alpha\cdot\varphi$ 在 W_i 和 W_j 内的表式分别是

$$(17)\qquad \begin{aligned} g_\alpha\cdot\varphi&=f du^1\wedge\cdots\wedge du^m\\ &=f' dv^1\wedge\cdots\wedge dv^m, \end{aligned}$$

则

$$(18)\qquad f=f'\cdot J=f'\cdot|J|,$$

且 $\operatorname{supp} f=\operatorname{supp} f'=\operatorname{supp}(g_\alpha\cdot\varphi)\subset W_i\cap W_j$. 根据 Riemann 积分的变量替换公式，我们有

$$\begin{aligned} &\int_{W_i\cap W_j} f' dv^1\cdots dv^m\\ &=\int_{W_i\cap W_j} f'\cdot|J|\cdot du^1\cdots du^m\\ &=\int_{W_i\cap W_i} f du^1\cdots du^m, \end{aligned}$$

即

$$(19)\qquad \int_{W_i} g_\alpha\cdot\varphi=\int_{W_j} g_\alpha\cdot\varphi.$$

因为 φ 的支集 $\operatorname{supp}\varphi$ 是紧致的，根据单位分解定理的条件 2)，$\operatorname{supp}\varphi$ 只与有限多个支集 $\operatorname{supp} g_\alpha$ 相交，因此(13)式的右端只是有限多项的和. 命

$$(20)\qquad \int_M\varphi=\sum_\alpha\int_M g_\alpha\cdot\varphi.$$

对于每一个从属于 Σ 的单位分解 $\{g_\alpha\}$，(20)式右边是完全确定的. 下面要证明(20)式与单位分解 $\{g_\alpha\}$ 的选取无关.

假设$\{g'_\beta\}$是从属于Σ的另一个单位分解，则

$$\begin{aligned}\sum_\beta\int_M g'_\beta\cdot\varphi &=\sum_\beta\sum_\alpha\int_M g_\alpha\cdot g'_\beta\cdot\varphi\\ &=\sum_\alpha\int_M\sum_\beta g'_\beta\cdot g_\alpha\cdot\varphi\\ &=\sum_\alpha\int_M g_\alpha\cdot\varphi.\end{aligned}$$

定义3.4 设M是m维定向的光滑流形，φ是M上有紧致支集的m次外微分式。由(20)式所定义的数值$\int_M\varphi$称为外微分式φ在M上的积分。

若$\varphi,\varphi_1,\varphi_2$都是$M$上有紧致支集的$m$次外微分式，则$\varphi_1+\varphi_2$有紧致支集；对任意的实数$c$，$c\varphi$也有紧致支集。根据积分的定义显然有

$$\left\{\begin{aligned}&\int_M(\varphi_1+\varphi_2)=\int_M\varphi_1+\int_M\varphi_2,\\&\int_M c\varphi=c\int_M\varphi\end{aligned}\right.\tag{21}$$

因此积分$\int_M$是M上有紧致支集的m次外微分式的集合上的线性函数。

若$\operatorname{supp}\varphi$恰好落在一个坐标域$U$内，且$U$的定向相符的局部坐标是$u^i$，则$\varphi$可表成

$$\varphi=f(u^1,\cdots,u^m)du^1\wedge\cdots\wedge du^m,\tag{22}$$

而$\int_M$正好是普通的Riemann积分

(23) $$\int_M \varphi=\int_U f\,du^1\cdots du^m.$$

可见，定义3.4是 Riemann 积分的推广。

若 φ 是 $r<m$ 次外微分式，且有紧致支集 $\operatorname{supp}\varphi$， 则可定义 φ 在M的 r 维子流形上的积分。设

(24) $$h:N\to M$$

是M的 r 维嵌入子流形，则 $h^*\varphi$是 r 维光滑流形N上的 r 次外微分式，且有紧致的支集，故积分$\int_N h^*\varphi$ 是有定义的。我们把 φ 在子流形 $h(N)$ 上的积分定义为

(25) $$\int_{h(N)}\varphi=\int_N h^*\varphi.$$

§ 4 Stokes 公式

一个区域上的积分和它边界上的积分之间的联系，是微积分学的最基本的内容。先看几个例子。

例1 设 $D=[a,b]$是 $\boldsymbol{R}^1$ 中的一个闭区间，f 是D上的连续可微函数，则有微积分学的基本公式

(1) $$\int_D df=f(b)-f(a).$$

我们用 ∂D 记D的有向边界$\{b\}-\{a\}$，则上式右端记成$\int_{\partial D}f$。

例2 设D是 $\boldsymbol{R}^2$ 中一个有界区域，其定向与 $\boldsymbol{R}^2$ 的一致。用 ∂D 记D的有向边界，其定向由D所诱导，即：∂D 的正向与指向D内部的法向量构成与$\boldsymbol{R}^2$的定向一致的标架（见图10）。设P，Q是D上的连续可微函数，则有Green 公式

(2) $$\int_{\partial D}Pdx+Qdy=\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

若命 $\omega = Pdx + Qdy$，则

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \times dx \wedge dy,$$

因此(2)式可改写成

$$(3) \qquad \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

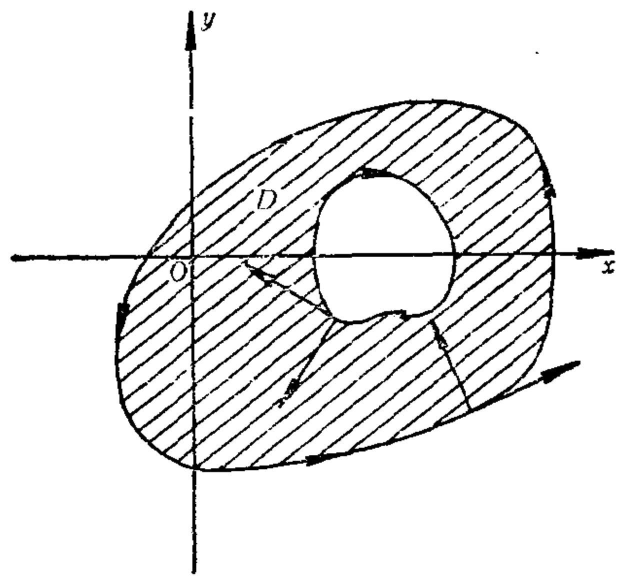

图 10

例3 设 D 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的有界区域，其定向与 $\boldsymbol{R}^3$ 一致，以外法线方向为正向诱导出边界 ∂D 的定向。设 P, Q, R 分别是 D 上的连续可微函数，则 Gauss 公式说

$$(4) \qquad \int_{\partial D} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

或记成

$$(5) \qquad \int_{\partial D} \varphi = \int_D d\varphi,$$

其中 $\varphi = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$.

例4 设 Σ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中一块有向曲面，其边界 $\partial\Sigma$ 是有向闭曲线，而且 $\partial\Sigma$ 的正向与 Σ 的正向法向量符合右手法则(假定 $\boldsymbol{R}^3$ 以右手系为正定向)。设 P, Q, R 是在包含 Σ 在内的一个区域上的连续可微的函数，则有 Stokes 公式

$$(6) \qquad \int_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

若记

$$\omega=Pdx+Qdy+Rdz,$$

则上式可写成

$$\int_{\partial\Sigma}\omega=\int_{\Sigma}d\omega. \tag{7}$$

由此可见，上面四个公式用外微分记号具有统一的形式。本节要讲的 Stokes 公式是上述公式在流形上的推广。我们先解释一些必要的概念。

定义4.1 设M是m维光滑流形。所谓带边区域D是指流形M的一个子集，其中的点分为两类：1）内点，即在M中有该点的一个邻域包含在D内；2）边界点，其定义是：设p是边界点，则p有一个坐标系$(U;u^i)$，使得$u^i(p)=0$，并且

$$U\cap D=\{q|\in U,\ u^m(q)\geqslant 0\}. \tag{8}$$

具有上述性质的坐标系$(U;u^i)$称为边界点p的适用(adapted)坐标系。

带边区域D的边界点的集合称为D的边界，记作B。

定理4.1 带边区域D的边界B是正则嵌入的闭子流形。如果M是可定向流形，则B也是可定向的。

证明 区域D的边界B显然是M的闭子集。设$(U;u^i)$是点$p\in B$的适用坐标域，则

$$U\cap B=\{q|\in U;\ u^m(q)=0\}. \tag{9}$$

根据定义(第一章§3)，B是M的正则嵌入的闭子流形。

假定M是定向流形，对于任意一点$p\in B$选取与M的定向相符的适用坐标域$(U;u^i)$，则$(u^1,\cdots,u^{m-1})$是B在点p的局部坐标系。以

(10) $$(-1)^m du^1\wedge\cdots\wedge du^{m-1}$$

给出边界B在点p的坐标域$U\cap B$上的定向。我们要证明，如此给出的坐标域的定向是彼此相容的。设$(V;v^i)$是边界点p的另一个与M的定向相符的适用坐标域，则

(11) $$\frac{\partial(v^1,\cdots,v^m)}{\partial(u^1,\cdots,u^m)}>0.$$

若设$v^m=f^m(u^1,\cdots,u^m)$，则对于任意固定的$u^1,\cdots,u^{m-1}$，变量v^m的符号与u^m相同，并且当$u^m=0$时，$v^m=0$，所以在p点$\frac{\partial v^m}{\partial u^m}>0$。不失普遍性，可设$v^m=u^m$，则(11)式成为

(12) $$\frac{\partial(v^1,\cdots,v^{m-1})}{\partial(u^1,\cdots,u^{m-1})}>0.$$

这说明$(-1)^m du^1\wedge\cdots\wedge du^{m-1}$和$(-1)^m dv^1\wedge\cdots\wedge dv^{m-1}$在$U\cap V\cap B$上给出的定向是一致的，因此$B$是可定向的。

边界B的由(10)式给出的定向称为定向流形M在B上诱导的定向。设D的定向与M一致，则有诱导定向的边界B记作∂D。容易验证，前面四个例子中∂D和$\partial\Sigma$的定向恰是按这种方式诱导的。

定理4.2(Stokes公式) 设D是m维定向流形M中的带边区域，ω是M上有紧致支集的$m-1$次外微分式，则

(13) $$\int_D d\omega=\int_{\partial D}\omega;$$

若$\partial D=\varnothing$，则规定右边的积分是零。

证明 设$\{U_i\}$是M的定向相符的坐标复盖，$\{g_\alpha\}$是从属的单位分解，则

(14) $$\omega=\sum_\alpha g_\alpha\cdot\omega.$$

因为支集$\operatorname{supp}\omega$是紧致的，所以上式右边只是有限项的和。于

是

$$\int_D d\omega = \sum_\alpha \int_D d(g_\alpha \cdot \omega),$$

(15)

$$\int_{\partial D} \omega = \sum_\alpha \int_{\partial D} g_\alpha \cdot \omega,$$

这说明只要对每一个 α 证明

$$\int_D d(g_\alpha \cdot \omega) = \int_{\partial D} g_\alpha \cdot \omega \tag{16}$$

就够了. 因此不妨假定支集 supp ω 包含在M的一个定向相符的坐标域$(U;u^i)$内。设 ω 的表式是

$$\omega = \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} a_j du^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{du^j} \wedge \cdots \wedge du^m, \tag{17}$$

其中 a_j 是U上的光滑函数，则

$$d\omega = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial a_j}{\partial u^j}\right) du^1 \wedge \cdots \wedge du^m. \tag{18}$$

下面分两种情形：

1) 若 $U \cap \partial D = \varnothing$, 则(13)式右端为零。这时，$U$或者包含在$M-D$内，或者包含在$D$的内部。对于前者，(13)式左端自然是零. 对于后者则有

$$\int_D d\omega = \sum_{j=1}^m \int_U \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^1 \cdots du^m. \tag{19}$$

考虑 $\boldsymbol{R}^m$ 中的一个方体 C: $|u^i| \leqslant K, 1 \leqslant i \leqslant m$, 使得$U$包含在$C$内. 将函数 a_j 延拓到C上，命它在U外的取值为零。显然 a_j 在C内是连续可微的. 因此

$$\int_U \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^1 \cdots du^m \tag{20}$$

$$= \int_C \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^1 \cdots du^m$$

$$= \int\limits_{\substack{|u^i|\le K\\ i\ne j}} \left(\int_{-K}^{+K} \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^j\right) du^1 \cdots du^{j-1} du^{j+1} \cdots du^m$$

$$= 0.$$

最后的积分为零是因为

(21) $$\int_{-K}^{+K} \frac{\partial a_j}{\partial u^j} du^j$$

$$= a_j(u^1, \cdots, u^{j-1}, K, u^{j+1}, \cdots, u^m)$$

$$- a_j(u^1, \cdots, u^{j-1}, -K, u^{j+1}, \cdots, u^m)$$

$$= 0.$$

2）若 $U \cap \partial D \neq \varnothing$，不妨设 U 是与 M 的定向相符的适用坐标域，即有

(22) $$U \cap D = \{q | \in U, u^m(q) \geqslant 0\},$$

且

(23) $$U \cap \partial D = \{q | \in U, u^m(q) = 0\}.$$

在坐标空间 $\boldsymbol{R}^m$ 中取一个方体 C：$|u^i| \leqslant K, 1 \leqslant i \leqslant m-1; 0 \leqslant u^m \leqslant K$。当 K 充分大时，$U \cap D$ 落在 C 的内部与边界 $u^m = 0$ 的并集内。对 a_j 作如同情形 1）的延拓，则(13)式右边成为

(24) $$\int_{\partial D} \omega = \int\limits_{U \cap \partial D} \omega$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \int\limits_{U \cap \partial D} a_j du^1 \wedge \cdots \wedge du^{j-1} \wedge du^{j+1} \wedge \cdots \wedge du^m$$

$$= (-1)^{m-1} \int\limits_{U \cap \partial D} a_m du^1 \wedge \cdots \wedge du^{m-1}$$

$$= - \int\limits_{\substack{|u^i| \le K\\ 1 \le i \le m-1}} a_m(u^1, \cdots, u^{m-1}, 0) du^1 \cdots du^{m-1},$$

其中第三个等号是因为在 $U\cap\partial D$ 上 $du^m=0$，最后一个等号已考虑到 M 在 ∂D 上的诱导定向。

(13)式的左边是

$$
(25)\qquad \int_D d\omega=\int_{D\cap U}d\omega
=\sum_{j=1}^{m}\int_{D\cap U}\frac{\partial a_j}{\partial u^j}du^1\wedge\cdots\wedge du^m.
$$

但是对于 $1\leqslant j\leqslant m-1$，

$$
\int_{D\cap U}\frac{\partial a_j}{\partial u^j}du^1\wedge\cdots\wedge du^m
=\int\limits_{\substack{|u^i|<K\\ i\neq j,\,m\\ 0\leqslant u^m\leqslant K}}\left(\int_{-K}^{+K}\frac{\partial a_j}{\partial u^j}du^j\right)du^1\cdots du^{j-1}du^{j+1}\cdots du^m
=0,
$$

所以(25)式中只含一项

$$
(26)\qquad \int_{U\cap D}\frac{\partial a^m}{\partial u^m}du^1\wedge\cdots\wedge du^m
=\int\limits_{\substack{|u^i|<K\\ i\neq m}}(a_m(u^1,\cdots,u^{m-1},K)
-a_m(u^1,\cdots,u^{m-1},0))\,du^1\cdots du^{m-1}
=-\int\limits_{\substack{|u^i|<K\\ i\neq m}}a_m(u^1,\cdots,u^{m-1},0)\,du^1\cdots du^{m-1}.
$$

所以(13)式成立，定理得证。

注记 在实际应用中，经常遇到的闭区域 D 是紧致的，所以不必假定 $m-1$ 次外微分式有紧致的支集，而 Stokes 公式仍旧成立。

Stokes 公式在物理学、力学及偏微分方程、微分几何学中有

十分重要的应用。积分对于积分区域也有可加性，进而可定义外微分式在奇异链① (Singular Chain) 上的积分。把积分看作外微分式和积分区域的一个配合，则每一个外微分式相当于流形M上的一个奇异上链(Singular Cochain)，而 Stokes 公式正说明了边缘算子 ∂ 和上边缘算子 d 之间的对偶关系。若记

$$(27)\qquad (\partial D, \omega)=\int_{\partial D}\omega, \quad (D, d\omega)=\int_{D} d\omega,$$

则 Stokes 公式成为

$$(28)\qquad (\partial D, \omega)=(D, d\omega).$$

现在把 $A^r(M)$ 看作上链群，$d: A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ 是上边缘算子，且 $d \circ d=0$ (Poincaré 引理)。记

$$(29)\qquad \begin{cases} Z^r(M, \boldsymbol{R})=\{\omega \mid \in A^r(M),\ 且\ d\omega=0\}, \\ B^r(M, \boldsymbol{R})=\{\omega \mid \in A^r(M),\ 若存在\ \beta \in A^{r-1}(M), \\ \qquad 使\ d\beta=\omega\}. \end{cases}$$

则 $Z^r(M, \boldsymbol{R})$ 是同态 $d: A^r(M) \to A^{r+1}(M)$ 的核，$B^r(M, \boldsymbol{R})$ 是同态 $d: A^{r-1}(M) \to A^r(M)$ 的象。$Z^r(M, \boldsymbol{R})$ 的元素称为闭微分式，$B^r(M, \boldsymbol{R})$ 的元素称为恰当(exact)微分式。Poincaré 引理就是说

$$(30)\qquad B^r(M, \boldsymbol{R}) \subset Z^r(M, \boldsymbol{R}).$$

但是，闭微分式未必是恰当的。下面叙述的 de Rham 定理表明，要M上任意一个闭微分式是恰当的，流形M本身必须具有一定的拓扑性质。

定义4.2 商空间

$$(31)\qquad H^r(M, \boldsymbol{R})=Z^r(M, \boldsymbol{R})/B^r(M, \boldsymbol{R})$$

称为流形M的第 r 个 de Rham 上同调群。

定理4.3(de Rham 定理) 设M是紧致的光滑流形，则 de Rham 上同调群和M的第 r 个上同调群同构。若记

---

① 可参看[14]。

$$\dim H^r(M, \boldsymbol{R}) = b_r,$$

则 b_r 就是M的第 r 个 Betti 数。

作为推论可知，如果M的第 r 个 Betti 数是零，则M上任意的 r 次闭微分式都是恰当的。特别是，如果M的所有 Betti 数都是零，则M上任意的闭微分式都是恰当的。

de Rham 群 $H^r(M, \boldsymbol{R})$是由于流形的微分构造产生的，而 Betti 数却纯粹是流形的拓扑不变量，所以 de Rham 定理建立了流形的局部性质和整体性质之间的联系。de Rham 定理的一个最简单的证明要用到层(sheaf)的概念。初等的详细的证明可参阅[14, p.161]。

最后我们从同调论的角度看定理2.6。任意一个光滑映射 $f: M \to N$ 诱导出同态

$$f^*: A^r(N) \to A^r(M),$$

它与上边缘算子 d 是可交换的。这样的映射 f^* 称为链映射。若 $\omega \in Z^r(N, \boldsymbol{R})$，则

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0,$$

所以 $f^*\omega \in Z^r(M, \boldsymbol{R})$，$f^*$ 是 $Z^r(N, \boldsymbol{R})$ 到 $Z^r(M, \boldsymbol{R})$ 的同态。同理，f^*也给出了从 $B^r(N, \boldsymbol{R})$ 到 $B^r(M, \boldsymbol{R})$ 的同态，因此 f^* 诱导出 de Rham 群之间的同态：

$$f^*: H^r(N, \boldsymbol{R}) \to H^r(M, \boldsymbol{R}).$$

作为定理2.6的推论，我们有：若 $f: M \to N$ 是从光滑流形M到N的光滑映射，则它诱导出从 de Rham 上同调群 $H^r(N, \boldsymbol{R})$ 到 $H^r(M, \boldsymbol{R})$ 的同态 f^*。

第四章 连　　络

要对矢量丛的截面——流形上的矢量场进行微分，必须在矢量丛上引进称为“连络”的结构。仿射连络就是加在微分流形上、为使我们能对张量场进行“微分”的结构。我们先介绍矢量丛上连络的一般理论。

§1 矢量丛上的连络

在第三章§1已经叙述过矢量丛和截面等概念。设 E 是流形 M 上一个 q 维实矢量丛，$\Gamma(E)$ 是矢量丛 E 在流形 M 上的光滑截面的集合。$\Gamma(E)$ 是实矢量空间，也是 $C^\infty(M)$-模。

定义1.1 矢量丛 E 上的连络是一个映射

(1) $$D:\Gamma(E)\to\Gamma(T^*(M)\otimes E),$$

它满足下列条件：

1) 对任意的 $s_1, s_2\in\Gamma(E)$ 有

$$D(s_1+s_2)=Ds_1+Ds_2;$$

2) 对 $s\in\Gamma(E)$ 及任意的 $\alpha\in C^\infty(M)$，有

$$D(\alpha s)=d\alpha\otimes s+\alpha Ds.$$

若 X 是 M 上光滑的切矢量场，$s\in\Gamma(E)$，命

(2) $$D_X s\doteq\langle X, Ds\rangle,$$

其中记号 $\langle\ ,\ \rangle$ 是指 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 之间的配合，则 $D_X s$ 是 E 的截面，称为截面 s 沿切矢量场 X 的绝对微商。

注记1 命 $\alpha=-1$，则由连络的条件2)得到

(3) $$D(-s)=-Ds,$$

所以 D 把零截面映到零截面。D 是从 $\Gamma(E)$ 到 $\Gamma(T^*(M)\otimes E)$ 的线性算子。

注记 2 D是作用在E的截面上的算子，但是它具有局部性。即：如果s_1和s_2是E的两个截面，而s_1和s_2限制在M的一个开集U上是相同的，则Ds_1和Ds_2限制在U上也相同。证明的方法类似于证明外微分算子d的局部性(第三章定理2.1)。利用D是线性算子的性质，只要证明：如果截面$s\in\Gamma(E)$限制在开集$U\subset M$上是零，则$Ds|_U=0$。

为此目的，任取一点$p\in U$，则有开集V，使$p\in V\subset\bar{V}\subset U$。由第一章§3引理3，在$M$上存在光滑函数$h$，使得

$$h(p')=\begin{cases}1, & p'\in V,\\ 0, & p'\bar{\in} U,\end{cases}$$

因此hs是E的零截面。由注记1及连络的条件2）得到

$$0=D(hs)=dh\otimes s+hDs,$$

因为在V上$dh=0$，所以

$$Ds(p)=0.$$

由于p在U内的任意性，所以$Ds|_U=0$。

利用D的局部性，可以把D定义为作用在局部截面上的算子。设s是定义在开集$U\subset M$上的截面，利用第一章§3引理3，则对任意一点$p\in U$必有E的截面$\tilde{s}$，使得$\tilde{s}$和s在点p的一个邻域上是一致的。命

$$Ds(p)=D\tilde{s}(p), \tag{4}$$

因为$D\tilde{s}$在p点附近的值与$\tilde{s}$的选取无关，因此Ds是在U上完全确定的截面。

注记3 根据(2)式，D作为二元映射是从$\Gamma(T(M))\times\Gamma(E)$到$\Gamma(E)$的算子，它满足下列条件：设$X,Y$是$M$的任意两个光滑切矢量场，$s,s_1,s_2$是$E$的截面，$a\in C^\infty(M)$，则有

1) $D_{X+Y}s=D_Xs+D_Ys$;

2) $D_{aX}s=aD_Xs$;

3) $D_X(s_1+s_2)=D_Xs_1+D_Xs_2$;

4) $D_X(as)=Xa+aD_Xs$.

这四个条件是绝对微商的定义的直接推论。

如注记 2 所述，绝对微商算子有如下的局部性：

1）如果 X_1, X_2 是 M 上在点 p 取值相同的两个切矢量场，则对 E 的任意一个截面 s，$D_{X_1}s$ 和 $D_{X_2}s$ 在 p 点的取值也相同。据此，可定义 E 的截面关于 M 在点 p 的切矢量的绝对微商；对于 $X \in T_p(M)$，D_X 是从 $\Gamma(E)$ 到 E_p 的映射。

2）对于映射 $D_X: \Gamma(E) \to E_p$ $(X \in T_p(M))$，只要截面 s_1 和 s_2 在 M 的一条与 X 相切的参数曲线上取值相同，就有 $D_X s_1 = D_X s_2$。

这些局部性质的证明类似于注记 2 的证明。请读者补齐。

在局部上，连络是由一组一次微分式给出的。设 U 是 M 的一个坐标域，局部坐标是 u^i，$1 \leqslant i \leqslant m$。取 E 在 U 上的 q 个光滑截面 s_α $(1 \leqslant \alpha \leqslant q)$，使它们是处处线性无关的。这样的 q 个截面称为 E 在 U 上的一个局部标架场。显然在每一点 $p \in U$，$\{du^i \otimes s_\alpha,\ 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant \alpha \leqslant q\}$ 构成张量空间 $T_p^* \otimes E_p$ 的基底。

因为 Ds_α 是从 $T^*(M) \otimes E$ 在 U 上的局部截面，所以可以命

$$Ds_\alpha = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant \beta \leqslant q}} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} du^i \otimes s_\beta, \tag{5}$$

其中 $\Gamma_{\alpha i}^{\beta}$ 是 U 上的光滑函数。记

$$\omega_\alpha^\beta = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \Gamma_{\alpha i}^{\beta} du^i, \tag{6}$$

则(5)式成为

$$Ds_\alpha = \sum_{\beta=1}^{q} \omega_\alpha^\beta \otimes s_\beta. \tag{7}$$

引进矩阵记号，以便使计算简化。我们用 S 记局部标架场所成的列矩阵，用 ω 记 ω_α^β 构成的矩阵，即

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_q \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^q \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_q^1 & \cdots & \omega_q^q \end{pmatrix}. \tag{8}$$

则(7)式可记成

$$DS=\omega\otimes S. \tag{9}$$

矩阵 ω 称为连络方阵，它依赖于局部标架场的选取。

如果 $S'={}^t(s_1',\cdots,s_q')$ 是 U 上另一个局部标架场，则可设

$$S'=A\cdot S, \tag{10}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^q \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_q^1 & \cdots & a_q^q \end{pmatrix},$$

这里 a_i^j 是 U 上的光滑函数，并且 $\det A\neq 0$。

设连络 D 关于局部标架场 S' 的方阵是 ω'，则由连络的条件得到

$$\begin{aligned} DS' &= dA\otimes S+A\cdot DS \\ &= (dA+A\cdot\omega)\otimes S \\ &= (dA\cdot A^{-1}+A\cdot\omega\cdot A^{-1})\otimes S', \end{aligned} \tag{11}$$

所以

$$\omega'=dA\cdot A^{-1}+A\cdot\omega\cdot A^{-1}, \tag{12}$$

这就是连络方阵在局部标架场改变时的变换公式，是微分几何中非常重要的公式。

反过来，如果取定 M 的一个坐标复盖 $\{U,W,Z,\cdots\}$，在每一个 U 上取定 E 的一个局部标架场 S_U，并且指定一个由一次微分式组成的 $q\times q$ 阶矩阵 ω_U，要求它们在坐标域相交时满足变换公式(12)，即当 $U\cap W\neq\varnothing$，若设

$$S_W=A_{WU}\cdot S_U, \tag{13}$$

其中 A_{WU} 是 $U\cap W$ 上的光滑函数组成的 $q\times q$ 矩阵，则在 $U\cap W$ 上就有

$$\omega_W=dA_{WU}\cdot A_{WU}^{-1}+A_{WU}\cdot\omega_U\cdot A_{WU}^{-1}. \tag{14}$$

那末，在 E 上存在一个连络 D，它在坐标复盖的每个成员 U 上的连络方阵恰是 ω_U。证明如下：

设 s 是 E 的任意一个截面，在 U 上它可表为

(15) $$s=a_U\cdot S_U,$$

其中 $a_U=(a_U^1,\cdots,a_U^q)$，a_U^i 是 U 上的光滑函数。命 Ds 在 U 上的表式是

(16) $$Ds|_U=(da_U+a_U\cdot\omega_U)\otimes S_U.$$

我们要证明，如果 $U\cap W\neq\varnothing$，则在 $U\cap W$ 上应该有

(17) $$(da_U+a_U\cdot\omega_U)\otimes S_U=(da_W+a_W\cdot\omega_W)\otimes S_W,$$

因此(16)式所定义的 Ds 是 M 上的截面。

由于(13)式，在 $U\cap W$ 上有

(18) $$\begin{cases}a_U=a_W\cdot A_{WU},\\ da_U=da_W\cdot A_{WU}+a_W\cdot dA_{WU}.\end{cases}$$

再用(14)式则在 $U\cap W$ 上有

$$\begin{aligned}(da_U+a_U\cdot\omega_U)\otimes S_U\\ &=(da_W\cdot A_{WU}+a_W\cdot dA_{WU}\\ &\quad+a_W\cdot A_{WU}\cdot\omega_U)\otimes(A_{WU}^{-1}\cdot S_W)\\ &=(da_W+a_W\cdot dA_{WU}\cdot A_{WU}^{-1}+a_W\cdot\omega_W\\ &\quad-a_W\cdot dA_{WU}\cdot A_{WU}^{-1})\otimes S_W\\ &=(da_W+a_W\cdot\omega_W)\otimes S_W.\end{aligned}$$

容易验证，由(16)式所定义的映射 $D:\Gamma(E)\to\Gamma(T^*(M)\otimes E)$ 适合定义1.1的条件，故 D 是 E 的连络。显然 D 在 U 上的连络方阵是 ω_U。

定理1.1 在任意一个矢量丛上，连络总是存在的。

证明 取 M 的一个坐标复盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}}$；根据矢量丛在局部上是平凡的构造，可假设在每一个 U_α 上都有局部标架场 S_α。根据连络的局部构造，只要在每个 U_α 上造一个 $q\times q$ 阶矩阵 ω_α，使它们在局部标架场改变时适合变换规律(12)就行了。

根据第三章§3的讨论，不妨假设 $\{U_\alpha\}$ 是局部有限的，并且 $\{g_\alpha\}$ 是相应的单位分解，使得支集 $\operatorname{supp} g_\alpha\subset U_\alpha$。当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时，自然存在由 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上的光滑函数所组成的非退化矩阵 $A_{\alpha\beta}$，

使

(19) $$S_\alpha = A_{\alpha\beta}\cdot S_\beta,\quad \det A_{\alpha\beta}\neq 0。$$

对每一个 $\alpha\in\mathscr{A}$，任意取定 U_α 上的一次微分式组成的 $q\times q$ 阶矩阵 φ_α。命

(20) $$\omega_\alpha = \sum_{\beta\in\mathscr{A}} g_\beta\cdot(dA_{\alpha\beta}\cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta}\cdot\varphi_\beta\cdot A_{\alpha\beta}^{-1}),$$

其中当 $U_\beta\cap U_\alpha=\varnothing$ 时，和式中对应于 β 的项理解为零。则 ω_α 是 U_α 上的一次微分式构成的矩阵。我们只须证明，当 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 时有变换公式

(21) $$\omega_\alpha = dA_{\alpha\beta}\cdot A_{\alpha\beta}^{-1} + A_{\alpha\beta}\cdot\omega_\beta\cdot A_{\alpha\beta}^{-1}.$$

为此只要进行直接的计算。首先，注意到在 $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\varnothing$ 时，在这个交集上有

$$A_{\alpha\beta}\cdot A_{\beta\gamma} = A_{\alpha\gamma}.$$

因此在 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$ 上，

$$\begin{aligned} &A_{\alpha\beta}\cdot\omega_\beta\cdot A_{\alpha\beta}^{-1}\\ &\quad=\sum_{\substack{\gamma\\ U_\gamma\cap U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi}} g_\gamma\cdot A_{\alpha\beta}\cdot(dA_{\beta\gamma}\cdot A_{\beta\gamma}^{-1} + A_{\beta\gamma}\cdot\varphi_\gamma\cdot A_{\beta\gamma}^{-1})\cdot A_{\alpha\beta}^{-1}\\ &\quad=\omega_\alpha - dA_{\alpha\beta}\cdot A_{\alpha\beta}^{-1}.\end{aligned}$$

此即(21)式。可见，连络的确定有相当大的任意性。

特别是，在(20)式中令 $\varphi_\beta=0$，则得 E 的一个连络 D，它在 U_α 上的连络矩阵是

(22) $$\omega_\alpha = \sum_\beta g_\beta\cdot(dA_{\alpha\beta}\cdot A_{\alpha\beta}^{-1}).$$

根据连络方阵的变换公式(12)，连络方阵为零不具有不变性。特别是，对于任意一个连络总可以找到一个局部标架场，使其连络方阵在一点为零。这在有关连络的计算中是有用的。

定理1.2 设 D 是矢量丛 E 上的一个连络。设 $p\in M$，则在 p 的一个坐标域上存在局部标架场 S，使对应的连络方阵 ω 在 p 点

为零。

证明 取点 p 的坐标域 $(U;u^i)$，使 $u^i(p)=0$，$1\leqslant i\leqslant m$。S' 是 U 上的局部标架场，对应的连络方阵是 $\omega'=(\omega'^{\beta}_{\alpha})$，其中

$$\omega'^{\beta}_{\alpha}=\sum_{i=1}^{m}\Gamma'^{\beta}_{\alpha i}\,du^i, \tag{23}$$

$\Gamma'^{\beta}_{\alpha i}$ 是 U 上的光滑函数。命

$$a^{\beta}_{\alpha}=\delta^{\beta}_{\alpha}-\sum_{i=1}^{m}\Gamma'^{\beta}_{\alpha i}\,(p)\cdot u^i, \tag{24}$$

则矩阵 $A=(a^{\beta}_{\alpha})$ 在点 p 是单位矩阵。因此存在 p 的一个邻域 $V\subset U$，使 A 在 V 上是非退化的，所以

$$S=A\cdot S' \tag{25}$$

是 V 上的局部标架场。因为

$$dA(p)=-\omega'(p),$$

所以由(12)式得到

$$\begin{aligned}\omega(p)&=(dA\cdot A^{-1}+A\cdot\omega'\cdot A^{-1})(p)\\&=-\omega'(p)+\omega'(p)=0,\end{aligned} \tag{26}$$

即 S 是所求的局部标架场。

对(12)式求一次外微分，则得

$$d\omega'\cdot A-\omega'\wedge dA=dA\wedge\omega+A\cdot d\omega, \tag{27}$$

其中矩阵之间的外积“$\wedge$”表示矩阵在相乘时，元素的积是外积。因此 $dA=\omega'\cdot A-A\cdot\omega$，代入(27)式则有

$$(d\omega'-\omega'\wedge\omega')\cdot A=A\cdot(d\omega-\omega\wedge\omega). \tag{28}$$

定义1.2 $\Omega=d\omega-\omega\wedge\omega$ 叫做连络 D 在 U 上的曲率方阵。

这样，(28)式可记成

$$\Omega'=A\cdot\Omega\cdot A^{-1}, \tag{29}$$

这是曲率方阵在局部标架场改变时的变换公式。值得注意的是，Ω 的变换公式是齐次的，而连络方阵 ω 变换公式不是齐次的。Ω 包含着很丰富的信息，特别是借助于 Ω 可以构造在 M 上大范围

定义的微分式(参阅第七章§4)。

设 X, Y 是 M 上任意两个切矢量场，则由曲率方阵 Ω 定义了从 $\Gamma(E)$ 到 $\Gamma(E)$ 的线性变换 $R(X, Y)$。任取两个切矢量 $X, Y\in T_p(M)$，$p\in U$，则用曲率方阵 Ω 可定义从纤维 $\pi^{-1}(p)$ 到自身的线性变换 $R(X, Y)$。它的定义如下：设 $s\in\pi^{-1}(p)$，它用矢量丛 E 在 U 上的局部标架场 $S_U={}^t(s_1, \cdots, s_q)$ 可表成

$$s=\sum_{\alpha=1}^{q}\lambda^{\alpha}s_{\alpha\mid p},\quad \lambda^{\alpha}\in\boldsymbol{R}.$$

则命

$$R(X, Y)s=\sum_{\alpha, \beta=1}^{q}\lambda^{\alpha}\langle X\wedge Y, \Omega_{\alpha}^{\beta}\rangle s_{\beta\mid p}. \tag{30}$$

由于曲率方阵 $\Omega=(\Omega_{\alpha}^{\beta})$ 在局部标架场改变时按(29)式变换，所以 $\langle X\wedge Y, \Omega_{\alpha}^{\beta}\rangle$ 是线性空间 $\pi^{-1}(p)$ 上的(1,1)型张量。因此，(30)式所定义的 $R(X, Y)$ 是与局部标架选取无关的、从 $\pi^{-1}(p)$ 到自身的线性变换。

如果 X, Y 是光滑流形 M 上的两个光滑切矢量场，则 $R(X, Y)$ 是 $\Gamma(E)$ 上的线性算子，它的定义是：对任意的 $s\in\Gamma(E)$，及 $p\in M$，

$$(R(X, Y)s)(p)=R(X_p, Y_p)s_p. \tag{31}$$

显然，算子 $R(X, Y)$ 有以下性质：

1) $R(X, Y)=-R(Y, X)$；

2) $R(fX, Y)=f\cdot R(X, Y)$；

3) $R(X, Y)(fs)=f\cdot(R(X, Y)s)$，

其中 $X, Y\in\Gamma(T(M))$，$f\in C^{\infty}(M)$，$s\in\Gamma(E)$。我们把 $R(X, Y)$ 称为连络 D 的曲率算子。

定理1.3 设 X, Y 是流形 M 上任意两个光滑切矢量场，则

$$R(X, Y)=D_XD_Y-D_YD_X-D_{[X, Y]}. \tag{32}$$

证明 因为绝对微商是局部算子，而曲率算子也是局部算

子，所以我们只要考虑(32)式两边分别在局部截面上的作用就行了。设截面 $s\in\Gamma(E)$ 的局部表示是

$$s=\sum_{\alpha=1}^{q}\lambda^{\alpha}s_{\alpha},$$

则

$$D_Xs=\sum_{\alpha=1}^{q}\Big(X\lambda^{\alpha}+\sum_{\beta=1}^{q}\lambda^{\beta}\langle X,\omega_{\beta}^{\alpha}\rangle\Big)s_{\alpha},\tag{33}$$

$$\begin{aligned}D_YD_Xs=\sum_{\alpha=1}^{q}\Big\{&Y(X\lambda^{\alpha})\\&+\sum_{\beta=1}^{q}(X\lambda^{\beta}\langle Y,\omega_{\beta}^{\alpha}\rangle+Y\lambda^{\beta}\langle X,\omega_{\beta}^{\alpha}\rangle)\\&+\sum_{\beta=1}^{q}\lambda^{\beta}(Y\langle X,\omega_{\beta}^{\alpha}\rangle\\&+\sum_{\gamma=1}^{q}\langle X,\omega_{\beta}^{\gamma}\rangle\langle Y,\omega_{\gamma}^{\alpha}\rangle)\Big\}s_{\alpha},\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&D_XD_Ys-D_YD_Xs\\&=\sum_{\alpha=1}^{q}\Big\{[X,Y]\lambda^{\alpha}+\sum_{\beta=1}^{q}\lambda^{\beta}\Big(\langle[X,Y],\omega_{\beta}^{\alpha}\rangle\\&\qquad+\langle X\wedge Y,d\omega_{\beta}^{\alpha}-\sum_{\gamma=1}^{q}\omega_{\beta}^{\gamma}\wedge\omega_{\gamma}^{\alpha}\rangle\Big)\Big\}s_{\alpha}\\&=D_{[X,Y]}s+\sum_{\alpha,\beta=1}^{q}\lambda^{\beta}\langle X\wedge Y,\Omega_{\beta}^{\alpha}\rangle s_{\alpha},\end{aligned}\tag{34}$$

即

$$R(X,Y)s=D_XD_Ys-D_YD_Xs-D_{[X,Y]}s.$$

定理1.4 曲率方阵 Ω 适合 Bianchi 恒等式

$$d\Omega=\omega\wedge\Omega-\Omega\wedge\omega.\tag{35}$$

证明 对 $\Omega=d\omega-\omega\wedge\omega$ 的两边求外微分得到

$$\begin{aligned} d\Omega &= -d\omega\wedge\omega+\omega\wedge d\omega \\ &= -(\Omega+\omega\wedge\omega)\wedge\omega+\omega\wedge(\Omega+\omega\wedge\omega) \\ &= -\Omega\wedge\omega+\omega\wedge\Omega. \end{aligned}$$

如果矢量丛E的截面s满足条件

$$Ds=0, \tag{36}$$

则称s是平行截面。零截面是显然的平行截面，但是，一般说来，非零的平行截面是不一定存在的。若s用局部标架场S表成$s=\sum_{\alpha=1}^{q}\lambda^\alpha s_\alpha$，则方程(36)等价于

$$d\lambda^\alpha+\sum_{\beta=1}^{q}\lambda^\beta\omega_\beta^\alpha=0,\quad 1\leqslant\alpha\leqslant q. \tag{37}$$

这是 Pfaff 方程组。若命

$$\theta^\alpha=d\lambda^\alpha+\sum_{\beta=1}^{q}\lambda^\beta\omega_\beta^\alpha, \tag{38}$$

则

$$d\theta^\alpha=\sum_{\beta=1}^{q}\theta^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha+\sum_{\beta=1}^{q}\lambda^\beta\Omega_\beta^\alpha. \tag{39}$$

由此可见，如果连络D的曲率方阵是零，则

$$d\theta^\alpha\equiv 0 \bmod (\theta^1,\cdots,\theta^q).$$

即方程组(37)是完全可积的，这时E有q个线性无关的平行截面。同样，要(37)有非零解，需要在连络上加一定的条件。

定义1.3 设C是M中一条参数曲线，X是C的切矢量场。若矢量丛E在C上的截面s满足方程

$$D_X s=0, \tag{40}$$

则称s沿曲线C是平行的。

在M的一个坐标域U上，设C的方程是

$$u^i=u^i(t),\quad 1\leqslant i\leqslant m; \tag{41}$$

曲线C的切矢量场是

$$X=\sum_{i=1}^{m}\frac{du^i}{dt}\frac{\partial}{\partial u^i}.$$

设S是U上的局部标架场，则 $s=\sum_{\alpha=1}^{q}\lambda^\alpha s_\alpha$ 是沿曲线C的平行截面，当且仅当它满足方程组

$$\langle X, Ds\rangle=\sum_{\alpha=1}^{q}\left(\frac{d\lambda^\alpha}{dt}+\sum_{\beta\ i}\Gamma^\alpha_{\beta i}\frac{du^i}{dt}\lambda^\beta\right)s_\alpha=0,$$

即

(42) $$\frac{d\lambda^\alpha}{dt}+\sum_{\beta\ i}\Gamma^\alpha_{\beta i}\frac{du^i}{dt}\lambda^\beta=0,\quad 1\leqslant\alpha\leqslant q.$$

由于(42)是常微分方程组，对于任意给定的初始值，它的解是唯一存在的。由此可见，在C上一点p任意给定一个矢量$v\in E_p$，则它在C上唯一地决定一个沿曲线C平行的矢量场，这称做矢量v沿曲线C的平行移动。显然，沿曲线C的平行移动建立了矢量从E在曲线C的各点的纤维之间的同构。

矢量从E上的连络D在对偶从E^*上诱导出一个连络(仍记作D)。设$s\in\Gamma(E)$，$s^*\in\Gamma(E^*)$，其配合$\langle s,s^*\rangle$是M上的光滑函数，那么E^*上的诱导连络D由下式确定：

(43) $$d\langle s,s^*\rangle=\langle Ds,s^*\rangle+\langle s,Ds^*\rangle,$$

其中右边的记号$\langle\ ,\ \rangle$仍是对于E和E^*作出的配合。

让我们求出E^*上的诱导连络的方阵。设s_α($1\leqslant\alpha\leqslant q$)是$E$的局部标架场，$E^*$的对偶局部标架场是$s^{*\beta}$，$1\leqslant\beta\leqslant q$，即

(44) $$\langle s_\alpha, s^{*\beta}\rangle=\delta^\beta_\alpha.$$

设

(45) $$Ds^{*\beta}=\sum_{\gamma=1}^{q}\omega^{*\beta}_\gamma\otimes s^{*\gamma},$$

则由(43)式得到

$$\omega^\beta_\alpha=\langle Ds_\alpha, s^{*\beta}\rangle$$

$$= -\langle s_\alpha, Ds^{*\beta}\rangle = -\omega_\alpha^{*\beta},$$

所以

(46) $$Ds^{*\beta} = -\sum_{\alpha=1}^{\bar{q}} \omega_\alpha^\beta \otimes s^{*\alpha}.$$

若 E^* 的截面 s^* 在局部上表示为

$$s^* = \sum_{\alpha=1}^{q} x_\alpha s^{*\alpha},$$

则由(46)式得到

(47) $$Ds^* = \sum_{\alpha=1}^{\bar{q}} \left(dx_\alpha - \sum_{\beta=1}^{\bar{q}} x_\beta \omega_\alpha^\beta \right) \otimes s^{*\alpha}.$$

设在矢量丛 E_1 和 E_2 上分别给定了连络 D(记成同一个记号)。设 $s_1 \in \Gamma(E_1)$, $s_2 \in \Gamma(E_2)$, 则 $s_1 \oplus s_2$ 和 $s_1 \otimes s_2$ 分别是矢量丛 $E_1 \oplus E_2$ 和 $E_1 \otimes E_2$ 的截面. 命

(48) $$D(s_1 \oplus s_2) = Ds_1 \oplus Ds_2,$$

(49) $$D(s_1 \otimes s_2) = Ds_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes Ds_2,$$

则它们分别在矢量丛 $E_1 \oplus E_2$ 和 $E_1 \otimes E_2$ 上确定了一个连络，称为在 $E_1 \oplus E_2$ 和 $E_1 \otimes E_2$ 上的诱导连络。

§2 仿射连络

切丛 $T(M)$ 是 m 维光滑流形 M 的微分结构本身所决定的 m 维矢量丛。切丛 $T(M)$ 上的连络叫做流形 M 上的仿射连络。根据§1 关于矢量丛上连络的一般讨论，流形 M 上的仿射连络必然是存在的。给定一个仿射连络的流形称为仿射连络空间。

假定 M 是 m 维仿射连络空间，D 是给定的仿射连络。本节采用和式约定，所有的指标取 1 到 m 的整数值。

任取 M 的一坐标系 $(U; u^i)$，则自然基底 $\left\{ s_i = \frac{\partial}{\partial u^i},\ 1 \leqslant i \leqslant m \right\}$

构成切丛 $T(M)$ 在 U 上的局部标架场，因此可设

$$
(1) \qquad Ds_i = \omega_i^j \otimes s_j = \Gamma_{ik}^j du^k \otimes s_j,
$$

其中 Γ_{ik}^j 是 U 上的光滑函数，称为连络 D 关于局部坐标 u^i 的系数。

现在来看局部坐标变换对于连络系数的影响。设 $(W; w^i)$ 是 M 的另一坐标系，命 $s_i' = \frac{\partial}{\partial w^i}$，则在 $U \cap W \neq \varnothing$ 时有

$$
(2) \qquad S' = J_{WU} \cdot S,
$$

其中

$$
J_{WU} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial w^1} & \cdots & \frac{\partial u^m}{\partial w^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u^1}{\partial w^m} & \cdots & \frac{\partial u^m}{\partial w^m} \end{pmatrix}
$$

是局部坐标变换的 Jacobi 矩阵，$S = {}^t(s_1, \cdots, s_m)$。

由 § 1的(12)式得到

$$
(3) \qquad \omega' = dJ_{WU} \cdot J_{WU}^{-1} + J_{WU} \cdot \omega \cdot J_{WU}^{-1},
$$

即

$$
(4) \qquad \omega_i'^j = d\left(\frac{\partial u^p}{\partial w^i}\right)\frac{\partial w^j}{\partial u^p} + \frac{\partial u^p}{\partial w^i}\frac{\partial w^j}{\partial u^q}\omega_p^q,
$$

其中 $\omega_i'^j = \Gamma'^j_{ik} dw^k$。因此连络系数 Γ_{ik}^j 的坐标变换公式是

$$
(5) \qquad \Gamma'^j_{ik} = \Gamma^q_{pr}\frac{\partial w^j}{\partial u^q}\frac{\partial u^p}{\partial w^i}\frac{\partial u^r}{\partial w^k} + \frac{\partial^2 u^p}{\partial w^i \partial w^k} \cdot \frac{\partial w^j}{\partial u^p}.
$$

上式说明 Γ_{ik}^j 不是 M 上的张量场，所以连络系数在一点为零并不具有不变性。换言之，有可能存在使连络系数在一点为零的坐标系(参阅定理2.1)，这对于牵涉连络的计算是非常有用的。

在流形 M 上引进仿射连络的目的是为了对张量场求微分。下

面我们定义张量场绝对微分的概念。设X是M上的光滑矢量场，它用局部坐标表示是

$$X=x^i\frac{\partial}{\partial u^i}. \tag{6}$$

根据定义，我们有

$$DX=(dx^i+x^j\omega_j^i)\otimes\frac{\partial}{\partial u^i} \tag{7}$$

$$=x,{}_j^i du^j\otimes\frac{\partial}{\partial u^i},$$

其中记

$$x,{}_j^i=\frac{\partial x^i}{\partial u^j}+x^k\Gamma_{kj}^i. \tag{8}$$

DX是矢量从$T^*(M)\otimes T(M)$的截面，即它是流形M上的(1,1)型张量场。我们称DX为X的绝对微分。(8)式正是经典意义下反变矢量关于u^j求绝对微商的公式。

我们知道，余切丛是切丛的对偶丛，而张量丛T_s^r是切丛和余切丛的张量积

$$T_s^r=\underbrace{T(M)\otimes\ \cdots\ \otimes T(M)}_{r\text{个}}\otimes\underbrace{T^*(M)\otimes\cdots\otimes T^*(M)}_{s\text{个}} \tag{9}$$

因此根据§1的(43)和(49)两式，M的仿射连络D在余切丛$T^*(M)$和张量丛T_s^r上分别诱导出连络。

在局部坐标系u^i下，余切丛的局部标架场是

$$s^{*i}=du^i,\qquad 1\leqslant i\leqslant m. \tag{10}$$

它与$\left\{s_i=\frac{\partial}{\partial u^i},\ 1\leqslant i\leqslant m\right\}$是对偶的。根据§1的(46)式得

$$Ds^{*i}=-\omega_j^i\otimes s^{*j}=-\Gamma_{jk}^i du^k\otimes du^j. \tag{11}$$

若M上的余切矢量场α在局部上表示为$\alpha=a_i du^i$，则

$$D\alpha=(da_i-a_j\omega_i^j)\otimes du^i \tag{12}$$

$$=a_{i,j}du^i\otimes du^j,$$

其中

$$a_{i,j}=\frac{\partial a_i}{\partial u^j}-a_k\Gamma^k_{ij}. \tag{13}$$

Da 是 $(0,2)$ 型张量场，称为余切矢量场 a 的绝对微分。

一般地，如果 t 是 (r,s) 型张量场，则 t 在诱导连络 D 的作用下得到 $(r,s+1)$ 型张量场 Dt，称为张量场 t 的绝对微分。我们以 $r=2,s=1$ 为例求绝对微分的分量表达式。

设 t 是 $(2,1)$ 型张量场，在局部坐标 u^i 下它的表式是

$$t=t^{ij}_k du^k\otimes\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes\frac{\partial}{\partial u^j}. \tag{14}$$

由§1的(49)式得到

$$\begin{aligned}Dt=&dt^{ij}_k\otimes du^k\otimes\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes\frac{\partial}{\partial u^j}+t^{ij}_k D(du^k)\otimes\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes\frac{\partial}{\partial u^j}\\&+t^{ij}_k du^k\otimes D\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)\otimes\frac{\partial}{\partial u^j}\\&+t^{ij}_k du^k\otimes\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes D\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\\=&(dt^{ij}_k-t^{ij}_l\omega^l_k+t^{lj}_k\omega^i_l+t^{il}_k\omega^j_l)\otimes du^k\otimes\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes\frac{\partial}{\partial u^j}\\=&t^{ij}_{k,h}du^h\otimes du^k\otimes\frac{\partial}{\partial u^i}\otimes\frac{\partial}{\partial u^j},\end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$t^{ij}_{k,h}=\frac{\partial t^{ij}_k}{\partial u^h}-t^{ij}_l\Gamma^l_{kh}+t^{lj}_k\Gamma^i_{lh}+t^{il}_k\Gamma^j_{lh}. \tag{16}$$

数量场的绝对微分规定为它的普通微分。

定义2.1 设 C：$u^i=u^i(t)$ 是流形 M 上一条参数曲线，$X(t)$ 是定义在 C 上的切矢量场，表成

$$X(t)=x^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{C(t)}. \tag{17}$$

我们称 $X(t)$ 沿曲线 C 是平行的，如果它沿曲线 C 的绝对微分为零，即

$$\frac{DX}{dt}=0. \tag{18}$$

若曲线 C 的切矢量沿 C 自身是平行的，则称 C 是自平行曲线，或称 C 是测地线。

方程(18)等价于

$$\frac{dx^i}{dt}+x^j\Gamma^i_{jk}\frac{du^k}{dt}=0. \tag{19}$$

这是一阶线性常微分方程组，因此在曲线 C 上任意一点给定一个切矢量 X，则它在 C 上产生一个平行的切矢量场，这个切矢量场称为 X 沿曲线 C 的平行移动。由 §1 的一般讨论可知，沿曲线 C 的平行移动在流形 M 沿 C 上各点的切空间之间建立了同构。

如果 C 是测地线，则 C 的切矢量

$$X(t)=\frac{du^i(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{C(t)}$$

沿曲线 C 是平行的，所以测地线 C 应满足方程

$$\frac{d^2u^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}=0. \tag{20}$$

这是二阶常微分方程组，所以过流形 M 上任意一点恰有一条测地线在该点与任意给定的已知切矢量相切。

下面我们讨论仿射连络的曲率方阵 Ω。因为

$$\omega_i^j=\Gamma^j_{ik}du^k, \tag{21}$$

所以

$$d\omega_i^j-\omega_i^h\wedge\omega_h^j$$

$$=\frac{\partial \Gamma_{i\,k}^{j}}{\partial u^{l}}du^{l}\wedge du^{k}-\Gamma_{i\,l}^{h}\Gamma_{h\,k}^{j}du^{l}\wedge du^{k}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma_{i\,l}^{j}}{\partial u^{k}}-\frac{\partial \Gamma_{i\,k}^{j}}{\partial u^{l}}+\Gamma_{i\,l}^{h}\Gamma_{h\,k}^{j}\right.$$

$$\left.-\Gamma_{i\,k}^{h}\Gamma_{h\,l}^{j}\right)du^{k}\wedge du^{l},$$

故

(22) $$\Omega_{i}^{j}=\frac{1}{2}R_{i\,k\,l}^{j}du^{k}\wedge du^{l},$$

其中

(23) $$R_{i\,k\,l}^{j}=\frac{\partial \Gamma_{i\,l}^{j}}{\partial u^{k}}-\frac{\partial \Gamma_{i\,k}^{j}}{\partial u^{l}}+\Gamma_{i\,l}^{h}\Gamma_{h\,k}^{j}-\Gamma_{i\,k}^{h}\Gamma_{h\,l}^{j}.$$

若$(W;w^{i})$是M的另一个坐标系，则在W上有局部标架场

$$S'={}^{t}\left(\frac{\partial}{\partial w^{1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial w^{m}}\right),$$

在$U\cap W$上S和S'有关系式(2)。根据§1的(29)式，我们有

(24) $$\Omega'=J_{WU}\cdot\Omega\cdot J_{WU}^{-1},$$

其中Ω'是连络D在坐标系$(W;w^{i})$下的曲率矩阵。用分量表示则是

$$\Omega_{i}'^{\,j}=\Omega_{p}^{q}\frac{\partial u^{p}}{\partial w^{i}}\frac{\partial w^{j}}{\partial u^{q}}.$$

因此

(25) $$R'^{\,j}_{i\,k\,l}=R_{p\,r\,s}^{q}\frac{\partial w^{j}}{\partial u^{q}}\frac{\partial u^{p}}{\partial w^{i}}\frac{\partial u^{r}}{\partial w^{k}}\frac{\partial u^{s}}{\partial w^{l}},$$

其中$R'^{\,j}_{i\,k\,l}$由

$$\Omega_{i}'^{\,j}=\frac{1}{2}R'^{\,j}_{i\,k\,l}dw^{k}\wedge dw^{l}$$

所确定。将(25)式与第二章§2的(9)式相对照，可知$R_{i\,k\,l}^{j}$遵从(1,3)型张量的分量变换规律。因此

(26) $$R=R^j_{ikl}\frac{\partial}{\partial u^j}\otimes du^i\otimes du^k\otimes du^l$$

不依赖于局部坐标的选取，称为仿射连络D的曲率张量。

对于M上任意两个光滑的切矢量场X,Y，我们有曲率算子$R(X,Y)$（见§1的(30)式），它把M上的切矢量场映为切矢量场。根据定理1.3，算子$R(X,Y)$可表成

(27) $$R(X,Y)=D_XD_Y-D_YD_X-D_{[X,Y]}.$$

现在可以把$R(X,Y)$用曲率张量表示出来。设切矢量场X,Y,Z的局部表示是

(28) $$X=X^i\frac{\partial}{\partial u^i},\quad Y=Y^i\frac{\partial}{\partial u^i},\quad Z=Z^i\frac{\partial}{\partial u^i},$$

则

(29) $$R(X,Y)Z=Z^i\langle X\wedge Y,\Omega^j_i\rangle\frac{\partial}{\partial u^j}$$

$$=R^j_{ikl}Z^iX^kY^l\frac{\partial}{\partial u^j}.$$

由此可见

(30) $$R^j_{ikl}=\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial u^k},\frac{\partial}{\partial u^l}\right)\frac{\partial}{\partial u^i},du^j\right\rangle.$$

我们知道连络系数Γ^j_{ik}不适合张量的变换规律。但是，如果记

(31) $$T^j_{ik}=\Gamma^j_{ki}-\Gamma^j_{ik},$$

则由(5)式得到

(32) $$T'^j_{ik}=T^q_{pr}\frac{\partial w^j}{\partial u^q}\frac{\partial u^p}{\partial w^i}\frac{\partial u^r}{\partial w^k},$$

所以T^j_{ik}适合(1,2)型张量的分量变换规律，即

(33) $$T=T^j_{ik}\frac{\partial}{\partial u^j}\otimes du^i\otimes du^k$$

是(1,2)型张量场，称为仿射连络D的挠率张量。由(31)式可知，挠率张量T的分量关于下指标是反对称的。即

$$(34)\qquad T^{j}_{ik}=-T^{j}_{ki}.$$

T作为(1,2)型张量场，可以看作从$\Gamma(T(M))\times\Gamma(T(M))$到$\Gamma(T(M))$的映射：设$X,Y$是$M$上任意两个切矢量场，那么$T(X,Y)$是$M$上的切矢量场，其局部表示是

$$(35)\qquad T(X,Y)=T^{k}_{ij}X^{i}Y^{j}\frac{\partial}{\partial u^{k}}.$$

请读者证明

$$(36)\qquad T(X,Y)=D_XY-D_YX-[X,Y].$$

定义2.2 若仿射连络D的挠率张量是零，则称该连络是无挠的。

无挠仿射连络总是存在的。实际上，若设连络D的系数是Γ^{j}_{ik}，则命

$$(37)\qquad \tilde{\Gamma}^{j}_{ik}=\frac{1}{2}(\Gamma^{j}_{ik}+\Gamma^{j}_{ki}).$$

显然$\tilde{\Gamma}^{j}_{ik}$关于下指标是对称的，并且在局部坐标变换时仍适合(5)式，所以$\tilde{\Gamma}^{j}_{ik}$是某个连络$\tilde{D}$的系数，且$\tilde{D}$是无挠的。

任意一个连络都可以分解成它的挠率张量的倍数与一个无挠连络的和。事实上，由(31)和(37)两式得到

$$(38)\qquad \Gamma^{j}_{ik}=-\frac{1}{2}T^{j}_{ik}+\tilde{\Gamma}^{j}_{ik},$$

即

$$(39)\qquad D_XZ=\frac{1}{2}T(X,Z)+\tilde{D}_XZ.$$

测地线方程(20)等价于

$$(40)\qquad \frac{d^2u^i}{dt^2}+\tilde{\Gamma}^{i}_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}=0,$$

所以连络D和对应的无挠连络$\tilde{D}$有相同的测地线。

下面两个定理说明，无挠的仿射连络有较好的性质。

定理2.1 设D是流形M上的无挠仿射连络，则在流形M的任意一点p存在局部坐标系u^i，使得相应的连络系数Γ^i_{jk}在该点是零。

证明 设$(W;w^i)$是点p的局部坐标系，连络系数是Γ'^i_{jk}。命

$$(41)\qquad u^i=w^i+\frac{1}{2}\Gamma'^i_{jk}(p)(w^j-w^j(p))(w^k-w^k(p)),$$

则

$$(42)\qquad \left.\frac{\partial u^i}{\partial w^j}\right|_p=\delta^i_j,\quad \left.\frac{\partial^2u^i}{\partial w^j\partial w^k}\right|_p=\Gamma'^i_{jk}(p).$$

因此矩阵$\left(\frac{\partial u^i}{\partial w^j}\right)$在点$p$附近是非退化的，(41)式在点$p$的一个邻域内给出局部坐标变换。由(5)式得到，在新坐标系u^i下连络系数Γ^i_{jk}适合

$$\Gamma^i_{jk}(p)=0,\quad 1\leqslant i,j,k\leqslant m.$$

定理2.2 设D是M上的无挠仿射连络，则有Bianchi恒等式

$$(43)\qquad R^j_{ikl,h}+R^j_{ilh,k}+R^j_{ihk,l}=0.$$

证明 由定理1.4得到

$$d\Omega^j_i=\omega^k_i\wedge\Omega^j_k-\Omega^k_i\wedge\omega^j_k,$$

即

$$\frac{\partial R^j_{ikl}}{\partial u^h}du^h\wedge du^k\wedge du^l$$

$$=(\Gamma^p_{ih}R^j_{pkl}-\Gamma^j_{ph}R^p_{ikl})du^h\wedge du^k\wedge du^l,$$

所以

$$R^j_{ikl,h}du^h\wedge du^k\wedge du^l$$

$$= -(\Gamma^p_{kh} R^j_{ipl} + \Gamma^p_{lh} R^j_{ikp}) du^h \wedge du^k \wedge du^l$$
$$= 0,$$

最后一个等号用到连络的无挠性。因此

(44) $$(R^j_{ikl,h} + R^j_{ilh,k} + R^j_{ihk,l}) du^h \wedge du^k \wedge du^l = 0.$$

现在，(44)式的系数关于k, l, h是反对称的，所以

$$R^j_{ikl,h} + R^j_{ilh,k} + R^j_{ihk,l} = 0.$$

从(27)式可知对切矢量场求两次绝对微商时，交换微商的次序所产生的差异是用曲率张量来量度的。关于张量场也有类似的结果。

首先设f是M上的数量场，则

$$f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial u^i}, \quad f_{,ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} - \Gamma^k_{ij} f_{,k},$$

所以

(45) $$f_{,ij} - f_{,ji} = T^k_{ij} f_{,k}.$$

若X是M上的切矢量场，局部表式是

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i},$$

则

$$X^i_{,p} = \frac{\partial X^i}{\partial u^p} + X^j \Gamma^i_{jp},$$

$$X^i_{,pq} = \frac{\partial X^i_{,p}}{\partial u^q} + X^j_{,p} \Gamma^i_{jq} - X^i_{,l} \Gamma^l_{pq},$$

所以

(46) $$X^i_{,pq} - X^i_{,qp} = -X^j R^i_{jpq} + X^i_{,l} T^l_{pq}.$$

同理可得，对于(2,1)型张量场t有

(47) $$t^{ij}_{k,pq} - t^{ij}_{k,qp}$$
$$= -t^{lj}_k R^i_{lpq} - t^{il}_k R^j_{lpq}$$

$$+t_l^{i\,j} R^l_{k\,pq} + t^{i\,j}_{k,\,l} T^l_{pq}.$$

值得指出的是，微分换位公式由曲率张量和挠率张量完全确定。

§3 标架丛上的连络

微分流形上的标架丛是和切丛密切相关的。

设M是m维微分流形。所谓一个标架是指这样一个组合$(p;e_1,\cdots,e_m)$，其中p是M上一点，$e_1,\cdots,e_m$是流形M在点p的m个线性无关的切矢量。流形M上全体标架的集合记作P。我们要在P中引进微分结构，使它成为光滑流形，并且使自然投影

(1) $$\pi(p;e_1,\cdots,e_m)=p$$

是从P到M上的光滑映射。(P,M,π)称为M上的标架丛。

在P中引进微分结构的方法与张量丛的做法是类似的。设$(U;u^i)$是M的任意一个坐标域，则在U上有自然标架场$\left(\frac{\partial}{\partial u^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial u^m}\right)$，所以$U$上的任意一个标架$(p;e_1,\cdots,e_m)$可以表成

(2) $$e_i=X_i^k\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_p,\qquad 1\leqslant i\leqslant m,$$

其中(X_i^k)是非退化的$m\times m$阶矩阵，因此它是$GL(m;\mathbf{R})$中的一个元素。于是，可以定义映射$\varphi_U:U\times GL(m;\mathbf{R})\to\pi^{-1}(U)$，使得对任意的$p\in U$及$(X_i^k)\in GL(m;\mathbf{R})$有

(3) $$\varphi_U(p,X_i^k)=(p;e_1,\cdots,e_m),$$

其中e_i由(2)式所给出。显然φ_U是一一对应。

现取M的坐标复盖$\{U,W,Z,\cdots\}$，对其中每一个成员由(3)所定义的映射分别记为$\varphi_U,\varphi_W,\varphi_Z,\cdots$。所有拓扑积$U\times GL(m;\mathbf{R})$中的全体开集在$\varphi_U$下的象的集合构成$P$的一个拓扑基；关于$P$的这种拓扑结构，映射

$$\varphi_U:U\times GL(m;\mathbf{R})\to\pi^{-1}(U)$$

是同胚。

通过映射 φ_U，$\pi^{-1}(U)$ 就成为 P 的一个坐标域，局部坐标系是 (u^i, X_i^k)。若 $U\cap W\neq\varnothing$，则流形 M 在 $U\cap W$ 上有局部坐标变换

(4) $$w^i = w^i(u^1, \cdots, u^m), \qquad 1\leqslant i\leqslant m.$$

相应的自然基底有如下关系：

(5) $$\frac{\partial}{\partial u^i}=\frac{\partial w^j}{\partial u^i}\cdot\frac{\partial}{\partial w^j}.$$

若 $(p; e_1, \cdots, e_m)$ 是 $U\cap W$ 上的一个标架，则它在两个坐标系下的坐标 (u^i, X_i^k) 和 (w^i, Y_i^k) 适合关系

(6) $$\varphi_U(u^i, X_i^k) = \varphi_W(w^i, Y_i^k),$$

即 w^i 和 u^i 由(4)式关联，并且

$$X_i^k\frac{\partial}{\partial u^k}=Y_i^k\frac{\partial}{\partial w^k},$$

或

(7) $$Y_i^k = X_i^j\frac{\partial w^k}{\partial u^j}.$$

因此(4)，(7)两式合起来正是流形 P 上的坐标变换公式。显然 w^i, Y_i^k 都是 u^i 和 X_i^k 的光滑函数，故 P 的坐标域 $\pi^{-1}(U)$ 和 $\pi^{-1}(W)$ 是 C^∞-相容的，于是 P 成为 $m+m^2$ 维光滑流形，而且自然投影 $\pi: P\to M$ 是光滑的满映射。

上面(3)式说明映射 φ_U 给出了流形 P 的局部乘积的结构，即 $\pi^{-1}(U)$ 可微同胚于直积 $U\times GL(m;\boldsymbol{R})$。对于任意的 $p\in U$，命

(8) $$\varphi_{U,p}(X) = \varphi_U(p, X), \qquad X\in GL(m;\boldsymbol{R}),$$

则 $\varphi_{U,p}: GL(m;\boldsymbol{R})\to\pi^{-1}(p)$ 是同胚。

若 $U\cap W\neq\varnothing$，对 $p\in U\cap W$ 映射 $\varphi_{W,p}^{-1}\circ\varphi_{U,p}$ 是 $GL(m;\boldsymbol{R})$ 到自身的同胚。由(7)式可知 $\varphi_{W,p}^{-1}\circ\varphi_{U,p}$ 恰是 Jacobi 矩阵 $J_{UW}=\left(\frac{\partial w^k}{\partial u^i}\right)$ 在群 $GL(m;\boldsymbol{R})$ 上的右平移。可见 $\{J_{UW}\}$ 构成标架丛的过

渡函数族。因此标架丛 P 是与流形 M 的切丛 $T(M)$ 相配的主丛，共纤维型和结构群都是 $GL(m;\mathbf{R})$（参阅[15]）。标架丛是非矢量丛的纤维丛。

要指出的是，结构群 $GL(m;\mathbf{R})$ 以自然的方式作用在标架丛 P 上，成为 P 的一个同胚变换群。设 $a=(a_i^j)\in GL(m;\mathbf{R})$，因此 $\det a\neq 0$。元素 a 在 P 上的作用 L_a 定义为

(9) $$L_a(p;e_1,\cdots,e_m)=(p;e_1',\cdots,e_m'),$$

其中

(10) $$e_i'=a_i^j e_j.$$

显然，每一个 L_a 是 P 的自同胚，而且保持纤维不变，即

(11) $$\pi\circ L_a=\pi:P\to M.$$

我们称 L_a 是元素 $a\in GL(m;\mathbf{R})$ 在 P 上产生的左移动。若 $a,b\in GL(m;\mathbf{R})$，则显然有

(12) $$L_{ab}=L_a\circ L_b.$$

假定 $(U;u^i)$ 和 $(W;w^i)$ 是 M 的两个坐标系，流形 P 上相应的坐标系是 (u^i,X_i^k) 和 (w^i,Y_i^k)。分别用 (X_i^{*k}) 和 (Y_i^{*k}) 记 (X_i^k) 和 (Y_i^k) 的逆矩阵，即

$$X_i^k X_k^{*j}=X_i^{*k}X_k^j=\delta_i^j,$$
$$Y_i^k Y_k^{*j}=Y_i^{*k}Y_k^j=\delta_i^j.$$

若 $U\cap W\neq\varnothing$，则在 $U\cap W$ 上有

(13) $$dw^i=\frac{\partial w^i}{\partial u^j}du^j.$$

由(7)式则得

(14) $$X_i^{*j}=\frac{\partial w^k}{\partial u^i}Y_k^{*j},$$

所以

(15) $$X_i^{*j}du^i=Y_i^{*j}dw^i.$$

由此可见，一次微分式

(16) $$\theta^i=X_j^{*i}du^j$$

与P的局部坐标系的选取无关，因此θ^i是P上的一次微分式。

Pfaff 方程组

(17) $$\theta^i=0, \quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

在P上定义了m^2维切子空间场V，它在每一点给出的m^2维切子空间叫做纵空间。从(16)式得到

$$du^i=X^i_j\theta^j,$$

所以在每一个坐标域$\pi^{-1}(U)$上，方程组(17)等价于

(18) $$du^i=0, \quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

即 Pfaff 方程组(17)是完全可积的。(17)的极大积分流形是

(19) $$u^i=\text{const}, \quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

即(17)的极大积分流形就是P的纤维$\pi^{-1}(p)$，$p\in M$。所以纵空间就是各纤维的切空间。

现设M是m维仿射连络空间，它的连络是D。设D在局部坐标系$(U;u^i)$下的连络方阵是$\omega=(\omega^j_i)$，则矢量场$e_i=X^k_i\dfrac{\partial}{\partial u^k}$的绝对微分是

$$De_i=(dX^k_i+X^j_i\omega^k_j)\otimes\frac{\partial}{\partial u^k}.$$

把X^k_i看作独立变量，则

(20) $$DX^k_i=dX^k_i+X^j_i\omega^k_j$$

是流形P的坐标域$\pi^{-1}(U)$上的一次微分式。

我们的目的是求一组由连络D决定的、定义在整个流形P上的一次微分式。设$(W;w^i)$是M的另一个局部坐标系。若$U\cap W\neq\varnothing$，则在$U\cap W$上有

$$Y^k_i=X^j_i\frac{\partial w^k}{\partial u^j},$$

因此从§2的(4)式得到

(21) $$dY^k_i+Y^j_i\omega'^k_j$$

$$=dX_i^j\frac{\partial w^k}{\partial u^j}+X_i^j d\left(\frac{\partial w^k}{\partial u^j}\right)$$

$$+Y_i^l\left(d\left(\frac{\partial u^h}{\partial w^l}\right)\frac{\partial w^k}{\partial u^h}+\frac{\partial u^h}{\partial w^l}\omega_h^p\frac{\partial w^k}{\partial u^p}\right)$$

$$=(dX_i^j+X_i^l\omega_l^j)\frac{\partial w^k}{\partial u^j},$$

或者写成

$$DY_i^k=DX_i^j\frac{\partial w^k}{\partial u^j}. \tag{22}$$

由于(14)式，则得

$$Y_k^{*j}DY_i^k=X_k^{*j}DX_i^k, \tag{23}$$

所以一次微分式

$$\theta_i^j=X_k^{*j}DX_i^k=X_k^{*j}(dX_i^k+X_i^l\omega_l^k) \tag{24}$$

与局部坐标系的选取是无关的，因而是定义在流形P上的一次微分式。

因为(u^i,X_i^k)是流形P的局部坐标系，(du^i,dX_i^k)是P在一点的切空间的坐标，因此$(u^i,X_i^k;du^i,dX_i^k)$是P的切丛的局部坐标系。现在，θ^i和θ_i^k合起来一共是$m+m^2$个定义在P上的一次微分式，而在P的每一个坐标域$\pi^{-1}(U)$上，它们和du^i,dX_i^k能互相线性表示，所以θ^i,θ_i^k是处处线性无关的，即$\{\theta^i,\theta_i^k\}$构成定义在整个P上的余标架场，其对偶则是P上大范围的标架场。

一般说来，在流形M上不存在整体的标架场。由于M上的仿射连络总是存在的，所以在标架丛P上总是存在整体的标架场。从这个意义上说，流形P显得比底流形M要简单。

在局部坐标系$(U;u^i)$下，从(16)，(24)两式得到

$$du^i=X_j^i\theta^j, \tag{25}$$

$$dX_i^j=-X_i^k\omega_k^j+X_k^j\theta_i^k. \tag{26}$$

外微分(25)式，则得

$$0=dX_j^i\wedge\theta^j+X_j^i d\theta^j$$

$$=X_i^{*j}(d\theta^i-\theta^k\wedge\theta_k^i)-X_k^pX_l^q\Gamma_{pq}^i\theta^l\wedge\theta^k,$$

所以

$$(27)\qquad \begin{aligned} &d\theta^i-\theta^k\wedge\theta_k^i\\ &=X_r^{*i}X_k^pX_l^q\Gamma_{pq}^r\theta^l\wedge\theta^k\\ &=\frac{1}{2}X_r^{*i}X_k^pX_l^qT_{pq}^r\theta^k\wedge\theta^l. \end{aligned}$$

外微分(26)式，则得

$$\begin{aligned} 0&=-dX_i^k\wedge\omega_k^l-X_i^kd\omega_k^l+dX_k^l\wedge\theta_i^k+X_k^ld\theta_i^k\\ &=-X_i^k\Omega_k^l+X_k^l(d\theta_i^k-\theta_i^l\wedge\theta_l^k), \end{aligned}$$

所以

$$(28)\qquad \begin{aligned} &d\theta_i^j-\theta_i^l\wedge\theta_l^j\\ &=X_h^{*j}X_i^k\Omega_k^h\\ &=\frac{1}{2}X_q^{*j}X_i^pX_k^rX_l^sR_{prs}^q\theta^k\wedge\theta^l. \end{aligned}$$

这里T_{pq}^r，R_{prs}^q分别是§2的(31)，(23)两式定义的挠率张量和曲率张量。命

$$(29)\qquad \begin{cases} P_{kl}^i=X_r^{*i}X_k^pX_l^qT_{pq}^r,\\ S_{ikl}^j=X_q^{*j}X_i^pX_k^rX_l^sR_{prs}^q, \end{cases}$$

则(27)，(28)两式成为

$$(30)\qquad \begin{cases} d\theta^i-\theta^k\wedge\theta_k^i=\dfrac{1}{2}P_{kl}^i\theta^k\wedge\theta^l,\\ d\theta_i^j-\theta_i^k\wedge\theta_k^j=\dfrac{1}{2}S_{ikl}^j\theta^k\wedge\theta^l. \end{cases}$$

显然，P_{kl}^i,S_{ikl}^j与局部坐标的选取是无关的，因此(30)式是 在整个标架丛P上成立的，称为连络的结构方程。

对于自然标架$\left\{\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right\}$，则有

$$X_i^k=X_i^{*k}=\delta_i^k,$$

所以(30)式限制在自然标架上就是

$$-du^k\wedge\omega_k^i=\frac{1}{2}T^i_{kl}du^k\wedge du^l,$$

$$d\omega_i^j-\omega_i^k\wedge\omega_k^j=\frac{1}{2}R^j_{ikl}du^k\wedge du^l,$$

这又回到挠率张量和曲率张量原来的定义。

若记

(31)
$$\begin{cases}\Theta^i=\frac{1}{2}P^i_{kl}\theta^k\wedge\theta^l,\\[2ex]\Theta_i^j=\frac{1}{2}R^j_{ikl}\theta^k\wedge\theta^l,\end{cases}$$

则结构方程成为

(32)
$$\begin{cases}d\theta^i-\theta^k\wedge\theta_k^i=\Theta^i,\\ d\theta_i^j-\theta_i^k\wedge\theta_k^j=\Theta_i^j.\end{cases}$$

再外微分一次，则得

(33)
$$\begin{cases}d\Theta^i+\Theta^k\wedge\theta_k^i-\theta^k\wedge\Theta_k^i=0,\\ d\Theta_i^j+\Theta_i^k\wedge\theta_k^j-\theta_i^k\wedge\Theta_k^j=0.\end{cases}$$

方程(33)称为 Bianchi 恒等式。

我们知道微分式 θ^i 是由M的流形结构决定的。结构方程(30)的重要性在于：它给出了使 m^2个微分式 θ_i^j 在 M上定义一个仿射连络的充分条件。

定理3.1 设 θ_i^j $(1\leqslant i,j\leqslant m)$ 是标架丛P 上的 m^2 个一次微分式。如果它们和 θ^i 一起适合结构方程

(34)
$$\begin{cases}d\theta^i-\theta^j\wedge\theta_j^i=\frac{1}{2}P^i_{kl}\theta^k\wedge\theta^l,\\[2ex]d\theta_i^j-\theta_i^k\wedge\theta_k^j=\frac{1}{2}S^j_{ikl}\theta^k\wedge\theta^l,\end{cases}$$

其中 P^i_{kl},S^j_{ikl} 是某些定义在P 上的函数，则在M上存在仿射连络D，使得 θ_i^j 和连络D的关系如(24)式所示。

证明 取 P 中的局部坐标系 (u^i, X^k_i)，则

(35) $$\theta^i = X^{*i}_k du^k,$$

其中 (X^{*i}_k) 是 (X^k_i) 的逆矩阵。所以

$$\begin{aligned} d\theta^i &= dX^{*i}_k \wedge du^k \\ &= (dX^{*i}_k X^k_j) \wedge \theta^j \\ &= -X^{*i}_k dX^k_j \wedge \theta^j. \end{aligned}$$

代入(34)的第一式得

(36) $$\theta^j \wedge \left(\theta^i_j + \frac{1}{2} P^i_{jk} \theta^k - X^{*i}_k dX^k_j\right) = 0.$$

因为 θ^j 是线性无关的，根据 Cartan 引理，$\theta^i_j - X^{*i}_k dX^k_j$ 是 θ^l 的线性组合；不妨设

(37) $$X^k_i \theta^i_j - dX^k_j = \omega^k_i X^i_j,$$

其中 ω^k_i 是 θ^l 的线性组合，因而是 du^i 的线性组合。令

(38) $$\omega^k_j = \Gamma^k_{ji} du^i,$$

这里 Γ^k_{ji} 是 P 上的函数。若能证明 Γ^k_{ji} 只是 u^i 的函数，而与坐标 X^i_j 无关，则 Γ^k_{ji} 是某连络在局部坐标系 u^i 下的系数，定理便得证。

外微分(37)式得到

$$dX^k_i \wedge \theta^i_j + X^k_i d\theta^i_j = d\omega^k_i \cdot X^i_j - \omega^k_i \wedge dX^i_j,$$

利用(34)式，上式便化简为

$$X^i_j (d\omega^k_i - \omega^l_i \wedge \omega^k_l) = \frac{1}{2} X^k_i S^i_{jlh} \theta^l \wedge \theta^h.$$

因为右边只含有微分 du^i，而 $\omega^l_i \wedge \omega^k_l$ 也只含微分 du^i，所以 $d\omega^k_i$ 只含有微分 du^i。由(38)式得

$$d\omega^k_i = \sum_{i,l} \frac{\partial \Gamma^k_{ji}}{\partial u^l} du^l \wedge du^i + \sum_{i,l,h} \frac{\partial \Gamma^k_{ji}}{\partial X^h_l} dX^h_l \wedge du^i,$$

所以

(39) $$\frac{\partial \Gamma^k_{ji}}{\partial X^h_l} = 0.$$

设$(W;w^i)$是M的另一坐标域，则(w^i, Y^k_i)是P在$\pi^{-1}(W)$上的局部坐标系。若$U\cap W\neq\varnothing$，则在$U\cap W$上有

$$\theta^j_i = X^{*j}_k dX^k_i + X^{*j}_k \omega^k_l X^l_i$$
$$= Y^{*j}_k dY^k_i + Y^{*j}_k \omega'^k_l Y^l_i,$$

其中$\omega'^k_l = \Gamma'^k_{li} dw^i$，而$\Gamma'^k_{li}$只是$w^i$的函数，将(7)式代入上式得到

(40) $$\omega'^j_i = d\left(\frac{\partial u^p}{\partial w^i}\right)\frac{\partial w^j}{\partial u^p} + \frac{\partial u^p}{\partial w^i}\frac{\partial w^j}{\partial u^q}\omega^q_p.$$

由此可见，(ω^j_i)确实在M上定义了仿射连络D，使得(ω^j_i)是D在坐标系$(U;u^i)$下的连络方阵。

前面已经说过，Pfaff 方程组

$$\theta^i = 0,\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

在P上定义了纵空间场V。我们把Pfaff 方程组

(41) $$\theta^j_i = 0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant m$$

在每一点$x\in P$所确定的m维切子空间$H(x)$称为横空间；方程组(41)确定的m维分布称为横空间场H。显然，仿射连络D在标架从P上决定的横空间场H有如下的性质：

1）在任意一点$x\in P$，切空间$T_x(P)$有直和分解

(42) $$T_x(P) = V(x)\oplus H(x),$$

且横空间$H(x)$在投影π下与流形M的切空间$T_p(M)$ $(p=\pi(x))$是同构的；

2）横空间场H在P的左移动L_a $(a\in GL(m;\mathbf{R}))$ 下是不变的，即对于任意一点$x\in P$有

(43) $$(L_a)_* H(x) = H(L_a(x)).$$

因为空间$V(x)$和$H(x)$的维数之和恰是$T_x(P)$的维数m^2+m，所以要(42)式成立，只须证明$V(x)\cap H(x)=0$。设$X\in V(x)\cap H(x)$，根据纵空间和横空间的定义得到

$$\theta^i(X)=0,\quad \theta^j_i(X)=0,\quad 1\leqslant i,j\leqslant m.$$

因为$\{\theta^i,\theta^j_i\}$构成P上的余标架场，所以$X=0$，这就证明了(42)式。因为$\pi:P\to M$是光滑的满映射，故$\pi_*:T_x(P)\to T_p(M)$ ($p=\pi(x)$)是满同态，又因为$\pi_*(V(x))=0$，所以$\pi_*:H(x)\to T_p(M)$是同构，这就证明了性质 1)。

要证明性质 2)，只需把左移动L_a用标架丛的局部坐标系表示出来。设U是M的一个坐标域，局部坐标是u^i，则标架丛P在坐标域$\pi^{-1}(U)$上的局部坐标是(u^i,X^j_i) (见(3)式)。设标架$(p;e'_i)$是$(p;e_i)$在L_a下的象，其中e'_i是由(10)式给出的。设

$$e'_i=X'^j_i\frac{\partial}{\partial u^j},$$

则显然有

$$X'^j_i=a^k_iX^j_k,\qquad X'^{*j}_i=X^{*k}_i\overset{-1}{a}{}^j_k,\tag{44}$$

其中(X'^{*j}_i)表示矩阵(X'^j_i)的逆矩阵。因此

$$X'^{*j}_kDX'^k_i=a^p_i(X^{*q}_kDX^k_p)\overset{-1}{a}{}^j_q,$$

即

$$(L_a)^*\theta^j_i=a^p_i\overset{-1}{a}{}^j_q\theta^q_p;\tag{45}$$

而横空间H是θ^j_i $(1\leqslant i,j\leqslant m)$的零化子空间，所以(45)式表明横空间场$H$在左移动$L_a$下是不变的。

反过来，如果在标架丛P上给定了具有上述两个性质的m维切子空间场H，则在M上存在仿射连络D，使得H是标架丛P上关于连络D的横空间场(参看[11])。所以，从标架丛上看，仿射连络等价于具有上述性质的m维切子空间场。

第五章 黎 曼 流 形

§1 黎曼几何的基本定理

设M是m维光滑流形，G是M上对称的二阶协变张量场。若$(U;u^i)$是M的一个局部坐标系，则张量场G在U上可以表为

(1) $$G=g_{ij}du^i\otimes du^j,$$

其中 $g_{ij}=g_{ji}$ 是U上的光滑函数。G 在每一点$p\in M$给出了$T_p(M)$上的二重线性函数：设$X=X^i\frac{\partial}{\partial u^i}$，$Y=Y^i\frac{\partial}{\partial u^i}$，可命

(2) $$G(X,Y)=g_{ij}X^iY^j.$$

我们称张量G在点p是非退化的，如果有一个矢量$X\in T_p(M)$，使得

$$G(X,Y)=0$$

对所有的$Y\in T_p(M)$都成立，则必须有$X=0$。这就是说，G在p是非退化的，当且仅当线性方程组

$$g_{ij}(p)X^i=0,\qquad 1\leqslant j\leqslant m$$

只有零解，即行列式$\det(g_{ij}(p))\neq0$。

如果对任意的$X\in T_p(M)$都有

(3) $$G(X,X)\geqslant0,$$

且等号只在$X=0$时成立，则称张量G在点p是正定的。由线性代数可知，G是正定的充分必要条件是矩阵(g_{ij})是正定的；因此正定的张量G必是非退化的。

定义1.1 若在m维光滑流形M上给定一个光滑的处处非退化的对称二阶协变张量场G，则称M是广义黎曼流形，G称为广义黎曼流形M的基本张量或度量张量。

若G是正定的，则称M是黎曼流形。

对于广义黎曼流形M，(2)式在每一点p的切空间$T_p(M)$内给出了内积，即对于$X, Y\in T_p(M)$，命

$$X\cdot Y=G(X,Y)=g_{ij}(p)X^iY^j. \tag{4}$$

在G是正定的情形下，切矢量的长度、在同一点的两个切矢量的夹角都是有意义的，即

$$|X|=\sqrt{g_{ij}X^iX^j}, \tag{5}$$

$$\cos\angle(X,Y)=\frac{X\cdot Y}{|X|\cdot|Y|}. \tag{6}$$

所以黎曼流形就是在每一点的切空间上指定了正定内积的微分流形，并且要求内积是光滑的，即：如果X, Y是光滑的切矢量场，则$X\cdot Y$是M上的光滑函数。

二次微分式

$$ds^2=g_{ij}du^idu^j \tag{7}$$

与局部坐标系u^i的选取是无关的，通常称为度量形式，或黎曼度量。ds恰是无穷小切矢量的长度，称为弧长元素。设C：$u^i=u^i(t)$，$t_0\leqslant t\leqslant t_1$是$M$上一条连续的分段光滑的参数曲线，则$C$的弧长定义为

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}dt. \tag{8}$$

定理1.1 在m维光滑流形M上必有黎曼度量。

证明 取M的局部有限的坐标复盖$\{(U_\alpha;u_\alpha^i)\}$，设$\{h_\alpha\}$是相应的单位分解，使得支集$\operatorname{supp} h_\alpha\subset U_\alpha$。命

$$ds_\alpha^2=\sum_{i=1}^m(du_\alpha^i)^2, \tag{9}$$

$$ds^2=\sum_\alpha h_\alpha\cdot ds_\alpha^2, \tag{10}$$

其中$h_\alpha\cdot ds_\alpha^2$定义为

$$(11)\qquad (h_\alpha \cdot ds_\alpha^2)(p)=\begin{cases} h_\alpha(p)ds_\alpha^2, & p\in U_\alpha, \\ 0, & p\notin U_\alpha, \end{cases}$$

它们是M上的光滑的二次微分式。因为在每一点$p\in M$，(10)式右端只是有限项的和，所以该式是有意义的。实际上，若取p的一个坐标域$(U;u^i)$，使得$\bar{U}$是紧致的。由于$\{U_\alpha\}$的局部有限性，所以U只与其中有限多个成员$U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_r}$相交，因此(10)式限制在$U$上成为

$$ds^2=\sum_{\lambda=1}^{r}h_{\alpha_\lambda}\cdot ds_{\alpha_\lambda}^2=g_{ij}du^idu^j,$$

其中

$$(12)\qquad g_{ij}=\sum_{\lambda=1}^{r}\sum_{k=1}^{m}h_{\alpha_\lambda}\frac{\partial u_{\alpha_\lambda}^k}{\partial u^i}\frac{\partial u_{\alpha_\lambda}^k}{\partial u^j}.$$

因为$0\leqslant h_\alpha\leqslant 1$，$\sum\limits_\alpha h_\alpha=1$，故有某一指标$\beta$，使$h_\beta(p)>0$，于是

$$ds^2(p)\geqslant h_\beta\cdot ds_\beta^2.$$

由此可见ds^2在M上处处是正定的。

注记 在流形上黎曼度量的存在性并非平凡的结果。例如，M上不一定存在非正定的黎曼度量(但这一点较难证明)。从纤维丛观点看，在M上存在黎曼度量，说明M上对称的二阶协变张量丛必有正定的光滑截面。然而，对于任意的矢量丛，处处不为零的光滑截面却不一定存在。

下面假定M是广义黎曼流形。在局部坐标系改变时，基本张量G的分量变换公式是

$$g'_{ij}=g_{kl}\frac{\partial u^k}{\partial u'^i}\frac{\partial u^l}{\partial u'^j}.$$

因为矩阵(g_{ij})是非退化的，我们把它的逆矩阵的元素记作g^{ij}，即

(13) $$g^{ij}g_{kj}=g_{jk}g^{ki}=\delta^i_j.$$

那末，容易证明 g^{ij} 的坐标变换公式是

(14) $$g'^{ij}=g^{kl}\frac{\partial u'^i}{\partial u^k}\frac{\partial u'^j}{\partial u^l},$$

因此(g^{ij})是二阶对称的反变张量(请读者自证)。

借助于基本张量，可以把切空间和余切空间等同起来，因而反变矢量和协变矢量可以看作同一个矢量的不同表现形式。实际上，若$X\in T_p(M)$，命

(15) $$\alpha_X(Y)=G(X,Y),\quad Y\in T_p(M),$$

则α_X是$T_p(M)$上的线性函数，即$\alpha_X\in T_p^*(M)$。反过来，因为G是非退化的，所以$T_p^*(M)$中任意一个元素都可表成α_X的形式。这样，α在$T_p(M)$和$T_p^*(M)$之间建立了同构。用分量表示，若

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial u^i},\qquad \alpha_X=X_idu^i,$$

则从(15)式得到

(16) $$X_i=g_{ij}X^j,\qquad X^i=g^{ij}X_j.$$

此外，可以直接验证，如果(X^i)是反变矢量，则由(16)式定义的(X_i)遵从协变矢量的变换规律。

一般地，若(t^i_{jk})是(1,2)型张量，则

(17) $$t_{ijk}=g_{il}t^l{}_{jk},\qquad t^{ij}{}_k=g^{jl}t^i{}_{lk}$$

分别是(0,3)型张量和(2,1)型张量。如(17)式的运算通常称为张量指标的下降或上升。

定义1.2 设(M,G)是m维广义黎曼流形，D是M上的仿射连络。如果

(18) $$DG=0,$$

则称D是广义黎曼流形(M,G)的容许连络。

条件(18)的意思是基本张量G关于容许连络是平行的。若设连络D在局部坐标u^i下的连络矩阵是$\omega=(\omega^j_i)$，则

$$DG=(dg_{ij}-\omega_i^k g_{kj}-\omega_j^k g_{ik})\otimes du^i\otimes du^j,$$

所以(18)式等价于

(19) $$dg_{ij}=\omega_i^k g_{kj}+\omega_j^k g_{ik},$$

或用矩阵记成

(20) $$dG=\omega\cdot G+G\cdot {}^t\omega,$$

其中G表示矩阵

(21) $$G=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix},$$

并且

(22) $$\omega=\begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_m^1 & \cdots & \omega_m^m \end{pmatrix}.$$

容许连络的几何意义是平行移动保持度量性质不变；尤其是在黎曼流形上，切矢量的长度和夹角在平行移动时是不变的。实际上，如果$X(t)$,$Y(t)$是沿曲线C：$u^i=u^i(t)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$关于容许连络的平行矢量场，则

(23) $$\begin{cases} \dfrac{dX^i}{dt}+\Gamma^i_{jk}X^j\dfrac{du^k}{dt}=0, \\ \dfrac{dY^i}{dt}+\Gamma^i_{jk}Y^j\dfrac{du^k}{dt}=0, \end{cases}$$

所以

(24) $$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(g_{ij}X^iY^j) \\ &=\frac{dg_{ij}}{dt}X^iY^j+g_{ij}\frac{dX^i}{dt}Y^j \\ &\quad+g_{ij}X^i\frac{dY^j}{dt} \end{aligned}$$

$$=\left(\frac{dg_{ij}}{dt}-g_{ik}\Gamma^k_{jh}\frac{du^h}{dt}\right.$$

$$\left.-g_{jk}\Gamma^k_{ih}\frac{du^h}{dt}\right)X^iY^j.$$

由于(19)式，上式末端为零，所以沿曲线C有

(25) $$g_{ij}X^iY^j=\text{const}.$$

定理1.2(黎曼几何的基本定理) 设M是m维广义黎曼流形，则在M上存在唯一的无挠容许连络．该连络称为广义黎曼流形M的Levi-Civita连络，或黎曼连络。

证明 设D是M上的无挠容许连络，把D在局部坐标u^i下的连络矩阵记为$\omega=(\omega_i^j)$，其中

(26) $$\omega_i^j=\Gamma^j_{ik}du^k,$$

则它们适合条件

(27) $$dg_{ij}=\omega_i^kg_{kj}+\omega_j^kg_{ki},$$

(28) $$\Gamma^j_{ik}=\Gamma^j_{ki}.$$

记

(29) $$\Gamma_{ijk}=g_{lj}\Gamma^l_{ik},\qquad \omega_{ik}=g_{lk}\omega_i^l,$$

则由(27)，(28)两式得到

(30) $$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=\Gamma_{ijk}+\Gamma_{jik},$$

(31) $$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{kji}.$$

轮换(30)的指标，则得

(32) $$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}=\Gamma_{ikj}+\Gamma_{kij},$$

(33) $$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}=\Gamma_{jki}+\Gamma_{kji}.$$

计算(32)+(33)−(30)，并利用(31)式，则得

$$\Gamma_{ikj}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right), \tag{34}$$

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right). \tag{35}$$

由此可见，无挠容许连络是由度量张量唯一确定的。

反过来，由(35)式定义的Γ^k_{ij}在局部坐标变换时确实适合连络系数的变换公式(第四章§2 的(5)式)，因此它们在流形 M 上定义了一个仿射连络D。通过计算得到，由(35)式定义的 Γ^k_{ij}满足方程(30)和(31)，所以D是M上的无挠容许连络。

Levi-Civita连络的存在唯一性是黎曼几何非常重要的结果。由(34)和(35)两式定义的 Γ_{ikj} 和 Γ^k_{ij} 分别称为第一种和第二种Christoffel记号。

注记 1 在黎曼流形的一个邻域内不去考虑自然标架场，而用任意的标架场往往是比较方便的。流形上一个局部标架场就是标架丛的局部截面。设$(e_1,\cdots,e_m)$是局部标架场，其对偶标架场是$(\theta^1,\cdots,\theta^m)$。命

$$De_i=\theta_i^j e_j, \tag{36}$$

$\theta=(\theta_i^j)$称为连络D关于标架场$(e_1,\cdots,e_m)$的连络矩阵。这里的θ^i,θ_i^j不是别的，正是第四章§3中标架丛P上的一次微分式θ^i，θ_i^j拉回到局部截面上的形式(在此我们用了同样的记号)。因此根据连络的结构方程得到，D是无挠连络等价于θ_i^j满足方程

$$d\theta^i-\theta^j\wedge\theta_j^i=0. \tag{37}$$

如果仍然记

$$g_{ij}=G(e_i,e_j), \tag{38}$$

则度量形式是

$$ds^2=g_{ij}\theta^i\theta^j.$$

因为$G=g_{ij}\theta^i\otimes\theta^j$，所以

$$DG=(dg_{ij}-g_{ik}\theta^k_j-g_{kj}\theta^k_i)\otimes\theta^i\otimes\theta^j.$$

因此D是容许连络的条件仍是

(39) $$dg_{ij}=\theta^k_i g_{kj}+\theta^k_j g_{ik}.$$

现在，定理1.2可以改述为：

定理1.3 设(M,G)是广义黎曼流形，$\{\theta^i,1\leqslant i\leqslant m\}$是邻域$U\subset M$上一组$m$个处处线性无关的一次微分式，则在$U$上存在唯一的一组$m^2$个一次微分式$\theta^k_i$，使得

(40) $$\begin{gathered}d\theta^i-\theta^j\wedge\theta^i_j=0,\\ dg_{ij}=\theta^k_i g_{kj}+\theta^k_j g_{ik},\end{gathered}$$

其中g_{ij}是G关于局部余标架场$\{\theta^i\}$的分量，即

(41) $$G=g_{ij}\theta^i\otimes\theta^j.$$

注记 2 假定M是黎曼流形，G是正定的，则在邻域U内可取正交标架场$\{e_i,1\leqslant i\leqslant m\}$，此时$g_{ij}=\delta_{ij}$。即

$$ds^2=\sum_{i=1}^m(\theta^i)^2.$$

而(40)的第二式成为

(42) $$\theta^j_i+\theta^i_j=0,$$

即连络矩阵$\theta=(\theta^j_i)$是反对称的。

注记 3 公式(30)就是

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=g_{il}\Gamma^l_{jk}+g_{jl}\Gamma^l_{ik},$$

或

(43) $$g_{ij,k}=0.$$

这是条件(18)的一种表现形式；这意味着，对于容许连络来说，

度量张量g_{ij}关于绝对微商如同一个常量。

根据定义，Levi-Civita连络ω的曲率矩阵是

$$\Omega = d\omega - \omega\wedge\omega.$$

外微分(20)式，则得

$$d\omega\cdot G - \omega\wedge dG + dG\wedge{}^t\omega + G\cdot{}^t(d\omega) = 0,$$

$$(d\omega - \omega\wedge\omega)\cdot G + G\cdot{}^t(d\omega - \omega\wedge\omega) = 0,$$

即

(44) $$\Omega\cdot G + {}^t(\Omega\cdot G) = 0.$$

命

(45) $$\Omega_{ij} = \Omega_i^k g_{kj},$$

则$\Omega\cdot G = (\Omega_{ij})$。(44)式就是

(46) $$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0,$$

即Ω_{ij}关于下指标是反对称的。经过直接的计算得到

(47) $$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \omega_i^l\wedge\omega_{jl}.$$

根据第四章§2的(22)式，

(48) $$\Omega_i^j = \frac{1}{2}R_{i\,kl}^{\,j}du^k\wedge du^l,$$

其中

(49) $$R_{i\,kl}^{\,j} = \frac{\partial\Gamma_{il}^j}{\partial u^k} - \frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} + \Gamma_{il}^h\Gamma_{hk}^j - \Gamma_{ik}^h\Gamma_{hl}^j.$$

若命

(50) $$R_{ijkl} = R_{i\,kl}^{\,h}g_{hj},$$

则

(51) $$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}R_{ijkl}du^k\wedge du^l,$$

并且

(52) $$R_{ijkl} = \frac{\partial\Gamma_{ijl}}{\partial u^k} - \frac{\partial\Gamma_{ijk}}{\partial u} + \Gamma_{ik}^h\Gamma_{jhl} - \Gamma_{il}^h\Gamma_{jhk}.$$

R_{ijkl}是四阶协变张量，它是由流形M上给定的广义黎曼度量完全确定的，称为广义黎曼流形M的曲率张量。曲率张量有非常特别的性质。

定理1.4 广义黎曼流形的曲率张量R_{ijkl}满足下列关系：

1） $R_{ijkl}=-R_{jikl}=-R_{ijlk}$；

2） $R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0$；

3） $R_{ijkl}=R_{klij}$。

证明 1)是(46)和(52)两式的直接推论。

2）由Levi-Civita连络的无挠性得到

$$du^i\wedge\omega_{ij}=0. \tag{53}$$

外微分并利用(47)式则得

$$du^i\wedge(\Omega_{ij}-\omega_i^l\wedge\omega_{jl})=0,$$

$$du^i\wedge\Omega_{ij}=0.$$

用(51)式代入得到

$$R_{jikl}du^i\wedge du^k\wedge du^l=0,$$

$$(R_{jikl}+R_{jkli}+R_{jlik})du^i\wedge du^k\wedge du^l=0. \tag{54}$$

由于R_{ijkl}关于后两个指标的反对称性，上式的系数关于后三个指标是反对称的，所以

$$R_{jikl}+R_{jkli}+R_{jlik}=0. \tag{55}$$

3）由(55)式得

$$R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0,$$

两式相减则得

$$2R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{ljik}+R_{iljk}+R_{jkil}=0.$$

同理得到

$$2R_{klij}+R_{kijl}+R_{jlki}+R_{kjli}+R_{likj}=0.$$

利用1）的反称性，则有

$$R_{ijkl}=R_{klij}. \tag{56}$$

作为推论，在定理1.4的条件下我们有

$$R^i_{jkl}+R^i_{klj}+R^i_{ljk}=0. \tag{57}$$

再有，由于(43)式则得

$$R_{ijkl,h}=(g_{jp}R^p_{ikl})_{,h}$$
$$=g_{jp}R^p_{ikl,h}.$$

因此从第四章的定理2.2得到

(58) $$R_{ijkl,h}+R_{ijlh,k}+R_{ijhk,l}=0.$$

这仍然叫做Bianchi恒等式。

注记 黎曼流形的概念可以推广到黎曼矢量丛。设(E,M,π)是实矢量丛，如果对每一点$p\in M$，在纤维$\pi^{-1}(p)$上给定了一个非退化的对称的双线性函数G，并且对于E的任意两个光滑截面X,Y，$G(X,Y)$是M上的光滑函数，则称E是一个广义黎曼矢量丛。如果G是正定的，则称E是黎曼矢量丛，G称为矢量丛E上的黎曼结构。如同定理1.1，在任意一个实矢量丛上黎曼结构必然是存在的。同样，我们可以定义广义黎曼矢量丛上的容许连络的概念。

黎曼流形上的张量丛可以自然地成为黎曼矢量丛。例如对于张量丛$T^1_2(M)$，若$a,b\in T^1_2(p)$，则a与b的内积是

(59) $$a\cdot b=\sum_{\substack{i,j,k\\l,r,s}} g^{ij}g^{kl}g_{rs}a^r_{ik}b^s_{jl}.$$

§2 测地法坐标

定义2.1 设M是m维黎曼流形。若参数曲线C是M上关于Levi-Civita连络的测地线，则称C是黎曼流形M的测地线。

设在局部坐标u^i下，Levi-Civita连络D的系数是Γ^i_{jk}，则曲线C：$u^i=u^i(t)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$为测地线的条件是它满足二阶常微分方程组

(1) $$\frac{d^2u^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}=0.$$

这里$X^i=\frac{du^i}{dt}$是C的切矢量。根据定义，测地线的切矢量沿曲线本身关于Levi-Civita连络是平行的；而Levi-Civita连络保持度量性质在平行移动下不变，所以测地线的切矢量X^i的长度是常数。即

$$g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}=\text{const},$$

或

$$\frac{ds}{dt}=\text{const}. \tag{2}$$

由此可见，黎曼流形上测地线的参数必定是弧长参数 s 的一次函数

$$t=\lambda s+\mu, \tag{3}$$

其中$\lambda(\neq 0)$，μ都是常数。

下面我们考察在一点附近的特殊坐标系，使得从该点出发的任意一条测地线的坐标的参数方程是弧长参数的线性函数。我们先在M是仿射连络空间的一般假定下进行讨论。

设在坐标系$(U;u^i)$下测地线的方程是

$$\frac{d^2u^i}{dt^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{du^j}{dt}\frac{du^k}{dt}=0. \tag{4}$$

根据常微分方程的理论，对任意一点$x_0\in U$都存在x_0的一个邻域$W\subset U$及正数r,δ，使得对于任意的初值$x\in W$，及满足条件$\|a\|<r$①的$a\in \boldsymbol{R}^m$，方程组(4)在U中有唯一解②

$$u^i=f^i(t,x^k,a^k),\quad |t|<\delta, \tag{5}$$

它适合初始条件

① 这里$\|\alpha\|$表示$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(\alpha^i)^2}$。

② 可看[10]。

(6) $$\begin{cases} u^i(0)=f^i(0,x^k,a^k)=x^i, \\ \dfrac{du^i}{dt}(0)=\dfrac{\partial f^i(t,x^k,a^k)}{\partial t}\Big|_{t=0}=a^i. \end{cases}$$

并且函数f^i光滑地依赖于自变量 t 和初值x^k,a^k。

若取非零常数 c，则函数 $f^i(ct,x^k,a^k)$ ($x\in W$，$\|a\|<r$，且 $t<\delta/|c|$)仍然满足方程组(4)，并且

(7) $$\begin{cases} f^i(ct,x^k,a^k)|_{t=0}=x^i, \\ \dfrac{\partial f^i(ct,x^k,a^k)}{\partial t}\Big|_{t=0}=ca^i. \end{cases}$$

根据方程(4)的解的唯一性，当$\|a\|,\|ca\|<r$ 及$|t|,|ct|<\delta$时总是有

(8) $$f^i(ct,x^k,a^k)=f^i(t,x^k,ca^k).$$

但是上端左边在$x\in W,\|a\|<r,|t|<\delta/|c|$时总是有意义的，因此可以用来定义右边的函数。这样，函数$f^i(t,x^k,a^k)$对于$x\in W$，$|t|<\delta/|c|$ 及 $\|a\|<|c|r$ 总有定义；特别是，可取$|c|<\delta$，则 $f^i(t,x^k,a^k)$在$x\in W$，$|t|\leqslant 1$，及$\|a\|<|c|r$上有定义。命

(9) $$u^i=f^i(1,x^k,a^k),$$

则

(10) $$f^i(1,x^k,0)=f^i(0,x^k,a^k)=x^i,$$

于是对于固定的$x\in W$，(9)式给出了从切空间 $T_x(M)$ ($=\boldsymbol{R}^m$)在原点的一个邻域到流形M在点 x 的一个邻域的光滑映射。因为

$$\frac{\partial f^i(1,x^k,ta^k)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{\partial f^i(1,x^k,a^k)}{\partial a^j}\Big|_{a=0}\cdot a^j,$$

而另一方面

$$\frac{\partial f^i(1,x^k,ta^k)}{\partial t}\Big|_{t=0}=\frac{\partial f^i(t,x^k,a^k)}{\partial t}\Big|_{t=0}=a^i,$$

所以

(11) $$\left(\frac{\partial u^i}{\partial a^j}\right)_{a=0}=\delta^i_j,$$

即映射(9)在原点 $a=0$ 是正则的。这就是说，a^i 可以取作 M 在点 x 的局部坐标系，称为在点 x 的测地法坐标，或简称法坐标。由于切空间是线性空间，它上面的不同坐标系只差一个非退化的线性变换，所以流形 M 在一点的法坐标系也只差一个非退化的线性变换而完全确定。

固定 $a^k=a_0^k$，当 t 变化时，ta_0^k 是 $T_x(M)$ 中从原点出发的一条直线，而在流形上描出一条从 x 出发的、与切矢量 (a_0^k) 相切的测地线。所以在法坐标系 a^i 下，这条测地线的方程是

(12) $$a^k=ta_0^k,$$

其中 a_0^k 是常数。

定理2.1 若 M 是无挠仿射连络空间，则对于在点 x 的法坐标系 a^i，其连络系数 Γ^i_{jk} 在 x 为零。

证明 因为在法坐标系 a^i 下，测地线 $a^i=ta_0^i$ 满足方程(4)，所以对任意的 a_0^k 有

(13) $$\Gamma^i_{jk}(0)a_0^ja_0^k=0;$$

由于无挠连络 Γ^i_{jk} 关于下指标是对称的，所以

(14) $$\Gamma^i_{jk}(0)=0,\quad 1\leqslant i,j,k\leqslant m.$$

定理2.2 仿射连络空间 M 在每一点 x_0 都有一个邻域 W，使得 W 中每一点都有包含 W 在内的法坐标域。

证明 设 $(U;u^i)$ 是点 x_0 的法坐标系，命

(15) $$U(x_0;\rho)=\left\{x\,|\in U,\sum_{i=1}^m(u^i(x))^2<\rho^2\right\}.$$

根据前面关于方程(4)的解的讨论，存在 x_0 的邻域 $W=U(x_0;r)$ 及正数 δ，使得对任意的 $x\in W$ 及 $a\in \boldsymbol{R}^m$，$\|a\|<\delta$ 有唯一的以 (x,a^k) 为初始条件的测地线

(16) $$u^i=f^i(t,x^k,a^k),\quad |t|<2.$$

我们用 $B(0;\delta)$ 记集合 $\{a\,|\in \boldsymbol{R}^m,\|a\|<\delta\}$，则(16)式给出了映射 φ: $W\times B(0;\delta)\to W\times U$，使得

(17) $$\varphi(x,a)=(x^k,f^k(1,x^i,a^i)),$$

其中$x\in W, a\in B(0;\delta)$。因为函数f^k光滑地依赖于x和a，所以映射φ是光滑的。根据(11)式得

$$\left.\frac{\partial(x^k,f^k)}{\partial(x^i,a^i)}\right|_{(x_0,0)}=1,$$

可见映射φ的Jacobi矩阵在点$(x_0,0)\in W\times B(0;\delta)$的附近是非退化的。由反函数定理，必存在点$(x_0,0)$在$W\times B(0;\delta)$中的邻域$V$及正数$a<\rho$，使得$\varphi: V\to U(x_0;a)\times U(x_0;a)$是可微同胚。对于任意的$x\in U(x_0;a)$，命

(18) $$B_x=\{a|\in B(0;a),\ 使(x,a)\in V\},$$

则由(16)给出的映射

(19) $$u^i=f^i(1,x^k,a^k),\quad a\in B_x$$

是从B_x到$U(x_0;a)$的可微同胚。取$W'=U(x_0;a)$，则上式说明W'中每一点都有一个法坐标系把W'包含在内。

系 仿射连络空间M在每一点x_0有一个邻域W，使W中任意两点可用一段测地线连结。

注记 更细致的讨论还可以做到使这段测地线包含在邻域W内。这时邻域W称为测地凸邻域。下面的定理2.7在黎曼流形的假定下证明了测地凸邻域的存在性；此证明稍加修改同样适用于仿射连络空间。

定理2.3 无挠的仿射连络在局部上是由曲率张量完全确定的。

证明 考虑在固定点O的法坐标系a^i。在点O取自然标架，然后将它沿着从点O出发的测地线平行移动至各点，由此得到在O点的一个邻域上的标架场$\{e_i,\ 1\leqslant i\leqslant m\}$。命$\theta^i$是$e_i$的对偶的一次微分式，并把主丛上$m^2$个处处线性无关的一次微分式$\theta_i^j$在上述标架场上的限制仍用同一记号表示，因此$\theta^i,\theta_i^j$是$t,a^k$的一次微分式，当$a^k$为常数时，$\theta^i,\theta_i^j$就限制在测地线$a^it$上。因为标架场沿测地线$a^it$是平行的，所以

(20)
$$\begin{cases} \theta^i \equiv a^i dt \quad (\mathrm{mod}\ da^k), \\ \theta_i^j \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ da^k), \end{cases}$$

或

(21)
$$\theta^i = a^i dt + \bar{\theta}^i, \quad \theta_i^j = \bar{\theta}_i^j,$$

其中$\bar{\theta}^i$和$\bar{\theta}_i^j$分别是θ^i,θ_i^j中不含有微分 dt 的部分。将(21)式代入结构方程(第四章 § 3)

$$\begin{cases} d\theta^i - \theta^j \wedge \theta_j^i = 0, \\ d\theta_i^j - \theta_i^k \wedge \theta_k^j = \frac{1}{2} S_{i\ k\ l}^{\ j} \theta^k \wedge \theta^l, \end{cases}$$

并比较含有 dt 的各项，则得

$$\left(da^i - \frac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial t} + a^j \bar{\theta}_j^i\right) \wedge dt = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\theta}_i^j}{\partial t} - a^k S_{i\ k\ l}^{\ j} \bar{\theta}^l\right) \wedge dt = 0,$$

其中$\dfrac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial t}$,$\dfrac{\partial \bar{\theta}_i^j}{\partial t}$分别表示 $\bar{\theta}^i$,$\bar{\theta}_i^j$ 的系数对 t 求偏导数所得的一次微分式。因为在括号内不含有微分 dt，所以

(22)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{\theta}^i}{\partial t} = da^i + a^j \bar{\theta}_j^i, \\ \dfrac{\partial \bar{\theta}_i^j}{\partial t} = a^k S_{i\ k\ l}^{\ j} \bar{\theta}^l, \end{cases}$$

这是以 t 为自变量的一组常微分方程。将第一式再对 t 微分一次，则得

(23)
$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}^i}{\partial t^2} = a^j \frac{\partial \bar{\theta}_j^i}{\partial t} = a^j a^k S_{j\ k\ l}^{\ i} \bar{\theta}^l.$$

因为标架族e_i在点O沿各方向都是平行的，所以

(24)
$$\bar{\theta}_i^j \big|_{t=0} = 0.$$

此外，根据定义得

$$\theta^i|_{t=0}=a^i dt,$$

所以

$$\bar{\theta}^i|_{t=0}=0. \tag{25}$$

因此从(24)及(22)的第一式得到

$$\left.\frac{\partial\bar{\theta}^i}{\partial t}\right|_{t=0}=da^i. \tag{26}$$

对于给定的曲率张量，二阶常微分方程组(23)在初始条件(25)和(26)下有唯一解$\bar{\theta}^i$；再由(22)的第一式完全确定了$\bar{\theta}^j_i$，因此在局部上曲率张量完全决定了无挠的仿射连络。

现在假定M是m维黎曼流形。设$x_0\in M$，在切空间$T_{x_0}(M)$中取定一个正交标架F_0，则在点x_0的法坐标系u^i可以表成

$$u^i=a^i s, \tag{27}$$

其中(a^i)是$T_{x_0}(M)$中的单位矢量，s是从x_0出发的测地线的弧长。将标架F_0沿着从x_0出发的测地线平行移动，于是在x_0的邻域内产生了一个正交标架场。根据定理2.3的证明，可以记

$$\begin{cases}\theta^i=a^i ds+\bar{\theta}^i,\\ \theta^j_i=\bar{\theta}^j_i,\end{cases} \tag{28}$$

其中$\bar{\theta}^i,\bar{\theta}^j_i$不含有微分$ds$，并且满足方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{\theta}^i}{\partial s}=da^i+a^j\bar{\theta}^i_j,\\[2ex] \dfrac{\partial\bar{\theta}^j_i}{\partial t}=a^k S^j_{ikl}\bar{\theta}^l,\\[2ex] \bar{\theta}^j_i+\bar{\theta}^i_j=0,\end{cases} \tag{29}$$

以及初始条件

$$\bar{\theta}^i|_{s=0}=0,\quad \bar{\theta}^j_i|_{s=0}=0,\quad \left.\frac{\partial\bar{\theta}^i}{\partial s}\right|_{s=0}=da^i. \tag{30}$$

若记

(31) $$\bar{\theta}^i = s\,d\alpha^i + A^i_j\,d\alpha^j,$$

则 A^i_j 适合初始条件

(32) $$A^i_j|_{s=0}=0, \quad \left.\frac{\partial A^i_j}{\partial s}\right|_{s=0}=0.$$

因此在点 O 附近弧长元素可表为

(33) $$d\sigma^2=\sum_{i=1}^m(\theta^i)^2$$
$$=ds^2+2ds\sum_{i=1}^m\alpha^i\bar{\theta}^i+\sum_{i=1}^m(\bar{\theta}^i)^2.$$

因为 $\sum_{i=1}^m\alpha^i d\alpha^i=0$，$\bar{\theta}^i_j+\bar{\theta}^j_i=0$，容易得到

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{i=1}^m\alpha^i\bar{\theta}^i\right)=\sum_{i=1}^m\alpha^i\left(d\alpha^i+\sum_{j=1}^m\alpha^j\bar{\theta}^i_j\right)=0,$$

并且

$$\sum_{i=1}^m\alpha^i\bar{\theta}^i|_{s=0}=0,$$

所以

(34) $$\sum_{i=1}^m\alpha^i\bar{\theta}^i=0;$$

于是，从(33)式得到：在点 O 附近弧长元素是

(35) $$d\sigma^2=ds^2+\sum_{i=1}^m(\bar{\theta}^i)^2.$$

系 超曲面 $s=\text{const}$ 和从点 O 出发的测地线是彼此正交的.

定理2.4 黎曼流形 M 的每一点 O 有一个法坐标域 W，使得

1) W 中每一点有一个法坐标域把 W 包含在内；

2) 连结 O 和 $p\in W$ 的测地线是 W 中唯一的连结这两点的最短

线。

证明 将定理2.2用于M上的Levi-Civita连络，便得到 1)。现在假定u^i是如(27)式给出的点O的法坐标系，如1)所要求的法坐标域W是

$$W=\left\{p\in M \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m}(u^i(p))^2<\varepsilon^2\right\},$$

其中ε是充分小的正数。因为W是法坐标域，对任意一点$p\in W$，在W中有唯一的一条测地线γ连结O,p。假定γ的长度是s_0。

首先，我们证明γ是W中连结O,p两点的最短线。设C是W中连结O,p的任意一条分段光滑曲线；不妨可设C的参数方程是$u^i=u^i(s)$，其中s是γ上的弧长参数，则C的弧长是

$$\int_0^{s_0} d\sigma=\int_0^{s_0}\sqrt{ds^2+\sum_{i=1}^{m}(\bar{\theta})^2} \tag{36}$$

$$\geqslant\int_0^{s_0} ds=s_0.$$

如果C是W中连结O,p的最短线，则(36)式中等号必须成立，所以沿曲线C必须有

$$\bar{\theta}^i=0.$$

由(31)式得到

$$da^i+\sum_{j=1}^{m}A_j^i\frac{da^j}{s}=0. \tag{37}$$

因为A_j^i适合初始条件(32)，所以$A_j^i=o(s)$；在(37)式中令$s\to0$，则得

$$da^i=0,\quad a^i=\text{const}.$$

即C是连结O,p的测地线，故$C=\gamma$。

定理2.5 设U是点O的法坐标域，则存在正数ε，使得对任意的$0<\delta<\varepsilon$，超球面

$$\Sigma_\delta=\left\{p\in U \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m}(u^i(p))^2=\delta^2\right\}$$

有下列性质：

1）Σ_δ 上每一点都可以用 U 中唯一的最短测地线与 O 连结；

2）与 Σ_δ 相切的任意一条测地线在切点的一个邻域内严格地落在 Σ_δ 的外部。

证明 取 W 是定理 2.4 所要求的法坐标域，不妨设 W 是半径为 ε 的球形邻域

$$W=\left\{p\in U \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m}(u^i(p))^2<\varepsilon^2\right\}.$$

当 $0<\delta<\varepsilon$ 时，由于 $\Sigma_\delta\subset W\subset U$，且 U 是法坐标域，故性质1)是定理 2.4 的推论。现在要缩小 ε，使 2) 成立。

因为 $(U;u^i)$ 是法坐标系，由定理2.1得

$$\Gamma^i_{jk}(0)=0. \tag{38}$$

超球面 Σ_δ 的方程可写成

$$F(u^1,\cdots,u^m)=\frac{1}{2}[(u^1)^2+\cdots+(u^m)^2-\delta^2]=0. \tag{39}$$

设 γ 是一条与 Σ_δ 相切于 p 点的测地线，其方程是

$$u^i=u^i(\sigma), \tag{40}$$

其中 σ 是 γ 上从 p 点量起的弧长。因此

$$F(u^i(\sigma))|_{\sigma=0}=0. \tag{41}$$

因为超球面 Σ_δ 与从点 O 出发的测地线是正交的，所以与 Σ_δ 在点 p 相切的测地线 γ 应与连结 O，p 的测地线正交，因此

$$\sum_{i=1}^{m}u^i(\sigma)\frac{du^i}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0}=0. \tag{42}$$

直接计算得到

$$\frac{d}{d\sigma}F(u^i(\sigma))|_{\sigma=0}=\sum_{i=1}^{m}u^i(\sigma)\frac{du^i}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=0}=0, \tag{43}$$

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}F(u^i(\sigma))|_{\sigma=0} \tag{44}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m}\left(\delta_{ij} - \sum_{k=1}^{m} u^k(p)\Gamma^k_{ij}(p)\right)\left(\frac{du^i}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{du^j}{d\sigma}\right)_0,$$

所以

$$(45)\qquad F(u^i(\sigma)) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\left(\delta_{ij} - \sum_{k=1}^{m} u^k(p)\Gamma^k_{ij}(p)\right)$$

$$\cdot\left(\frac{du^i}{d\sigma}\right)_0\left(\frac{du^j}{d\sigma}\right)_0 \cdot \sigma^2 + o(\sigma^2).$$

由于(38)式，在O的一个邻域内可使Γ^k_{ij}的值任意地小，因此可取充分小的ε，当$0<\delta<\varepsilon$时，让(44)式总是保持正值。这样，测地线(40)在点p附近严格地落在Σ_δ的外面，它与Σ_δ只有一个公共点p。

在研究黎曼流形的几何时，一个有效的办法是在黎曼流形上引进距离函数，使它成为度量空间。

定义2.2 设M是连通的黎曼流形，p,q是M上任意两点。命

$$(46)\qquad \rho(p,q) = \inf \widehat{pq},$$

其中$\widehat{pq}$指连结p,q两点的可求长曲线的弧长。$\rho(p,q)$称为p,q两点之间的距离。

因为M是连通的，所以连结p,q的可求长曲线总是存在的，故(46)式总是有意义的，它定义了$M\times M$上的一个实函数。

定理2.6 函数ρ：$M\times M\to \boldsymbol{R}$有以下性质：

1）对任意的$p,q\in M$，$\rho(p,q)\geqslant 0$，并且等号只在$p=q$时成立；

2）$\rho(p,q)=\rho(q,p)$；

3）对任意三点$p,q,r\in M$，都有

$$\rho(p,q)+\rho(q,r)\geqslant\rho(p,r).$$

因此，ρ成为流形M上的距离函数，使M成为度量空间。M作为度量空间的拓扑与流形M的原拓扑是等价的。

证明 根据定义(46)，上述各性质都是明显的，只需验证：当 $p\neq q$ 时，$\rho(p,q)>0$。

设p,q是M上两点，$p\neq q$；由于M是Hansdorff空间，故有点p的邻域U，使$q\bar{\in}U$。根据定理2.4，必有点p的法坐标域$W\subset U$，使其法坐标是$u^i=\alpha^i s$，其中$\sum_{i=1}^{m}(\alpha^i)^2=1$，且$0\leqslant s<s_0$。取$\delta$，使$0<\delta<s_0$，则超球面$\Sigma_\delta\subset W$。设$\gamma$是连结$p,q$的一条可求长曲线，则$\gamma$的长度$\geqslant\delta$，即

$$\rho(p,q)\geqslant\delta>0.$$

根据定理2.5，Σ_δ的内部恰是集合

$$\{q|\in M,\rho(p,q)<\delta\},$$

即Σ_δ的内部是M作为度量空间时点p的δ-球形邻域，因此M作为度量空间的拓扑与M原来的拓扑是一致的。

要指出的是，如果W是定理2.4所构造的在点O的球形法坐标域，则对任意一点$p\in W$，在W中连结O,p两点的唯一的测地线的长度就是$\rho(O,p)$。

定理2.7 黎曼流形M的每一点p都有一个η-球形邻域W，其中η是充分小的正数，使得W中任意两点都能用W中唯一的一条测地线连结。

具有上述性质的邻域叫做测地凸邻域。定理的意思是：黎曼流形上每一点都有一个测地凸邻域。

证明 设$p\in M$，根据定理2.4，存在点p的半径为ε的球形法坐标域U，使得U中任意一点q都有一个法坐标域V_q包含U在内。不妨设ε还满足定理2.5的要求。取正数$\eta\leqslant\frac{1}{4}\varepsilon$，则点$p$的$\eta$-球形邻域$W$就是点$p$的测地凸邻域。

任取$q_1,q_2\in W$，则

$$\rho(q_1,q_2)\leqslant\rho(p,q_1)+\rho(p,q_2)<2\eta\leqslant\frac{\varepsilon}{2}. \tag{47}$$

设 $U(q_1;\varepsilon/2)$ 是 q_1 的 $\frac{\varepsilon}{2}$-球形邻域，则上式表明 $q_2\in U(q_1;\varepsilon/2)$。对于任意的 $q\in U(q_1;\varepsilon/2)$，则

$$\rho(p,q)\leqslant\rho(p,q_1)+\rho(q_1,q)<\frac{3\varepsilon}{4},$$

故

$$U\left(q_1;\frac{\varepsilon}{2}\right)\subset U\subset V_{q_1},\tag{48}$$

即点 q_1 的 $\frac{\varepsilon}{2}$-球形邻域包含在 q_1 的法坐标域内。根据定理2.4以及定理2.6最后的说明，在 $U(q_1;\varepsilon/2)$ 内存在唯一的一条测地线 γ 连结 q_1, q_2 两点，并且 γ 的长度就是 $\rho(q_1,q_2)$。特别是，如果点 $r\in\gamma$，则

$$\rho(q_1,r)\leqslant\rho(q_1,q_2).\tag{49}$$

最后要证明测地线 γ 落在 W 内。因为 $\gamma\subset U(q_1;\varepsilon/2)\subset U$，所以函数 $\rho(p,q)$ $(q\in\gamma)$ 是有界的。若 γ 不完全落在 W 内，而 $q_1,q_2\in W$，则函数 $\rho(p,q)$ $(q\in\gamma)$ 必在 γ 的内点 q_0 达到最大值。命 $\delta=\rho(p,q_0)$，则 $\delta<\varepsilon$，且超球面 Σ_δ 与 γ 在 q_0 处相切。由定理2.5，γ 在点 q_0 附近应完全在 Σ_δ 的外部，这与函数 $\rho(p,q)$ $(q\in\gamma)$ 在 q_0 达到最大值相矛盾。因此 $\gamma\subset W$，证毕。

§3 截面曲率

设 M 是 m 维黎曼流形，它的曲率张量 R 是四阶协变张量。设 u^i 是 M 的一个局部坐标系，则曲率张量 R 可以表成

$$R=R_{ijkl}du^i\otimes du^j\otimes du^k\otimes du^l,\tag{1}$$

其中 R_{ijkl} 如§1的(52)式所定义。四阶协变张量可以看作四阶反变张量的空间上的线性函数(第二章§2)，因此在每一点 $p\in M$，我们有多线性函数 R: $T_p(M)\times T_p(M)\times T_p(M)\times T_p(M)\to\boldsymbol{R}$,

其定义为

$$R(X,Y,Z,W)=\langle X\otimes Y\otimes Z\otimes W, R\rangle, \tag{2}$$

其中记号$\langle , \rangle$如第二章§2的(17)式所规定。若设

$$X=X^i\frac{\partial}{\partial u^i},\quad Y=Y^i\frac{\partial}{\partial u^i},\quad Z=Z^i\frac{\partial}{\partial u^i},\quad W=W^i\frac{\partial}{\partial u^i}, \tag{3}$$

则

$$R(X,Y,Z,W)=R_{ijkl}X^iY^jZ^kW^l, \tag{4}$$

特别是

$$R_{ijkl}=R\left(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j},\frac{\partial}{\partial u^k},\frac{\partial}{\partial u^l}\right). \tag{5}$$

在第四章§2，已把连络D的曲率张量解释为曲率算子：任给$Z,W\in T_p(M)$，则$R(Z,W)$是从$T_p(M)$到$T_p(M)$的线性映射，其定义是

$$R(Z,W)X=R^j_{ikl}X^iZ^kW^l\frac{\partial}{\partial u^j}. \tag{6}$$

若D是黎曼流形M的Levi-Civita连络，则有

$$R(X,Y,Z,W)=(R(Z,W)X)\cdot Y, \tag{7}$$

右边的记号"·"是§1的(4)式所定义的内积。

根据定理1.4，四重线性函数$R(X,Y,Z,W)$有以下的性质：

1) $R(X,Y,Z,W)=-R(X,Y,W,Z)=-R(Y,X,Z,W)$；

2) $R(X,Y,Z,W)+R(X,Z,W,Y)+R(X,W,Y,Z)=0$；

3) $R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y)$。

利用M的基本张量G，还可以定义如下的四重线性函数：

$$G(X,Y,Z,W)=G(X,Z)G(Y,W)-G(X,W)G(Y,Z). \tag{8}$$

显然，上式定义的函数对每一个变量都是线性的，并且它也有函数$R(X,Y,Z,W)$所具有的性质1)—3)。

若$X,Y\in T_p(M)$，则

$$G(X,Y,X,Y)=|X|^2\cdot|Y|^2-(X\cdot Y)^2 \tag{9}$$

$$=|X|^2\cdot|Y|^2\cdot\sin^2\angle(X,Y).$$

所以，当 X,Y 线性无关时，$G(X,Y,X,Y)$ 正是切矢量 X,Y 所张的平行四边形的面积的平方，因此 $G(X,Y,X,Y)\neq 0$。

若 X',Y' 是在点 p 的另外两个线性无关的切矢量，假定它们与 X,Y 张成同一个二维切子空间 E，那么可设

$$X'=aX+bY,\quad Y'=cX+dY,$$

其中 $ad-bc\neq 0$。由性质 1)—3) 则得

$$R(X',Y',X',Y')=(ad-bc)^2R(X,Y,X,Y),$$

$$G(X',Y',X',Y')=(ad-bc)^2G(X,Y,X,Y),$$

所以

$$\frac{R(X',Y',X',Y')}{G(X',Y',X',Y')}=\frac{R(X,Y,X,Y)}{G(X,Y,X,Y)},$$

这就是说上式是 $T_p(M)$ 的二维子空间 E 的函数，与 X,Y 在 E 中的选取无关。

定义3.1 设 E 是 $T_p(M)$ 的二维子空间，X,Y 是 E 中任意两个线性无关的切矢量，则

$$K(E)=-\frac{R(X,Y,X,Y)}{G(X,Y,X,Y)} \tag{10}$$

是 E 的函数，与 X,Y 在 E 中的选取无关，称它为黎曼流形 M 在 (p,E) 的黎曼曲率，或截面曲率。

我们知道，三维欧氏空间中曲面在一点的两个主曲率的乘积叫做曲面在该点的总曲率，或 Gauss 曲率。Gauss 的一个"令人惊异"的结果说：曲面在一点的总曲率尽管是以外在的方式（即不仅用到曲面的第一基本形式，还用到曲面的第二基本形式）定义的，但是它只与曲面的第一基本形式有关，即总曲率 K 是

$$K=-\frac{R_{1212}}{g}, \tag{11}$$

其中 $g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2$，而 R_{1212} 如 §1 的(52)式所定义，也就是

(12) $$R_{1212}=\frac{\partial \Gamma_{122}}{\partial u^1}-\frac{\partial \Gamma_{121}}{\partial u^2}+\Gamma^h_{11}\Gamma_{2h2}-\Gamma^h_{12}\Gamma_{2h1}.$$

利用这个事实可以给出截面曲率的几何解释。假定 $m\geqslant 3$，E 是 $T_p(M)$ 的二维子空间。在点 p 取定一个正交标架 $\{e_i\}$，使 E 由 $\{e_1, e_2\}$ 所张成。设 u^i 是由这个标架在点 p 附近决定的测地法坐标系。现在考虑从点 p 出发，并与 E 相切的所有测地线构成的二维子流形 S。显然 S 的方程是

(13) $$u^r=0, \qquad 3\leqslant r\leqslant m,$$

并且 (u^1, u^2) 是子流形 S 在 p 点的法坐标。S 称为在点 p 与 E 相切的测地子流形。我们要证明，黎曼流形 M 在 (p, E) 的截面曲率 $K(E)$ 恰是曲面 S（具有从 M 诱导的黎曼度量）在 p 点的总曲率。

设 M 在点 p 附近的黎曼度量是

(14) $$ds^2=g_{ij}du^i du^j,$$

则它在 S 上的诱导度量是

(15) $$d\bar{s}^2=\bar{g}_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta, \qquad 1\leqslant\alpha,\beta\leqslant 2,$$

其中

(16) $$\bar{g}_{\alpha\beta}(u^1,u^2)=g_{\alpha\beta}(u^1,u^2,0,\cdots,0).$$

因此

(17) $$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta\gamma}|_S&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}\right)\Bigg|_S\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{g}_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}+\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta}\right)\\&=\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}.\end{aligned}$$

由于 (u^i) 和 (u^α) 分别是 M 和 S 在点 p 的法坐标系，根据定理 2.1 得

(18) $$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\gamma}(p)=\Gamma_{ijk}(p)=0.$$

因此

$$(19)\quad R_{1212}(p)=\left(\frac{\partial \Gamma_{122}}{\partial u^1}-\frac{\partial \Gamma_{121}}{\partial u^2}+\Gamma^i_{11}\Gamma_{2i2}-\Gamma^i_{12}\Gamma_{2i1}\right)_p$$

$$=\left(\frac{\partial \bar{\Gamma}_{122}}{\partial u^1}-\frac{\partial \bar{\Gamma}_{121}}{\partial u^2}\right)=\bar{R}_{1212}(p).$$

由此得到，M在(p,E)的截面曲率是

$$K(E)=-\frac{R(e_1,e_2,e_1,e_2)}{G(e_1,e_2,e_1,e_2)}$$

$$=-\left.\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\right|_p$$

$$=-\left.\frac{\bar{R}_{1212}}{\bar{g}_{11}\bar{g}_{22}-\bar{g}_{12}^2}\right|_p=\bar{K}(p),$$

右端正是曲面S在点p的总曲率。

截面曲率的重要性在于下面的定理：

定理3.1 黎曼空间M在点p的曲率张量由在该点的所有二维切子空间的截面曲率唯一确定。

证明 设有四重线性函数$\bar{R}(X,Y,Z,W)$满足曲率张量$R(X,Y,Z,W)$所适合的性质1)—3)，并且对于在点p的任意两个线性无关的切矢量X,Y，都有

$$(20)\quad \frac{\bar{R}(X,Y,X,Y)}{G(X,Y,X,Y)}=\frac{R(X,Y,X,Y)}{G(X,Y,X,Y)},$$

我们要证明对任意的$X,Y,Z,W\in T_p(M)$，有

$$(21)\quad \bar{R}(X,Y,Z,W)=R(X,Y,Z,W).$$

若命

$$(22)\quad S(X,Y,Z,W)=\bar{R}(X,Y,Z,W)-R(X,Y,Z,W),$$

则S仍是具有性质1)—3)的四重线性函数，而且由(20)式，对于任意的$X,Y\in T_p(M)$有

$$(23)\quad S(X,Y,X,Y)=0.$$

这样，(21)式等价于S是零函数。

由(23)式得到

$$S(X+Z,Y,X+Z,Y)=0,$$

展开并利用函数 S 的性质则得

(24) $$S(X,Y,Z,Y)=0,$$

其中X,Y,Z是 $T_p(M)$ 中任意三个元素。因此

$$S(X,Y+W,Z,Y+W)=0,$$

展开后得到

(25) $$S(X,Y,Z,W)+S(X,W,Z,Y)=0.$$

利用性质 1) 则有

(26) $$\begin{aligned} S(X,Y,Z,W) &= -S(X,W,Z,Y) \\ &= S(X,W,Y,Z) \\ &= -S(X,Z,Y,W) \\ &= S(X,Z,W,Y). \end{aligned}$$

由性质 3) 我们有

$$S(X,Y,Z,W)+S(X,Z,W,Y)+S(X,W,Y,Z)=0,$$

因此

(27) $$3S(X,Y,Z,W)=0,$$

得证。

定义3.2 设M是黎曼流形，若在点 p 截面曲率$K(E)$是常数(即与E无关)，则称M在点 p 是迷向的。

若M在点 p 是迷向的，则M在 p 的截面曲率可以记成 $K(p)$，因此对任意的 $X,Y\in T_p(M)$ 都有

(28) $$R(X,Y,X,Y)=-K(p)G(X,Y,X,Y).$$

根据定理3.1的证明，对于任意的 $X,Y,Z,W\in T_p(M)$ 则有

(29) $$R(X,Y,Z,W)=-K(p)G(X,Y,Z,W).$$

所以黎曼流形在点 p 迷向的条件是

$$R_{ijkl}(p)=-K(p)(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})(p),$$

或

(30) $$\Omega_{ij}(p)=\frac{1}{2}R_{ijkl}(p)du^k\wedge du^l$$
$$=-K(p)\theta_i\wedge\theta_j(p),$$
其中

(31) $$\theta_i=g_{ij}du^j.$$

定义3.3 若M是处处迷向的黎曼流形，并且截面曲率$K(p)$是M上的常值函数，则称M是常曲率空间。

球面、平面和伪球面都是三维欧氏空间中总曲率是常数的曲面，因而是二维常曲率黎曼空间。

定理3.2（F. Schur 定理） 设M是m维处处迷向的连通的黎曼流形，如果$m\geqslant 3$，则M是常曲率空间。

证明 因为M是处处迷向的，由(30)式得

(32) $$\Omega_{ij}=-K\theta_i\wedge\theta_j,$$

其中K是M上的光滑函数，θ_i如(31)式给出。外微分(32)式得

(33) $$d\Omega_{ij}=-dK\wedge\theta_i\wedge\theta_j-Kd\theta_i\wedge\theta_j+K\theta_i\wedge d\theta_j.$$

但是
$$d\theta_i=dg_{ij}\wedge du^j$$
$$=(g_{ik}\omega_j^k+g_{kj}\omega_i^k)\wedge du^j$$
$$=(\omega_{ji}+\omega_{ij})\wedge du^j,$$
其中
$$\omega_{ij}=g_{jk}\omega_i^k=\Gamma_{ijk}du^k.$$
由于 Levi-Civita 连络的无挠性，
$$\omega_{ji}\wedge du^j=\Gamma_{jik}du^k\wedge du^j=0,$$
所以

(34) $$d\theta_i=\omega_{ij}\wedge du^j=\omega_i^j\wedge\theta_j.$$

另一方面，根据 Bianchi 恒等式（第四章定理2.2），

(35) $$d\Omega_{ij}=d(\Omega_i^l\cdot g_{lj})$$
$$=d\Omega_i^l\cdot g_{lj}+\Omega_i^l\wedge dg_{lj}$$
$$=(\omega_i^k\wedge\Omega_k^l-\Omega_i^k\wedge\omega_k^l)\cdot g_{lj}$$

$$+\Omega_i^l\wedge(\omega_{lj}+\omega_{jl})$$
$$=\omega_i^k\wedge\Omega_{kj}+\Omega_{ik}\wedge\omega_j^k,$$

因此

$$d\Omega_{ij}=-K\omega_i^k\wedge\theta_k\wedge\theta_j-K\theta_i\wedge\theta_k\wedge\omega_i^k$$
$$=-Kd\theta_i\wedge\theta_j+K\theta_i\wedge d\theta_j. \tag{36}$$

将(36)式和(33)式相比较，则得

$$dK\wedge\theta_i\wedge\theta_j=0. \tag{37}$$

因为$\{\theta_i\}$和$\{du^i\}$都是局部的余标架场，故可设

$$dK=\sum_{i=1}^m a^i\theta_i.$$

因为$m\geqslant3$，任取三个指标$1\leqslant i<j<k\leqslant m$，则有

$$dK\wedge\theta_i\wedge\theta_j=dK\wedge\theta_j\wedge\theta_k$$
$$=dK\wedge\theta_i\wedge\theta_k=0,$$

因此$a^i=0\ (1\leqslant i\leqslant m)$，即

$$dK=0. \tag{38}$$

因为M是连通流形，所以K是M上的常值函数。

例 设

$$ds^2=\frac{(du^1)^2+\cdots+(du^m)^2}{\left[1+\frac{K}{4}((u^1)^2+\cdots+(u^m)^2)\right]^2}, \tag{39}$$

其中K是实数，则以ds^2为度量形式的黎曼空间是常曲率空间，截面曲率为K(留给读者证明)。

(39)式是黎曼(B.Riemann)于1854年在德国Gottingen大学发表的就职演讲“论几何学的基本假设”中给出的，这篇演讲创立了现在所称的“黎曼几何”。

§4 Gauss-Bonnet定理

Gauss-Bonnet 定理是大范围微分几何学的一个经典定理，

它建立了黎曼流形的局部性质和整体性质之间的联系。本节只证明二维黎曼流形上的 Gauss-Bonnet 定理。

设M是定向的二维黎曼流形。若在坐标域U上取定向相符的光滑的标架场$\{e_1,e_2\}$，其对偶标架场是$\{\theta^1,\theta^2\}$，则黎曼度量是

(1) $$ds^2=g_{ij}\theta^i\theta^j, \quad 1\leqslant i,j\leqslant 2,$$

其中 $g_{ij}=G(e_i,e_j)$。根据黎曼几何基本定理，存在唯一确定的一组一次微分式 θ_i^j，使得

(2) $$\begin{cases} d\theta^i-\theta^j\wedge\theta_j^i=0, \\ dg_{ij}=g_{ik}\theta_j^k+g_{kj}\theta_i^k. \end{cases}$$

由 θ_i^j 定义了M上的 Levi-Civita 连络：

(3) $$De_i=\theta_i^j e_j.$$

连络的曲率形式是

(4) $$\Omega_i^j=d\theta_i^j-\theta_i^k\wedge\theta_k^j.$$

命 $\Omega_{ij}=\Omega_i^k g_{kj}$，则由 § 1 的(46)式，$\Omega_{ij}$ 是反对称的。现在指标 i,j 只取 1,2 这两个整数值，所以在曲率形式 Ω_{ij} 中不为零的只有 Ω_{12}。

我们要考察 Ω_{12} 在局部标架场改变时的变换规律。用Ω 表示曲率矩阵(Ω_i^j)，设

(5) $$G=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

若(e_1',e_2')是定义在坐标域$W\subset M$上定向相符的局部标架场，当$U\cap W\neq\varnothing$时，在$U\cap W$ 上则有

(6) $$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}, \qquad \det A>0.$$

用G',Ω'记关于标架场(e_1',e_2')的相应的量，则有

$$(7)\qquad G'=A\cdot G\cdot{}^tA,\qquad \Omega'=A\cdot\Omega\cdot A^{-1},$$

其中第二式就是第四章§1 的(29)式。因此

$$(8)\qquad \Omega'\cdot G'=A\cdot(\Omega\cdot G)\cdot{}^tA,$$

即

$$\begin{pmatrix} 0 & \Omega'_{12} \\ -\Omega'_{12} & 0 \end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} \\ -\Omega_{12} & 0 \end{pmatrix}\cdot{}^tA,$$

所以

$$(9)\qquad \Omega'_{12}=(\det A)\cdot\Omega_{12}.$$

从(7)式还得到

$$(10)\qquad \begin{aligned} g'=\det G'&=(\det A)^2\cdot\det G\\ &=(\det A)^2\cdot g, \end{aligned}$$

因此

$$(11)\qquad \frac{\Omega'_{12}}{\sqrt{g'}}=\frac{\Omega_{12}}{\sqrt{g}}.$$

这就是说，$\Omega_{12}/\sqrt{g}$是与定向相符的局部标架场的选取无关的，因而是定义在整个流形M上的二次外微分式。若取与M的定向一致的局部坐标系u^i，$\{e_1,e_2\}$正是自然基底，则

$$\begin{aligned}\Omega_{12}&=\frac{1}{2}R_{12kl}du^k\wedge du^l\\ &=R_{1212}du^1\wedge du^2,\end{aligned}$$

所以

$$(12)\qquad \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{g}}=\frac{R_{1212}}{g}\cdot\sqrt{g}\,du^1\wedge du^2=-Kd\sigma,$$

其中K是流形M的 Gauss 曲率，$d\sigma=\sqrt{g}\,du^1\wedge du^2$是$M$的有向面积元素。Gauss-Bonnet 定理要研究的就是二次外微分式$Kd\sigma$在M上的积分。

若$\{e_1,e_2\}$是与M定向相符的局部正交标架场，则

$g=g_{11}g_{22}-g_{12}^2=1$，所以

(13) $$Kd\sigma=-\Omega_{12}.$$

另一方面由§1 的(47)式，

$$\Omega_{12}=d\theta_{12}+\theta_1^i\wedge\theta_{i2},$$

因为这时 θ_i^j 是反对称的(见§1 定理1.1的注记2)，所以

(14) $$\Omega_{12}=d\theta_{12},$$

其中 $\theta_{12}=De_1\cdot e_2$。根据(13)和(14)两式得到

(15) $$Kd\sigma=-d\theta_{12}.$$

要指出的是，在开集$U\subset M$上只要存在光滑的、定向相符的正交标架场$\{e_1,e_2\}$，则在U上就存在连络形式θ_{12}，因而就有(15)式。

在定向的二维黎曼流形上，光滑的、定向相符的正交标架场是与流形上处处不为零的切矢量场相对应的。实际上，在标架场$\{e_1,e_2\}$中切矢量e_2是将e_1根据M的定向旋转90°得到的，所以定向相符的正交标架场$\{e_1,e_2\}$等价于单位切矢量场e_1。

我们把切矢量场的零点称为它的奇点。在此先说明切矢量场在奇点的指标的概念。假定在开集U上有一个仅以点p为奇点的光滑矢量场X，即当$q\in U-\{p\}$时，$X_q\neq0$。于是在$U-\{p\}$上有一个光滑的单位切矢量场

(16) $$a_1=\frac{X}{|X|},$$

它在$U-\{p\}$上决定了一个与M定向相符的正交标架场$\{a_1,a_2\}$。因此，如果$\{e_1,e_2\}$是在U上给定的与M定向相符的正交标架场，则可设

(17) $$\begin{cases} a_1=e_1\cos\alpha+e_2\sin\alpha, \\ a_2=-e_1\sin\alpha+e_2\cos\alpha, \end{cases}$$

其中$\alpha=\angle(e_1,a_1)$是从e_1到a_1的有向角。显然，α是多值函数；但是在每一点，α的各个值之间只差2π的某个整数倍，所以，

根据标架场和矢量场的可微性，在每一点的一个邻域内总可得到 α 的连续分支。这样得到的单值函数在这个邻域内是光滑的，而且 α 的不同的连续分支之间只差 2π 的某个整数倍。命

(18) $$\omega_{12}=Da_1\cdot a_2,$$

则由(17)，(18)及 $De_1\cdot e_2=\theta_{12}$ 得到

(19) $$\omega_{12}=d\alpha+\theta_{12}.$$

设 D 是包含点 p 的单连通区域，它的边界是光滑的简单闭曲线 $C=\partial D$，根据第三章§4，它具有从 M 诱导的定向；设 C 的弧长参数是 s，$0\leqslant s\leqslant L$，s 增大的方向与 C 的诱导定向一致，且 $C(0)=C(L)$。由于 C 的紧致性，它可以用有限多个邻域复盖住，而在每个邻域上存在 α 的连续分支，所以，在 C 上存在连续函数 $\alpha=\alpha(s)$，$0\leqslant s\leqslant L$。但一般来说 $\alpha(0)\neq\alpha(L)$；而且这样的连续函数之间只差 2π 的某个整数倍。由微积分基本定理得

(20) $$\alpha(L)-\alpha(0)=\int_0^L d\alpha,$$

但是 $\alpha(L)$ 和 $\alpha(0)$ 是在同一点 $C(0)$ 的矢量 e_1 与 a_1 之间的有向角，所以(20)式的左端是 2π 的整数倍，而且它与连续分支 $\alpha(s)$ 的选取无关，也与标架场 $\{e_1,e_2\}$ 的选择无关。

我们要证明(20)式的数值不依赖于包围点 p 的简单闭曲线 C 的选取。设有另一个包含 p 的单连通区域 $D_1\subset\mathring{D}$，命 $C_1=\partial D_1$，则 $D-\mathring{D}_1$ 是 M 上的带边区域，它的具有诱导定向的边界是 $C-C_1$①。根据(19)式及 Stokes 公式则有

(21) $$\begin{aligned}\int_{C-C_1}d\alpha&=\int_{C-C_1}\omega_{12}-\int_{C-C_1}\theta_{12}\\&=\int_{C-C_1}\omega_{12}-\int_{D-D_1}d\theta_{12}\end{aligned}$$

---

① 这里用了拓扑学中"链"的记法，实际上 $C-C_1$ 代表 C 和反向的 C_1 的并集，参看[14]。

$$=\int_{C-C_1}\omega_{12}+\int_{D-D_1}Kd\sigma.$$

右端显然与标架场$\{e_1,e_2\}$在$D-D_1$上的选取无关，故不妨可令$e_i=a_i$，$i=1,2$，这时$\bar{\alpha}=\angle(e_1,a_1)=0$，而(21)式仍然成立。所以

$$\int_{C-C_1}\omega_{12}+\int_{D-D_1}Kd\sigma=\int_{C-C_1}d\bar{\alpha}=0,$$

代入(21)式得

$$\int_{C-C_1}d\alpha=0,\quad \int_C d\alpha=\int_{C_1}d\alpha.$$

定义4.1 设X是以点p为孤立奇点的光滑切矢量场，设U是点p的坐标域，使U中除点p外不再含有X的奇点。则根据上面的构造所得的整数

$$I_p=\frac{1}{2\pi}[\alpha(L)-\alpha(0)]=\frac{1}{2\pi}\int_C d\alpha \tag{22}$$

与包围p的简单闭曲线C的选取无关，也与U上与M定向相符的标架场$\{e_1,e_2\}$的选取无关，称为切矢量场X在p点的指标。

在直观上，指标I_p表示切矢量场X围绕奇点p的旋转的次数。

将(19)式在C上积分，则得

$$\frac{1}{2\pi}\int_C\omega_{12}=\frac{1}{2\pi}\int_C d\alpha-\frac{1}{2\pi}\int_D Kd\sigma.$$

因为Gauss曲率K在点p是连续的，当D收缩为一点时，积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_D Kd\sigma\to 0;$$

然而$\frac{1}{2\pi}\int_C d\alpha$是常数$I_p$，故

$$I_p=\frac{1}{2\pi}\lim_{C\to p}\int_C\omega_{12}. \tag{23}$$

定理4.1（Gauss-Bonnet 定理） 设M是紧致的定向的二维黎曼流形，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K d\sigma = \chi(M), \tag{24}$$

其中 $\chi(M)$是流形M的 Euler 示性数。

证明 在M上取一个只有有限多个孤立奇点的光滑切矢量场X，其奇点是 p_i，$1 \leqslant i \leqslant r$。在每一点 p_i 取一个ε-球形邻域D_i，这里 ε 是充分小的正数，使每个 D_i 除 p_i 外不再含有X的奇点。命 $C_i = \partial D_i$，C_i 是具有从M在 D_i 上决定的诱导定向的简单闭曲线。这样，由切矢量场X在$M - \bigcup_i D_i$上决定了定向相符的光滑的正交标架场$\{e_1, e_2\}$，$e_1 = X/|X|$。设

$$\theta_{12} = De_1 \cdot e_2, \tag{25}$$

由(15)式可知在$M - \bigcup_i D_i$上有

$$d\theta_{12} = \Omega_{12} = -K d\sigma.$$

根据 Stokes 公式，则得

$$\begin{aligned} \int_{M - \bigcup_i D_i} K d\sigma &= -\int_{M - \bigcup_i D_i} d\theta_{12} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \int_{\partial D_i} \theta_{12} = \sum_{i=1}^{r} \int_{C_i} \theta_{12}. \end{aligned} \tag{26}$$

这里要指出一点：$M - \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant r} D_i$ 的边界在集合的意义上是与 $\bigcup_{1 \leqslant i \leqslant r} D_i$ 的边界是一致的，但是前者在边界上诱导的定向恰好与 $\sum_i \partial D_i = \sum_i C_i$ 的定向相反。上面的第二个等号用了这个事实。

因为正交标架场$\{e_1, e_2\}$实际上在$M - \bigcup_i \{p_i\}$上有定义，所以

(26)在$\varepsilon \to 0$的过程中始终是成立的。由于K是在整个M上定义的连续可微的函数，所以

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{M-\bigcup_i D_i} K d\sigma = \int_M K d\sigma.$$

而(26)式末端在$\varepsilon \to 0$时正是$2\pi \sum_{i=1}^{r} I_{p_i}$(见(23)式)，因此

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K d\sigma = \sum_{i=1}^{r} I_{p_i}. \tag{27}$$

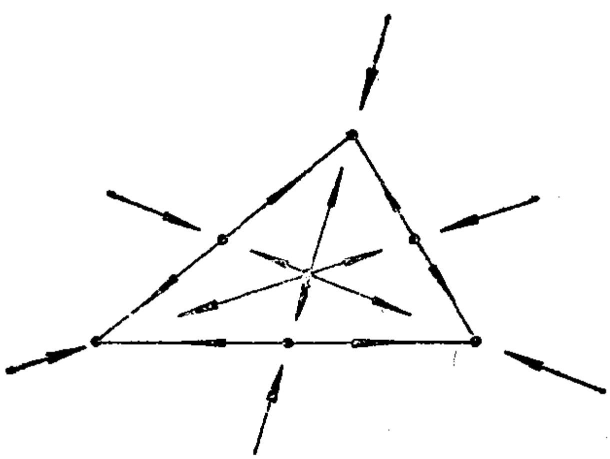

图 11

上式的左边与切矢量场X无关。我们在流形M上造一个特殊的切矢量场：取M的一个三角剖分(因为M是紧致的，它是可剖的[14])，造光滑的切矢量场X，使它以上述剖分的各维面的重心为奇点，并且使它在二维面、一维面及零维面的重心处的指标分别是$+1$，-1和$+1$(如图11所示)。因此

$$\sum I_{p_i} = f - e + v = \chi(M), \tag{28}$$

其中f, e, v分别是M的剖分的二维面、一维面和零维面的个数。所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K d\sigma = \chi(M).$$

从上面的证明中我们已经得到 Hopf 的指标定理：

系 设在紧致的定向的二维黎曼流形上有一个光滑切矢量场，其奇点个数有限，则它在各奇点的指标和等于该流形的

Euler 示性数。

注记 由上面的系可知，紧致、定向的二维光滑流形上有处处非零的光滑切矢量场的必要条件是：该流形的 Euler 示性数为零。反过来，由二维流形的分类，紧致、定向的二维光滑流形的 Euler 数如果是零，则它必可微同胚于环面，因此，必有处处非零的光滑切矢量场。

Gauss-Bonnet 公式可推广到带边界的情形。设 C 是 M 上一条光滑曲线，a_1 是 C 的单位切矢量。取 C 的单位法矢量 a_2，使 $\{a_1, a_2\}$ 决定的定向与 M 相符。因为 Da_1 和 a_2 共线，故可设

$$k_g = \frac{Da_1}{ds} \cdot a_2, \tag{29}$$

k_g 称为曲线 C 的测地曲率。显然，C 是测地线的充分必要条件是

$$k_g \equiv 0.$$

假定 D 是定向的二维黎曼流形 M 上的紧致的带边区域，边界 ∂D 由有限多条分段光滑的简单闭曲线组成，它有从 D 诱导的定向。设 ∂D 在各角点 p_i 的内角是 α_i，$1 \leqslant i \leqslant l$，则有 Gauss-Bonnet 公式(见附录一)

$$\sum_{i=1}^{p} (\pi - \alpha_i) + \int_{\partial D} k_g ds + \iint_D K d\sigma = 2\pi\chi(D), \tag{30}$$

其中 k_g 是沿 ∂D 的测地曲率，$\chi(D)$ 是区域 D 的 Euler 示性数。

如果 D 是 M 上的测地三角形，∂D 是由三段测地线组成的闭曲线，则 $\chi(D) = 1$，故(30)式成为

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \iint_D K d\sigma. \tag{31}$$

这推广了定理"平面上三角形的内角和等于180°"。当 M 是球面时，公式(31)是 Gauss 得到的。

仔细地分析 Gauss-Bonnet 定理的证明，不难发现关键是把 M 上的二次外微分式 $K d\sigma$ 表示成 $-d\theta_{12}$，而后者是在 M 的标架

丛上考虑的，也就是在M的球丛(M的单位切矢量构成的纤维丛)上考虑的。这样，原来在M上的积分就转换成在球丛的截面上的积分，然而球丛的截面，即单位切矢量场未必存在，于是通过Stokes定理化为绕奇点的积分，得到矢量场在奇点的指标。上面的想法在证明高维流形上的Gauss-Bonnet定理时得到充分的体现。

设M是$2n$维紧致的定向黎曼流形。设$\{e_i, 1\leqslant i\leqslant 2n\}$是局部的正交标架场，对偶标架场是$\{\theta_i, 1\leqslant i\leqslant 2n\}$，连络形式和曲率形式分别是$\omega_{ij}$和$\Omega_{ij}$。考虑$2n$次外微分式

(32)
$$\Omega=(-1)^n\frac{1}{2^{2n}\pi^n n!}\delta^{i_1\cdots i_{2n}}_{1\cdots\cdots 2n}\Omega_{i_1i_2}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_{2n-1}i_{2n}},$$

则Ω与局部正交标架场的选取是无关的，因而它是M上大范围定义的$2n$次外微分式。Ω可以记成

(33)
$$\Omega=Kd\sigma,$$

其中$d\sigma=\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{2n}$是$M$的体积元素，$K$是$M$的Lipschitz-Killing曲率

(34)
$$K=\frac{1}{2^{2n}(2\pi)^n n!}\delta^{i_1\cdots i_{2n}}_{j_1\cdots j_{2n}}R_{i_1i_2j_1j_2}\cdots R_{i_{2n-1}i_{2n}j_{2n-1}j_{2n}}.$$

Gauss-Bonnet定理说

(35)
$$\int_M Kd\sigma=\chi(M).$$

证明这个定理的关键是在M的球丛(M的单位切矢量构成的纤维丛)上把外微分式Ω表成一个$2n-1$次外微分式Π的外微分：

(36)
$$\Omega=d\Pi.$$

详细的证明可看S.S.Chern, A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, 45 (1944), 747—752.

§5 完 全 性

对于一个黎曼流形，一个明显的整体问题是：它是不是另一个黎曼流形的眞开子流形。与此有关的一个重要概念就是完全性，它本是度量空间的性质。因此，我们先讨论关于度量空间的一般结果，再研究完全的黎曼流形。

定义5.1 闭区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 到度量空间 M 的连续映象称为 M 中的一段弧。半开区间 $0\leqslant t<1$ 到M的连续映象称为M中的一条路径。

设 $p(t)$，$0\leqslant t\leqslant 1$ 是M中的一段弧，如果对于任意的 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\leqslant 1$ 都有

(1) $$\rho(p(t_1),p(t_2))+\rho(p(t_2),p(t_3))=\rho(p(t_1),p(t_3)),$$

其中 ρ 是度量空间M中的距离函数，则称 $p(t)$ 为M中的一条线段。M中以 p，q 为始点和终点的线段记作pq。

因为闭区间(或半开区间)都是彼此同胚的，所以上述定义中的区间长度可以不限于 1 。把一段弧(或路径)限制在其定义域的闭子区间上，所得的弧称为它的子弧。

设 $p(t)$ $(0\leqslant t<1)$是M的一条路径。如果：1）它是 M 的闭子集；2）它的每一段子弧都是线段，则称 $p(t)$ 是M的一条射线。若函数 $\rho(p(0),p(t))$ $(0\leqslant t<1)$是有界的，则称它的上确界是该射线的长度。

例1 设M是平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上去掉一点所成的空间，$M=\boldsymbol{R}^2-\{0\}$，它关于从 $\boldsymbol{R}^2$ 诱导的距离函数成为一个度量空间。命

$$p_1(t)=(t-1,0),\quad 0\leqslant t<1,$$

则 $p_1(t)$ 是M的一条射线，显然它的长度是有限的，即它的长度是 1。但是射线

$$p_2(t)=\left(1,\frac{1}{1-t}\right),\quad 0\leqslant t<1$$

沒有有限的长度。

例2 不是所有的度量空间都存在射线，如在紧致度量空间中就沒有射线。若设 $p(t)$ $(0\leqslant t<1)$是紧致的度量空间 M 中的射线，则极限 $\lim\limits_{t\to 1} p(t)=p_0\in M$ 存在；因射线是M的闭子集，故 p_0 在射线上，即有 $0\leqslant t_0<1$，使 $p(t_0)=p_0$。取 $t_1=(t_0+1)/2$，则 $t_0<t_1<1$。根据射线的定义，当 $t_1<t<1$ 时有

$$\rho(p(t_0),p(t_1))+\rho(p(t_1),p(t))=\rho(p(t_0),p(t)),$$

故

$$\rho(p(t_0),p(t))\geqslant\rho(p(t_0),p(t_1))>0.$$

但是当 $t\to 1$ 时，左端趋于零，这是一个矛盾。所以M中不可能存在射线。

显然 $\boldsymbol{R}^2$ 中的单位圆盘 $D=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$是紧致的度量空间，所以在$D$中不能有射线。

引理1 设度量空间M中有一列点 $a_1,\cdots,a_n$满足条件

$$\sum_{i=1}^{n-1}\rho(a_i,a_{i+1})=\rho(a_1,a_n), \tag{2}$$

则对任意一组整数 $1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n$，都有

$$\sum_{r=1}^{k-1}\rho(a_{i_r},a_{i_{r+1}})=\rho(a_{i_1},a_{i_k}). \tag{3}$$

证明 若命题不眞，则存在一组整数 $1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n$，使得

$$\sum_{r=1}^{k-1}\rho(a_{i_r},a_{i_{r+1}})>\rho(a_{i_1},a_{i_k}).$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n-1}\rho(a_i,a_{i+1})$$

$$\geqslant\rho(a_1,a_{i_1})+\sum_{r=1}^{k-1}\rho(a_{i_r},a_{i_{r+1}})+\rho(a_{i_k},a_n)$$

$$>\rho(a_1,a_{i_1})+\rho(a_{i_1},a_{i_k})+\rho(a_{i_k},a_n)$$

$$\geqslant\rho(a_1,a_n),$$

这与条件(2)相矛盾，所以(3)式必须成立。

引理2 设 a_ka_{k+1} $(1\leqslant k\leqslant n-1)$是度量空间$M$中的线段，并且

$$\sum_{k=1}^{n-1}\rho(a_k,a_{k+1})=\rho(a_1,a_n), \tag{4}$$

则 $\gamma=\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{k+1}$ 是线段。

证明 设 $n=3$。显然 $a_1a_2+a_2a_3$是一段弧，现要证明它是线段。假定 x,y,z 是该弧上任意三点，且 y 在 x,z 之间。若 x 和 z 同时属于 a_1a_2，或 a_2a_3，则由线段的定义得

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)=\rho(x,z).$$

现在不妨设 $x,y\in a_1a_2$，$z\in a_2a_3$，故

$$\rho(a_1,x)+\rho(x,y)+\rho(y,a_2)=\rho(a_1,a_2),$$

$$\rho(a_2,z)+\rho(z,a_3)=\rho(a_2,a_3),$$

因此由条件(4)得

$$\rho(a_1,x)+\rho(x,y)+\rho(y,a_2)+\rho(a_2,z)+\rho(z,a_3)$$

$$=\rho(a_1,a_2)+\rho(a_2,a_3)=\rho(a_1,a_3).$$

由引理1则有

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)=\rho(x,z),$$

故 $a_1a_2+a_2a_3$ 是线段。

利用类似的推理，不难用归纳法证明引理对任意的 n 都是成立的。

引理3 设 β: $p(t)$, $0\leqslant t<1$ 是度量空间M中的一条路径，而且它的每一段子弧都是线段. 若 β 是M中的闭子集，则 β 是射线；若 β 不是M的闭子集，则极限 $\lim\limits_{t\to1}p(t)=p$ 存在，并且 $\beta+p$ 是线段。

证明 前一个结论是射线的定义。现在假定 β 不是 M 的闭子集，则必有 β 的一个极限点 $p\overline{\in}\beta$，因此有序列 $t_\nu\to1$，$0\leqslant t_\nu<1$，使得 $a_\nu=p(t_\nu)\to p(\nu\to+\infty)$。我们要证明 $\lim\limits_{t\to1}p(t)=p$。

不妨可设 $\{t_\nu\}$ 是单调上升的序列。因为 $p(t_\nu)\to p(\nu\to+\infty)$，故对于任意给定的正数 ε，必存在正整数 N，使得当 $\nu>N$ 时有

$$(5)\qquad \rho(p(t_\nu),p)<\frac{\varepsilon}{4};$$

因此当 $\nu,\nu'>N$ 时总是有

$$(6)\qquad \rho(p(t_\nu),p(t_{\nu'}))\leqslant\rho(p(t_\nu),p)+\rho(p(t_{\nu'}),p)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=1-t_{N+1}>0$，则当 $0<1-t<\delta$ 时，$t_{N+1}<t<1$。由于 $t_\nu\to1$，则对每一个这样的 t 总可以找到指标 $\nu'>N$，使 $t_{N+1}<t<t_{\nu'}<1$。因为 β 上的子弧是线段，所以

$$(7)\qquad \begin{aligned}&\rho(p(t_{N+1}),p(t))\\&\leqslant\rho(p(t_{N+1}),p(t))+\rho(p(t),p(t_{\nu'}))\\&=\rho(p(t_{N+1}),p(t_{\nu'}))<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

因此只要 $0<1-t<\delta$，总是有

$$\rho(p(t),p)\leqslant\rho(p(t),p(t_{N+1}))+\rho(p(t_{N+1}),p)<\varepsilon.$$

即

$$\lim_{t\to1}p(t)=p.$$

命 $p(1)=p$；我们要证明 $p(t),0\leqslant t\leqslant1$ 是 M 中的线段。设 x,y,z 是这段弧上任意三点，且 y 在 x 和 z 之间。若 $z\neq p(1)$，则由假设得到

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)=\rho(x,z).$$

若 $z=p(1)$，不妨设 $y\neq p(1)$。因为 $a_\nu=p(t_\nu)\to p$，所以对充分大的 ν，y 必落在 x 和 a_ν 之间。因为 xa_ν 是线段，故

$$\rho(x,y)+\rho(y,a_\nu)=\rho(x,a_\nu).$$

让 $\nu \to +\infty$，则上式给出

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z)。$$

因此 $\beta + p$ 是线段。

现在假定M是连通的黎曼流形，它关于从黎曼度量诱导的距离函数（§2 的 (46) 式）成为一个度量空间。下面的引理表明流形 M 上实现两点之间距离的曲线段恰是定义5.1所说的线段。

引理4 设 γ 是 M 上连结 p, q 两点的可求长曲线，并且它的长度等于 $\rho(p, q)$，则 γ 是黎曼流形M上的测地线，也是作为度量空间的M上的线段。反之，若 γ 是M上连结 p, q 的线段，则 γ 是测地线，并且 γ 上任意两点之间的距离等于 γ 在这两点之间的弧长。

连结两点的测地线，如果实现了这两点之间的距离，则称它是最短测地线。引理的意思是：在黎曼流形上最短测地线和线段是等价的概念。

证明 设 r 是 γ 上任意一点，取 r 的法坐标域U，使它具有定理2.4所要求的性质。任意取一点 $r_1 \in \gamma \cap U$，使 γ 在 r, r_1 之间的部分 γ_1 落在U内。根据定理2.4，在U中存在唯一的一条测地线 g 连结 r 和 r_1，并且 g 是U中连结 r 和 r_1 的最短线。若$g \neq \gamma_1$，则 γ_1 的长度必大于 g 的长度，这与 γ 是实现 p, q 两点之间的距离的曲线段相矛盾，因此 γ 是测地线。

任取三点 $x, y, z \in \gamma$，且 y 在 x, z 之间，则

$$\overset{\frown}{px} + \overset{\frown}{xy} + \overset{\frown}{yz} + \overset{\frown}{zq} = \overset{\frown}{pq} = \rho(p, q),$$

其中记号$\overset{\frown}{pq}$表示曲线在 p, q 之间的弧长。根据黎曼流形上两点之间的距离的定义，则得

$$\begin{aligned}\rho(p, q) &\leqslant \rho(p, x) + \rho(x, y) + \rho(y, z) + \rho(z, q)\\ &\leqslant \overset{\frown}{px} + \overset{\frown}{xy} + \overset{\frown}{yz} + \overset{\frown}{zq} = \rho(p, q),\end{aligned}$$

故上式等号必须成立。由引理1得

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = \rho(x, z),$$

故 γ 是线段。

反过来，设 γ 是连结 p，q 的线段。在 γ 上取分点 $p=r_0, r_1, \cdots, r_n=q$，使得 $\rho(r_i, r_{i+1})=\frac{1}{n}\rho(p, q)$。则

$$\gamma \text{ 的长度} = \sum_{i=1}^{n-1} \widehat{r_i r_{i+1}}.$$

当 n 充分大时，弧长 $\widehat{r_i r_{i+1}}$ 和 $\rho(r_i, r_{i+1})$ 的差是 $1/n$ 的高阶无穷小，故

$$\gamma \text{ 的长度} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\rho(r_i, r_{i+1}) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \rho(p, q) + o(1),$$

即 γ 的长度 $=\rho(p, q)$，γ 是测地线。

引理5 在M的每一点 p 有一个正数 $\rho(p)$，使得：

1）对于M上任意一点 q，只要 $\rho(p, q) \leqslant \rho(p)$，则必存在连结 p，q 的线段；

2）若 $\rho(p, q) > \rho(p)$，则必有一点 $x \in M$，使得 $\rho(p, x) = \rho(p)$，并且

$$\rho(p, x) + \rho(x, q) = \rho(p, q).$$

证明 我们取点 p 的半径为 ε 的球形法坐标邻域W，使 ε 具有定理2.5所述的性质。只要取正数 $\rho(p) < \varepsilon$ 就行了。若 $\rho(p, q) < \rho(p)$，则 $q \in W$，故在W中存在唯一的测地线连结 p，q，且它的长度恰是 $\rho(p, q)$（见定理2.6最后的说明）。根据引理 4，这条测地线是线段 pq，故 1）成立。

设 $q \in M, \rho(p, q) > \rho(p)$。根据距离的定义，必有可求长弧的序列$\{\beta_\nu\}$，当 $\nu \to \infty$时，β_ν 的长度 $s_\nu \to \rho(p, q)$。在 β_ν 上取一点 x_ν，使 $\rho(p, x_\nu) = \rho(p)$，则 x_ν 落在以 p 为中心、以 $\rho(p)$ 为半径的超球面 $\Sigma_{\rho(p)}$上。由于 $\Sigma_{\rho(p)}$的紧致性，必有$\{x_\nu\}$的子序列收敛于 $\Sigma_{\rho(p)}$上一点 x。不妨设$\{x_\nu\}$本身是收敛的。因为

$$\rho(x_\nu, q) \leqslant \widehat{x_\nu q} \leqslant s_\nu - \rho(p),$$

故

$$\rho(p, q) \leqslant \rho(p, x_\nu) + \rho(x_\nu, q) \leqslant s_\nu,$$

命 $\nu \to \infty$，则 $s_\nu \to \rho(p, q)$，故

$$\rho(p, q) = \rho(p, x) + \rho(x, q).$$

定理5.1 设M是连通的黎曼流形，p，q是M上任意两点。则下列命题中必有一个成立：

1） 存在线段连结 p，q 两点；

2） 存在从 p 出发的射线 γ，使得 γ 上任意一点适合条件

$$\rho(p, x) + \rho(x, q) = \rho(p, q).$$

证明 假定不存在连结 p，q 的线段。命 $a_1 = p$；我们要构造线段的序列 $a_i a_{i+1}$，$i = 1, 2, \cdots$，使得对每一个正整数 k，它们满足条件

$$(C_k) \qquad \rho(a_1, a_2) + \cdots + \rho(a_{k-1}, a_k) + \rho(a_k, q) = \rho(p, q).$$

若已有线段 $a_1 a_2, \cdots, a_{k-1} a_k$ 使 (C_k) 成立，则由引理1，

$$(8) \qquad \rho(a_1, a_2) + \cdots + \rho(a_{k-1}, a_k) = \rho(a_1, a_k),$$

$$(9) \qquad \rho(a_1, a_k) + \rho(a_k, q) = \rho(a_1, q).$$

根据引理 2，$\gamma_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{i+1}$ 是线段 $a_1 a_k$，因此 a_k 和 q 不能用线段连结。考虑点集

$$S_k = \{x \in M \mid \text{能用线段连结 } x \text{ 和 } a_k，\text{且}$$
$$\rho(a_k, x) + \rho(x, q) = \rho(a_k, q)\},$$

根据引理 5，集合 $S_k \neq \varnothing$，并且

$$(10) \qquad T_{k+1} = \sup_{x \in S_k} \rho(a_k, x) > 0.$$

显然 $T_{k+1} \leqslant \rho(a_k, q)$。任取一点 $a_{k+1} \in S_k$，并使

$$(11) \qquad \rho(a_k, a_{k+1}) \geqslant \frac{1}{2} T_{k+1},$$

那末线段 $a_1 a_2, \cdots, a_k a_{k+1}$ 满足条件 (C_{k+1})。命

(12) $$\gamma=\sum_{i=1}^{\infty}a_ia_{i+1},$$

则 γ 是一条路径。γ 的任意一段子弧必定是某线段 $\sum_{i=1}^{k-1}a_ia_{i+1}$ 的子弧(只要 k 充分大)，所以它是线段。根据引理3，要证明 γ 是射线只须证明 $\{a_k\}$ 沒有极限点。

为此假定 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=r\in M$，则由引理3，$\gamma+r$ 是线段。在(9)式中让 $k\to\infty$，则得

(13) $$\rho(a_1,r)+\rho(r,q)=\rho(a_1,q),$$

同理，

(14) $$\rho(a_k,r)+\rho(r,q)=\rho(a_k,q).$$

因为已假定不能用线段连结 a_1,q，故 $r\neq q$。根据引理5，必有点 $x\neq r$，使得 x 和 r 能用线段连结，并且

(15) $$\rho(r,x)+\rho(x,q)=\rho(r,q).$$

联合(14)与(15)两式则有

$$\rho(a_k,r)+\rho(r,x)+\rho(x,q)=\rho(a_k,q),$$

由引理1得

$$\rho(a_k,r)+\rho(r,x)=\rho(a_k,x).$$

于是，根据引理2，a_kr+rx 是线段，$x\in S_k$，故

(16) $$T_{k+1}\geqslant\rho(a_k,x)\geqslant\rho(r,x)>0.$$

上式对任意的 $k\geqslant1$ 都成立。但是在另一方面

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}T_{k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\rho(a_k,a_{k+1})\leqslant\rho(a_1,q),$$

故必须有 $\lim\limits_{k\to\infty}T_{k+1}=0$，这与(16)式是矛盾的。因此序列 $\{a_k\}$ 不能有极限点，γ 是射线。

在 γ 上任取一点 x，则当 k 充分大时点 x 落在线段 $\sum_{i=1}^{k-1}a_ia_{i+1}$ 内，所以

$$\rho(a_1,x)+\rho(x,a_k)=\rho(a_1,a_k);$$

联合(9)式则得

$$\rho(a_1,x)+\rho(x,a_k)+\rho(a_k,q)=\rho(a_1,q).$$

根据引理1则有

$$\rho(a_1,x)+\rho(x,q)=\rho(a_1,q), \tag{17}$$

定理得证。

注记 在第2)种情形，因为

$$\rho(p,x)\leqslant\rho(p,q),\quad x\in\gamma,$$

所以射线 γ 有有限的长度。因此，如果连通黎曼流形上沒有有限长度的射线，则任意两点必能用线段连结起来。由例2可知，紧致的连通黎曼流形上任意两点都能用线段连结。

定义5.2 设$\{a_n\}$是度量空间M的一个点序列。如果对于任意给定的正数 ε，总是可找到正整数 $N(\varepsilon)$，使得只要 $n,l>N(\varepsilon)$ 就有

$$\rho(a_n,a_l)<\varepsilon,$$

则称$\{a_n\}$是一个 Cauchy 序列。

定义5.3 若度量空间M上每一个 Cauchy 序列都是收斂的，则称M是完全的。如果连通的黎曼流形M关于从黎曼度量诱导的距离函数成为完全的度量空间，则称M是完全的黎曼流形。

根据收斂序列的 Cauchy 判别准则，欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 自然是完全的度量空间，也可以看作完全的黎曼流形。但是 $\boldsymbol{R}^m$ 不是紧致的。因此从几何的观点看，紧致性并不是最适宜的条件。对黎曼流形的整体研究，完全性这个条件被认为是最合适的。

定理5.2 设M是连通的黎曼流形，则下面三个条件是彼此等价的：

1） M是完全的；

2） M上任意一条测地线可以无限延长；

3） 每个有界的无穷子集必有极限点。

证明 1)$\Rightarrow$2)。假定M有一条从点 p 出发的测地线 γ 不能再延长，其长度 L 是有限的，则它可以表成 $p(t),0\leqslant t<1$，而且极

限 $\lim\limits_{t\to 1} p(t)$ 不存在（若极限 $\lim\limits_{t\to 1} p(t)=q$ 存在，命 $p(1)=q$，则得到测地线段 $p(t), 0\leqslant t\leqslant 1$；然而测地线段总是可以从端点向外延伸，这与假定相矛盾）。任取一个单调递增数列 $t_k, 0\leqslant t_k<1$，且 $t_k\to 1\ (k\to\infty)$。命 $a_k=p(t_{k-1})$，$k=1,2,\cdots$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\rho(a_k, a_{k+1})\leqslant L; \tag{18}$$

因此对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>l>N$ 时总是有

$$\sum_{k=l}^{n-1}\rho(a_k, a_{k+1})<\varepsilon,$$

所以

$$\rho(a_l, a_n)<\varepsilon. \tag{19}$$

这说明 $\{a_k\}$ 是 Cauchy 序列。因为 M 的完全性，故存在一点 $q\in M$，使 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k=q$。显然，点 q 与序列 $\{t_k\}$ 的选取无关，所以 $\lim\limits_{t\to 1} p(t)=q$，这是一个矛盾。故 M 上任意一条测地线必能无限延长。

2)⇒3)。假定 M 上任意一条测地线都可以无限延长，因此 M 上没有有限长度的射线。根据定理5.1，M 上任意两点都可以用线段连结。设 S 是 M 的一个有界无穷子集，故有一点 $a\in M$ 及正数 K，使 S 包含在以 a 为中心、以 K 为半径的开球内。在 S 中取一个无穷序列 $\{x_k\}$，使其中的点两两不同。因为 $\rho(a, x_k)<K$，$\{\rho(a, x_k)\}$ 是有界无穷数列，故必有收敛子序列。不妨设该数列本身就是收敛的，于是可命

$$\lim_{k\to\infty}\rho(a, x_k)=l\leqslant K.$$

用线段 ax_k 连结 a, x_k；设 v_k 是 ax_k 在点 a 的单位切矢量，则 v_k 落在 $T_a(M)$ 的以原点为中心的单位球面上。由单位球面的紧致性，不妨设 $\{v_k\}$ 在这个单位球面上收敛于 v。从点 a 出发沿切方向 v 作测地线 γ；因 γ 可无限延长，所以在 γ 上可以取一点 x_0，使 γ 在 a, x_0 之间的长度为 l。线段 ax_k 是从 a 出发，与 v_k 相切并且长度为 $\rho(a, x_k)$ 的测地线。由于测地线对初始条件的连续依赖

性，故$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$，这说明 x_0 是S的一个极限点。

3)⇒1)是拓扑学熟知的定理①。

系1 在完全的黎曼流形上，任意两点可用最短测地线连结。

证明 因为在完全的黎曼流形上测地线能无限延长，所以不能有有限长度的射线。根据定理5.1，任意两点可用线段连结，即可用最短测地线连结。

系2 紧致的连通黎曼流形是完全的。

证明 因为在紧致的度量空间中任意的无穷子集都有极限点，根据定理5.2，它是完全的。

定义5.4 设M是连通的黎曼流形；如果M不能是另一个连通黎曼流形的真开子流形，则称M是不可延拓的。

定理5.3 完全的黎曼流形是不可延拓的。

证明 设M是完全的黎曼流形。若M是连通的黎曼流形M'的真开子流形，则可取边界点$p\in(M'-M)\cap\overline{M}$。根据引理3，存在点$p$在$M'$中的$\varepsilon$-球形邻域$U$，使得$U$中任意一点都可以用$M'$中的线段与$p$连结。因$p\in\overline{M}$，故有$q\in M\cap U$。线段$qp$在$M$中的部分是一条从$q$出发的射线，它的长度$\leqslant\rho(p,q)$，这与$M$的完全性相抵触。所以$M$是不可延拓的。

但是完全性的限制确实比不可延拓性更强。例如：$E^2-\{0\}$的通用复盖流形Π是一个连通的黎曼流形，它是不可延拓的，然而它却不是完全的。

在Π中取坐标系(ρ,θ)，$0<\rho<+\infty$，$-\infty<\theta<+\infty$，黎曼度量是

---

① 实际上，如果$\{a_n\}$是Cauchy序列，则$\{a_n\}$必是有界集。由条件3)，存在收敛子序列$\{a_{n_k}\}\to a_0(k\to\infty)$。因为

$$|\rho(a_n,a_0)-\rho(a_m,a_0)|\leqslant\rho(a_n,a_m),$$

故$\{\rho(a_n,a_0)\}$是Cauchy序列。因此

$$\lim_{n\to\infty}\rho(a_n,a_0)=\lim_{k\to\infty}\rho(a_{n_k},a_0)=0,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a_0$。

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2 d\theta^2;$$

设复盖映射是 $\pi:\Pi\to E^2-\{0\}$，使得

$$\pi(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta).$$

那么 π 在局部上是保持黎曼度量的。若黎曼流形 Π 能延拓，则必把 $\rho=0$ 的点加进去；但是这样得到的不成为二维黎曼流形。显然 Π 不是完全的，因为 Π 中两点

$$(\rho_1,\theta_1)=(1,0),\quad (\rho_2,\theta_2)=(1,\pi)$$

之间的距离是 2，但是不能用 Π 中的线段连结。

第六章　李群和活动标架法

§1　李　　群

实数域有很丰富的结构，一方面它有代数结构，可以进行加、减、乘、除等四则运算；另一方面它有拓扑结构和微分结构，可以进行连续性和可微性的讨论。本节要讨论的李群就是群的结构和微分结构的复合体。在这里我们只简要地介绍李群及其李代数的一些基本概念。

定义1.1　设G是一个非空集合。如果

1）G是一个群(群的运算记作乘法)；

2）G是r维光滑流形；

3）逆射$\tau:G\to G$，使$\tau(g)=g^{-1}$，以及乘法运算$\varphi:G\times G\to G$，使$\varphi(g_1,g_2)=g_1\cdot g_2$，都是光滑映射，则称$G$是一个$r$维李群。

因为$\tau^2=\mathrm{id}:G\to G$(即$\tau^2(g)=g$)，所以逆射$\tau$是$G$到自身的可微同胚。另外，$G$还有右移动和左移动两组可微同胚，定义如下：设$g\in G$，$g$在$G$上产生的右移动是$R_g:G\to G$，使

$$R_g(x)=\varphi(x,g)=x\cdot g;\tag{1}$$

左移动是$L_g:G\to G$，使

$$L_g(x)=\varphi(g,x)=g\cdot x.\tag{2}$$

因为L_g的逆映射是$L_{g^{-1}}$，R_g的逆映射是$R_{g^{-1}}$，所以L_g和R_g都是G到自身的可微同胚。

例1　$\boldsymbol{R}^n$关于矢量加法成为一个n维李群。

例2　n维环群$\boldsymbol{T}^n$。

在$\boldsymbol{R}^n$中取n个线性无关的矢量e_i，$1\leqslant i\leqslant n$，它们生成的格是

(3) $$L=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ie_i,\ a_i\in \boldsymbol{Z}\right\}=\boldsymbol{Z}^n,$$

这是加法群，是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子群。环群 $\boldsymbol{T}^n$ 是商群 $\boldsymbol{R}^n/L$，在拓扑上它是 n 维环面，所以它是 n 维紧致李群。

若 G_1,G_2 是两个李群，在积流形 $G_1\times G_2$ 上定义运算如下：设 $(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in G_1\times G_2$，命

(4) $$(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)=(a_1\cdot b_1,a_2\cdot b_2),$$

则 $G_1\times G_2$ 关于运算(4)成为一个李群，称为李群 G_1 和 G_2 的直积。

自然，一维环群 $\boldsymbol{T}^1$ 可以看作平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上的一个圆周 $S^1=\{e^{i2\pi t}\}\cong\boldsymbol{R}^1/\boldsymbol{Z}^1$，所以 n 维环群就是 n 个圆周的直积：

(5) $$\boldsymbol{T}^n\cong S^1\times\cdots\times S^1\ (n\ 个)。$$

例 3 一般线性群 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 和 $GL(n;\boldsymbol{C})$。

$GL(n;\boldsymbol{R})$ 是 $n\times n$ 阶非退化实矩阵所成的集合，群运算是矩阵的乘法。因为 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 是 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ 中的开子集，因而它有从 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ 诱导的微分结构。设

$$A=(A_i^j),\quad B=(B_i^j)\in GL(n;\boldsymbol{R}),$$

则

(6) $$(A\cdot B)_i^j=\sum_{k=1}^{n}A_i^kB_k^j;$$

右端是矩阵 A 和 B 的分量的多项式，所以映射

(7) $$\varphi(A,B)=A\cdot B$$

是光滑的。此外，A^{-1} 的元素是分量 A_i^j 的有理分式，所以逆射也是光滑的，因此 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 是李群。

同样，$n\times n$ 阶非退化复矩阵所成的乘法群 $GL(n;\boldsymbol{C})$ 是 $2n^2$ 维李群。

例 4 $GL(1;\boldsymbol{C})$ 是非零复数构成的乘法群，又记作 $\boldsymbol{C}^*$。在拓扑上 $\boldsymbol{C}^*$ 和 $\boldsymbol{R}^2-\{0\}$ 是一致的，其元素 $x+iy$ 的坐标是 (x,y)，

因此 $\boldsymbol{C}^*$ 是二维光滑流形。

设 $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$，$\alpha = 1, 2$，$z_\alpha \neq 0$，它们的乘法用坐标表示则是

$$(8) \qquad (x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1);$$

元素 $z = x + iy$ 的逆是

$$(9) \qquad (x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \ -\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

显然乘法运算和逆射都是光滑的，$\boldsymbol{C}^*$ 是二维李群。

例 5 设 G 是李群，H 是 G 的子群。如果 H 是 G 的正则子流形，则可证明：映射

$$\varphi|_{H\times H}: H\times H \to H \subset G,$$
$$\tau|_H: H \to H \subset G.$$

都是光滑的(请读者自证，可参阅[2，p.83])。

设

$$SL(n;\boldsymbol{R}) = \{A| \in GL(n;\boldsymbol{R}), \det A = 1\},$$
$$O(n;\boldsymbol{R}) = \{A| \in GL(n;\boldsymbol{R}), A\cdot {}^tA = I\},$$

其中 I 表示单位矩阵，即 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 的单位元素。则 $SL(n;\boldsymbol{R})$ 和 $O(n;\boldsymbol{R})$ 都是 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 的子群，并且是 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 的正则子流形，所以它们都是李群。$SL(n;\boldsymbol{R})$ 和 $O(n;\boldsymbol{R})$ 分别称为特殊线性(或幺模)群和实正交群。

设 G 是 r 维李群，单位元素是 e。因对每一个 $a\in G$，$R_{a^{-1}}$ 是 G 到自身的可微同胚，且 $R_{a^{-1}}(a) = e$，所以切映射 $(R_{a^{-1}})_*: G_a \to G_e$ 是线性同构，这里 G_a 表示流形 G 在点 a 的切空间。设 $X\in G_a$，命

$$(10) \qquad \omega(X) = (R_{a^{-1}})_* X,$$

则 ω 是定义在 G 上、取值在 G_e 中的一次微分式，称为李群 G 的右基本微分式，或 Maurer-Cartan 形式。若在 G_e 中取定基底 δ_i，$1\leqslant i\leqslant r$，则可命

(11) $$\omega=\sum_{i=1}^{r}\omega^i\delta_i,$$

其中 ω^i $(1\leqslant i\leqslant r)$是李群 G 上 r 个处处线性无关的一次微分式。

现在我们求 ω^i 的坐标表达式。分别取点 e 与 a 的局部坐标系 $(U;x^i)$，$(W;y^i)$。因为 φ 的连续性，当 U 充分小时必有 a 的邻域 $W_1\subset W$，使得 $\varphi(U\times W_1)\subset W$。取 $\delta_i=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_e$，命

$$\varphi^i(x,y)=y^i\circ\varphi(x,y),\quad (x,y)\in U\times W_1.$$

那末线性同构 $(R_a)_*:G_e\to G_a$ 由下式给出：

(12) $$(R_a)_*\delta_i=\sum_{j=1}^{r}\left.\frac{\partial\varphi^j(x,a)}{\partial x^i}\right|_{x=e}\cdot\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_a.$$

因为 $(R_{a^{-1}})_*\circ(R_a)_*=\mathrm{id}:G_e\to G_e$，所以

$$(R_{a^{-1}})_*\left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_a=\sum_{j=1}^{r}\Lambda_i^j(a)\delta_j,$$

其中矩阵 $(\Lambda_i^j(a))$ 是 $\left(\left.\frac{\partial\varphi^i(x,a)}{\partial x^j}\right|_{x=e}\right)$的逆矩阵。因此

(13) $$\omega^i=\sum_{j=1}^{r}\Lambda_j^i(a)dy^j.$$

从表达式可知 ω^i 是光滑的一次微分式。

定理1.1 设 $\sigma:G\to G$ 是光滑映射。σ 是李群 G 的右移动的充分必要条件是：它保持右基本微分式不变，即

$$\sigma^*\omega^i=\omega^i,\quad 1\leqslant i\leqslant r.$$

证明 设 σ 是右移动 R_x，$x\in G$，则对任意的 $X\in G_a$ 有

$$\begin{aligned}(R_x)^*\omega(X)&=\omega((R_x)_*X)\\&=(R_{(ax)^{-1}})_*\circ(R_x)_*X\\&=(R_{a^{-1}})_*X=\omega(X),\end{aligned}$$

所以

(14) $$(R_x)^*\omega=\omega.$$

反过来，假定σ保持右基本微分式不变。因为Pfaff方程组

(15) $\qquad \omega^i(a)=\omega^i(b), \quad (a,b)\in G\times G,\ 1\leqslant i\leqslant r,$

在流形$G\times G$上决定了一个r维平面场，因此它的r维积分流形是唯一的。现在，映射$\sigma: G\to G$保持右基本微分式不变。所以

$$\omega^i(X)=\omega^i(\sigma_* X),$$

其中$X\in G_a$，$\sigma_* X\in G_{\sigma(a)}$。这说明映射$\sigma$给出了方程组(15)的、过$(e,\sigma(e))$的$r$维积分流形。此外右移动$R_{\sigma(e)}$也给出了满足相同初条件的$r$维积分流形，所以由唯一性得

$$\sigma=R_{\sigma(e)}.$$

因为$d\circ\sigma^*=\sigma^*\circ d$(第三章定理2.6)，所以$d\omega^i$仍在右移动下不变。若命

(16) $$\begin{cases} d\omega^i=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\,\omega^j\wedge\omega^k, \\ c^i_{jk}+c^i_{kj}=0. \end{cases}$$

因为ω^i和$d\omega^i$都是右不变的，所以c^i_{jk}是常数，称为李群G的结构常数。方程(16)称为李群G的结构方程，或Maurer-Cartan方程。

定理1.2 结构常数c^i_{jk}适合Jacobi恒等式

(17) $$\sum_{j=1}^{r}(c^i_{jk}c^j_{hl}+c^i_{jh}c^j_{lk}+c^i_{jl}c^j_{kh})=0.$$

证明 外微分(16)式得

$$0=-\frac{1}{2}\sum_{j,k}c^i_{jk}(d\omega^j\wedge\omega^k-\omega^j\wedge d\omega^k)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j,k,h,l}c^i_{jk}c^j_{hl}\omega^k\wedge\omega^h\wedge\omega^l$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{k,h,l=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}(c^i_{jk}c^j_{hl}+c^i_{jh}c^j_{lk}$$

$$+c^i_{jl}c^j_{kh})\omega^k\wedge\omega^h\wedge\omega^l,$$

而括号内的式子关于 k,h,l 是反对称的，于是得到(17)式。

注记 结构常数的重要性在于它决定了局部李群的结构。所谓局部李群 V 是一个光滑流形，并且对某个元素 $e\in V$，有一个从 (e,e) 在 $V\times V$ 中的邻域 W 到 V 的光滑映射，记作 $(x,y)\mapsto x\cdot y$，它满足下列条件：

1) 若 $(e,y)\in W$，则 $e\cdot y=y$；若 $(x,e)\in W$，也有 $x\cdot e=x$；

2) 若 $(x,y),(y,z),(x\cdot y,z),(x,y\cdot z)\in W$，则

$$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z).$$

元素 e 称为局部李群 V 的单位元素。

局部李群和李群的区别在于它的乘法只定义在单位元素 e 的近傍。显然李群也是局部李群。对于局部李群同样可定义 Maurer-Cartan 形式和结构常数。我们有下面的定理：

若 r^3 个常数 c^i_{jk} 满足条件

$$(18)\qquad \begin{cases} c^i_{jk}+c^i_{kj}=0 \\ \sum_{j=1}^{r}(c^i_{jk}c^j_{hl}+c^i_{jh}c^j_{lk}+c^i_{jl}c^j_{kh})=0, \end{cases}$$

则存在 r 维局部李群 V 以 c^i_{jk} 为结构常数，而且任意两个这样的局部李群是同构的(参阅[7])。

定义1.2 设 X 是李群 G 上的光滑切矢量场。若对任意的 $a\in G$ 都有

$$(19)\qquad (R_a)_*X=X,$$

则称 X 是 G 上的右不变矢量场。

任意取切矢量 $X_e\in G_e$，命

$$(20)\qquad X_a=(R_a)_*X_e,$$

则得 G 上的光滑切矢量场 X。显然，右基本微分式 ω 在 X 上的值是常值，即

$$(21)\qquad \omega(X)=X_e.$$

由定理1.1得

$$\omega(X)=(R_a)^*\omega(X)=\omega((R_a)_*X),$$

所以

$$(R_a)_*X=X,$$

即(20)式所定义的切矢量场是右不变矢量场。

用 X_i 表示 $\delta_i\in G_e$ 经过右移动产生的右不变矢量场，则 X_i $(1\leqslant i\leqslant r)$ 是 G 上处处线性无关的切矢量场，而且 G 上任意一个右不变矢量场必是 X_i 的常系数线性组合。因此 G 上右不变矢量场的集合构成 r 维矢量空间，记作 $\mathscr{G}$，它与 G_e 是同构的。

由(21)式得

$$\omega(X_i)=\delta_i,$$

即

$$\omega^i(X_j)=\langle X_j,\omega^i\rangle=\delta^i_j, \tag{22}$$

所以右基本微分式 ω^i $(1\leqslant i\leqslant r)$ 和右不变矢量场 X_j $(1\leqslant j\leqslant r)$ 恰好构成李群 G 上彼此对偶的余标架场和标架场。因此，G 上的切矢量场 X 是右不变的充分必要条件是：右基本微分式在 X 上的值是常数。

定理1.3 若 X,Y 是 G 上的右不变矢量场，则 $[X,Y]$ 仍是 G 上的右不变矢量场。

证明 根据第三章定理2.3，

$$\begin{aligned}&\langle X\wedge Y,d\omega^i\rangle\\ &=X\langle Y,\omega^i\rangle-Y\langle X,\omega^i\rangle-\langle[X,Y],\omega^i\rangle.\end{aligned} \tag{23}$$

从结构方程(16)得到

$$\begin{aligned}&\langle X\wedge Y,d\omega^i\rangle\\ &=-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r}c^i_{jk}\langle X\wedge Y,\omega^j\wedge\omega^k\rangle\\ &=-\sum_{j,k=1}^{r}c^i_{jk}\omega^j(X)\omega^k(Y).\end{aligned}$$

因为 X,Y 是右不变矢量场，所以

$$\omega^i(X)=\text{const}, \quad \omega^i(Y)=\text{const},$$

于是由(23)式得到

$$\omega^i([X,Y])=\sum_{j,k=1}^{r} c^i_{jk}\omega^j(X)\omega^k(Y)=\text{const}, \tag{24}$$

这意味着$[X,Y]$是右不变的。

定理1.3说明，光滑切矢量场的 Poisson 括号积在 $\mathscr{G}$ 中是封闭的，因此定义了$\mathscr{G}$中的乘法运算。这种乘法运算满足下列条件(第一章§4)：

1) 分配律

$$[a_1X_1+a_2X_2,Y]=a_1[X_1,Y]+a_2[X_2,Y];$$

2) 反交换律

$$[X,Y]=-[Y,X];$$

3) Jacobi 恒等式

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0.$$

一个 n 维实矢量空间如果有满足分配律、反交换律和 Jacobi 恒等式的乘法运算，则称它是一个 n 维李代数。例如：三维欧氏空间关于矢量的叉乘成为一个三维李代数；流形M上全体光滑切矢量场关于 Poisson 括号积成为无限维李代数。这样，定理1.3说明李群G上全体右不变矢量场所成的矢量空间 $\mathscr{G}$ 是一个 r 维的李代数。我们把李代数 $\mathscr{G}$ 叫做李群 G 的李代数。

李群的结构常数给出了李代数 $\mathscr{G}$ 的乘法表。实际上，由(24)式得到

$$\omega^i([X_j,X_k])=c^i_{jk},$$

所以

$$[X_j,X_k]=\sum_{i=1}^{r}c^i_{jk}X_i. \tag{25}$$

结构常数 c^i_{jk} 关于下指标的反对称性和 Jacobi 恒等式对应于括号积[,]满足反交换律和 Jacobi 恒等式。因此，如果命

$$(26)\qquad [\delta_j,\delta_k]=\sum_{i=1}^{r}c^i_{jk}\delta_i,$$

则 G_e 也成为 r 维李代数。这样，G_e 和 $\mathscr{G}$ 作为李代数也是同构的。通常也把 G_e 关于(26)式定义的乘法构成的李代数叫做李群 G 的李代数。

注记 完全类似地可以讨论李群 G 上的左基本微分式 $\tilde{\omega}$ 和左不变矢量场。设

$$(27)\qquad \tilde{\omega}=\sum_{i=1}^{r}\tilde{\omega}^i\delta_i,$$

且 $\tilde{X}_i$ 是 δ_i 经左移动产生的左不变矢量场，那么

$$(28)\qquad \tilde{\omega}^i(\tilde{X}_j)=\langle\tilde{X}_j,\tilde{\omega}^i\rangle=\delta^i_j.$$

设结构方程是

$$(29)\qquad d\tilde{\omega}^i=-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r}\tilde{c}^i_{jk}\tilde{\omega}^j\wedge\tilde{\omega}^k,$$

或

$$(30)\qquad [\tilde{X}_j,\tilde{X}_k]=\sum_{i=1}^{r}\tilde{c}^i_{jk}\tilde{X}_i,$$

经过简单的计算可知，结构常数 $\tilde{c}^i_{jk}$ 和 c^i_{jk} 只差一个符号，即

$$(31)\qquad \tilde{c}^i_{jk}=-c^i_{jk}.$$

(留给读者证明)。

要注意的是，利用右不变矢量场的括号积和左不变矢量场的括号积在 G_e 上定义了两个乘法运算，分别记作$[\ ,\ ]_{左}$和$[\ ,\ ]_{右}$。即

$$(32)\qquad \begin{cases}[\delta_i,\delta_j]_{右}=[X_i,X_j]_e,\\ [\delta_i,\delta_j]_{左}=[\tilde{X}_i,\tilde{X}_j]_e.\end{cases}$$

由(31)式得知，这两种运算差一个符号：

$$(33)\qquad [\delta_i,\delta_j]_{右}=-[\delta_i,\delta_j]_{左}.$$

本书把 G_e 叫做李群的 G 的李代数时，其乘法运算是(26)式给出

的，即用的是$[\ ,\ ]_{右}$。

例 6 计算一般线性群 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 的结构常数。

$GL(n;\boldsymbol{R})$ 的元素是 $n\times n$ 阶非退化的实矩阵。设 $A=(A_i^j)\in GL(n;\boldsymbol{R})$，则 $A_i^j(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 是流形 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 上的坐标系，所以 dA_i^j $(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 给出了 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 上的余标架场，$dA=(dA_i^j)$ 是 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 在点 A 的任意的切矢量。所以 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 的右基本微分式是

(34) $$\omega=dA\cdot A^{-1}.$$

外微分(34)式，得

(35) $$d\omega=-dA\wedge dA^{-1}=\omega\wedge\omega.$$

用 $\mathrm{gl}(n;\boldsymbol{R})$ 记李群 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 在单位元素 I（单位矩阵）的切空间，这是 n^2 维矢量空间 $\boldsymbol{R}^{n^2}$，其元素是 $n\times n$ 阶实矩阵。在这种表示下，$\mathrm{gl}(n;\boldsymbol{R})$ 的基底是 E_i^j，$1\leqslant i,j\leqslant n$，其中 E_i^j 表示在第 j 行、第 i 列交叉处的元素为 1，其余元素是零的 $n\times n$ 阶矩阵。因此可命

(36) $$\omega=\sum_{i,j=1}^{n}\omega_i^jE_j^i=(\omega_i^j).$$

由(35)式得

$$\begin{aligned}d\omega_i^j&=\sum_{k=1}^{n}\omega_i^k\wedge\omega_k^j\\&=\frac{1}{2}\sum_{p,q,r,s=1}^{n}(\delta_i^p\delta_q^j\delta_s^r\\&\qquad-\delta_i^r\delta_s^j\delta_q^p)\omega_p^s\wedge\omega_r^q,\end{aligned}$$

所以李群 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 的结构常数是

(37) $$c_{(p,s)(r,q)}^{(i,j)}=-\delta_i^p\delta_q^j\delta_s^r+\delta_i^r\delta_s^j\delta_q^p.$$

李代数 $\mathrm{gl}(n;\boldsymbol{R})$ 的乘法表是

(38) $$[E_s^p,E_q^r]=\delta_q^pE_s^r-\delta_s^rE_q^p.$$

设 $A,B\in\mathrm{gl}(n;\boldsymbol{R})$，用分量表示是

$$A=(A_p^s)=\sum_{p,s=1}^{n}A_p^sE_s^p,$$

$$B=(B_r^q)=\sum_{r,q=1}^{n}B_r^qE_q^r,$$

根据(38)式则得

(39) $$[A,B]=B\cdot A-A\cdot B.$$

定义1.3 设 G,H 是两个李群。若有光滑映射 $f:H\to G$，它又是群的同态，则称 f 是从李群 H 到 G 的同态。若 f 还是可微同胚，则称 f 是李群 H 到 G 的同构。

定理1.4 设 $f:H\to G$ 是李群 H 到 G 的同态，则 f 在它们的李代数之间诱导出同态 $f_*:\mathscr{H}\to\mathscr{G}$。如果 f 是李群的同构，则 f_* 是李代数的同构。

证明 用 f_* 表示光滑映射 f 的切映射，首先我们证明 f_* 把李群 H 上的右不变矢量场映入到李群 G 的右不变矢量场。任取 $X_e\in H_e$，命

$$Y_{\bar{e}}=f_*X_e\in G_{\bar{e}},$$

其中 e 是 H 的单位元素，$\bar{e}=f(e)$ 是 G 的单位元素。命 X,Y 分别是 X_e 和 $Y_{\bar{e}}$ 在各自的李群上生成的右不变矢量场，则对任意的 $a\in H$，有

$$\begin{aligned}f_*X_a&=f_*\circ(R_a)_*X_e\\&=(R_{\bar{a}})_*\circ f_*X_e=Y_{\bar{a}},\end{aligned}$$

其中 $\bar{a}=f(a)$。因此 H 上的右不变矢量场在 f_* 下的象可以拓广成 G 上的右不变矢量场，我们把这种对应仍记作 $f_*:\mathscr{H}\to\mathscr{G}$。

此外，切映射 f_* 和 Poisson 括号积是可交换的，所以对 $X_1,X_2\in\mathscr{H}$ 有

$$f_*[X_1,X_2]_a=[Y_1,Y_2]_{\bar{a}},\quad a\in H,$$

其中 Y_i 是由 f_*X_i 在 G 上拓广所成的右不变矢量场。所以 $f_*:\mathscr{H}\to\mathscr{G}$ 是李代数的同态。

当 f 是李群的同构时，f_* 也是可逆的，所以 $f_*:\mathscr{H}\to\mathscr{G}$ 是李代数的同构。

定义1.4 设 H,G 是两个李群，$H\subset G$。如果

1） H 是 G 的子群；

2） 嵌入映射 $\mathrm{id}:H\to G$ 是子流形，

则称 H 是 G 的李子群。

在例 5 中已经提到，如果 H 是李群 G 的正则子流形，而且 H 是 G 的子群，则 H 必定是李群，因而是 G 的李子群。如 $SL(n;\boldsymbol{R})$ 和 $O(n;\boldsymbol{R})$ 都是 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 的李子群。但是，一般说来李群 G 的李子群 H 不必是 G 的正则子流形。

例 7 设 $G=\boldsymbol{T}^2$。取无理数 a，命

$$H=\{(t,at),t\in\boldsymbol{R}\}/L,$$

其中 $L=\{(n_1,n_2),n_i\in\boldsymbol{Z}\}$，则 H 是 G 的李子群，但是 H 不是 G 的正则子流形。

根据定理1.4，因为嵌入映射 $\mathrm{id}:H\to G$ 是李群的同态，因此它诱导出李代数 $\mathscr{H}$ 到 $\mathscr{G}$ 的同态。因为 H_e 是 G_e 的子空间，所以 G_e 中的李代数乘法(26)限制在 H_e 上是封闭的。

一般线性群是典型的李群，它的结构已在例 6 作了计算。因此，我们经常通过一般线性群来研究李群。设 G 是 r 维李群，我们把李群 G 到 $GL(n;\boldsymbol{R})$ 的一个同态称为李群 G 的一个 n 次表示。每一个 r 维李群都有一个自然的 r 次表示——伴随表示。

设 $x\in G$，命

$$\alpha_x(g)=xgx^{-1}=L_x\circ R_{x^{-1}}(g), \tag{40}$$

则 α_x 是李群 G 的自同构，称为 G 的内自同构。根据定理1.4。α_x 的切映射 $(\alpha_x)_*$ 给出了李代数 G_e 的自同构。记

$$\mathrm{Ad}(x)=(\alpha_x)_*:G_e\to G_e. \tag{41}$$

$\mathrm{Ad}(x)$ 是作用在线性空间 G_e 上的非退化线性变换，所以，它是 $GL(r;\boldsymbol{R})$ 中的一个元素，于是得到映射

$$\mathrm{Ad}:G\to GL(r;\boldsymbol{R}).$$

显然 Ad 是群的同态。因为任取 $x, y\in G$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(x\cdot y)&=(a_{(x\cdot y)})_*\\&=(a_x\circ a_y)_*=\mathrm{Ad}(x)\circ\mathrm{Ad}(y).\end{aligned}$$

若用局部坐标表示，Ad 是用局部坐标的光滑函数给出的，因此 $\mathrm{Ad}: G\to GL(n;\boldsymbol{R})$ 是李群的同态。

定义1.5 用(41)式给出的李群的同态 $\mathrm{Ad}: G\to GL(r;\boldsymbol{R})$ 称为 r 维李群 G 的伴随表示。

由定理1.4，伴随表示 $\mathrm{Ad}: G\to GL(r;\boldsymbol{R})$ 的切映射诱导出李代数 G_e 到 $\mathrm{gl}(r;\boldsymbol{R})$ 的同态 ad，称之为李群 G 的李代数 G_e 的伴随表示。这时，$\mathrm{gl}(r;\boldsymbol{R})$ 看作 G_e 到自身的线性变换的集合。对于任意的 $X\in G_e$，则 $\mathrm{ad}(X)$ 是作用在 G_e 上的线性变换。在下一节要证明：

$$\mathrm{ad}(X)\cdot Y=-[X,Y]. \tag{42}$$

§2 李氏变换群

变换群在几何中是十分重要的。根据 Klein 的观点，几何学研究的对象正是图形在一定的变换群作用下保持不变的性质；由于所考虑的变换群不同，就有欧氏几何、仿射几何和射影几何等各种不同的几何学。李群在流形上的作用，即所谓的李氏变换群则是上述典型变换群的推广，这对近代微分几何学产生重要的影响。

定义2.1 设 M 是 m 维光滑流形。若有光滑映射 $\varphi: \boldsymbol{R}\times M\to M$，对任意的 $(t,p)\in \boldsymbol{R}\times M$，记

$$\varphi_t(p)=\varphi(t,p),$$

它们满足下列条件：

1） $\varphi_0(p)=p$；

2） 对任意的实数 s,t，$\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$，

则称$\mathbf{R}$光滑地(左)作用在流形M上，或称φ_t是作用在M上的单参数可微变换群。

显然，$\varphi_t: M \to M$是光滑映射。根据上面的条件立即可得$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$，即每一个$\varphi_t$都是可逆的，所以$\varphi_t$是$M$到自身的可微同胚。取$p \in M$，命

(1) $$\gamma_p(t) = \varphi_t(p),$$

则γ_p是M上通过点p的一条参数曲线，叫做单参数变换群φ_t通过点p的轨线。

若用X_p表示轨线γ_p在点p(即$t=0$)的切矢量，于是得到流形M上的切矢量场X，称为单参数可微变换群φ_t在M上诱导的切矢量场。显然X是光滑的。设f是M上的光滑函数，则

(2) $$\begin{aligned}(Xf)(p) &= X_p f \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma_p(t)) - f(p)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\varphi(t,p)) - f(p)}{t},\end{aligned}$$

所以Xf是M上的光滑函数，这就证明了X的光滑性。要紧的是，轨线γ_p是切矢量场X的积分曲线，即在轨线γ_p上任意一点$q = \gamma_p(s)$，X_q正是轨线γ_p在$t=s$处的切矢量。实际上，因为$\gamma_q(t) = \gamma_p(t+s)$，所以

(3) $$X_q = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma_q(t) - q}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma_p(t+s) - \gamma_p(s)}{t}.$$

从(3)式得到

$$\begin{aligned}X_q f &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\varphi(t+s,p)) - f(\varphi(s,p))}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f\circ\varphi_s(\gamma_p(t)) - f\circ\varphi_s(p)}{t} \\ &= X_p(f\circ\varphi_s) = ((\varphi_s)_* X_p) f,\end{aligned}$$

即

(4) $$(\varphi_s)_* X_p = X_{\gamma_p(s)}.$$

反问题是：在M上给定一个光滑的切矢量场X，是否存在M的单参数可微变换群φ_t，使X是φ_t所诱导的切矢量场？换句话说，切矢量场X是否决定一个单参数可微变换群？定理2.1回答了这个问题。

定义2.2 设U是光滑流形M的一个开邻域。若有光滑映射$\varphi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times U\to M$，对任意的$p\in U$，$|t|<\varepsilon$，记$\varphi_t(p)=\varphi(t,p)$，它们满足下列条件：

1）对任意的$p\in U$，$\varphi_0(p)=p$；

2）若$|s|<\varepsilon$，$|t|<\varepsilon$，$|t+s|<\varepsilon$，并且$p,\varphi_t(p)\in U$，则

$$\varphi_{s+t}(p)=\varphi_s\circ\varphi_t(p),$$

那么φ_t叫做作用在U上的局部单参数变换群。

局部单参数变换群φ_t同样在U上诱导出光滑的切矢量场。设$p\in U$，取p的局部坐标系$(V;x^i)$，$V\subset U$。由于映射φ的光滑性，只要取充分小的$\varepsilon_0<\varepsilon$，则当$|t|<\varepsilon_0$，总是有$\varphi_t(p)\in V$。从(2)式可得

$$X_p=\sum_{i=1}^{m}X_p^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \tag{5}$$

其中

$$X_p^i=\left.\frac{dx^i(\gamma_p(t))}{dt}\right|_{t=0}. \tag{6}$$

在p和$q=\gamma_p(s)$都属于V时，我们也有

$$X_q=\sum_{i=1}^{m}X_q^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q. \tag{7}$$

其中

$$X_q^i=\left.\frac{dx^i(\gamma_p(t))}{dt}\right|_{t=s}. \tag{8}$$

定理2.1 设X是定义在M上的光滑切矢量场，则在任意一点$p\in M$存在一个邻域U和作用在U上的局部单参数变换群φ_t，

$|t|<\varepsilon$，使得 $X|_U$ 恰是 φ_t 在 U 上所诱导的切矢量场。

证明 取 p 的一个局部坐标系 $(V;x^i)$，考虑常微分方程组

$$\frac{dx^i}{dt}=X^i,\ 1\leqslant i\leqslant m, \tag{9}$$

其中 X^i 是切矢量场 X 关于自然基底 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\ 1\leqslant i\leqslant m\right\}$ 的分量，即

$$X=\sum_{i=1}^{m}X^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

根据常微分方程的理论，存在 $\varepsilon_1>0$ 及 p 的邻域 $U_1\subset V$，使得对任意一点 $q\in U_1$，方程组(9)有唯一的一条积分曲线 $x_q(t)$ ($|t|<\varepsilon_1$) 通过点 q，即它满足下列方程和初始条件：

$$\begin{cases}\dfrac{dx_q^i(t)}{dt}=X^i(x_q(t)), & |t|<\varepsilon_1,\ 1\leqslant i\leqslant m,\\ x_q(0)=q,\end{cases} \tag{10}$$

并且解 $x_q(t)$ 对 (t,q) 是光滑依赖的。命

$$\varphi(t,q)=\varphi_t(q)=x_q(t),\qquad q\in U_1,\ |t|<\varepsilon_1, \tag{11}$$

则 φ 是从 $(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)\times U_1$ 到 M 的光滑映射。现在要证明这是局部单参数变换群。

设 $|t|<\varepsilon_1$，$|s|<\varepsilon_1$，$|t+s|<\varepsilon_1$，并且 $q,\varphi_s(q)\in U_1$。因为 $x_q(t+s)$ 和 $x_{\varphi_s(q)}(t)$ 都是方程组(9)的，通过 $x_q(s)=\varphi_s(q)$ 的积分曲线，于是根据解的唯一性得到

$$\varphi_{t+s}(q)=x_q(t+s)=x_{\varphi_s(q)}(t)=\varphi_t\circ\varphi_s(q),$$

所以 φ_t 是诱导出 $X|_{U_1}$ 的局部单参数变换群。

设在 p 点，$X_p\neq0$，则根据第一章定理4.3，在点 p 附近存在局部坐标 u^i，使得 $X=\frac{\partial}{\partial u^1}$。这时局部单参数变换群 φ_t 有特别简单的表达式：

$$\varphi_t(u^1,\cdots,u^m)=(u^1+t,u^2,\cdots,u^m), \tag{12}$$

即 φ_t 表现为沿 u^1-曲线的平移。

注记 显然，方程组(9)与局部坐标的选择无关。如果有两个坐标域V_1,V_2，它们的交$V_1\cap V_2$不是空集，且有局部单参数变换群$\varphi_t^{(1)}$和$\varphi_t^{(2)}$分别作用在V_1和V_2上，但是它们是由同一个光滑切矢量场X决定的，则由方程组(9)的解的唯一性可知，$\varphi_t^{(1)}$和$\varphi_t^{(2)}$在$V_1\cap V_2$上的作用是相同的。

系 设X是紧致的光滑流形M上的光滑切矢量场，则X在M上决定一个单参数可微变换群。

证明 由定理2.1，对每一点p都有一个邻域$U(p)$和正数$\varepsilon(p)$，使得在$U(p)$上有局部单参数变换群$\varphi_t^{(p)}$。根据注记，在这些$U(p)$的两两重叠部分，相应的局部单参数变换群的作用是相同的。因为M的紧致性，在$\{U(p),p\in M\}$中必有有限的子复盖，设为$\{U_\alpha,1\leqslant\alpha\leqslant r\}$，相应的正数记为$\varepsilon_\alpha$。命$\varepsilon=\min\limits_{1\leqslant\alpha\leqslant r}\varepsilon_\alpha$。现在可以定义如下的映射$\varphi:(-\varepsilon,\varepsilon)\times M\to M$：若$p\in U_\alpha$，则命

$$\varphi(t,p)=\varphi_t^{(\alpha)}(p),\qquad |t|<\varepsilon. \tag{13}$$

要把φ开拓成从$\boldsymbol{R}\times M$到M的映射是很容易的。设t是任意实数，必有正整数N，使$|t|/N<\varepsilon$，于是

$$\varphi(t,p)=[\varphi_{t/N}]^N(p) \tag{14}$$

与N的选取是无关的，右端表示局部变换$\varphi_{t/N}$在M上连续作用N次。显然$\varphi:\boldsymbol{R}\times M\to M$是切矢量场$X$所决定的单参数可微变换群。

定理2.2 设φ_t是作用在光滑流形M上的单参数变换群，X是φ_t在M上所诱导的切矢量场。若$\psi:M\to M$是可微同胚，则ψ_*X是单参数变换群$\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}$在$M$上诱导的切矢量场。

证明 设f是流形M上任意的光滑函数，则根据定义有

$$\begin{aligned}(\psi_*X_p)f&=X_p(f\circ\psi)\\&=\frac{d}{dt}f\circ\psi(\varphi_t(p))\big|_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}f(\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}(\psi(p)))\big|_{t=0},\end{aligned}$$

即 ψ_*X_p 是单参数变换群 $\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}$的通过点 $\psi(p)$ 的轨线在该点的切矢量，所以 ψ_*X 是 $\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}$在$M$上诱导的切矢量场。

定义2.3 设X是流形M上的光滑切矢量场。$\psi:M\to M$ 是可微同胚。如果

$$\psi_*X=X, \tag{15}$$

则称切矢量场X在 ψ 下是不变的。

由定理2.2可得到：

系 切矢量场X在可微同胚 $\psi:M\to M$ 下不变的充分必要条件是：X决定的局部单参数变换群 φ_t 和 ψ 的作用是可交换的。

定理2.3 设X,Y是流形M上任意两个光滑切矢量场。若X生成的局部单参数变换群是 φ_t，则

$$\begin{aligned}[X,Y]&=\lim_{t\to 0}\frac{Y-(\varphi_t)_*Y}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t^{-1})_*Y-Y}{t}.\end{aligned} \tag{16}$$

证明 我们只须证明第一个等号成立。设 $p\in M$，f 是定义在点 p 附近的光滑函数。命

$$F(t)=f(\varphi_t(p)). \tag{17}$$

因为

$$\begin{aligned}F(t)-F(0)&=\int_0^1\frac{dF(st)}{ds}ds\\&=t\int_0^1 F'(u)|_{u=st}ds,\end{aligned}$$

所以

$$f(\varphi_t(p))=f(p)+tg_t(p), \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned}g_t(p)&=\int_0^1 F'(u)|_{u=st}ds\\&=\int_0^1\frac{df(\varphi_u(p))}{du}\bigg|_{u=st}ds,\end{aligned} \tag{19}$$

并且

$$(20)\qquad g_0(p)=\int_0^1 F'(u)\,|_{u=0}ds$$

$$=\frac{df(\varphi_u(p))}{du}\Big|_{u=0}=X_pf.$$

将(16)式中间的算子作用在 f 上则得

$$\left(\lim_{t\to 0}\frac{Y-(\varphi_t)_*Y}{t}\right)_p f$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{Y_pf-Y_{\varphi_t^{-1}(p)}(f\circ\varphi_t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{Y_pf-Y_{\varphi_t^{-1}(p)}f}{t}-\lim_{t\to 0}Y_{\varphi_t^{-1}(p)}(g_t)$$

$$=X_p(Yf)-Y_p(Xf)=[X,Y]_pf.$$

因此

$$[X,Y]=\lim_{t\to 0}\frac{Y-(\varphi_t)_*Y}{t}.$$

注记 1 设 γ_p 是单参数可微变换群 φ_t 的通过点 p 的轨线。因为 φ_t^{-1} 把 γ_p 上的点 $q=\gamma_p(t)=\varphi_t(p)$ 映到点 p。因此 $(\varphi_t^{-1})_*$ 建立了切空间 $T_q(M)$ 到 $T_p(M)$ 的同构。若 Y 是流形 M 的定义在轨线 γ_p 上的切矢量场，则 $(\varphi_t^{-1})_*Y_{\varphi_t(p)}$ 是切空间 $T_p(M)$ 中的一条曲线。定理2.3说明，$[X,Y]_p$ 正是这条曲线在 $t=0$ 处的切矢量，所以它是切矢量场 Y 沿 X 的轨线的变化率。通常把(16)式右端的算子称为矢量场 Y 关于 X 的李导数，记作 L_XY。于是定理2.3成为

$$(21)\qquad L_XY=[X,Y].$$

李导数的概念可以推广到 M 上任意的张量场。实际上，映射 $(\varphi_t)^*$ 建立了余切空间 $T_q^*(M)$ 到 $T_p^*(M)$ 的同构，它和 $(\varphi_t^{-1})_*$ 一起在张量空间之间可定义如下的同构 $\Phi_t:T_s^r(\varphi_t(p))\to T_s^r(p)$，使得对任意的 $v_1,\cdots,v_r\in T_{\varphi_t(p)}(M)$，及 $v^{*1},\cdots,v^{*s}\in T^*_{\varphi_t(p)}(M)$，

有

(22)
$$\Phi_t(v_1\otimes\cdots\otimes v_r\otimes v^{*1}\otimes\cdots\otimes v^{*s})$$
$$=(\varphi_t^{-1})_*v_1\otimes\cdots\otimes(\varphi_t^{-1})_*v_r\otimes\varphi_t^*v^{*1}$$
$$\otimes\cdots\otimes\varphi_t^*v^{*s}.$$

这样，(r,s)型张量场ξ关于X的李导数$L_X\xi$定义为

(23)
$$L_X\xi=\lim_{t\to 0}\frac{\Phi_t(\xi)-\xi}{t}.$$

显然，$L_X\xi$仍是(r,s)型张量场。

数量场f关于切矢量场X的李导数L_Xf规定为f关于X的方向导数。

注记 2 外微分式的李导数是定义(23)的特例。设ω是M上的r次微分式，则$L_X\omega$仍是r次微分式，定义为

(24)
$$L_X\omega=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*\omega-\omega}{t}.$$

不难验证，对于M上任意r个光滑的切矢量场$Y_1,\cdots,Y_r$有

(25)
$$\langle Y_1\wedge\cdots\wedge Y_r,L_X\omega\rangle$$
$$=X\langle Y_1\wedge\cdots\wedge Y_r,\omega\rangle$$
$$-\sum_{i=1}^{r}\langle Y_1\wedge\cdots\wedge L_XY_i\wedge\cdots\wedge Y_r,\omega\rangle.$$

对于M上的光滑切矢量场X，我们可以定义如下的线性算子$i(X):A^r(M)\to A^{r-1}(M)$：

若$r=0$，$i(X)$在$A^0(M)$上的作用规定为零映射。

若$r=1$，$\omega\in A^r(M)$，则命

(26)
$$i(X)\omega=\langle X,\omega\rangle.$$

若$r>1$，对任意$r-1$个光滑切矢量场$Y_1,\cdots,Y_{r-1}$有

(27)
$$\langle Y_1\wedge\cdots\wedge Y_{r-1},i(X)\omega\rangle=\langle X\wedge Y_1\wedge\cdots\wedge Y_{r-1},\omega\rangle.$$

这样，容易验证下面一组公式成立：

1) $L_X\circ i(Y)-i(Y)\circ L_X=i([X,Y])$;

2) $L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X,Y]}$;

3) $d \circ i(X) + i(X) \circ d = L_X$;

4) $d \circ L_X = L_X \circ d$.

这组公式称为H. Cartan 公式，它们在外微分式理论中是很重要的。这些公式的证明留给读者完成。

现在我们把关于单参数可微变换群的讨论用于李群。设X是r维李群G上的右不变矢量场，它决定的局部单参数变换群记作φ_t。因为右移动$R_a(a\in G)$是保持切矢量场X不变的，根据定理2.2的系，R_a和φ_t是可交换的，即

$$R_a \circ \varphi_t = \varphi_t \circ R_a. \tag{28}$$

由此可见，如果$\varphi_t(p)$在单位元素e的一个邻域U及$|t|<\varepsilon$内有定义，则在任意一点$a\in G$，$\varphi_t(p)$在a的邻域$U\cdot a$及$|t|<\varepsilon$内有定义。这就是说存在一个公共的$\varepsilon>0$，使得$\varphi_t(p)$在$p\in M$，$|t|<\varepsilon$内有定义，所以右不变向量场X在李群G上决定了单参数可微变换群(参阅定理2.1的系)。命

$$a_t = \varphi_t(e), \tag{29}$$

则

$$\begin{aligned} a_{t+s} &= \varphi_{t+s}(e) = \varphi_t \circ \varphi_s(e) \\ &= \varphi_t \circ R_{a_s}(e) = R_{a_s} \circ \varphi_t(e) \\ &= R_{a_s}(a_t) = a_t \cdot a_s, \end{aligned}$$

所以a_t是李群G的单参数子群(即一维李子群)。

从(28)式得到

$$\varphi_t(x) = \varphi_t \circ R_x(e) = R_x \circ \varphi_t(e) = a_t \cdot x,$$

所以φ_t在G上的作用就是a_t在G上决定的左移动，即

$$\varphi_t = L_{a_t}; \tag{30}$$

正因为如此，通常又把右不变矢量场叫做无穷小左移动。

上面的讨论说明：李群G上任意一个右不变矢量场X决定了李群G的一个单参数子群a_t，而矢量场X在G上决定的单参数变

换群 φ_t 就是 a_t 在 G 上决定的左移动。

定理2.4 设 $\mathrm{Ad}:G\to GL(r;\boldsymbol{R})$ 是 r 维李群 G 的伴随表示，

$$\mathrm{ad}=(\mathrm{Ad})_*:G_e\to \mathrm{gl}(r;\boldsymbol{R})$$

是 G 的李代数 G_e 的伴随表示，则对任意的 $X,Y\in G_e$ 有

$$\mathrm{ad}(X)\cdot Y=-[X,Y]。\tag{31}$$

证明 设 X 决定的单参数子群是 a_t，因此对应的右不变矢量场 $\tilde{X}$ 决定的单参数变换群是 $\varphi_t=L_{a_t}$。设 Y 对应的右不变矢量场是 $\tilde{Y}$。因为

$$\mathrm{ad}(X)=(\mathrm{Ad})_*X=\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{Ad}(a_t)-\mathrm{Ad}(e)}{t},$$

所以利用定理2.3得

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(X)\cdot Y&=\lim_{t\to 0}\frac{(L_{a_t})_*\circ(R_{a_t^{-1}})_*Y-Y}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t)_*\tilde{Y}_{a_t^{-1}}-\tilde{Y}_e}{t}\\&=-[\tilde{X},\tilde{Y}]_e=-[X,Y]。\end{aligned}$$

证毕。

下面我们转向一般的李氏变换群。

定义2.4 设 M 是 m 维光滑流形，G 是 r 维李群。若有光滑映射 $\theta:G\times M\to M$，记

$$\theta(g,x)=g\cdot x,\quad (g,x)\in G\times M,$$

它满足下列条件：

1）设 e 是 G 的单位元素，则对任意的 $x\in M$ 有

$$e\cdot x=x;$$

2）若 $g_1,g_2\in G$，则对任意的 $x\in M$ 有

$$g_1\cdot(g_2\cdot x)=(g_1\cdot g_2)\cdot x,$$

则称 G 是(左)作用在 M 上的李氏变换群。

显然，单参数可微变换群是李氏变换群的特例，即 $G=\boldsymbol{R}$。李群 G 本身作为左移动作用在 G 上也是李氏变换群。

如果对G中任意一个非单位元素g，必有M的一个点x，使$g\cdot x\neq x$，则称G在M上的作用是有效的。如果对任意的$g\neq e$，及任意的$x\in M$都有$g\cdot x\neq x$，则称G在M上的作用无不动点，或称G在M上的作用是自由的。

对固定的$g\in G$，命

(32) $$L_g(x)=g\cdot x,\qquad x\in M,$$

则$L_g:M\to M$是光滑映射。由于$L_g^{-1}=L_{g^{-1}}$，所以L_g是M到自身的可微同胚；显然，$\{L_g,\ g\in G\}$构成M的可微同胚群的子群。当G在M上的作用有效时，G与M的可微同胚群的子群$\{L_g,\ g\in G\}$同构。

李氏变换群的一个基本事实是：在M上存在一个有限维李代数，它是李群G的李代数的同态象。我们先构造一个从李代数G_e到M上光滑切矢量场的空间的映射。

设$X\in G_e$，a_t是由X决定的单参数子群，则L_{a_t}是作用在M上的单参数可微变换群。L_{a_t}在M上诱导的切矢量场$\tilde{X}$叫做X在M上决定的基本切矢量场，根据定义

(33) $$\tilde{X}_p=\lim_{t\to 0}\frac{L_{a_t}(p)-p}{t}.$$

定理2.5 设G是作用在M上的李氏变换群，则M上全体基本切矢量场构成一个李代数，它是G的李代数G_e的同态象。若在M上的作用是有效的，则M上基本切矢量场构成的李代数与G_e同构。

证明 我们知道，流形M上光滑切矢量场的集合$\Gamma(T(M))$关于Poisson括号积构成一个无限维李代数。要证明的是，由(33)式给出的映射

$$\sigma:G_e\to\Gamma(T(M))$$

是李代数的同态。

从(33)式看，σ的线性性质不是明显的，所以我们先给出σ的另一个表示。对于固定的$p\in M$，设映射$\sigma_p:G\to M$如下所定

义：

(34) $$\sigma_p(g)=L_g(p)=g\cdot p.$$

我们要证明，切映射$(\sigma_p)_*:G_e\to T_p(M)$正是(33)式给出的映射，即

(35) $$(\sigma_p)_*X=\tilde{X}_p,\qquad X\in G_e.$$

为此，只要作直接的计算。设f是M上任意一个光滑函数，则

$$\begin{aligned}((\sigma_p)_*X)f&=X(f\circ\sigma_p)\\&=\frac{d}{dt}f\circ\sigma_p(a_t)\Big|_{t=0}\\&=\frac{d}{dt}f(L_{a_t}(p))\Big|_{t=0}\\&=\tilde{X}_pf,\end{aligned}$$

即(35)式成立。所以映射$\sigma:G_e\to\Gamma(T(M))$就是

(36) $$(\sigma(X))_p=(\sigma_p)_*X=\tilde{X}_p,\quad X\in G_e.$$

因为切映射$(\sigma_p)_*$是线性的，所以σ是线性映射。

σ还可以理解为从$\mathscr{G}$到$\Gamma(T(M))$的线性映射。设X是G上的右不变矢量场，$\tilde{X}=\sigma(X_e)$。对任意一点$g\in G$，我们有

$$\begin{aligned}(\sigma_p)_*X_g&=(\sigma_p)_*\circ(R_g)_*X_e\\&=(\sigma_{(g\cdot p)})_*X_e=\tilde{X}_{g\cdot p},\end{aligned}$$

因此基本切矢量场$\tilde{X}$可以看作G的右不变矢量场X在切映射$(\sigma_p)_*$下的象拓广而成的。由此可知，对于G上任意两个右不变矢量场X,Y，我们有

$$(\sigma_p)_*[X,Y]_g=[\tilde{X},\tilde{Y}]_{\sigma_p(g)},$$

因此

(37) $$\sigma([X_e,Y_e])=[\tilde{X},\tilde{Y}],$$

即$\sigma:G_e\to\Gamma(T(M))$是李代数的同态，其同态象就是$M$上基本切矢量场构成的李代数。

若$\tilde{X}=0$，则$\tilde{X}$对应的单参数变换群L_{a_t}是平凡的，即对任意的$x\in M$有

$$L_{a_t}(x)=a_t\cdot x=x.$$

若G在M上的作用是有效的，则上式只在$a_t=e$时成立，所以$X=0$，即映射σ是单一的。这说明M上基本切矢量场构成的李代数与李群G的李代数同构。

容易看出，如果G在M上的作用无不动点，则M上恰有r个处处线性无关的基本切矢量场，其他的基本切矢量场都是它们的常系数线性组合。

作为例子，我们考虑光滑流形M上的标架从P。在第四章§3已经提到过，结构群$GL(m;\boldsymbol{R})$以自然的方式作用在P上，成为左作用在P上的李氏变换群。因为P在局部上是直积，$\pi^{-1}(U)\cong U\times GL(m;\boldsymbol{R})$。在这种表示下，结构群$GL(m;\boldsymbol{R})$的作用表现为在纤维上的左移动，即

$$A\cdot(p,B)=(p,A\cdot B), \tag{38}$$

其中$p\in U$，$A,B\in GL(m;\boldsymbol{R})$。所以$GL(m;\boldsymbol{R})$在$P$上的作用无不动点，而且$P$中两个元素在$GL(m;\boldsymbol{R})$的作用下等价的充分必要条件是：这两个元素(即标架)有相同的原点。后者意味着底流形M是标架从P关于群$GL(m;\boldsymbol{R})$的作用产生的等价关系的商空间。

主从是标架从的推广。若用李氏变换群的概念，主从可以如下定义：设P和M是两个光滑流形，G是左作用在P上的r维李氏变换群。如果：

1）G在P上作用无不动点；

2）M是流形P关于G的作用产生的等价关系的商空间，并且投影$\pi:P\to M$是光滑映射；

3）P在局部上是平凡的，即对每一点$x\in M$，存在x的一个邻域U，使得$\pi^{-1}(U)$和$U\times G$是同构的，即存在可微同胚

$$p\in\pi^{-1}(U)\to(\pi(p),\varphi(p))\in U\times G,$$

使得对任意的$a\in G$有

$$\varphi(a\cdot p)=a\cdot\varphi(p),$$

则称P是流形M上以李群G为结构群的主丛。

点$x\in M$上的纤维$\pi^{-1}(x)$就是李氏变换群G在P上产生的，通过点$p\in\pi^{-1}(x)$的轨道

$$G\cdot p=\{L_a(p)\mid a\in G\}.$$

P上的基本切矢量场构成的李代数与李群G的李代数同构。由于G的作用是自由的，所以在P的每一点基本切矢量张成r维的切子空间，它正是纤维$\pi^{-1}(x)$在该点的切空间，叫做纵空间。在主丛上可展开连络论的研究(请看[11])。

§3 活动标架法

设M是m维连通的光滑流形，G是r维李群。设G的右基本微分式是$\omega^i\ (1\leqslant i\leqslant r)$，它们适合结构方程

$$(1)\qquad d\omega^i=-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r}c^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k,$$

其中c^i_{jk}是李群G的结构常数。若有光滑映射$f:M\to G$，命

$$(2)\qquad \psi^i=f^*\omega^i,$$

则ψ^i适合同一组方程

$$(3)\qquad d\psi^i=-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r}c^i_{jk}\psi^j\wedge\psi^k.$$

这也是保证映射$f:M\to G$在局部上存在的充分条件。

定理3.1 设在M上有r个一次微分式$\psi^i\ (1\leqslant i\leqslant r)$满足方程(3)，其中$c^i_{jk}$是李群$G$的结构常数，则在每一点$p\in M$有一个邻域$U$及光滑映射$f:U\to G$，使得

$$(4)\qquad f^*\omega^i=\psi^i,$$

其中ω^i是G的右基本微分式。若f_1,f_2是任意两个这样的映射，则必有G的一个元素g，使得

$$(5)\qquad f_2=R_g\circ f_1,$$

即f_1和f_2的象只差G的一个右移动。

证明 在$M\times G$上考虑$m+r$个自变量的Pfaff方程组

(6) $$\theta^i\equiv\psi^i-\omega^i=0,\quad 1\leqslant i\leqslant r.$$

由于ω^i是处处线性无关的，所以θ^i也处处线性无关，方程(6)给出了$M\times G$上的m维平面场。因为

$$d\theta^i=-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r}c^i_{jk}(\psi^j\wedge\psi^k-\omega^j\wedge\omega^k)$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r}c^i_{jk}(\psi^j\wedge\theta^k-\theta^j\wedge\omega^k)$$

$$\equiv 0\ \mathrm{mod}(\theta^1,\cdots,\theta^r),$$

根据Frobenius定理，方程组(6)是完全可积的。因此，对任意一点$(x_0,a_0)\in M\times G$，存在x_0的局部坐标系$(U;x^\alpha)$和a_0的局部坐标系$(V;a^i)$，使得方程组(6)在$U\times V$上有唯一的一个m维积分流形

(7) $$\varphi^i(x^1,\cdots,x^m;\ a^1,\cdots,a^r)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant r,$$

经过点(x_0,a_0)，其中$x\in U$，$a\in V$。

因为$\omega^i(1\leqslant i\leqslant r)$的线性无关性，必定存在$x_0$的一个邻域$U_1\subset U$，以便从(7)式可解出

(8) $$f^i=f^i(x^1,\cdots,x^m),\quad 1\leqslant i\leqslant r,$$

使得

(9) $$\varphi^i(x^1,\cdots,x^m;f^1(x),\cdots,f^r(x))\equiv 0,\quad x\in U_1,$$

$$f^i(x^1_0,\cdots,x^m_0)=a^i_0,\quad 1\leqslant i\leqslant r.$$

显然，(8)式给出的映射$f:U_1\to G$满足方程

$$\psi^i=f^*\omega^i,\quad 1\leqslant i\leqslant r.$$

若$f_1,f_2:U_1\to G$是两个这样的映射。设

(10) $$f_1(x_0)=a_1,\quad f_2(x_0)=a_2.$$

命

(11) $$g=a_1^{-1}\cdot a_2,$$

则

(12) $$(R_g\circ f_1)^*\omega^i=(f_1)^*\circ(R_g)^*\omega^i=(f_1)^*\omega^i=\psi^i,$$

并且

(13) $$(R_g \circ f_1)(x_0) = a_2,$$
所以$R_g \circ f_1$和f_2都是方程组(6)的解，而且满足相同的初始条件。根据解的唯一性得

$$f_2 = R_g \circ f_1.$$

现在考虑N维欧氏空间$\boldsymbol{R}^N$的刚体运动群$E(N)$。在$\boldsymbol{R}^N$中取定一个正交标架$(O;\delta_1,\cdots,\delta_N)$，则 $\tilde{a} \in E(N)$在 $\boldsymbol{R}^N$上的作用(记成右作用)是

(14) $$x \cdot \tilde{a} = x \cdot A + a,$$
其中

(15) $$\begin{cases} x = (x^1,\cdots,x^N) = \sum_{\alpha=1}^{N} x^\alpha \delta_\alpha, \\ a = (a^1,\cdots,a^N) = \sum_{\alpha=1}^{N} a^\alpha \delta_\alpha, \\ A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^N \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_N^1 & \cdots & a_N^N \end{pmatrix}, \end{cases}$$

$$A \cdot {}^tA = I, \quad \det A > 0,$$
即矩阵A是行列式为$+1$的正交矩阵。所以$E(N)$中的元素 $\tilde{a}$可用一对矩阵(A,a)表示。

设 $\tilde{a} = (A,a)$， $\tilde{b} = (B,b) \in E(N)$， 元素$\tilde{a} \cdot \tilde{b}$在 $\boldsymbol{R}^N$上的作用定义为顺次用 $\tilde{a}$ 和 $\tilde{b}$ 作用的结果，所以 $E(N)$ 中的乘法运算是：

(16) $$\tilde{a} \cdot \tilde{b} = (A \cdot B,\ a \cdot B + b),$$
$\tilde{a}$的逆元素是

(17) $$\tilde{a}^{-1} = (A^{-1}, -a \cdot A^{-1}).$$
显然$E(N)$是$\frac{1}{2}N(N+1)$维李群。

用$\mathscr{F}(\boldsymbol{R}^N)$记$\boldsymbol{R}^N$上全体正交标架的集合，用$\mathscr{F}_+(\boldsymbol{R}^N)$记$\boldsymbol{R}^N$中与固定的标架$(O;\delta_1,\cdots,\delta_N)$定向一致的正交标架的集合，它们都是$\boldsymbol{R}^N$上的主丛，分别以$O(N;\boldsymbol{R})$和$SO(N;\boldsymbol{R})$为结构群。($SO(N;\boldsymbol{R})$称为特殊正交群，它由行列式为$+1$的正交矩阵组成。)

流形$\mathscr{F}_+(\boldsymbol{R}^N)$可以和$E(N)$等同起来。因为对于$\boldsymbol{R}^N$中任意一个与$(O;\delta_1,\cdots,\delta_N)$的定向一致的正交标架$(p;e_1,\cdots,e_N)$，在$\boldsymbol{R}^N$中存在唯一的一个刚体运动$\tilde{a}\in E(N)$把$(O;\delta_1,\cdots,\delta_N)$变到$(p;e_1,\cdots,e_N)$。它们之间的对应关系是：

(18) $$\tilde{a}=(A,a)\leftrightarrow(p;e_1,\cdots,e_N),$$

其中

(19) $$\begin{cases}\overrightarrow{Op}=\sum\limits_{\alpha=1}^{N}a^\alpha\delta_\alpha,\\ e_\alpha=\sum\limits_{\alpha=1}^{N}a_\alpha^\beta\delta_\beta.\end{cases}$$

若记

(20) $$\begin{cases}\delta={}^t(\delta_1,\cdots,\delta_N),\\ e={}^t(e_1,\cdots,e_N),\end{cases}$$

则(19)式可写成

(21) $$\begin{cases}\overrightarrow{Op}=a\cdot\delta,\\ e=A\cdot\delta.\end{cases}$$

让标架$(p;e_1,\cdots,e_N)$作一个无穷小的运动得到$(p+dp;e_\alpha+de_\alpha)$。矢量$dp$和$de_\alpha$仍可以在标架$(p;e_1,\cdots,e_N)$下表示出来。设

(22) $$\begin{cases}dp=\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\omega^\alpha e_\alpha,\\ de_\alpha=\sum\limits_{\beta=1}^{N}\omega_\alpha^\beta e_\beta,\end{cases}$$

ω^α, ω_α^β $(1\leqslant\alpha,\beta\leqslant N)$称为活动标架的相对分量。若记$\theta=(\omega^1,\cdots,\omega^N)$，$\omega=(\omega_\alpha^\beta)$，那末(22)式可写成

$$
(23) \qquad \begin{cases} dp=\theta\cdot e, \\ de=\omega\cdot e. \end{cases}
$$

微分(21)式，立即可得

$$
dp=da\cdot\delta=da\cdot A^{-1}\cdot e,
$$
$$
de=dA\cdot\delta=dA\cdot A^{-1}\cdot e,
$$

所以

$$
(24) \qquad \begin{aligned} \theta&=da\cdot A^{-1}, \\ \omega&=dA\cdot A^{-1}. \end{aligned}
$$

因为$A\cdot A^{-1}=I$，故

$$
dA\cdot A^{-1}+A\cdot dA^{-1}=dA\cdot A^{-1}+{}^{t}(dA\cdot A^{-1})=0,
$$

即

$$
(25) \qquad \omega_\alpha^\beta+\omega_\beta^\alpha=0.
$$

从李群$E(N)$上看，活动标架的相对分量$\omega^\alpha,\omega_\alpha^\beta=-\omega_\beta^\alpha$恰好是$E(N)$上的右基本微分式。实际上，对任意一个元素$\tilde{b}=(B,b)\in E(N)$，

$$
R_{\tilde{b}}(\tilde{a})=\tilde{a}\cdot\tilde{b}=(A\cdot B,a\cdot B+b),
$$

所以

$$
(R_{\tilde{b}})^*\theta=(da\cdot B)\cdot(A\cdot B)^{-1}=da\cdot A^{-1}=\theta,
$$
$$
(R_{\tilde{b}})^*\omega=(dA\cdot B)\cdot(A\cdot B)^{-1}=dA\cdot A^{-1}=\omega.
$$

由于我们用的是正交标架，所以相对分量一律可用下指标表示，即

$$
\omega_\alpha=\omega^\alpha,\quad \omega_{\alpha\beta}=\omega_\alpha^\beta,
$$

它们也可以看成用$\boldsymbol{R}^N$的度量张量$g_{\alpha\beta}=e_\alpha\cdot e_\beta$将指标下降的结果。外微分(23)式得到

$$
d\theta\cdot e-\theta\wedge de=0,
$$
$$
d\omega\cdot e-\omega\wedge de=0,
$$

故$E(N)$的结构方程是

(26)
$$\begin{cases} d\theta=\theta\wedge\omega, \\ d\omega=\omega\wedge\omega, \end{cases}$$

或

(27)
$$\begin{cases} d\omega_\alpha=\sum_{\beta=1}^{N}\omega_\beta\wedge\omega_{\beta\alpha}, \\ d\omega_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma=1}^{N}\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}. \end{cases}$$

将定理3.1用于$E(N)$，我们立即得到 $\boldsymbol{R}^N$中活动标架的基本定理：

定理3.2 设$\psi_\alpha, \psi_{\beta\gamma}=-\psi_{\gamma\beta}$ $(1\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant N)$ 是依赖n个变量的一次微分式，则在 $\boldsymbol{R}^N$ 中 存在一族依赖 n 个参数的正交标架以给定的微分式为相对分量，当且仅当这组微分式适合方程

(28)
$$\begin{cases} d\psi_\alpha=\sum_{\beta=1}^{N}\psi_\beta\wedge\psi_{\beta\alpha}, \\ d\psi_{\alpha\beta}=\sum_{\gamma=1}^{N}\psi_{\alpha\gamma}\wedge\psi_{\gamma\beta}. \end{cases}$$

并且任意两族这样的正交标架经过 $\boldsymbol{R}^N$ 的 一个刚体运动可以完全重合起来。

证明 用M记变数 $x=(x^1,\cdots,x^n)$的空间，命$G=E(N)$；由定理3.1，存在映射$f:M\to E(N)$，使

$$f^*\omega_\alpha=\psi_\alpha,\quad f^*\omega_{\alpha\beta}=\psi_{\alpha\beta}.$$

设

$$\tilde{a}=f(x)=(A(x),a(x)),$$

命

(29)
$$\begin{cases} \overrightarrow{Op}(x)=a(x)\cdot\delta, \\ e(x)=A(x)\cdot\delta. \end{cases}$$

则$(p(x);e_1(x),\cdots,e_N(x))$给出了所求的正交标架族。

活动标架的概念起源于力学。例如在研究刚体运动时，在运

动的物体上固定一个正交标架。当物体作刚体运动时正交标架随着运动，得到一族依赖时间 t 的正交标架，这族标架完全刻划了物体的刚体运动. 法国数学家Cotten, Darboux 把单参数标架族的概念推广到依赖多个参数的情形。把这种理论发扬光大，并成功地用于几何学研究的是 E. Cartan. 活动标架法和外微分相结合，现已成为微分几何学的有力工具。下面我们用这种方法研究欧氏空间中的子流形。

设 $f:M\to \boldsymbol{R}_N$ 是嵌入在 $\boldsymbol{R}^N$ 中的 m 维有向的光滑子流形。指标的取值范围规定为：

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
&1\leqslant i,j,k,l\leqslant m,\\
&m+1\leqslant A,B,C,D\leqslant N,\\
&1\leqslant \alpha,\beta,\gamma,\delta\leqslant N.
\end{aligned}
$$

为书写简便起见，对 M 和 $f(M)$ 不再加以区别。在 M 的每一点 p 附上一个正交标架 $(p;e_1,\cdots,e_N)$，使 e_i 是 M 在 p 的切矢量，e_A 是 M 在 p 的法矢量，并且 $(e_1,\cdots,e_m)$ 的定向与 M 的定向一致，$(e_1,\cdots,e_N)$ 的定向与 $\boldsymbol{R}^N$ 中固定标架 $(O;\delta_1,\cdots,\delta_N)$ 的定向一致。假定在 M 的一个开邻域 U 上有这样一个标架场，它连续地、光滑地依赖于 U 上的局部坐标，则通常把这样的局部的正交标架场称为子流形 M 上的一个Darboux 标架。显然，在流形 M 的每一点的一个充分小的邻域内，Darboux 标架总是存在的，并且它们允许作如下的变换：

$$
(31)\qquad
\begin{cases}
e_i'=\displaystyle\sum_{j=1}^{m}a_{ij}e_j,\\[2ex]
e_A'=\displaystyle\sum_{A=m+1}^{N}a_{AB}e_B,
\end{cases}
$$

其中 a_{ij},a_{AB} 都是 U 上的光滑函数，并且 $(a_{ij})\in SO(m;\boldsymbol{R})$，$(a_{AB})\in SO(N-m;\boldsymbol{R})$。

若在 M 的一个邻域 U 上取定一个 Darboux 标架，则它给出

了从U到$\mathscr{F}_+(\boldsymbol{R}^N)$的一个光滑映射$f$．我们仍然用$\omega_\alpha, \omega_{\alpha\beta}$记$\boldsymbol{R}^N$中活动标架的相对分量经过$f^*$拉回到$U$上得到的一次微分式，显然它们仍然适合结构方程(27)。

因为Darboux标架的原点p在流形M上，并且e_i是M在点p的切矢量，所以

$$dp=\sum_{i=1}^{m}\omega_i e_i, \qquad \omega_A=0, \tag{32}$$

并且ω_i（$1\leqslant i\leqslant m$）是处处线性无关的。设

$$I=dp\cdot dp=\sum_{i=1}^{m}(\omega_i)^2, \tag{33}$$

$$dA=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_m, \tag{34}$$

容易验证它们与Darboux标架的变换(31)无关，即它们是定义在整个流形M上的量，分别称为子流形M的第一基本形式和面积元素。流形M以I为黎曼度量成为一个黎曼流形；我们称黎曼流形M有从$\boldsymbol{R}^N$诱导的黎曼度量。

Darboux 标架的运动公式可写成

$$\begin{cases} de_i=\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_{ij}e_j+\sum\limits_{A=m+1}^{N}\omega_{iA}e_A, \\ de_B=\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_{Bj}e_j+\sum\limits_{A=m+1}^{N}\omega_{BA}e_A, \end{cases} \tag{35}$$

其中$\omega_\alpha, \omega_{\alpha\beta}=-\omega_{\beta\alpha}$是前面已提到的相对分量，它们适合结构方程：

$$\begin{cases} d\omega_i=\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j\wedge\omega_{ji}, \\ 0\ =\sum\limits_{j=1}^{m}\omega_j\wedge\omega_{jA}, \end{cases} \tag{36}$$

$$
(37)\qquad \begin{cases} d\omega_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\sum_{A=m+1}^{N}\omega_{iA}\wedge\omega_{Aj}, \\ d\omega_{iB}=\sum_{k=1}^{m}\omega_{ik}\wedge\omega_{kB}+\sum_{A=m+1}^{N}\omega_{iA}\wedge\omega_{AB}, \\ d\omega_{AB}=\sum_{k=1}^{m}\omega_{Ak}\wedge\omega_{kB}+\sum_{C=m+1}^{N}\omega_{AC}\wedge\omega_{CB}. \end{cases}
$$

根据黎曼几何的基本定理，(36)的第一式与反对称性 $\omega_{ij}+\omega_{ji}=0$ 联合起来说明ω_{ij}是黎曼流形M上的Levi-Civita连络：

$$
(38)\qquad De_i=\sum_{j=1}^{m}\omega_{ij}e_j.
$$

由(35)的第一式可知，De_i 也是 de_i 在M的切平面上的正交投影。

由Cartan引理（第二章定理3.4），从(36)的第二式得到

$$
(39)\qquad \omega_{jA}=\sum_{i=1}^{m}h_{Aji}\omega_i,\qquad h_{Aji}=h_{Aij}.
$$

命

$$
(40)\qquad \begin{aligned} \mathrm{II}&=\sum_{i,A}\omega_i\omega_{iA}e_A \\ &=\sum_{A=m+1}^{N}\Big(\sum_{i,j=1}^{m}h_{Aij}\omega_i\omega_j\Big)e_A, \end{aligned}
$$

则II与Darboux标架的变换(31)无关，它是定义在整个流形M上，取值是M的法矢量的二次微分形式，称为子流形M的第二基本形式。

M上的Levi-Civita连络的曲率形式是

$$
\begin{aligned} \Omega_{ij}&=d\omega_{ij}-\sum_{k=1}^{m}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj} \\ &=\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l, \end{aligned}
$$

其中R_{ijkl}是曲率张量。由(37)的第一式得到

$$(41) \qquad R_{ijkl}=\sum_{A=m+1}^{N}(h_{Ail}h_{Ajk}-h_{Aik}h_{Ajl}),$$

这就是子流形M的Gauss方程。(37)的后两式相当于曲面论的Codazzi 方程。

对于欧氏空间中的超曲面，上面的公式大大简化了。设M是R^{m+1}中的定向超曲面，则M的 Darboux标架只有一个法矢量e_{m+1}。这时 Darboux标架的运动方程是

$$dp=\sum_{i=1}^{m}\omega_i e_i, \quad \omega_{m+1}=0,$$

$$de_i=\sum_{j=1}^{m}\omega_{ij}e_j+\omega_{i\,m+1}e_{m+1},$$

$$de_{m+1}=\sum_{j=1}^{m}\omega_{m+1\,j}e_j.$$

结构方程是

$$(42) \qquad d\omega_i=\sum_{j=1}^{m}\omega_j\wedge\omega_{ji},$$

$$(43) \qquad \sum_{j=1}^{m}\omega_j\wedge\omega_{j\,m+1}=0,$$

$$(44) \qquad d\omega_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}+\omega_{i\,m+1}\wedge\omega_{m+1\,j},$$

$$(45) \qquad d\omega_{i\,m+1}=\sum_{k=1}^{m}\omega_{ik}\wedge\omega_{k\,m+1}.$$

方程(39)成为

$$(46) \qquad \omega_{j\,m+1}=\sum_{i=1}^{m}h_{ji}\omega_i, \qquad h_{ji}=h_{ij}.$$

因此得到超曲面M的第二基本形式

$$(47) \qquad \mathrm{II}=\sum_{i=1}^{m}\omega_i\omega_{i\,m+1}=\sum_{i,j=1}^{m}h_{ij}\omega_i\omega_j.$$

(44)和(45)两式分别是Gauss方程和Codazzi方程。将(46)式代入Gauss方程(44)则得

$$R_{ijkl}=h_{il}h_{jk}-h_{ik}h_{jl}, \tag{48}$$

此即Gauss方程通常所采取的形式。

将(46)式代入Codazzi方程则得

$$\sum_{j=1}^{m}\left(dh_{ij}-\sum_{k=1}^{m}h_{ik}\omega_{jk}-\sum_{k=1}^{m}h_{kj}\omega_{ik}\right)\wedge\omega_j=0,$$

所以由Cartan引理得到

$$\begin{cases} dh_{ij}-\sum_{k=1}^{m}h_{ik}\omega_{jk}-\sum_{k=1}^{m}h_{kj}\omega_{ik}=\sum_{k=1}^{m}h_{ijk}\omega_k, \\ h_{ijk}=h_{ikj}. \end{cases} \tag{49}$$

若命

$$\begin{cases} dh_{ij}=\sum_{k=1}^{m}h_{ij,k}\omega_k, \\ \omega_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\Gamma_{ijk}\omega_k, \end{cases} \tag{50}$$

则

$$h_{ijk}=h_{ij,k}-\sum_{l=1}^{m}h_{il}\Gamma_{jlk}-\sum_{l=1}^{m}h_{lj}\Gamma_{ilk}, \tag{51}$$

因此Codazzi方程成为

$$h_{ij,k}-h_{ik,j}=\sum_{l=1}^{m}(h_{il}\Gamma_{jlk}+h_{lj}\Gamma_{ilk}-h_{il}\Gamma_{klj}-h_{lk}\Gamma_{ilj}). \tag{52}$$

作为定理3.2的直接推论，我们有 R^{m+1} 中超曲面的基本定理：

定理3.3 设有两个二次微分形式

$$\mathrm{I}=\sum_{i=1}^{m}(\omega_i)^2,\quad \mathrm{II}=\sum_{i,j=1}^{m}h_{ij}\omega_i\omega_j, \tag{53}$$

其中 ω_i $(1\leqslant i\leqslant m)$ 是依赖 m 个变量的线性无关的一次微分式；$h_{ij}=h_{ji}$ 是这 m 个变量的函数。那末在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中存在一块分别以 Ⅰ，Ⅱ 为第一、第二基本形式的超曲面的充要条件是：Ⅰ和Ⅱ满足Gauss-Codazzi方程(48)和(52)，其中 Γ_{ijk} 是由Ⅰ决定的Levi-Civita连络，R_{ijkl} 是相应的曲率张量。并且任意两块这样的超曲面在 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中经过一个刚体运动是完全重合的。

§4 曲 面 论

在§3，我们利用活动标架法阐明了第一基本形式Ⅰ和第二基本形式Ⅱ是 $\boldsymbol{R}^{m+1}$ 中超曲面的完全不变量系统，而且Gauss-Codazzi方程是Ⅰ、Ⅱ所应满足的可积条件。超曲面有十分丰富的几何内容，我们在这里以 $\boldsymbol{R}^3$ 中的曲面为例讨论它的几何。

设 $x:M\to\boldsymbol{R}^3$ 是 $\boldsymbol{R}^3$ 中一块光滑的曲面。若在 M 的一个坐标域 U 上取局部坐标 u^1,u^2，则曲面 x 可以用参数方程表成

(1) $$x^i=x^i(u^1,u^2),\quad 1\leqslant i\leqslant 3.$$

因为 x 是嵌入，所以矩阵

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial u^1}\\[2ex] \dfrac{\partial x^1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial u^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial u^2}\end{pmatrix}$$

的秩是2，并且 x 是单一的映射。

在 M 上取 Darboux 标架 $(x;e_1,e_2,e_3)$，使 e_1,e_2 与 M 相切，e_3 是 M 的法矢量，并且 (e_1,e_2,e_3) 的定向与 $\boldsymbol{R}^3$ 中取定的定向相一致，(e_1,e_2) 给出了曲面 M 的定向。设该标架场的相对分量是 ω_i，ω_{ij}，即

(2) $$dx=\omega_1e_1+\omega_2e_2,\quad \omega_3=0,$$

$$
(3)\qquad \begin{cases} de_1 = \qquad\qquad \omega_{12}e_2 + \omega_{13}e_3, \\ de_2 = \omega_{21}e_1 \qquad\qquad + \omega_{23}e_3, \\ de_3 = \omega_{31}e_1 + \omega_{32}e_2, \\ \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \end{cases}
$$

其中 ω_i, ω_{ij} 都是参数 u^1, u^2 的一次微分式。结构方程是

$$
(4)\qquad \begin{cases} d\omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21}, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}, \end{cases}
$$

$$
(5)\qquad 0 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23},
$$

$$
(6)\qquad d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32},
$$

$$
(7)\qquad \begin{cases} d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \\ d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{23}. \end{cases}
$$

如§3所述，(6) 与 (7)两式分别是曲面的 Gauss 方程和 Codazzi 方程。这组方程中每一个都包含了丰富的信息，曲面的局部几何的研究取决于对这组方程的了解。

M的第一基本形式是

$$
(8)\qquad \mathrm{I} = dx \cdot dx = (\omega_1)^2 + (\omega_2)^2,
$$

面积元素是

$$
(9)\qquad dA = \omega_1 \wedge \omega_2,
$$

它们都是在 Darboux 标架的容许变换下保持不变的。

根据 Cartan 引理，由(5)式得到

$$
(10)\qquad \begin{cases} \omega_{13} = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2, \\ \omega_{23} = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2, \qquad h_{12} = h_{21}. \end{cases}
$$

利用内积可以得到第二和第三基本形式：

$$
(11)\qquad \begin{aligned} \mathrm{II} &= d^2x \cdot e_3 = -dx \cdot de_3 \\ &= \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}, \end{aligned}
$$

或

$$
(12)\qquad \mathrm{II} = h_{11}(\omega_1)^2 + 2h_{12}\omega_1\omega_2 + h_{22}(\omega_2)^2;
$$

以及

(13) $$\mathrm{III}=de_3\cdot de_3=(\omega_{13})^2+(\omega_{23})^2.$$

在固定一点 $x\in M$，比值 $\omega_1:\omega_2$ 确定了M在点 x 上的一个切方向 v；显然

(14) $$k_n=\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$$

是(x,v)的函数，称为曲面M在点 x 沿方向 v 的法曲率。容易证明，法曲率 k_n有下面的几何意义：用切方向 v 和法矢量 e_3 决定的平面与M相交出一条平面曲线，称为曲面M沿方向 v 的法截线，则法曲率 k_n 正是这条法截线在该点的曲率。

第二基本形式 II 还可以解释为曲面M上切空间的线性变换场。方程(3)的第三式可看作定义在曲面M上取值为切矢量的一次微分式，所以它在每一点 $x\in M$ 给出了切空间 $T_x(M)$ 到自身的线性变换W：设 $X\in T_x(M)$，则命

(15) $$W(X)=-\langle X,de_3\rangle=\omega_{13}(X)e_1+\omega_{23}(X)e_2,$$

上述定义与 Darboux 标架的选取是无关的。通常把变换 W称为曲面在 x 的切平面上的 Weingarten 变换。显然，从(10)式得到

(16) $$\begin{cases}W(e_1)=h_{11}e_1+h_{12}e_2,\\ W(e_2)=h_{21}e_1+h_{22}e_2.\end{cases}$$

所以变换W在基底(e_1,e_2)下的矩阵恰是第二基本形式 II 的系数矩阵(h_{ij})。因为 $h_{ij}=h_{ji}$，所以W是自共轭变换。实际上，对任意的 $X,Y\in T_x(M)$，我们有

(17) $$\begin{aligned}W(X)\cdot Y&=\omega_{13}(X)\omega_1(Y)+\omega_{23}(X)\omega_2(Y)\\&=\omega_1(X)\omega_{13}(Y)+\omega_2(X)\omega_{23}(Y)\\&=X\cdot W(Y).\end{aligned}$$

根据线性代数，线性变换W有两个实特征值 k_1,k_2 和两个对应的彼此正交的特征方向。特征值 k_1,k_2 适合二次方程

(18) $$\begin{vmatrix}h_{11}-k & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}-k\end{vmatrix}=k^2-2Hk+K=0,$$

其中

(19) $$H=\frac{1}{2}(h_{11}+h_{22}),\quad K=h_{11}h_{22}-h_{12}^2,$$

它们都不依赖于 Darboux 标架的选取，分别称为曲面M的中曲率和总曲率。

解方程(18)得

(20) $$k_1,k_2=H\pm\sqrt{H^2-K},$$

可见k_1和k_2都是M上的连续函数。因此

(21) $$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2),\quad K=k_1\cdot k_2.$$

在M上取特殊的 Darboux 标架$(x;e_1,e_2,e_3)$，使e_1,e_2分别是曲面M在点x的W变换的特征方向，则

$$h_{11}=k_1,\quad h_{12}=h_{21}=0,\quad h_{22}=k_2,$$

于是方程(10)可化简为

(22) $$\omega_{13}=k_1\omega_1,\quad \omega_{23}=k_2\omega_2,$$

第二基本形式Ⅱ成为

(23) $$\mathrm{II}=k_1(\omega_1)^2+k_2(\omega_2)^2.$$

因此切方向v上的法曲率k_n可表成

(24) $$k_n=k_1\cos^2\theta_1+k_2\sin^2\theta_1,$$

其中θ_1是v和e_1的夹角。这说明，k_1,k_2恰好是曲面在方向e_1，e_2上的法曲率。我们把变换W在点x的特征向量e_1,e_2称为曲面在x的主方向，把对应的特征值k_1,k_2称为曲面在x的主曲率。公式(24)就是著名的 Euler 公式。

若设$k_1\geqslant k_2$，(24)式可改写成

$$\begin{aligned}k_n&=k_1+(k_2-k_1)\sin^2\theta_1\\&=(k_1-k_2)\cos^2\theta_1+k_2,\end{aligned}$$

所以

(25) $$k_1\geqslant k_n\geqslant k_2,$$

因此主方向恰是法曲率k_n取极值的方向，而主曲率正是法曲率的最大值和最小值。若在点x，$k_1=k_2$，则在该点各方向上的法曲

率都相等，我们把这样的点称为曲面M的脐点。在脐点，法曲率取极值的方向是不定的。

若$x\in M$是非脐点，则在x的一个邻域内有$k_1\neq k_2$，所以$H^2-K\neq 0$，(20)式说明k_1,k_2是该邻域上的光滑函数。于是有下面的定理。

定理4.1 设M是$\boldsymbol{R}^3$中的光滑曲面，则主曲率k_1,k_2都是M上的连续函数。M上非脐点的集合构成M的一个开集；设$k_1>k_2$，则k_1和k_2都是这个开集上的光滑函数。

根据黎曼几何基本定理，一次微分式ω_{12}是由方程(4)和反对称性$\omega_{12}+\omega_{21}=0$唯一地确定的。在这里我们可以直截了当地给出$\omega_{12}$的表达式。设

$$\omega_{12}=-\omega_{21}=p\omega_1+q\omega_2, \tag{26}$$

代入(4)式则得

$$\begin{cases} d\omega_1=p\omega_1\wedge\omega_2, \\ d\omega_2=q\omega_1\wedge\omega_2, \end{cases} \tag{27}$$

所以p,q分别是$d\omega_1,d\omega_2$用$\omega_1\wedge\omega_2$表示时的系数。微分式ω_{12}给出了曲面M上的Levi-Civita连络

$$\begin{cases} De_1=\omega_{12}e_2, \\ De_2=-\omega_{12}e_1. \end{cases} \tag{28}$$

由方程(6)得到

$$\begin{aligned} d\omega_{12}&=-\omega_{13}\wedge\omega_{23} \\ &=-(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)\omega_1\wedge\omega_2 \\ &=-K\omega_1\wedge\omega_2. \end{aligned} \tag{29}$$

我们知道，总曲率$K=h_{11}h_{22}-h_{12}^2$是用曲面M的第二基本形式Ⅱ来定义的，但是上式说明K是由$d\omega_{12},\omega_1,\omega_2$确定的，也就是由$M$的第一基本形式确定的，因而是曲面$M$的内在的不变量。曲面的总曲率$K$与曲面在$\boldsymbol{R}^3$中保持第一基本形式的变形是无关的。这个结果是Gauss发现的，Gauss本人称它为“惊人的”定理(Theorema egregium)。

Gauss 在研究曲面时经常用到这样一个映射 $g: M \to S^2 \subset \boldsymbol{R}^3$，使得对任意的 $x \in M$，

(30) $$g(x) = e_3(x)。$$

现在通常称它为 Gauss 映射(图12)。显然，(e_1, e_2, e_3) 仍可看作 S^2 上点 $g(x)$ 处的正交标架。由于

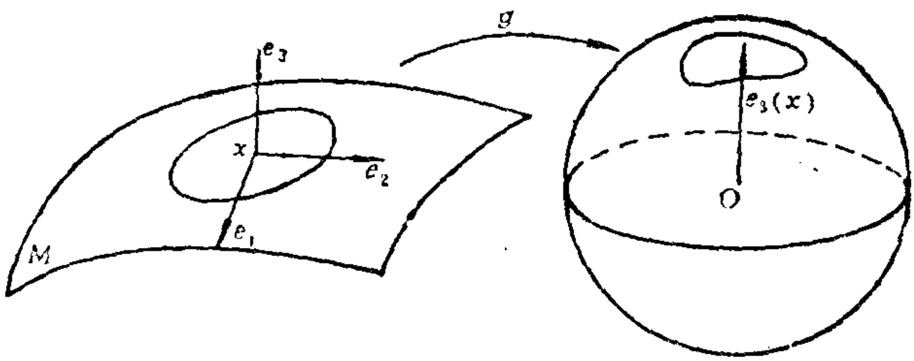

图 12

$$de_3 = \omega_{31} e_1 + \omega_{32} e_2。$$

所以第三基本形式

$$\mathrm{III} = de_3 \cdot de_3 = (\omega_{31})^2 + (\omega_{32})^2$$

是 S^2 上的第一基本形式通过 Gauss 映射拉回到曲面上的二次微分式。同样

(31) $$g^* d\sigma = \omega_{31} \wedge \omega_{32},$$

其中 $d\sigma$ 表示 S^2 上的面积元素。从(29)式得到

(32) $$K = \frac{g^* d\sigma}{dA}。$$

这给出了总曲率 K 的一个几何解释：设曲面 M 上区域 D 在 Gauss 映射下的象记为 D'，它们的面积分别是 A 和 A'，则

$$|K| = \lim_{D \to P} \frac{A'}{A}, \qquad P \in M。$$

因此总曲率 K 是曲面在一点的弯曲的测度。

第五章 § 4 已用内在方式证明了 Gauss-Bonnet 公式：若 M 是

紧致的二维定向的黎曼流形，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K dA = \chi(M). \tag{33}$$

这个公式的推广和研究激发了数学的许多分支的发展。曲面的整体性质是近年来很活跃的课题。在附录一“欧氏空间中的曲线和曲面”一文中包括了整体微分几何中一些最基本的定理。在这里我们介绍刻划球面特征的 Liebmann 定理。

引理1 设M是总曲率K为常数的二维紧致曲面，则K必大于零。

证明 考虑函数$r(x)=x\cdot x$。因为M的紧致性，故必有一点$x_0\in M$，使$r(x)$在$x=x_0$达到最大值。所以

$$dr|_{x_0}=0, \quad d^2r|_{x_0}\leqslant 0. \tag{34}$$

因为

$$\frac{1}{2}dr=x\cdot dx=(x\cdot e_1)\omega_1+(x\cdot e_2)\omega_2,$$

所以

$$x\cdot e_1|_{x_0}=x\cdot e_2|_{x_0}=0, \tag{35}$$

即矢径x_0正好是曲面M在点x_0的法矢量。

微分$x\cdot e_i$ $(i=1,2)$，则得

$$\begin{aligned} d(x\cdot e_i) &= dx\cdot e_i+x\cdot de_i \\ &= \omega_i+\sum_{k=1}^{3}\omega_{ik}(x\cdot e_k), \end{aligned}$$

利用(35)式则有

$$d(x\cdot e_i)|_{x_0}=[\omega_i+\omega_{i3}(x\cdot e_3)]_{x_0}. \tag{36}$$

因此

$$\begin{aligned} 0\geqslant \frac{1}{2}d^2r|_{x_0} &= [d(x\cdot e_1)\omega_1+d(x\cdot e_2)\omega_2]_{x_0} \\ &= [(\omega_1)^2+(\omega_2)^2]_{x_0} \end{aligned} \tag{37}$$

$$+\ (\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23})_{x_0}\cdot(x\cdot e_3)_{x_0}.$$

因为$[(\omega_1)^2+(\omega_2)^2]_{x_0}>0$，且 x_0 是M上离原点O的最远点，故

$$x_0\neq 0,\quad x_0 /\!/ e_3,\quad x_0\cdot e_3\neq 0.$$

于是M在点 x_0 的第二基本形式

$$\mathrm{II}=(\omega_1\omega_{13}+\omega_2\omega_{23})_{x_0}$$

是恒定的二次形式，因此它的系数行列式

$$K(x_0)=(h_{11}h_{22}-h_{12}^2)_{x_0}>0.$$

因为已假定M的总曲率K是常数，故它必是正的常数。

引理2 若M是处处为脐点的连通曲面，则M必为一块球面或平面。

证明 x是M的脐点的条件是：Weingarten 变换在 x 的特征方向不定，所以

$$de_3+k\,dx=0, \tag{38}$$

其中 e_3 是曲面的法矢量，k是主曲率。现在M上处处是脐点，所以上式在整个M上成立，且$k=H$ 是M上的光滑函数。外微分(38)式，则得

$$dk\wedge dx=(dk\wedge\omega_1)e_1+(dk\wedge\omega_2)e_2=0,$$

$$dk\wedge\omega_1=0,\quad dk\wedge\omega_2=0.$$

因为$\omega_1\wedge\omega_2\neq 0$，所以

$$dk=0,\quad k=\text{const}. \tag{39}$$

下面分两种情形：

1) 设$k=0$，则由(38)式得

$$de_3=0,\quad e_3=e_3^0\ (\text{常矢量}),$$

故

$$d(x\cdot e_3^0)=dx\cdot e_3^0=0,$$

$$x\cdot e_3^0=\text{const}. \tag{40}$$

可见M是 $\boldsymbol{R}^3$ 中的平面。

2) 设$k\neq 0$，则由(38)式得

$$d\left(\frac{e_3}{k}+x\right)=0,$$

所以

$$\frac{e_3}{k}+x=x_0 \text{（常矢量）},$$

(41) $$(x-x_0)^2=\frac{1}{k^2}.$$

即M是以 x_0 为中心，以$1/|k|$为半径的一块球面。

定理4.2(Liebmann 定理) 设M是 $\boldsymbol{R}^3$ 中总曲率K是常数的紧致连通曲面，则M是球面。

证明 根据引理1，K必是正常数。设k_1,k_2是M的主曲率，$k_1\geqslant k_2$，则$K=k_1k_2>0$。由定理4.1，k_1是M上的连续函数；由于M的紧致性，故可设k_1在点$x_0\in M$达到最大值，因而k_2在x_0达到最小值。

下面分两种情形考虑：

1）若$k_1(x_0)=k_2(x_0)$，因为$k_1(x_0)\geqslant k_1\geqslant k_2\geqslant k_2(x_0)$，所以在$M$上处处有$k_1=k_2=\pm\sqrt{K}$，根据引理2，$M$是球面。

2）设$k_1(x_0)>k_2(x_0)$，则x_0不是脐点，所以存在x_0的一个邻域U，使其中每一点都是非脐点. 因此在U内可取 Darboux 标架$(x;e_1,e_2,e_3)$，使e_1,e_2分别是对应于主曲率k_1,k_2的彼此正交的主方向，故

(42) $$\omega_{13}=k_1\omega_1, \quad \omega_{23}=k_2\omega_2.$$

若设$\omega_{12}=p\omega_1+q\omega_2$，命

(43) $$dp=p_1\omega_1+p_2\omega_2, \quad dq=q_1\omega_1+q_2\omega_2,$$

则

(44) $$d\omega_{12}=(q_1-p_2)\omega_1\wedge\omega_2.$$

与 Gauss 方程(29)对照得到

(45) $$K=-(q_1-p_2).$$

外微分(42)式，并利用 Codazzi 方程(7)，则有

$$dk_1\wedge\omega_1+pk_1\omega_1\wedge\omega_2=pk_2\omega_1\wedge\omega_2,$$

$$dk_2\wedge\omega_2+qk_2\omega_1\wedge\omega_2=qk_1\omega_1\wedge\omega_2,$$

所以

(46) $$\begin{cases}(dk_1-p(k_1-k_2)\omega_2)\wedge\omega_1=0,\\(dk_2-q(k_1-k_2)\omega_1)\wedge\omega_2=0.\end{cases}$$

由于 $k_1\cdot k_2=K=\text{const}>0$，故 $k_2=K/k_1$，因此

(47) $$dk_2=-\frac{K}{k_1^2}dk_1,$$

代入(46)的第二式则得

(48) $$\left(dk_1+\frac{qk_1^2}{K}(k_1-k_2)\omega_1\right)\wedge\omega_2=0.$$

联合(48)式和(46)的第一式则有

(49) $$dk_1=-\frac{qk_1^2}{K}(k_1-k_2)\omega_1+p(k_1-k_2)\omega_2.$$

根据假定，k_1 在 x_0 处达到最大値，所以

(50) $$dk_1|_{x_0}=0,\qquad d^2k_1|_{x_0}\leqslant 0.$$

又因为在点 x_0 处 $k_1\neq 0$，$k_1-k_2\neq 0$，故有

(51) $$p(x_0)=q(x_0)=0.$$

将(49)式再微分一次，并限制在点 x_0，则有

(52) $$\begin{aligned}0\geqslant d^2k_1|_{x_0}&=\Big[-\frac{k_1^2}{K}(k_1-k_2)q_1(\omega_1)^2+(k_1-k_2)p_2(\omega_2)^2\\&\quad+\left(-\frac{k_1^2}{K}q_2(k_1-k_2)+(k_1-k_2)p_1\right)\omega_1\omega_2\Big]_{x_0},\end{aligned}$$

其中 ω_1,ω_2 可取任意实数値。由于在点 x_0 处有

$$K>0,\quad k_1-k_2>0,$$

让(52)式右端的二次形式分别在方向 e_1,e_2 上取値，则得

(53) $$-q_1(x_0)\leqslant 0,\quad p_2(x_0)\leqslant 0.$$

代入(45)式得到

$$K(x_0)\leqslant 0,$$

这与 $K>0$ 相矛盾，因此这种情形是不可能出现的。证毕。

第七章 复 流 形

§1 复 流 形

复流形的定义在形式上和实流形是一样的。但是复结构加在流形上的限制要强得多，因而具有更丰富的内容。

设 $\boldsymbol{C}$ 表示复数域，$\boldsymbol{C}_m$ 是数组 $(c^1,\cdots,c^m)(c^i\in\boldsymbol{C})$ 所成的复 m 维矢量空间。

定义1.1 设M是有可数基的 Hausdorff 空间。若在M上给定了一族坐标卡$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$，使得$\{U_\alpha\}$构成$M$的开复盖，而每一个$\varphi_\alpha$是从$U_\alpha$到$\boldsymbol{C}_m$的一个开集①上的同胚，并且满足以下条件：对任意的$U_\alpha,U_\beta$，若$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，则

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

是$\boldsymbol{C}_m$的两个开集之间的全纯映射，则称M是m维复流形。

设$(z^1,\cdots,z^m)$ $(z^i\in\boldsymbol{C})$是U_α上的局部坐标系，$(w^1,\cdots,w^m)$ $(w^i\in\boldsymbol{C})$是U_β上的局部坐标系，当$U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$时，在$U_\alpha\cap U_\beta$上映射$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$可用局部坐标表为

(1) $$w^k=w^k(z^1,\cdots,z^m),\quad 1\leqslant k\leqslant m.$$

那末$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$是全纯映射的意思是：每个函数$w^k(z^1,\cdots,z^m)$在$\boldsymbol{C}_m$的开集$\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$上是全纯的。

---

① 命 $z^j=x^j+i\cdot y^j$，所以$\boldsymbol{C}_m$可看作实数组$(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^m)$构成的实$2m$维矢量空间$\boldsymbol{R}^{2m}$．$\boldsymbol{C}_m$上的拓扑结构与$\boldsymbol{R}^{2m}$是一致的．显然，$\boldsymbol{C}_m$中形如

$$\left\{(z^1,\cdots,z^m)\,\middle|\,\sum_{j=1}^m(z^j-z_0^j)(\overline{z}^j-\overline{z}_0^j)<r^2,\ r\in\boldsymbol{R},\ r>0\right\}$$

的集合构成$\boldsymbol{C}_m$的拓扑基．

所谓全纯函数的意思是：设U是C_m中一个开集，其坐标z^k可表成$z^k=x^k+iy^k$。设f是定义在U上的复值光滑函数，它可以表成

$$(2)\qquad f(z^1,\cdots,z^m)=g(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^m)+ih(x^1,\cdots,x^m,y^1,\cdots,y^m).$$

如果Cauchy-Riemann条件：

$$(3)\qquad \frac{\partial g}{\partial x^k}=\frac{\partial h}{\partial y^k},\qquad \frac{\partial g}{\partial y^k}=-\frac{\partial h}{\partial x^k},\quad 1\leqslant k\leqslant m$$

成立，则称f是U上的全纯函数。下面三个条件是彼此等价的：

1）f是全纯函数；

2）在每一点$a\in U$有一个邻域$V\subset U$，f在V内可表成收敛的幂级数

$$(4)\qquad f(z)=\sum_{k_1,\cdots,k_m=0} c_{k_1\cdots k_m}(z^1-a^1)^{k_1}\cdots(z^m-a^m)^{k_m};$$

3）复导数$\dfrac{\partial f}{\partial z^k}$ $(1\leqslant k\leqslant m)$在$U$内是存在的。

现在映射$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$是全纯的，而且是从$\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$到$\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$的同胚，所以

$$(5)\qquad \frac{\partial(w^1,\cdots,w^m)}{\partial(z^1,\cdots,z^m)}\neq 0.$$

定义1.2 设M,N分别是m,n维复流形，$f:M\to N$是连续映射．若对每一点$p\in M$，存在一个邻域U，使得f在U内可用局部坐标表成

$$(6)\qquad w^k=w^k(z^1,\cdots,z^m),\qquad 1\leqslant k\leqslant n,$$

其中w^k都是全纯函数，则称f是全纯映射。

设$f:M\to C$是复流形M上的全纯函数。根据极大模原理，若在$p_0\in M$的一个邻域U内f在p_0的模取到最大值，即$|f(p)|\leqslant|f(p_0)|$ $(p\in U)$，则在U内有

$$f(p)=f(p_0).$$

如果M是紧致的连通复流形，$|f(p)|$ $(p\in M)$是M上的连续函数，它必在M上取到最大值。根据前面的断言，M上的全纯函数f必定取常值。由此可知，从紧致的连通复流形M到$\boldsymbol{C}_n$中的全纯映射$f:M\to\boldsymbol{C}_n$必定把M映为$\boldsymbol{C}_n$中的一个点。

例 1 $\boldsymbol{C}_m$是m维复流形。$\boldsymbol{C}_1$就是Gauss复平面。

例 2 复m维射影空间$\boldsymbol{C}P_m$。

在$\boldsymbol{C}_{m+1}-\{0\}$的元素之间定义如下的关系～：

$$(z^0,z^1,\cdots,z^m)\sim(w^0,w^1,\cdots,w^m)$$

当且仅当存在非零复数λ，使

(7) $$(z^0,z^1,\cdots,z^m)=\lambda(w^0,w^1,\cdots,w^m).$$

容易验证，这是等价关系。复m维射影空间$\boldsymbol{C}P_m$就是商空间$(\boldsymbol{C}_{m+1}-\{0\})/\sim$，其中的元素记作$[z^0,z^1,\cdots,z^m]$。数组$(z^0,z^1,\cdots,z^m)$称为点$[z^0,z^1,\cdots,z^m]$的齐次坐标，它们被$\boldsymbol{C}P_m$中的点确定到差一个非零复数因子。同实射影空间，$\boldsymbol{C}P_m$能用$m+1$个开集$U_j(0\leqslant j\leqslant m)$盖满，其中

(8) $$U_j=\{[z^0,z^1,\cdots,z^m]\mid\in\boldsymbol{C}P_m,z^j\neq0\},$$

U_j上的坐标是

(9) $${}_j\zeta^k=z^k/z^j,\quad 0\leqslant k\leqslant m,\ k\neq j.$$

因为${}_j\zeta^k$可以取到任意的复数值，所以每一个U_j和$\boldsymbol{C}_m$是同胚的。在$U_j\cap U_k$上，坐标变换公式是

(10) $$\begin{cases}{}_j\zeta^h={}_k\zeta^h/{}_k\zeta^j, & h\neq j,k,\\ {}_j\zeta^k=1/{}_k\zeta^j.\end{cases}$$

它们都是全纯函数，因此$\boldsymbol{C}P_m$是m维复流形。

复一维射影空间$\boldsymbol{C}P_1$看作二维实流形时，通常称作黎曼球面。因为$\boldsymbol{C}P_1$可以用两个坐标域U_0,U_1盖住，而且U_0与$\boldsymbol{C}P_1$只差一点$p=[0,1]$，U_0同胚于Gauss复平面，所以黎曼球面$\boldsymbol{C}P_1$同胚于Gauss复平面的一点紧致化，即二维球面S^2。

考虑自然投影 $\pi: \boldsymbol{C}_{m+1}-\{0\} \to \boldsymbol{C}P_m$，使得

(11) $$\pi(z^0, z^1, \cdots, z^m) = [z^0, z^1, \cdots, z^m].$$

对于 $p \in \boldsymbol{C}P_m$，$\pi^{-1}(p)$ 可以和 $\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C}_1 - \{0\}$ 等同起来。我们把 $\pi^{-1}(U_j)$ 中的坐标 $(z^0, z^1, \cdots, z^m)$ 代之以 ${}_j\zeta^k = z^k/z^j$ $(0 \leqslant k \leqslant m, k \neq j)$ 和 z^j，则

$$\pi^{-1}(U_j) \cong U_j \times \boldsymbol{C}^*.$$

这说明 $\boldsymbol{C}_{m+1}-\{0\}$ 有局部积的结构，z^j 给出了纤维 $\pi^{-1}(p)$ 上的坐标。

若 $p \in U_j \cap U_k$，则 U_j 和 U_k 分别在纤维 $\pi^{-1}(p)$ 上给出坐标系 z^j 和 z^k。在同一点 $x \in \pi^{-1}(p)$ 的两个坐标 z^j 和 z^k 之间有关系

(12) $$z^j = z^k \cdot {}_k\zeta^j = z^k / {}_j\zeta^k,$$

其中 ${}_k\zeta^j: U_j \cap U_k \to \boldsymbol{C}^*_1$ 是 $U_j \cap U_k$ 上的非零全纯函数。所以 $\boldsymbol{C}_{m+1}-\{0\}$ 是复 m 维射影空间 $\boldsymbol{C}P_m$ 上的全纯纤维丛，其纤维型和结构群都是 $\boldsymbol{C}^*$。

在 $\boldsymbol{C}_{m+1}$ 中考虑方程

(13) $$\sum_{k=0}^{m} z^k \bar{z}^k = 1.$$

若把 $\boldsymbol{C}_{m+1}$ 看作实矢量空间 $\boldsymbol{R}^{2(m+1)}$，则方程 (13) 在 $\boldsymbol{R}^{2(m+1)}$ 中定义了一个 $2m+1$ 维单位球面 S^{2m+1}(为区别起见，实维数记在右上方，复维数记在右下方)。

把自然投影(11)限制在 S^{2m+1} 上则得

(14) $$\pi: S^{2m+1} \to \boldsymbol{C}P_m.$$

对于任意的 $p \in \boldsymbol{C}P_m$，完全逆象 $\pi^{-1}(p)$ 是一个圆周。这称为 S^{2m+1} 的 Hopf 纤维化。

当 $m=1$时，(14)式可写为

(15) $$\pi: S^3 \to \boldsymbol{C}P_1 \approx S^2,$$

其中 $\boldsymbol{C}P_1$ 与 S^2 是拓扑同胚的。这是一个从高维到低维的实质性

(essential) 映射①的例子，在拓扑学同伦论的发展中是重要的史实。

例 3 由一组齐次多项式

$$P_l(z^0, z^1, \cdots, z^m) = 0, \quad 1 \leqslant l \leqslant q,$$

在 $\boldsymbol{C}P_m$ 中确定的轨迹称为代数流形(algebraic variety)。例如：方程

$$(z^0)^2 + \cdots + (z^m)^2 = 0 \tag{16}$$

给出的复流形称为超二次曲面。周煒良的一个定理说：隐蔽在 $\boldsymbol{C}P_m$ 中的每一个紧致子流形必是一个代数流形。

例 4 复环面。

$\boldsymbol{C}_m$ 可看作 $2m$ 维实矢量空间 $\boldsymbol{R}^{2m}$。在 $\boldsymbol{R}^{2m}$ 中取 $2m$ 个实线性无关的矢量$\{v_\alpha\}$，它产生的格是

$$L = \left\{ \sum_{\alpha=1}^{2m} n_\alpha v_\alpha, \ n_\alpha \in \boldsymbol{Z} \right\}. \tag{17}$$

$\boldsymbol{C}_m$ 和 L 都是加群。商空间 $\boldsymbol{C}_m/L$ 是一个 m 维复流形，称为 m 维复环面。

在拓扑上，m 维复环面和 $2m$ 维(实)环面是同胚的。但是前者有复流形结构，所以有更丰富的内容。例如，当 $m=1$ 时，复环面到自身的全纯映射是保角的，因此矢量 v_1 和 v_2 的夹角以及它们的长度之比在全纯映射下是不变的。

若复环面可以嵌入复射影空间作为非奇异子流形，即对于充分大的N，存在非退化的全纯映射

$$f: \boldsymbol{C}_m/L \to \boldsymbol{C}P_N, \tag{18}$$

则称这个复环面是 Abel 流形。Abel 流形是代数几何和数论的一个重要分支。

例 5 Hopf 流形。

---

① 一个连续映射 $f: X \to Y$ 叫做实质性的 (essential)，如果它不与常值映射 $X \to y_0 \in Y$ 同伦，即非零伦的。

考虑变换 $\alpha: \boldsymbol{C}_m-\{0\} \to \boldsymbol{C}_m-\{0\}$，使

$$\alpha(z^1, \cdots, z^m)=2(z^1, \cdots, z^m). \tag{19}$$

由 α 生成的离散群记作 Δ，则商空间 $\boldsymbol{C}_m-\{0\}/\Delta$ 是一个 m 维复流形，称为 Hopf 流形。

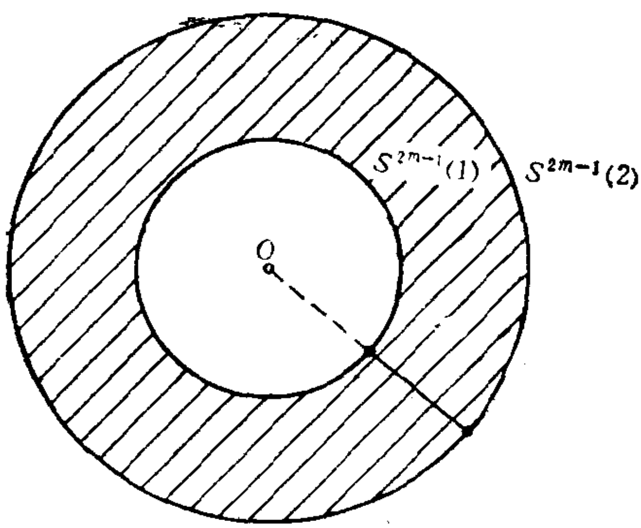

图 13

在拓扑上，Hopf 流形和 $S^{2m-1}\times S^1$ 是同胚的。为此，我们只要考虑 $\boldsymbol{C}_m=\boldsymbol{R}^{2m}$ 中半径分别为 1 和 2 的两个同心球 $S^{2m-1}(1)$，$S^{2m-1}(2)$ 所夹的球壳区域（见图 13），并且把这两个球面截取半径所得线段的两个端点粘合成一点，这样得到的空间显然是和Hopf 流形是同胚的。

Hopf 流形是最简单的非代数流形的例子。

例 6 设 M 是二维定向曲面，黎曼度量是

$$ds^2=(\omega_1)^2+(\omega_2)^2. \tag{20}$$

假定 ds^2 是解析的，则

$$ds^2=(\omega_1+i\omega_2)(\omega_1-i\omega_2),$$

并且微分方程 $\omega_1+i\omega_2=0$ 有积分因子 λ，使

$$\lambda(\omega_1+i\omega_2)=dz. \tag{21}$$

因此

$$ds^2=\frac{1}{|\lambda|^2}dz d\bar{z}. \tag{22}$$

若命 $z=x+iy$，则

$$ds^2=\frac{1}{|\lambda|^2}(dx^2+dy^2). \tag{23}$$

这说明曲面上解析的黎曼度量在局部上总是和欧氏变量成保角对

应的。使黎曼度量 ds^2 能写成(23)式的参数 x，y 称为曲面的等温参数。当 ds^2 是光滑的情形，根据 Korn-Lichtenstein 定理(这是一个困难的定理，参考 S.S.Chern, An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface, *Proc. AMS*, 6(1955), 771--782)。曲面的定向由

$$dx\wedge dy=\frac{i}{2}dz\wedge d\bar{z} \tag{24}$$

给出。

若 ds^2 又能写成

$$ds^2=\frac{1}{|\mu|^2}dw\,d\bar{w}, \tag{25}$$

则 dw 或是 dz 的倍数，或是 $d\bar{z}$ 的倍数。如果复坐标 z 和 w 给出了曲面的同一个定向，则 dw 必是 dz 的倍数，因此 w 是 z 的全纯函数。由此可见，二维定向曲面必有复流形构造，使它成为一维复流形。一维复流形又称为黎曼曲面，是单元复变函数论的基本研究对象。

§2　矢量空间上的复结构

为了深入研究复流形的构造，需要弄清楚矢量空间上的复结构。

定义2.1　设 V 是 m 维实矢量空间。所谓 V 上的一个复结构 J 是 V 到自身的一个线性变换 $J:V\to V$，使得

$$J^2=-\mathrm{id}:V\to V. \tag{1}$$

注记　实质上 J 是把矢量乘以 i。若命 $i\cdot X=JX$，则矢量空间 V 成为复数域上的矢量空间。反之，若 V 是复矢量空间，命 $JX=i\cdot X$，则把 V 当作实矢量空间时，J 是 V 上的复结构。

设 V^* 是 V 的对偶空间，则 V 上的复结构 J 也在 V^* 上诱导出一个复结构，仍记它为 J，其定义如下：设 $\alpha\in V^*$，$x\in V$，则

$$\langle x,J\alpha\rangle=\langle Jx,\alpha\rangle. \tag{2}$$

显然$J^2a=-a$，所以 J 确实是V^*上的复结构。

取V的一个基底 e_r，$1\leqslant r\leqslant m$；设复结构 J 关于基底 $\{e_r\}$的矩阵是$A=(a_i^j)$，即

$$J\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中a_i^j是实数。由于$J^2=-\mathrm{id}$，所以

$$A^2=-I, \tag{4}$$

其中 I 表示$m\times m$阶单位矩阵。显然，矩阵 A 的特征值是 $\pm i$，而且必须成对出现，所以V的实维数必是偶数。设$m=2n$。

设V^*中与$\{e_r,\ 1\leqslant r\leqslant 2n\}$对偶的基底是$\{e^{*r},1\leqslant r\leqslant 2n\}$，根据(2)式得到

$$J\begin{pmatrix} e^{*1} \\ \vdots \\ e^{*2n} \end{pmatrix}={}^tA\cdot\begin{pmatrix} e^{*1} \\ \vdots \\ e^{*2n} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

即V^*中的复结构 J 关于基底$\{e^{*r},1\leqslant r\leqslant 2n\}$的矩阵是${}^tA$，它与 A 有相同的特征值。

因为A的特征值是纯虚数，所以考虑 V^* 的复化空间 $V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 比较方便。$V^*\otimes\boldsymbol{C}$是V上复值线性函数的集合，它是复m维矢量空间。设λ是$V^*\otimes\boldsymbol{C}$中任意一个元素，则λ可以表成

$$\lambda=\alpha+i\beta, \tag{6}$$

其中$\alpha,\beta\in V^*$。很明显，V^*的基底可作为$V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 的基底，V^*上的复结构 J 可自然地扩展为复化空间$V^*\otimes\boldsymbol{C}$的复结构 J，只要规定

$$J\lambda=J\alpha+iJ\beta. \tag{7}$$

现在 $V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 是复矢量空间，复结构 J 的特征值是$\pm i$，所以对应于特征值$\pm i$ 的特征矢量必然是存在的。在$V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 中复结构 J 的对应于 i 的特征矢量称为(1,0)型元素，对应于$-i$的特征矢

量称为(0,1)型元素。显然，$V^*_{\cdot}\otimes\boldsymbol{C}$ 中全体(1,0)型元素组成 $V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 的复子空间，记作 V_C，全体(0,1)型元素也组成 $V^*_{\cdot}\otimes\boldsymbol{C}$ 的复子空间，记作 $\bar{V}_C$。空间 V_C 和 $\bar{V}_C$ 在复共轭下有一一对应关系。实际上，如果 $\lambda=\alpha+i\beta\in V_C$，则由(7)式得

$$\begin{aligned}J\lambda&=J\alpha+iJ\beta\\&=i(\alpha+i\beta)=-\beta+i\alpha.\end{aligned}$$

所以

$$J\alpha=-\beta,\quad J\beta=\alpha. \tag{8}$$

由此可见

$$\begin{aligned}J\bar{\lambda}&=J(\alpha-i\beta)\\&=-i(\alpha-i\beta)=-i\bar{\lambda},\end{aligned}$$

即 $\bar{\lambda}\in\bar{V}_C$。容易验证，$V_C\cap\bar{V}_C=\{0\}$。另外 $V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 中任意一个元素都可表成(1,0)型元素与(0,1)型元素的和。设 $f\in V^*_{\cdot}\otimes\boldsymbol{C}$，命

$$f_1=\frac{1}{2}(f-i\cdot Jf),\quad f_2=\frac{1}{2}(f+i\cdot Jf), \tag{9}$$

则 $f=f_1+f_2$，并且

$$Jf_1=i\cdot f_1,\quad Jf_2=-i\cdot f_2, \tag{10}$$

即 $f_1\in V_C$，$f_2\in\bar{V}_C$。所以 $V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 可以表示成 V_C 与 $\bar{V}_C$ 的直和。这又说明 V_C 和 $\bar{V}_C$ 都是 $n=m/2$ 维复矢量空间。

在 V_C 中任取一个基底 λ^j，$1\leqslant j\leqslant n$；则 $\{\lambda^j,\bar{\lambda}^j,1\leqslant j\leqslant n\}$ 构成 $V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 的一个基底。在此基底下，复结构 J 的矩阵化成标准型

$$\begin{pmatrix}i&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&i&&&\\&&&-i&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-i\end{pmatrix}. \tag{11}$$

现在把 V 上的复值线性函数 λ^j 分解成实部和虚部，命

(12) $$\lambda^j = e^{*j} + i \cdot e^{*n+j},$$
其中 $e^{*j}_{\mathbb{C}}$ 和 $e^{*n+j}_{\mathbb{C}}$ 是 $V^*_{\mathbb{C}}$ 中的元素。由于 $J\lambda^j = i \cdot \lambda^j$，由(7)式可得

(13) $$Je^{*j} = -e^{*n+j}_{\mathbb{C}}, \quad Je^{*n+j}_{\mathbb{C}} = e^{*j}_{\mathbb{C}}.$$

另外，从(12)式得到

(14) $$\begin{cases} e^{*j}_{\mathbb{C}} = \dfrac{1}{2}(\lambda^j + \bar{\lambda}^j), \\ e^{*n+j}_{\mathbb{C}} = -\dfrac{i}{2}(\lambda^j - \bar{\lambda}^j). \end{cases}$$

由此可见，这 $2n$ 个 V 上的实值线性函数 e^{*j}, e^{*n+j}，$1 \leqslant j \leqslant n$ 可以和 $\{\lambda^j, \bar{\lambda}^j, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ 互相复线性表示，因此它们是 $V^* \otimes \mathbf{C}$ 的一个基底，因而也是 V^* 的一个基底。

设 $\{e_j, e_{n+j}, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ 是 V 中与上面的 $\{e^{*j}, e^{*n+j}, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ 对偶的基底，则容易验证

(15) $$Je_j = e_{n+j}, \quad Je_{n+j} = -e_j.$$

定理2.1 设 J 是实矢量空间 V 上的一个复结构，则 V 的维数 m 必是偶数，记 $m = 2n$；而且在空间 V 中必有基底 $\{e_j, Je_j, 1 \leqslant j \leqslant n\}$。此外，任意两个这样的基底赋予 V 的定向是相同的。

证明 空间 V 中形如 $\{e_j, Je_j, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ 的基底的存在性已在前面的讨论中证明了。现在只需证明它们给出了 V 的确定的定向。

如前面所述，在 V^* 中有对偶基底 $\{e^{*j}, -Je^{*j}, 1 \leqslant j \leqslant n\}$。设 λ^j 如(12)式所定义，则

$$e^{*j} \wedge Je^{*j} = -e^{*j} \wedge e^{*n+j}$$
$$= -\frac{i}{2} \lambda^j \wedge \bar{\lambda}^j,$$

故

(16) $$\bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant n} (e^{*j} \wedge Je^{*j}) = \left(-\frac{i}{2}\right)^n \bigwedge_{1 \leqslant j \leqslant n} (\lambda^j \wedge \bar{\lambda}^j).$$

若在 $V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 中取另一个基底$\{\mu^j,\bar{\mu}^j,1\leqslant j\leqslant n\}$，其中 μ^j 是 $V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 中的(1,0)型元素，则有 $n\times n$ 阶非退化复矩阵 G，使

$$(\mu^1,\cdots,\mu^n)=(\lambda^1,\cdots,\lambda^n)\cdot G, \tag{17}$$

因此

$$\begin{cases}\mu^1\wedge\cdots\wedge\mu^n=(\det G)\lambda^1\wedge\cdots\wedge\lambda^n,\\ \bigwedge\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(\mu^j\wedge\bar{\mu}^j)=|\det G|^2\bigwedge\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(\lambda^j\wedge\bar{\lambda}^j).\end{cases} \tag{18}$$

上式表明等号两边的两个 $2n$ 次外形式只差一正数因子 $|\det G|^2$，这就证明了，如果 $\{a_j,Ja_j,1\leqslant j\leqslant n\}$ 是V的由$\{\mu^j,\bar{\mu}^j,1\leqslant j\leqslant n\}$决定的另一个基底，则它与$\{e_j,Je_j,1\leqslant j\leqslant n\}$给出的$V$的定向是相同的。

前面已经证明，如果在V上给定了一个复结构 J，则 $V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 有唯一的直和分解 $V_C\oplus\bar{V}_C$，后面的两个子空间在复共轭下有一一对应关系。反过来，$V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 的任意一个这样的直和分解也在 V 上确定了一个复结构。

定理2.2 设V是实 $2n$ 维矢量空间。若 $V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 有任意一个直和分解 $V_C\oplus\bar{V}_C$，使得 V_C 和 $\bar{V}_C$ 在复共轭下有一一对应关系，则在V中有唯一的一个复结构 J，使 J 以 V_C 中的元素为(1,0)型元素，以 $\bar{V}_C$ 中的元素为(0,1)型元素。

证明 定义线性变换 $J:V^*\otimes\boldsymbol{C}\to V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 如下：

$$\begin{cases}Jf=i\cdot f, & f\in V_C,\\ Jf=-i\cdot f, & f\in\bar{V}_C.\end{cases} \tag{19}$$

因为 $V^*\otimes\boldsymbol{C}=V_C\oplus\bar{V}_C$，所以映射 J 是由(19)式完全确定的。在 V_C 中取基底 λ^j，$1\leqslant j\leqslant n$，命

$$e^{*j}=\frac{1}{2}(\lambda^j+\bar{\lambda}^j),\quad e^{*n+j}=-\frac{i}{2}(\lambda^j-\bar{\lambda}^j). \tag{20}$$

则 e^{*j} 和 e^{*n+j} 都是空间V上的实值线性函数，所以$\{e^{*j},e^{*n+j},1\leqslant j\leqslant n\}$既是 $V^*\otimes\boldsymbol{C}$ 的基底，也是 V^*的基底。因为

$$(21)\qquad \begin{cases} Je^{*i}=\dfrac{1}{2}(i\cdot\lambda^i-i\cdot\bar{\lambda}^i)=-e^{*n+i}, \\ Je^{*n+i}=-\dfrac{i}{2}(i\cdot\lambda^i+i\cdot\bar{\lambda}^i)=e^{*i}, \end{cases}$$

所以 J 是 V^* 上的复结构，因而在 V 上定义了一个复结构 J。由(19)式可知，V_C 和 $\bar{V}_C$ 分别是关于 J 的(1,0)型元素和(0,1)型元素构成的复子空间。唯一性是显然的；因为，如果 J 是适合定理要求的复结构，则(19)式必须成立。证毕。

现在我们来考虑空间 $\Lambda^r(V^*\otimes\boldsymbol{C})$，它的元素是 V 上复数值 r 重反对称线性函数。显然，该空间可表成直和：

$$(22)\qquad \Lambda^r(V^*\otimes\boldsymbol{C})=\sum_{p+q=r}(\Lambda^p V_C)\wedge(\Lambda^q\bar{V}_C),$$

其中 $(\Lambda^p V_C)\wedge(\Lambda^q\bar{V}_C)$ 中的元素可以表示成

$$(23)\qquad \sum C_{i_1\cdots i_p,\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}\lambda^{i_1}\wedge\cdots\wedge\lambda^{i_p}\wedge\bar{\lambda}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\bar{\lambda}^{j_q},$$

这种元素称为 (p,q) 次外形式。

若用 $\prod_{p,q}$ 记空间 $\Lambda^r(V^*\otimes\boldsymbol{C})$ 到 (p,q) 次外形式空间 $(\Lambda^p V_C)\wedge(\Lambda^q\bar{V}_C)$ $(p+q=r)$ 的自然投影；命

$$(24)\qquad \alpha_{p,q}=\prod_{p,q}\alpha,$$

则

$$(25)\qquad \alpha=\sum_{p+q=r}\alpha_{p,q}.$$

下列性质是明显的：

1）若 α 是 (p,q) 次外形式，则 $\bar{\alpha}$ 是 (q,p) 次外形式；

2）若 α 是 (p,q) 次外形式，β 是 (r,s) 次外形式，则 $\alpha\wedge\beta$ 是 $(p+r,q+s)$ 次外形式；

3）若 p 或 $q>n$，则 (p,q) 次外形式必为零。

注记 在上面的叙述中我们着重讨论的是 V 的对偶空间 V^*

的复化空间，这是因为 V^* 的元素是 V 上的实值线性函数，因此它乘以 i(虚数单位)的意义是很明白的。反过来也可以考虑 V 的复化空间 $V\otimes \boldsymbol{C}$，这时把 V 看作 V^* 上的对偶空间。我们把复结构 J 在 $V\otimes \boldsymbol{C}$ 中对应于特征值 $\pm i$ 的特征矢量分别称为(1,0)型矢量和(0,1)型矢量。根据定理2.1，在 V 中存在基底 $\{e_j, Je_j, 1\leqslant j\leqslant n\}$；若命

$$
(26)\qquad \begin{cases} \xi_j=\dfrac{1}{2}(e_j-iJe_j), \\ \bar{\xi}_j=\dfrac{1}{2}(e_j+iJe_j), \end{cases} \qquad 1\leqslant j\leqslant n,
$$

则 $\xi_j, \bar{\xi}_j$ 分别是 $V\otimes \boldsymbol{C}$ 中的(1,0)型矢量和(0,1)型矢量，并且它们构成 $V\otimes \boldsymbol{C}$ 的基底。把确定 V 和 V^* 的对偶关系的配合作复线性扩张，则定理2.1中的 $\{\lambda^i, \bar{\lambda}^i, 1\leqslant j\leqslant n\}$ 和 $\{\xi_j, \bar{\xi}_j, 1\leqslant j\leqslant n\}$ 恰好是彼此对偶的基底。实际上

$$
\begin{aligned}
\langle\xi_j, \lambda^k\rangle &= \frac{1}{2}\langle e_j - iJe_j, e^{*k} - iJe^{*k}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\{\langle e_j, e^{*k}\rangle - \langle Je_j, Je^{*k}\rangle \\
&\quad - i\langle Je_j, e^{*k}\rangle - i\langle e_j, Je^{*k}\rangle\} \\
&= \delta_j^k,
\end{aligned}
$$

同理

$$
\langle\bar{\xi}_j, \lambda^k\rangle=\langle\xi_j, \bar{\lambda}^k\rangle=0, \quad \langle\bar{\xi}_j, \bar{\lambda}^k\rangle=\delta_j^k.
$$

定义2.2 设 V 是有复结构 J 的实矢量空间。若 $H: V\times V\to \boldsymbol{C}$ 是二元复数值函数，它满足下列条件：

1) 对任意的 $x_1, x_2, y\in V$，$a_1, a_2\in \boldsymbol{R}$，则

$$
H(a_1x_1+a_2x_2, y)=a_1H(x_1, y)+a_2H(x_2, y);
$$

2) 对任意的 $x, y\in V$，则有

$$
H(y, x)=\overline{H(x, y)};
$$

3) $H(Jx, y)=iH(x, y)$,

则称 H 是实矢量空间 V 上的一个 Hermite 结构。

若从 $H(x,y)$ 分出实部和虚部，写成

$$H(x,y)=F(x,y)+iG(x,y), \tag{27}$$

则 F 和 G 都是 V 上的实数值双线性函数。从条件 2) 得

$$F(y,x)+iG(x,y)=F(x,y)-iG(x,y),$$

所以

$$F(y,x)=F(x,y), \quad G(x,y)=-G(x,y), \tag{28}$$

即 F 是对称双线性函数，G 是反对称双线性函数。由条件 3) 得

$$F(Jx,y)=-G(x,y), \quad G(Jx,y)=F(x,y). \tag{29}$$

由此可知

$$F(Jx,Jy)=F(x,y), \quad G(Jx,Jy)=G(x,y). \tag{30}$$

即 F 和 G 都是在 J 下是不变的。因此，在 V 上给定一个 Hermite 结构，则在 V 上决定了两个在 J 下不变的实数值双线性函数，其中一个是对称的，另一个是反对称的，这两者可以通过复结构 J 互相表示。

反过来，如果在有复结构 J 的实矢量空间 V 上给定一个在 J 下不变的实数值对称双线性函数 F（或反对称双线性函数 G），则通过 (29) 和 (27) 两式，在 V 上确定了一个 Hermite 结构 H（请读者自己验证）。

若 Hermite 结构 H 所对应的实数值对称双线性函数 $F(x,y)$ 是正定的，则称 Hermite 结构 H 是正定的。显然，正定的 Hermite 结构 H 在 V 上定义了一个在 J 下不变的内积：对于 $x,y\in V$，命

$$x\cdot y=F(x,y)=\frac{1}{2}\left(H(x,y)+\overline{H(x,y)}\right). \tag{31}$$

现在把 Hermite 结构 H 用 V_C 中的基底 λ^k 表示出来。设 $x,y\in V$，则它们可表成

$$\begin{cases} x=\sum_{j=1}^{n}(x^je_j+x^{n+j}Je_j), \\ y=\sum_{j=1}^{n}(y^je_j+y^{n+j}Je_j), \end{cases} \qquad x^i,y^i\in \boldsymbol{R}. \tag{32}$$

因此

$$(33)\quad H(x,y)=\sum_{j,k=1}(x^j+ix^{n+j})(y^k-iy^{n+k})H(e_j,e_k).$$

另一方面，由于$\{e_j, Je_j, 1\leqslant j\leqslant n\}$与$\{e^{*j}, -Je^{*j}, 1\leqslant j\leqslant n\}$的对偶性，我们有

$$\begin{aligned}\lambda^j(x)&=e^{*j}(x)-i\cdot Je^{*j}(x)\\&=x^j+i\cdot x^{n+j},\end{aligned}$$

同理

$$\bar{\lambda}^k(y)=y^k-i\cdot y^{n+k},$$

所以

$$(34)\qquad H(x,y)=\sum h_{j\bar{k}}\lambda^j(x)\bar{\lambda}^k(y),$$

其中

$$(35)\qquad h_{j\bar{k}}=H(e_j,e_k),\quad \bar{h}_{j\bar{k}}=h_{k\bar{j}},$$

即

$$(36)\qquad H=\sum h_{j\bar{k}}\lambda^j\otimes\bar{\lambda}^k.$$

因为$G(x,y)$是V上实数值反对称双线性函数，所以它对应于一个二次外形式$\hat{H}$，使得

$$(37)\qquad \langle x\wedge y,\hat{H}\rangle=-G(x,y).$$

$\hat{H}$称为Hermite结构H的Kähler形式。因为

$$\begin{aligned}-G(x,y)&=\frac{i}{2}(H(x,y)-\overline{H(x,y)})\\&=\frac{i}{2}\sum_{j,k}h_{j\bar{k}}(\lambda^j(x)\bar{\lambda}^k(y)-\lambda^j(y)\bar{\lambda}^k(x))\\&=\langle x\wedge y,\frac{i}{2}\sum h_{j\bar{k}}\lambda^j\wedge\bar{\lambda}^k\rangle,\end{aligned}$$

故

$$(38)\qquad \hat{H}=\frac{i}{2}\sum h_{j\bar{k}}\lambda^j\wedge\bar{\lambda}^k.$$

§3 近复流形

定义3.1 设M是m维光滑流形。设J是M上一个光滑的(1,1)型张量场，即对每一点$x\in M$，J_x是切空间$T_x(M)$到自身的线性变换。如果每一个$J_x(x\in M)$都是切空间$T_x(M)$的复结构，则称张量场J是M的一个近复结构。给定一个近复结构的光滑流形称为近复流形(almost complex manifold)。

张量场J的光滑性是指：若X是M上的光滑切矢量场，则JX也是M上的光滑切矢量场。显然，并不是所有的流形都有近复结构的；例如，根据定理2.1我们有

定理3.1 近复流形必是偶维的可定向流形。

注记 偶维和可定向的条件并不足以保证流形有近复结构。Ehresmann和Hopf证明了，四维球S^4不能有近复结构[15, p.217]。

现设M是$m=2n$维近复流形，用A记光滑的复数值(1,0)次微分式所成的空间，$\bar{A}$是A的复共轭空间，于是在每一点$x\in M$有直和分解

$$(1)\qquad T_x^*(M)\otimes\mathbf{C}=A_x\oplus\bar{A}_x.$$

设$x^\alpha(1\leqslant\alpha\leqslant 2n)$是流形$M$上的局部坐标系。在切空间的自然基底$\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}$下，近复结构$J$可以表成

$$(2)\qquad J_x\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)=\sum_\beta a_\alpha^\beta(x)\frac{\partial}{\partial x^\beta},$$

其中a_α^β是M的一个邻域上的光滑函数，并且

$$(3)\qquad \sum_{\gamma=1}^{2n}a_\alpha^\gamma a_\gamma^\beta=-\delta_\alpha^\beta.$$

显然在每一点$x\in M$，形式

$$(4)\qquad \sum_{\beta}(a^{\alpha}_{\beta}+i\delta^{\alpha}_{\beta})\,dx^{\beta},\qquad 1\leqslant\alpha\leqslant 2n$$

是(1,0)次外形式。根据§2的讨论，在这 $2n$ 个(1,0)次外形式中恰有 n 个是复线性无关的。

定理3.2 复流形自然是一个近复流形。

证明 一个 n 维复流形 M 可以看作 $2n$ 维实光滑流形。设 $\{z^k, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 是复流形 M 的局部坐标系，记 $z^k=x^k+iy^k$，则 $\{x^k, y^k, 1\leqslant k\leqslant n\}$ 是实流形 M 的局部坐标系，$\left\{\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial y^k}, 1\leqslant k\leqslant n\right\}$ 给出了流形 M 在坐标域上的自然基底。

设对每一点 $x\in M$，线性变换 $J_x: T_x(M)\to T_x(M)$ 定义为

$$(5)\qquad J_x\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\frac{\partial}{\partial y^k},\qquad J_x\left(\frac{\partial}{\partial y^k}\right)=-\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

显然 $J_x^2=-\mathrm{id}: T_x(M)\to T_x(M)$。下面我们要证明，$J_x$ 的定义与复坐标 z^k 的选取无关，因而上面给出的线性变换场是 M 上大范围定义的近复结构。

为证明这一点，设 w^k 是 x 附近的另一个复局部坐标系，则 z^j 是 w^k 的全纯函数。设 $w^k=u^k+iv^k$，则有 Cauchy-Riemann 方程

$$(6)\qquad \frac{\partial x^j}{\partial u^k}=\frac{\partial y^j}{\partial v^k},\qquad \frac{\partial x^j}{\partial v^k}=-\frac{\partial y^j}{\partial u^k}.$$

因此，(5)式所定义的 J_x 作用在 $\frac{\partial}{\partial u^k},\frac{\partial}{\partial v^k}$ 上有

$$(7)\qquad \begin{cases} J_x\left(\dfrac{\partial}{\partial u^k}\right)=J_x\left(\sum_j\dfrac{\partial x^j}{\partial u^k}\dfrac{\partial}{\partial x^j}+\sum_j\dfrac{\partial y^j}{\partial u^k}\dfrac{\partial}{\partial y^j}\right)\\ \qquad\qquad =\dfrac{\partial}{\partial v^k},\\ J_x\left(\dfrac{\partial}{\partial v^k}\right)=J_x\left(\sum_j\dfrac{\partial x^j}{\partial v^k}\dfrac{\partial}{\partial x^j}+\sum_j\dfrac{\partial y^j}{\partial v^k}\dfrac{\partial}{\partial y^j}\right)\\ \qquad\qquad =-\dfrac{\partial}{\partial u^k}.\end{cases}$$

即J_x在$\left\{\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial v^k},\ 1\leqslant k\leqslant n\right\}$上的作用具有如(5)式给出的形式。证毕。

(5)式所定义的近复结构称为复流形M的典型的近复结构。这时

$$(8)\qquad J_x(dx^k)=-dy^k, \quad J_x(dy^k)=dx^k,$$

所以$dz^k=dx^k+idy^k$是(1,0)次微分式，$d\bar{z}^k=dx^k-idy^k$是(0,1)次微分式。在切空间的复化空间$T_x(M)\otimes C$中，命

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial z^k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}-i\cdot\frac{\partial}{\partial y^k}\right),$$

$$1\leqslant k\leqslant n.$$

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}+i\cdot\frac{\partial}{\partial y^k}\right),$$

则它们分别是(1,0)型切矢量和(0,1)型切矢量，合起来构成了$T_x(M)\otimes C$的基底(见§2的(26)式)。

十分自然的一个问题是：是否每一个$2n$维近复流形都有复流形结构？当$n=1$时，答案是肯定的；一般情形则不然。

假定近复结构在局部上由n个复线性无关的一次微分式$\theta^k(1\leqslant k\leqslant n)$所确定，使$\theta^k$是相应的(1,0)次微分式。$d\theta^k$是二次外微分式，它可表成

$$(11)\qquad d\theta^k=\frac{1}{2}\sum_{j,l}A^k_{jl}\theta^j\wedge\theta^l+\sum_{j,l}B^k_{jl}\theta^j\wedge\bar{\theta}^l$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j,l}C^k_{jl}\bar{\theta}^j\wedge\bar{\theta}^l,$$

其中A^k_{jl}和C^k_{jl}对下指标是反对称的。条件

$$(12)\qquad d\theta^k\equiv 0 \mod \theta^j$$

与$\{\theta^k\}$的选取是无关的。因为若有另外n个(1,0)次微分式λ^k，它们也是复线性无关的，则可表成

$$(13)\qquad \lambda^k=\sum_{l}\mu^k_l\theta^l,$$

其中 μ_j^k 是复数值光滑函数，并且 $\det(\mu_j^k)\neq 0$。设

$$(14)\qquad d\lambda^k=\frac{1}{2}\sum_{j,l}A'^{\,k}_{jl}\lambda^j\wedge\lambda^l+\sum_{j,l}B'^{\,k}_{jl}\lambda^j\wedge\bar{\lambda}^l$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,l}C'^{\,k}_{jl}\bar{\lambda}^j\wedge\bar{\lambda}^k,$$

$$(15)\qquad C'^{\,k}_{pq}\mu_j^p\mu_l^q=C^r_{jl}\mu_r^k,$$

所以 $C^k_{jl}=0$ 当且仅当 $C'^{\,k}_{jl}=0$，这就是说(12)式等价于

$$d\lambda^k\equiv 0 \bmod \lambda^j.$$

因此(12)是在整个近复流形上有意义的条件。

定义3.2 条件(12)称为近复流形M的可积条件。如果在一个复流形上可积条件成立，则称该近复流形是可积的。

二维近复流形总是可积的。当维数$\geqslant 4$时，任意一个近复流形上总有一个不可积的近复结构；甚至于原来是可积的近复结构，在稍作扰动之后，便能成为一个不可积的近复结构；证明都并不容易。

设M是复流形，则对于M上典型的近复结构，dz^k 是(1,0)次微分式。取 $\theta^k=dz^k$，则可积条件(12)显然成立，所以复流形上典型的近复结构总是可积的。重要的是，逆命题也对。

定理3.3 如果流形M上有一个可积的近复结构，则它必然是一个复流形结构诱导的典型的近复结构。

Newlander 和 Nirenberg 在近复结构是光滑的假定下给出了定理的证明([13])。Nijenhuis 和Woolf, Kohn, 以及 Hörmander 进一步证明了定理在更弱的可微性条件下也成立。这些定理都很艰深，故不在此赘述。

当近复结构是实解析的情形，定理 3.3 很容易证明。由于条件(12)成立，根据 Frobenius 定理，存在局部复坐标系 z^k，使得(1,0)次微分式是 dz^k 的线性组合。若在同一个邻域内有两个这样的坐标系 z^k 和 w^j，则 dw^j 是 dz^k 的线性组合。这意味着 w^i

是 z^k 的全纯函数。这些坐标系就在M上定义了复流形构造。

下面我们把可积条件用近复结构张量本身表达出来。由(2)式，在局部坐标系 x^α $(1\leqslant\alpha\leqslant 2n)$ 下近复结构 J 的矩阵是 (a_α^β)，它满足条件(3)。所有的(1,0)次微分式在局部上必然可以写成

$$\sum_\beta (a_\beta^\alpha + i\delta_\beta^\alpha)\,dx^\beta, \qquad 1\leqslant\alpha\leqslant 2n$$

的线性组合，因此可积条件(12)成为

$$(16)\qquad d\Big(\sum_\beta (a_\beta^\alpha + i\delta_\beta^\alpha)\,dx^\beta\Big)$$

$$=\sum_{\beta,\gamma} a_{\beta\gamma}^\alpha\, dx^\gamma\wedge dx^\beta$$

$$\equiv 0,\ \mathrm{mod}\Big(\sum_\lambda (a_\lambda^\theta + i\delta_\lambda^\theta)\,dx^\lambda,\ 1\leqslant\theta\leqslant 2n\Big),$$

其中

$$(17)\qquad a_{\beta\gamma}^\alpha=\frac{\partial a_\beta^\alpha}{\partial x^\gamma}-\frac{\partial a_\gamma^\alpha}{\partial x^\beta}.$$

因为关于 dx^β 的线性方程组

$$(18)\qquad \sum_\beta (a_\beta^\alpha + i\delta_\beta^\alpha)\,dx^\beta=0, \qquad 1\leqslant\alpha\leqslant 2n$$

在 $T_x(M)\otimes\boldsymbol{C}$ 中决定了(1,0)型切矢量所成的复子空间，而后者是由(1,0)型切矢量

$$\sum_\alpha (a_\beta^\alpha - i\delta_\beta^\alpha)\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \qquad 1\leqslant\beta\leqslant 2n$$

张成的；因此，(18)的解组

$$(19)\qquad y_{(\beta)}=(a_\beta^1 - i\delta_\beta^1,\cdots,a_\beta^{2n} - i\delta_\beta^{2n}), \qquad 1\leqslant\beta\leqslant 2n$$

中的最大线性无关组给出了(18)的基本解组。所以从(16)式得到

$$\sum_{\beta,\gamma} a_{\beta\gamma}^\alpha (a_\lambda^\beta - i\delta_\lambda^\beta)(a_\mu^\gamma - i\delta_\mu^\gamma)=0,$$

即

(20) $$a^{\alpha}_{\beta\mu}a^{\beta}_{\lambda}-a^{\alpha}_{\beta\lambda}a^{\beta}_{\mu}=0.$$

命

(21) $$t^{\alpha}_{\beta\gamma}=a^{\alpha}_{\beta\rho}a^{\rho}_{\gamma}-a^{\alpha}_{\gamma\rho}a^{\rho}_{\beta}.$$

容易验证这是M上的$(1,2)$型张量场，叫做近复结构J的挠率张量。这样，上面的结果可叙述成：

定理3.4 设J是流形M上的近复结构，则J是可积的充分必要条件是它的挠率张量为零。

定义3.3 设ω是近复流形M上光滑的复数值外微分式。若在每一点$x\in M$，$\omega(x)$是$T_x(M)$上的(p,q)次外形式，则称ω是(p,q)次外微分式。全体(p,q)次外微分的集合记作$A_{p,q}$。

很明显，$A_{p,q}$是复数值光滑函数环上的模，它有下列简单的性质：

1）若 $\alpha\in A_{p,q}$，则 $\bar{\alpha}\in A_{q,p}$；

2）若 $\alpha\in A_{p,q}$，$\beta\in A_{r,s}$，则 $\alpha\wedge\beta\in A_{p+r,q+s}$；

3）$dA_{p,q}\subset A_{p+2,q-1}+A_{p+1,q}+A_{p,q+1}+A_{p-1,q+2}$；

4）若 p 或 $q>n\left(=\dfrac{1}{2}\dim M\right)$，则 $A_{p,q}=0$。

性质3)需要作些说明。因为$A_{p,q}$在局部上是由复数值光滑函数、$(1,0)$次外微分式和$(0,1)$次外微分式生成的，然而

$$dA_{0,0}\subset A_{1,0}+A_{0,1},$$
$$dA_{1,0}\subset A_{2,0}+A_{1,1}+A_{0,2},$$
$$dA_{0,1}\subset A_{2,0}+A_{1,1}+A_{0,2},$$

所以根据外微分的定义，用归纳法立即得到性质3)。

设$\omega\in A_{p,q}$。命

(22) $$\partial\omega=\prod_{p+1,\,q}d\omega,\quad \delta\omega=\prod_{p,\,q+1}d\omega.$$

则$\partial: A_{p,q}\to A_{p+1,q}$和$\delta: A_{p,q}\to A_{p,q+1}$都是线性映射。

定理3.5 设J是流形M上的近复结构，则J是可积的充分

必要条件是

(23) $$d=\partial+\bar{\partial}.$$

证明 充分性。设 $\theta^k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是关于 J 的、在局部上线性无关的(1,0)次微分式。由于 $d=\partial+\bar{\partial}$，所以

$$\prod_{0,2} d\theta^k=0,$$

即可积条件

(24) $$d\theta^k\equiv 0 \bmod \theta^j, \quad 1\leqslant k\leqslant n$$

成立。

必要性。若(24)成立，则

(25) $$dA_{1,0}\subset A_{2,0}+A_{1,1}, \quad dA_{0,1}\subset A_{1,1}+A_{0,2}.$$

用归纳法不难证明

$$dA_{p,q}\subset A_{p+1,q}+A_{p,q+1},$$

所以

$$d=\partial+\bar{\partial}.$$

定理3.6 流形M上的近复结构J是可积的，当且仅当

(26) $$\bar{\partial}^2=0.$$

证明 必要性。设J是可积的，则 $d=\partial+\bar{\partial}$，因此

$$0=d^2=\partial^2+(\partial\circ\bar{\partial}+\bar{\partial}\circ\partial)+\bar{\partial}^2.$$

设 $\omega\in A_{p,q}$，则

$$\partial^2\omega\in A_{p+2,q}, \quad (\partial\circ\bar{\partial}+\bar{\partial}\circ\partial)\omega\in A_{p+1,q+1}, \quad \bar{\partial}^2\omega\in A_{p,q+2},$$

所以

(27) $$\partial^2\omega=0, \quad (\partial\circ\bar{\partial}+\bar{\partial}\circ\partial)\omega=0 \quad \bar{\partial}^2\omega=0.$$

故(26)式成立。

充分性。设$\bar{\partial}^2=0$。若F是M上的复数值光滑函数，则可记

(28) $$dF=\sum_k F_k\theta^k+\sum_k G_k\bar{\theta}^k,$$

于是利用(11)式得到

(29) $$\partial F=\sum_k F_k\theta^k,\quad \bar{\partial} F=\sum_k G_k\bar{\theta}^k,$$

(30) $$\begin{aligned}\bar{\partial}^2 F&=\prod_{0,2} d(\bar{\partial} F)=\prod_{0,2} d(\bar{\partial}-d)F\\ &=-\prod_{0,2} d(\partial F)\\ &=-\frac{1}{2}\sum_{k,j,l} F_k C^k_{jl}\bar{\theta}^j\wedge\bar{\theta}^l.\end{aligned}$$

因为对任意的F都有$\bar{\partial}^2F=0$，所以$C^k_{jl}=0$，即可积条件成立。

现在假定M是n维复流形，局部复坐标系是$z^k=x^k+iy^k$，$1\leqslant k\leqslant n$，则dz^k是M上关于典型的近复结构的(1,0)次微分式。因此，M上的(p,q)次光滑的外微分式在局部上可以表成

(31) $$a=\sum a_{k_1\cdots k_p,\bar{l}_1\cdots\bar{l}_q}dz^{k_1}\wedge\cdots\wedge dz^{k_p}\wedge d\bar{z}^{l_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{l_q},$$

其中$a_{k_1\cdots k_p,\bar{l}_1\cdots\bar{l}_q}$是复数值光滑函数。

若f是M上的复数值光滑函数，则

$$\begin{aligned}df&=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k+\frac{\partial f}{\partial y^k}dy^k\right)\\ &=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial z^k}dz^k+\frac{\partial f}{\partial\bar{z}^k}d\bar{z}^k\right),\end{aligned}$$

其中$\dfrac{\partial}{\partial z^k}$和$\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}^k}$分别是(9)和(10)两式定义的算子。所以

(32) $$\partial f=\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial z^k}dz^k,\quad \bar{\partial} f=\sum_{k=1}^n\frac{\partial f}{\partial\bar{z}^k}d\bar{z}^k.$$

因此从(31)式得到

(33) $$\partial a=\sum\partial a_{k_1\cdots k_p,\bar{l}_1\cdots\bar{l}_q}\wedge dz^{k_1}\wedge\cdots\wedge dz^{k_p}\wedge d\bar{z}^{l_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{l_q}$$

$$=\sum \frac{\partial a_{k_1\cdots k_p,\bar{l}_1\cdots\bar{l}_q}}{\partial z^k} dz^k$$

$$\wedge dz^{k_1}\wedge\cdots\wedge dz^{k_p}\wedge d\bar{z}^{l_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{l_q},$$

同理

(34) $$\bar{\partial} a=(-1)^p\sum \frac{\partial a_{k_1\cdots k_p,\bar{l}_1\cdots\bar{l}_q}}{\partial \bar{z}^l} dz^{k_1}$$

$$\wedge\cdots\wedge dz^{k_p}\wedge d\bar{z}^l\wedge d\bar{z}^{l_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{l_q}.$$

若记

(35) $$f(z^1,\cdots,z^n)=g(z^1,\cdots,z^n)+ih(z^1,\cdots,z^n),$$

则

(36) $$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}+i\frac{\partial}{\partial y^k}\right)(g+ih)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial x^k}-\frac{\partial h}{\partial y^k}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x^k}+\frac{\partial g}{\partial y^k}\right).$$

由此得到：

定理3.7 设 f 是复流形 M 上的复值光滑函数，则 f 是全纯函数的充分必要条件是：$\bar{\partial} f=0$.

证明 f 的 Cauchy-Riemann 条件是

$$\frac{\partial g}{\partial x^k}=\frac{\partial h}{\partial y^k},\qquad \frac{\partial g}{\partial y^k}=-\frac{\partial h}{\partial x^k},\qquad 1\leqslant k\leqslant n.$$

根据(32)和(36)两式，上面的条件与 $\bar{\partial} f=0$ 是等价的，即 f 是全纯函数的条件是：$\bar{\partial} f=0$.

如果 a 是 $(p,0)$ 次微分式，它在局部上表成

$$a=\sum a_{k_1\cdots k_p} dz^{k_1}\wedge\cdots\wedge dz^{k_p},$$

当 $a_{k_1\cdots k_p}$ 是全纯函数时，则由定理 3.6 得到

$$da=\partial a=\sum \frac{\partial a_{k_1\cdots k_p}}{\partial z^k} dz^k\wedge dz^{k_1}\wedge\cdots\wedge dz^{k_p},$$

所以，算子 ∂ 把全纯的 $(p,0)$ 次微分式复线性地映射为全纯的 $(p+1,0)$ 次微分式。

§4 复矢量丛上的连络

在第三章§1已经讨论过流形 M 上的矢量丛 (E,M,π)。当纤维型是 q 维复矢量空间 V 时，所得的矢量丛就是 M 上的复 q 维矢量丛。这时，结构群是

$$GL(V)\cong GL(q;\mathbf{C}).$$

假定 M 是 m 维光滑流形，(E,M,π) 是 M 上的复 q 维矢量丛，则截面空间 $\Gamma(E)$ 有复线性结构，它也是 M 上光滑的复值函数环上的模。在第四章§1关于实矢量丛上的连络的讨论可以平行地搬到复矢量丛 (E,M,π) 上来，只要把那里的实数域换成复数域即可。在这里我们不再重复那些讨论了。

设 $\{s_\alpha,1\leqslant\alpha\leqslant q\}$ 是复矢量丛 E 在邻域 $U\subset M$ 上的局部标架场，则 E 上的连络 D 的作用可表为

(1) $$Ds_\alpha=\sum_\beta \omega_\alpha^\beta s_\beta,$$

这里 ω_α^β 是 U 上的复数值一次微分式。若用矩阵记号，(1)式可写成

(2) $$DS=\omega\cdot S,$$

其中

(3) $$S={}^t(s_1,\cdots,s_q),$$

(4) $$\omega=\begin{pmatrix}\omega_1^1 & \cdots & \omega_1^q\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \omega_q^1 & \cdots & \omega_q^q\end{pmatrix}.$$

因此，连络的曲率矩阵是

(5) $$\Omega=(\Omega_\alpha^\beta)=d\omega-\omega\wedge\omega.$$

外微分(5)式则得 Bianchi 恒等式

(6) $$d\Omega=\omega\wedge\Omega-\Omega\wedge\omega.$$

若取另一个局部标架场 S'，设

(7) $$S'=A\cdot S,$$

其中 $\det A\neq 0$，则有(见第四章§1的(29)式)

(8) $$\Omega'=A\cdot\Omega\cdot A^{-1}.$$

上述变换公式启示我们给出下面的定义。

定义4.1 若对于矢量丛(E,M,π)的每一个局部标架场S都指定了一个由k次外微分式组成的$q\times q$阶矩阵Φ_S，它们在标架场S作变换(7)时遵从变换规律

(9) $$\Phi_{S'}=A\cdot\Phi_S\cdot A^{-1},$$

则称$\{\Phi_S\}$为伴随型张量矩阵。

因为连络矩阵ω在标架场S作变换(7)时的变换公式是

(10) $$\omega'\cdot A=dA+A\cdot\omega,$$

所以外微分(9)式得到

$$d\Phi_{S'}=dA\wedge\Phi_S\cdot A^{-1}+A\cdot d\Phi_S\cdot A^{-1}+(-1)^kA\cdot\Phi_S\wedge dA^{-1},$$

用(10)式代入，整理后便有

(11) $$D\Phi_{S'}=A\cdot D\Phi_S\cdot A^{-1},$$

其中

(12) $$D\Phi_S=d\Phi_S-\omega\wedge\Phi_S+(-1)^k\Phi_S\wedge\omega.$$

由此可见，$\{D\Phi_S\}$仍是伴随型张量矩阵，其元素是$k+1$次外微分式。我们把$D\Phi_S$称为Φ_S的协变微分。

根据上面的定义，Bianchi恒等式(6)说明曲率矩阵Ω的协变微分是零，即

(13) $$D\Omega=0.$$

为记号简单起见，在讨论伴随型张量矩阵时，如果只在一个标架场下计算，常略去指示所在标架场的下指标S。

将(12)式再一次协变微分，则得

(14) $$D^2\Phi=\Phi\wedge\Omega-\Omega\wedge\Phi$$

(请读者自证)。我们把上式右端记作

(15) $$[\Phi, \Omega] = \Phi \wedge \Omega - \Omega \wedge \Phi,$$

所以(14)式成为

(16) $$D^2\Phi = [\Phi, \Omega].$$

现在考虑 $q\times q$ 阶矩阵 $A_i\,(1\leqslant i\leqslant r)$ 的 r 重复线性函数 $P(A_1, \cdots, A_r)$。若设

(17) $$A_i = (a^i_{\alpha\beta}), \quad 1\leqslant \alpha, \beta\leqslant q, \quad 1\leqslant i\leqslant r,$$

则函数 P 可表成

(18) $$P(A_1, \cdots, A_r) = \sum_{1\leqslant \alpha_i, \beta_i\leqslant q} \lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_r, \beta_1\cdots\beta_r} a^1_{\alpha_1\beta_1}\cdots a^r_{\alpha_r\beta_r},$$

其中 $\lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_r, \beta_1\cdots\beta_r}$ 是复数。若对$\{1, \cdots, r\}$的任一个排列 σ 都有

(19) $$P(A_{\sigma(1)}, \cdots, A_{\sigma(r)}) = P(A_1, \cdots, A_r),$$

则称 P 是对称的；若对任意的 $B\in GL(q;\mathbf{C})$ 都有

(20) $$P(BA_1B^{-1}, \cdots, BA_rB^{-1}) = P(A_1, \cdots, A_r),$$

则称 P 是不变多项式。

用下面的方法可以得到一系列对称的不变多项式。设 I 是 $q\times q$ 阶单位矩阵，命

(21) $$\det\left(I + \frac{i}{2\pi}A\right) = \sum_{0\leqslant j\leqslant q}\binom{q}{j}P_j(A),$$

其中$P_j(A)$是 A 的元素的 j 次齐次多项式。对于任意的非退化 $q\times q$ 阶矩阵 B，因为

$$I + \frac{i}{2\pi}BAB^{-1} = B\left(I + \frac{i}{2\pi}A\right)B^{-1},$$

所以

(22) $$\det\left(I + \frac{i}{2\pi}BAB^{-1}\right) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi}A\right),$$

于是

$$P_j(BAB^{-1})=P_j(A), \tag{23}$$

即 $P_j(A)$ 是不变多项式。

设 $P_j(A_1,\cdots,A_j)$ 是 $P_j(A)$ 的完全极化多项式，即 $P_j(A_1,\cdots,A_j)$ 是 $A_1,\cdots,A_j$ 的 j 重对称的线性函数，并且使

$$P_j(A,\cdots,A)=P_j(A). \tag{24}$$

容易证明 $P_j(A_1,\cdots,A_j)$ 可以用 $P_j(A)$ 表示出来，例如：

$$\begin{aligned} P_2(A_1,A_2)&=\frac{1}{2}\{P_2(A_1+A_2)-P_2(A_1)-P_2(A_2)\},\\ P_3(A_1,A_2,A_3)&=\frac{1}{6}\{P_3(A_1+A_2+A_3)-P_3(A_1+A_2)\\ &\quad -P_3(A_1+A_3)-P_3(A_2+A_3)+P_3(A_1)\\ &\quad +P_3(A_2)+P_3(A_3)\}. \end{aligned} \tag{25}$$

所以 $P_j(A_1,\cdots,A_j)$ 是不变的对称的 j 重线性函数。

假定 $P(A_1,\cdots,A_r)$ 是不变多项式，将非退化矩阵 B 记成

$$B=I+B', \tag{26}$$

则

$$B^{-1}=I-B'+\cdots, \tag{27}$$

其中省略的部分包含了矩阵 B' 的元素的高次幂。代入(20)式，并取 B' 的线性部分则得

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant r} P(A_1,\cdots,B'A_i-A_iB',\cdots,A_r)=0. \tag{28}$$

如果 A_i 是以外微分式为元素的矩阵①，则(28)式仍旧成立。

---

① 若 $P(A_1,\cdots,A_r)$ 可表成(18)式，当 $A_i=(a^i_{\alpha\beta})$ 是外微分式构成的矩阵时，则命

$$P(A_1,\cdots,A_r)=\sum_{1\leqslant\alpha_i,\beta_i\leqslant q}\lambda_{\alpha_1\cdots\alpha_r,\beta_1\cdots\beta_r}a^1_{\alpha_1\beta_1}\wedge\cdots\wedge a^r_{\alpha_r\beta_r}.$$

设 A_i 是 d_i 次外微分式构成的矩阵，则对任意的一次微分式构成的 $q\times q$ 阶矩阵 θ 有

$$(29)\quad \sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+\cdots+d_{i-1}}P(A_1,\cdots,\theta\wedge A_i,\cdots,A_r)$$

$$+\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+\cdots+d_i+1}P(A_1,\cdots,A_i\wedge\theta,\cdots,A_r)$$

$$=0.$$

要证明此式，只需注意 θ 是形如 $B'\cdot a$ 的矩阵之和，其中 B' 是 $q\times q$ 阶数量矩阵，a 是一次微分式。利用 P 的多重线性的性质，只要对 $\theta=B'\cdot a$ 验证(29)式即可。若将 $\theta=B'\cdot a$ 代入(29)的左端则得

$$a\wedge\left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant r}P(A_1,\cdots,B'\cdot A_i,\cdots,A_r)\right.$$

$$\left.-\sum_{1\leqslant i\leqslant r}P(A_1,\cdots,A_i\cdot B',\cdots,A_r)\right\},$$

由(28)式，上式括号内为零，故(29)式成立。

不变多项式建立了连络的局部性质和整体性质之间的联系。设 $P(A_1,\cdots,A_r)$ 是不变多项式，把 A_i 取成 d_i 次外微分式构成的伴随型张量矩阵，显然 $P(A_1,\cdots,A_r)$ 是与局部标架场的选取无关的 $d_1+d_2+\cdots+d_r$ 次外微分式，因而是在 M 上大范围定义的外微分式。根据(12)和(29)两式，

$$(30)\quad dP(A_1,\cdots,A_r)$$

$$=\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+\cdots+d_{i-1}}P(A_1,\cdots,dA_i,\cdots,A_r)$$

$$=\sum_{1\leqslant i\leqslant r}(-1)^{d_1+\cdots+d_{i-1}}[P(A_1,\cdots,DA_i,\cdots,A_r)$$

$$+P(A_1,\cdots,\omega\wedge A_i+(-1)^{d_i+1}A_i\wedge\omega,\cdots,A_r)]$$

$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} (-1)^{d_1 + \cdots + d_{i-1}} P(A_1, \cdots, DA_i, \cdots, A_r).$$

特别是，对于不变多项式$P_j(A)$，取 A 为连络的曲率矩阵 Ω，则 $D\Omega=0$，所以

(31) $$dP_j(\Omega)=0,$$

即 $P_j(\Omega)$是在M上范围定义的 $2j$ 次闭外微分式。

定理4.1 设(E, M, π)是m维光滑流形M上的q维复矢量从，Ω 和 $\tilde{\Omega}$ 分别是对应于连络 ω 和 $\tilde{\omega}$ 的曲率形式。若$P(A_1, \cdots, A_r)$是对称的不变多项式，则在M上存在$2r-1$次外微分式Q，使

(32) $$P(\tilde{\Omega})-P(\Omega)=dQ.$$

证明 命

(33) $$\eta=\tilde{\omega}-\omega.$$

若取另一个局部标架场 $S'=B \cdot S$，则

$$\tilde{\omega}' \cdot B=dB+B \cdot \tilde{\omega},$$
$$\omega' \cdot B=dB+B \cdot \omega,$$

其中 $\tilde{\omega}, \omega'$分别表示在局部标架场 S' 下相应连络的矩阵。所以$\eta'=\tilde{\omega}'-\omega'$和 η 有下面的关系：

(34) $$\eta' \cdot B=B \cdot \eta,$$

即 η 是伴随型张量矩阵，其元素是一次微分式。命

(35) $$\omega_t=\omega+t\eta, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

则 ω_t 给出了依赖一个参数 t 的一族连络，在 $t=0$ 和 $t=1$ 时分别给出 ω 和 $\tilde{\omega}$。连络 ω_t 的曲率矩阵是

(36) $$\begin{aligned}\Omega_t &= d\omega_t-\omega_t \wedge \omega_t \\ &= \Omega+tD\eta-t^2\eta \wedge \eta,\end{aligned}$$

所以

(37) $$\frac{d}{dt}\Omega_t=D\eta-2t\eta \wedge \eta,$$

其中协变微分 D 是关于连络 ω 取的。

设 $P(A_1,\cdots,A_r)$ 是对称的不变多项式，命

$$(38)\qquad \begin{cases} P(A)=P(A,\cdots,A), \\ Q(B,A)=rP(B,A,\cdots,A), \end{cases}$$

则

$$(39)\qquad \frac{d}{dt}P(\Omega_t)=rP\left(\frac{d\Omega_t}{dt},\Omega_t,\cdots,\Omega_t\right)$$

$$=Q(D\eta,\Omega_t)-2tQ(\eta\wedge\eta,\Omega_t).$$

根据协变微分的定义，从(36)式得到

$$\begin{aligned}(40)\qquad D\Omega_t&=tD^2\eta-t^2D(\eta\wedge\eta)\\ &=t(\eta\wedge\Omega-\Omega\wedge\eta)+t^2(\eta\wedge D\eta-D\eta\wedge\eta).\\ &=t[\eta,\Omega]+t^2[\eta,D\eta]\\ &=t[\eta,\Omega_t],\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}(41)\quad dQ(\eta,\Omega_t)&=rdP(\eta,\Omega_t,\cdots,\Omega_t)\\ &=rP(D\eta,\Omega_t,\cdots,\Omega_t)\\ &\quad -r(r-1)P(\eta,D\Omega_t,\Omega_t,\cdots,\Omega_t)\\ &=Q(D\eta,\Omega_t)\\ &\quad -r(r-1)tP(\eta,[\eta,\Omega_t],\Omega_t,\cdots,\Omega_t).\end{aligned}$$

在(29)式中命 $\theta=A_1=\eta$，$A_2=\cdots=A_r=\Omega_t$，则得

$$\begin{aligned}&2P(\eta\wedge\eta,\Omega_t,\cdots,\Omega_t)\\ &\quad -(r-1)P(\eta,[\eta,\Omega_t],\Omega_t,\cdots,\Omega_t)=0,\end{aligned}$$

即

$$(42)\quad 2Q(\eta\wedge\eta,\Omega_t)-r(r-1)P(\eta,[\eta,\Omega_t],\Omega_t,\cdots,\Omega_t)=0.$$

比较(41)和(42)两式便有

$$\begin{aligned}(43)\qquad dQ(\eta,\Omega_t)&=Q(D\eta,\Omega_t)-2tQ(\eta\wedge\eta,\Omega_t)\\ &=\frac{d}{dt}P(\Omega_t).\end{aligned}$$

两边对 t 积分，则得

$$P(\widetilde{\Omega})-P(\Omega)=d\left(\int_0^1 Q(\eta,\Omega_t)\,dt\right),$$

命

$$Q=\int_0^1 Q(\eta,\Omega_t)\,dt, \tag{44}$$

则 Q 就是定理所要求的 M 上的 $2r-1$ 次外微分式。

如同(31)式，$P(\Omega)$ 是闭外微分式。如果它是实值外微分式，则它决定了流形 M 上的 de Rham 上同调群 $H^{2r}(M;\boldsymbol{R})$ 中的一个元素。定理4.1的意义是：外微分式 $P(\Omega)$ 是依据连络而定义的，但是它所决定的 de Rham 上同调类与复矢量丛 E 上连络的取法是无关的。现在我们要在复矢量丛 E 上引进 Hermite 结构；对于 Hermite 结构的容许连络来说，$P(\Omega)$ 确实是实值外微分式。由此可见，每一个对称的不变多项式 P 对应着一个 de Rham 上同调类。

定义4.2 设 V 是复矢量空间。若有定义在 $V\times V$ 上的复值函数 $H(\xi,\eta)$，$\xi,\eta\in V$，满足下列条件：

1）对任意的 $\lambda_1,\lambda_2\in\boldsymbol{C}$，$\xi_1,\xi_2,\eta\in V$ 有

$$H(\lambda_1\xi_1+\lambda_2\xi_2,\eta)=\lambda_1H(\xi_1,\eta)+\lambda_2H(\xi_2,\eta);$$

2）$\overline{H(\xi,\eta)}=H(\eta,\xi)$，

则称 $H(\xi,\eta)$ 是 V 上的 Hermite 结构。若对任意的 $\xi\in V,\xi\neq0$，都有

$$H(\xi,\xi)>0,$$

则称 Hermite 结构 H 是正定的。

注记 设 J 是 $2n$ 维实矢量空间 V 上的复结构。规定

$$i\cdot X=JX,\qquad X\in V, \tag{45}$$

则 V 成为 n 维复矢量空间。这样，定义2.2所给出的有复结构的

实矢量空间 V 上的 Hermite 结构，与定义4.2给出的复矢量空间 V 上的 Hermite 结构恰好是彼此对应的。

定义4.3 设(E, M, π)是m维光滑流形M上的q维复矢量丛。若在每一点$x\in M$，以光滑的方式在纤维$\pi^{-1}(x)$上给定一个正定的Hermite结构，则称在E上给定了一个Hermite结构。有给定的Hermite结构的复矢量丛称为Hermite矢量丛。

所谓“以光滑的方式”是指：若ξ, η是丛的任意两个光滑截面，则$H(\xi, \eta)$作为M上的复数值函数是光滑的。

根据单位分解定理不难证明（与流形M上黎曼度量存在性的证明相仿），每个复矢量丛上必有Hermite结构。对于任意一个局部标架场

$$S = {}^t(s_1, \cdots, s_q),$$

Hermite 结构H对应于一个 Hermite 矩阵

$$H_S = (h_{\alpha\bar{\beta}}) = {}^t\overline{H}_S, \tag{46}$$

其中

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = H(s_\alpha, s_\beta). \tag{47}$$

设 $\xi = \sum_\alpha \xi^\alpha s_\alpha$，$\eta = \sum_\beta \eta^\beta s_\beta$，则

$$H(\xi, \eta) = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\bar{\beta}} \xi^\alpha \bar{\eta}^\beta. \tag{48}$$

定义4.4 设D是Hermite矢量丛上的连络。若对于沿任意一条曲线平行的任意两个矢量场ξ, η，$H(\xi, \eta)$是常数，则称D是该矢量丛上的容许连络。

因为ξ和η沿曲线C是平行的，所以沿曲线C有

$$D\xi^\alpha = d\xi^\alpha - \sum_\beta \xi^\beta \omega_\beta^\alpha = 0,$$

$$D\eta^\alpha = d\eta^\alpha - \sum_\beta \eta^\beta \omega_\beta^\alpha = 0.$$

因此从(48)式得到

$$dH(\xi,\eta)=\sum_{\alpha,\beta}\left(dh_{\alpha\bar\beta}-\sum_\gamma h_{\gamma\bar\beta}\omega_\alpha^\gamma-\sum_\gamma h_{\alpha\bar\gamma}\overline{\omega_\beta^\gamma}\right)\xi^\alpha\eta^\beta.$$

由此可见，ω 是容许连络的条件是

$$dh_{\alpha\bar\beta}-\sum_\gamma h_{\gamma\bar\beta}\,\omega_\alpha^\gamma-\sum_\gamma h_{\alpha\bar\gamma}\overline{\omega_\beta^\gamma}=0, \tag{49}$$

或用矩阵记成

$$dH=\omega\cdot H+H\cdot{}^t\bar\omega. \tag{50}$$

注记 在 Hermite 矢量丛上，容许连络是必然存在的。请读者自证。

外微分(50)式，则得

$$\Omega\cdot H+H\cdot{}^t\bar\Omega=0, \tag{51}$$

所以矩阵 $\Omega\cdot H$ 是 Hermite 反对称的。这样，对于Hermite 矢量丛 E 上的容许连络而言，

$$\begin{aligned}\overline{\det\left(I+\frac{i}{2\pi}\Omega\right)}&=\det\left(I-\frac{i}{2\pi}\bar\Omega\right)\\&=\det\left(I+\frac{i}{2\pi}H^{-1}\cdot\Omega\cdot H\right)\\&=\det\left(I+\frac{i}{2\pi}\Omega\right),\end{aligned}$$

所以

$$\overline{P_i(\Omega)}=P_i(\Omega).$$

因此，$P_i(\Omega)$是M上实数值 $2i$ 次闭外微分式。$P_i(\Omega)$所决定的de Rham 上同调类 $c_i(E)$ 与 E 的 Hermite 结构及容许连络的选取无关，称为复矢量丛 E 的实系数的第 i 个陈类 (Chern Class)。

将行列式(21)展开，不难得到$P_i(\Omega)$的表式是

$$(52)\quad P_j(\Omega)=\frac{1}{j!}\left(\frac{i}{2\pi}\right)^j\sum_{1\leqslant\alpha_r,\beta_r\leqslant q}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_j}_{\beta_1\cdots\beta_j}\Omega^{\beta_1}_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{\beta_j}_{\alpha_j},$$

其中$\Omega=(\Omega^\beta_\alpha)$是 Hermite 矢量丛$E$的容许连络的曲率矩阵。

注记 若E是M上以V为纤维型的q维实矢量丛。命 $E\otimes\boldsymbol{C}$是E的复化，它是以q维复矢量空间$V\otimes\boldsymbol{C}$为纤维型的复矢量丛。设c_{2j}是复矢量丛$E\otimes\boldsymbol{C}$的第$2j$个陈类，则称

$$(53)\qquad p_j(E)=(-1)^j c_{2j}\in H^{4j}(M;\boldsymbol{R})$$

是第j个 Pontrjagin 类(参阅[11])。如果实矢量丛E上的连络ω的曲率矩阵是

$$\Omega=(\Omega^\beta_\alpha),$$

则 de Rham 上同调类$p_j(E)$是由实数值$4j$次闭外微分式

$$(54)\qquad \frac{1}{(2j)!(2\pi)^{2j}}\sum_{1\leqslant\alpha_r,\beta_r\leqslant q}\delta^{\alpha_1\cdots\alpha_{2j}}_{\beta_1\cdots\beta_{2j}}\Omega^{\beta_1}_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge\Omega^{\beta_{2j}}_{\alpha_{2j}}$$

决定的。

定义4.5 设M是m维复流形，$\pi:E\to M$是M上的q维复矢量丛。若对于M上任意两个相交的局部坐标域U和W，转移函数

$$g_{UW}:U\cap W\to GL(q;\boldsymbol{C})$$

都是全纯映射，则称E是M上的全纯矢量丛。

若全纯矢量丛E的纤维型是复一维矢量空间，则称它是复流形M上的全纯线丛。

显然，全纯矢量丛的丛空间是一个复流形。

把m维复流形看作$2m$维实流形有典型的近复结构，那么M上关于典型近复结构的全体$(1,0)$型切矢量构成的集合是复流形M上的全纯矢量丛，称为复流形M的切丛。这是因为，对于M的任意一个局部复坐标系$(z^1,\cdots,z^m)$，$\left(\frac{\partial}{\partial z^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z^m}\right)$恰好构成切丛的局部标架场。显然，任意两个这样的标架场是全纯相关的，所

以切丛是全纯矢量丛。

设 $\gamma: U \to E$ 是全纯矢量丛 E 在邻域 $U \subset M$ 上的一个截面。若 γ 是全纯映射，则称 γ 是全纯截面。设 S 和 S' 是两个全纯的局部标架场，则在它们的公共定义域上有表达式

$$S' = A \cdot S, \tag{55}$$

其中 A 是全纯函数所组成的非退化矩阵。

定义4.6 设 D 是全纯矢量丛 (E, M, π) 上的一个连络。若对任意一个全纯的局部标架场 S，连络矩阵 ω 关于 M 上的典型近复结构是由(1,0)次微分式组成的，则称 D 是(1,0)型连络。

上面的定义是有意义的，即 ω 是(1,0)型矩阵与局部标架场 S 的选择无关。因为在全纯的局部标架场的变换(55)下，A 是由全纯函数组成的矩阵，所以由定理 3.6，$\bar\partial A = 0$。因此

$$\begin{aligned}\omega' &= dA \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1} \\ &= \partial A \cdot A^{-1} + A \cdot \omega \cdot A^{-1},\end{aligned}$$

如果 ω 是(1,0)型矩阵，则 ω' 也是；反之亦然。

若 E 是Hermite全纯矢量丛，则在 E 上有唯一确定的(1,0)型容许连络。实际上，ω 是容许连络的条件是

$$dH = \omega \cdot H + H \cdot {}^t\bar\omega.$$

若 ω 是(1,0)型矩阵，则 $\bar\omega$ 是(0,1)型矩阵，所以

$$\partial H = \omega \cdot H. \tag{56}$$

由此得到(1,0)型容许连络 ω 必须是

$$\omega = \partial H \cdot H^{-1}. \tag{57}$$

容易验证，上式确实给出了 E 上的一个连络。

Hermite全纯矢量丛 E 上(1,0)型容许连络的曲率矩阵是

$$\begin{aligned}\Omega &= d(\partial H \cdot H^{-1}) - (\partial H \cdot H^{-1}) \wedge (\partial H \cdot H^{-1}) \\ &= -\bar\partial\partial H \cdot H^{-1} + \bar\partial H \cdot H^{-1} \wedge \partial H \cdot H^{-1},\end{aligned} \tag{58}$$

所以 Ω 是(1,1)次微分式构成的矩阵。

§5 Hermite 流形和 Kähler 流形

定义5.1 设 M 是 m 维复流形。若在 M 的切丛上给定一个正定的 Hermite 结构 H，则称 M 是 Hermite 流形。

对于局部复坐标系 $(U; z^1, \cdots, z^m)$，切丛的局部标架场是

$$s_i = \frac{\partial}{\partial z^i}; \tag{1}$$

在本节，指标的取值范围规定为

$$1 \leqslant i, j, k, l \leqslant m,$$

并采用省略和号的和式约定。命

$$h_{i\bar{k}} = h_{\bar{k}i} = H\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^k}\right). \tag{2}$$

则

$$\bar{h}_{k\bar{l}} = h_{\bar{k}l}, \tag{3}$$

且矩阵 $H = (h_{i\bar{k}})$ 是正定的。若 ξ, η 是 U 上两个 $(1,0)$ 型切矢量场，它们可表成

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad \eta = \eta^k \frac{\partial}{\partial z^k}. \tag{4}$$

其中 ξ^i, η^k 都是 U 上的复数值光滑函数，则

$$H(\xi, \eta) = h_{i\bar{k}} \xi^i \bar{\eta}^k, \tag{5}$$

M 上的 Kähler 形式

$$\hat{H} = \frac{i}{2} h_{i\bar{k}} dz^i \wedge d\bar{z}^k \tag{6}$$

是实数值 $(1,1)$ 型微分式。

切丛上的连络有挠率矩阵。设与局部标架场 $S = {}^t(s_1, \cdots, s_m)$ 对偶的余标架场是 $\sigma = (\sigma^1, \cdots, \sigma^m)$。若有另一个局部标架场

$$S' = A \cdot S, \tag{7}$$

则对偶的余标架场是

$$\sigma'=\sigma\cdot A^{-1},$$

或

(8) $$\sigma=\sigma'\cdot A.$$

外微分(8)式，得

$$\begin{aligned} d\sigma&=d\sigma'\cdot A-\sigma'\wedge dA\\ &=(d\sigma'-\sigma'\wedge\omega')A+\sigma\wedge\omega, \end{aligned}$$

即

(9) $$\tau=\tau'\cdot A,$$

其中

(10) $$\tau=d\sigma-\sigma\wedge\omega,\quad \tau'=d\sigma'-\sigma'\wedge\omega'.$$

τ 是复数值二次外微分式组成的 $(1\times m)$ 阶矩阵，称为在复流形的切丛上的连络的挠率矩阵。

定理5.1 设M是 Hermite 流形。D 是M的切丛上的(1,0)型连络的充分必要条件是：它的挠率矩阵是由(2,0)次微分式组成的。

证明 设 $\sigma=(\sigma^1,\cdots,\sigma^m)$ 是全纯标架场 S 的对偶的余标架场，则每一个 σ^i 是全纯的(1,0)次微分式，即对于复局部坐标系 z^i，σ^i 可表成

$$\sigma^i=a^i_j dz^j,$$

其中 a^i_j 是全纯函数。因此

(11) $$\bar\partial\sigma=0.$$

连络矩阵 ω 可以唯一地分解成

(12) $$\omega=\omega_1+\omega_2,$$

其中 ω_1 和 ω_2 分别是(1,0)次和(0,1)次微分式组成的矩阵。这样，挠率矩阵 τ 可表成

(13) $$\begin{aligned} \tau&=d\sigma-\sigma\wedge\omega\\ &=(\partial\sigma-\sigma\wedge\omega_1)-\sigma\wedge\omega_2, \end{aligned}$$

右端已分解成(2,0)型矩阵和(1,1)型矩阵之和。由此可见，挠率

矩阵是由(2,0)次微分式组成的充分必要条件是

(14) $$\sigma\wedge\omega_2=0.$$

假定 $\omega_2=(\theta^k_i)$，则(14)式成为

(15) $$\sigma^i\wedge\theta^k_i=0,$$

根据 Cartan 引理得到

(16) $$\theta^k_i=a^k_{ij}\sigma^j,$$

其中 a^k_{ij} 是复数值光滑函数。因为 σ^i 是(1,0)次微分式，而 θ^k_i 是(0,1)次微分式，所以条件(14)等价于

(17) $$a^k_{ij}=0,\ 即\ \omega_2=0,$$

也就是 ω 是(1,0)型的。

在叙述(1,0)型连络的定义时要用到全纯标架场，而定理5.1给出的判别法只要求局部标架场是光滑的；因为(9)式表明，局部标架场的变换(7)不改变挠率形式 τ^i 的双次，即不改变挠率矩阵的型。这对研究 Hermite 流形是方便的，事实上规范标架场 $\{s_i; H(s_i,s_j)=\delta_{ij}\}$ 是光滑的，而不一定是全纯的。

根据上一节最后一段的讨论，在 Hermite 流形的切丛上存在唯一确定的(1,0)型容许连络；它的挠率矩阵必是(2,0)型的，曲率矩阵是(1,1)型的。通常把这个连络称为 Hermite 连络。

定义5.2 如果 Hermite 流形M的 Kähler 形式 $\hat{H}$ 是闭外微分式，即

(18) $$d\hat{H}=0,$$

则称M是 Kähler 流形。

定理5.2 Hermite 流形M是 Kähler 流形的充分且必要条件是：M上的 Hermite 连络的挠率矩阵是零。

证明 显然，定理中提到的两个条件都与标架场的选取是无关的，因此只要在自然标架(1)下验证定理就行了。设与(1)对偶的余标架场是

$$\sigma=(dz^1,\cdots,dz^m),$$

所以 $d\sigma=0$。因为 Hermite 连络是 $\omega=\partial H\cdot H^{-1}$，其中 H如(2)式

所给出，因此挠率矩阵 $\tau=0$ 的充分必要条件是

$$(19)\qquad \sigma\wedge\partial H=0,$$

或

$$(20)\qquad \begin{aligned}&\sum_{i,j}\frac{\partial h_{i\bar k}}{\partial z^j}dz^j\wedge dz^i=0,\\ &\frac{\partial h_{i\bar k}}{\partial z^j}-\frac{\partial h_{j\bar k}}{\partial z^i}=0,\end{aligned}\qquad 1\leqslant i,j,k\leqslant m。$$

但是 Kähler 形式 $\hat H$ 的外微分是

$$(21)\qquad \begin{aligned}d\hat H&=\frac{i}{2}\left(\frac{\partial h_{i\bar k}}{\partial z^j}dz^j+\frac{\partial h_{i\bar k}}{\partial \bar z^j}d\bar z^j\right)\wedge dz^i\wedge d\bar z^k\\ &=\frac{i}{2}\left\{\frac{\partial h_{i\bar k}}{\partial z^j}dz^j\wedge dz^i\wedge d\bar z^k\right.\\ &\qquad\left.-\overline{\frac{\partial h_{\bar i k}}{\partial z^j}dz^j\wedge dz^k\wedge d\bar z^i}\right\}.\end{aligned}$$

所以 $d\hat H=0$ 与(20)式是等价的，定理证毕。

当局部标架场改变时，我们有下面的公式：

$$(22)\qquad \begin{aligned}&S'=A\cdot S,\\ &\sigma=\sigma'\cdot A,\\ &\Omega'\cdot A=A\cdot\Omega,\\ &H'=A\cdot H\cdot{}^t\bar A。\end{aligned}$$

所以

$$(23)\qquad \Omega'\cdot H'=A\cdot(\Omega\cdot H)\cdot{}^t\bar A。$$

另外，曲率矩阵 $\Omega\cdot H$ 是 Hermite 反对称的（§4的(51)式），即

$$(24)\qquad \Omega\cdot H=-{}^t\overline{(\Omega\cdot H)}。$$

因为 $\Omega\cdot H$ 是(1,1)次微分式构成的矩阵，所以可设

$$(25)\qquad \begin{aligned}&\Omega\cdot H=(\Omega_{i\bar k}),\\ &\Omega_{i\bar k}=\sum_{j,l}R_{i\bar k j\bar l}\sigma^j\wedge\bar\sigma^l。\end{aligned}$$

由(24)式得到

(26) $$\Omega_{i\bar{k}}=-\bar{\Omega}_{k\bar{i}},$$

所以

$$R_{i\bar{k}j\bar{l}}\sigma^j\wedge\bar{\sigma}^l=-\bar{R}_{k\bar{i}j\bar{l}}\bar{\sigma}^j\wedge\sigma^l$$
$$=\bar{R}_{k\bar{i}l\bar{j}}\sigma^j\wedge\bar{\sigma}^l,$$

即

(27) $$R_{i\bar{k}j\bar{l}}=\bar{R}_{k\bar{i}l\bar{j}}.$$

设 $A=(A_i^j)$，则(23)式就是

$$\Omega'_{i\bar{k}}=\sum_{p,q}A_i^p\bar{A}_k^q\Omega_{p\bar{q}},$$

其中 $\Omega'\cdot H'=(\Omega'_{i\bar{k}})$。若仍记

$$\Omega'_{i\bar{k}}=\sum_{j,l}R'_{i\bar{k}j\bar{l}}\sigma'^j\wedge\bar{\sigma}'^l,$$

则

(28) $$R'_{i\bar{k}j\bar{l}}=\sum_{p,q,u,v}A_i^p\bar{A}_k^q A_j^u\bar{A}_l^v R_{p\bar{q}u\bar{v}}.$$

取M在点 x 的(1,0)型切矢量 ξ，它在标架场 S 和 S' 下分别有分量 ξ^i 和 ξ'^i，则

(29) $$\xi^i=\sum_j A_j^i\xi'^j,$$

所以

(30) $$\sum_{i,k,j,l}R'_{i\bar{k}j\bar{l}}\xi'^i\bar{\xi}'^k\xi'^j\bar{\xi}'^l$$
$$=\sum_{p,q,u,v}R_{p\bar{q}u\bar{v}}\xi^p\bar{\xi}^q\xi^u\bar{\xi}^v,$$

可见上述表达式不依赖于局部标架场的选取。若(1,0)型切矢量 $\xi\neq0$，则命

(31) $$R(x,\xi)=\frac{2\sum\limits_{i,k,j,l}R_{i\bar{k}j\bar{l}}\xi^i\bar{\xi}^k\xi^j\bar{\xi}^l}{\left(\sum\limits_{i,k}h_{i\bar{k}}\xi^i\bar{\xi}^k\right)^2},$$

称为 Hermite 流形M在(x,ξ)的全纯截面曲率。

由(22)的第三式得到

$$\mathrm{Tr}\ \Omega'=\mathrm{Tr}\ \Omega. \tag{32}$$

因此$\Phi=\mathrm{Tr}\ \Omega$是在M上大范围定义的(1,1)型微分式，称为 Hermite 流形M的 Ricci 形式。

设$h^{i\bar{k}}$是矩阵H^{-1}的元素，则

$$R=\sum_{i,k,j,l}R_{i\bar{k}j\bar{l}}h^{i\bar{k}}h^{j\bar{l}} \tag{33}$$

与局部标架场的选取也是无关的，并且

$$\bar{R}=\sum_{i,k,j,l}\bar{R}_{i\bar{k}j\bar{l}}\overline{h^{i\bar{k}}}\,\overline{h^{j\bar{l}}}$$

$$=\sum_{i,k,j,l}R_{k\bar{i}l\bar{j}}h^{k\bar{i}}h^{l\bar{j}}=R,$$

所以(33)式定义了流形M上的一个实函数，称为 Hermite 流形的数量曲率。

紧致的Kähler 流形在拓扑上有很强的限制，例如：紧致Kähler流形的第二个 Betti 数不能是零。这是因为 Kähler 形式$\hat{H}$是实数值闭外微分式，所以它决定了第二个 de Rham 群$H^2(M,\boldsymbol{R})$中的一个元素u。容易看到$u\neq 0$。实际上，根据 Kähler 形式的局部表达式

$$\hat{H}=\frac{i}{2}\sum_{i,k}h_{i\bar{k}}dz^i\wedge d\bar{z}^k,$$

所以

$$\hat{H}^m=\left(\frac{i}{2}\right)^m m!\,(\det H)\bigwedge_k(dz^k\wedge d\bar{z}^k).$$

因为矩阵H是正定的，$\det H>0$，所以

$$\int_M\hat{H}^m>0.$$

$\hat{H}^m$对应于$H^{2m}(M,\boldsymbol{R})$中的元素u^m（指m个u的上积（cup product))，而$\int_M \hat{H}^m$就是上同调类u^m在基本类M上的值。因此$u^m \neq 0, u \neq 0$，这就证明了上面的论断。

设M和N分别是m维和n维的复流形，$f: M \to N$是全纯映射。若$m \leqslant n$，且映射f的Jacobi矩阵的秩处处是m，则称f是浸入。如果f还是单一的，即对于任意的$x \neq y \in M$，都有$f(x) \neq f(y)$，则称f是嵌入。

定理5.3 设N是Kähler流形，$f: M \to N$是全纯浸入，则M上有从N诱导的Kähler结构。

证明 设$p \in M$，$(z^1, \cdots, z^n)$是流形N在点$q = f(p)$的复坐标，$(w^1, \cdots, w^m)$是流形M在点p的复坐标系，则映射f在局部上可表成

$$z^\alpha = f^\alpha(w^1, \cdots, w^m).$$

设N上的Hermite结构是

$$H = \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha d\bar{z}^\beta,$$

Kähler形式是

$$\hat{H} = \frac{i}{2} \sum_{\alpha, \beta} h_{\alpha\overline{\beta}} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta,$$

并且$d\hat{H} = 0$。命

$$h'_{i\overline{j}} = \sum_{\alpha, \beta} (h_{\alpha\overline{\beta}} \circ f) \frac{\partial z^\alpha}{\partial w^i} \frac{\partial \bar{z}^\beta}{\partial \overline{w}^j},$$

则矩阵$H' = (h'_{i\overline{j}})$仍然是正定的，它给出了$M$上的正定的Hermite结构

$$H' = \sum_{i, j} h'_{i\overline{j}} dw^i d\overline{w}^j,$$

其Kähler形式是

$$\hat{H}' = \frac{i}{2} \sum_{i, j} h'_{i\overline{j}} dw^i \wedge d\overline{w}^j.$$

显然

$$\hat{H}' = f^* \hat{H},$$

且

$$d\hat{H}' = d \circ f^* \hat{H} = f^* (d\hat{H}) = 0,$$

所以复流形M关于诱导的 Hermite 结构 H' 成为一个 Kähler 流形。

附录一　欧氏空间中的曲线和曲面[1]

陈　省　身

引言

这篇文章论述了整体微分几何中一些最基本的定理，它们有希望在将来有进一步的发展。我们将考虑最简单的情况，在这些情况中，几何意义是最清楚的。

1.　切线回转定理

设 E 是定向的欧氏平面，故旋转的方向有确切的意义，一条光滑曲线可以表示为它的定位向量 $X=(x_1, x_2)$ 作为它的弧长 s 的函数，我们假设函数 $X(s)$ ——即 $x_1(s)$ 和 $x_2(s)$ ——是两次连续可微的，且向量 $X'(s)$ 恒不为零。后一假设保证曲线上每一点有单位切向量 $e_1(s)$，它是沿 $X'(s)$ 方向的单位向量。并且，因 E 是定向的，将 $e_1(s)$ 正旋 $\pi/2$ 就得到单位法向量 $e_2(s)$。Frenet 公式给出 $X(s)$，$e_1(s)$，$e_2(s)$ 之间的联系：

$$(1)\qquad \frac{dX}{ds}=e_1,\quad \frac{de_1}{ds}=ke_2,\quad \frac{de_2}{ds}=-ke_1.$$

函数 $k(s)$ 称为**曲率**，$k(s)$ 可正可负，若改变曲线或平面的方向时，则改变符号。

曲线 C 称为**闭的**，如果 $X(s)$ 是周期 L 的周期函数，其中 L 是曲数 C 的长度。曲线称为**简单的**，如果当 $0<s_1-s_2<L$ 时，必

---

[1] 原文刊登在 Studies in Global Geometry and Analysis (edited by S.S. Chern), Mathematical Association of America (1967), 16—56. 本附录由田畴译出.

有

$$X(s_1) \neq X(s_2).$$

曲线称为**凸的**，如果曲线在它的每一条切线的一傍。

设C是长为L的定向闭曲线，其定位向量表示为它的弧长的函数$X(s)$。O是平面上固定的一点，取作为坐标系的原点，Γ表示以O为中心的单位圆。我们把切映射

$$T: C \to \Gamma$$

定义为：将曲线C上的一点P映到以O为起点的、平行于曲线在P点的切向的单位向量的终点。显然，T是连续映射。在直观上很清楚，当一点绕C一周时，它的象绕Γ可能好几圈。这个圈数称为C的回转指数。切线回转定理断言，若C是简单的，则它的旋转指数是± 1。现在我们给旋转指数以严格的定义。

选定以O为起点的一个向量OX，并用$\tau(s)$表示OX到向量$e_1(s)$的角，且假设

$$0 \leqslant \tau(s) < 2\pi,$$

于是$\tau(s)$唯一确定。然而，$\tau(s)$是不连续的，因为在使$\tau(s_0)=0$的s_0的每一个邻域里可以有$\tau(s)$的一些值与2π相差一个任意小的量。但是，如下列引理所示的与$\tau(s)$密切关联的一个连续函数$\bar{\tau}(s)$总是存在的。

引理 存在一个连续函数$\bar{\tau}(s)$，使

$$\bar{\tau}(s) \equiv \tau(s) \pmod{2\pi}.$$

证明 为证明这一引理，首先考察映射T，它是连续的，也是一致连续的。所以，必有数$\delta>0$，使得当$|s_1-s_2|<\delta$时，$T(s_1)$和$T(s_2)$在同一开半平面内，由对$\bar{\tau}(s)$所要求的条件，若$\bar{\tau}(s_1)$已知，则$\bar{\tau}(s_2)$完全决定。我们用点

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = L$$

分区间$0 \leqslant s \leqslant L$，并使

$$|s_i - s_{i-1}| < \delta, \quad i = 1, \cdots, m.$$

为规定$\bar{\tau}(s)$，命$\bar{\tau}(s_0) = \tau(s_0)$，则$\bar{\tau}(s)$在子区间$s_0 \leqslant s \leqslant s_1$上完

全确定，特别在 s_1 的值确定，它又决定了 $\tau(s)$ 在第二个子区间上的值，等等。显然，如此决定的函数 $\bar{\tau}(s)$ 满足引理的条件。

差 $\bar{\tau}(L)-\bar{\tau}(0)$ 是 2π 的整数倍，设为 $\gamma\cdot 2\pi$。现在证明，整数 γ 不依赖于函数 $\bar{\tau}(s)$ 的选择。事实上，设 $\bar{\tau}'(s)$ 是满足相同条件的函数，则有

$$\bar{\tau}'(s)-\bar{\tau}(s)=n(s)\cdot 2\pi,$$

其中 $n(s)$ 是整数。因为 $n(s)$ 是连续的，它必为常数，从而得到

$$\bar{\tau}'(L)-\bar{\tau}'(0)=\bar{\tau}(L)-\bar{\tau}(0).$$

这就证明了 γ 不依赖于 $\bar{\tau}(s)$ 的选择，我们将 γ 定义为曲线 C 的**回转指数**。

定理 简单闭曲线的回转指数为 ± 1。

证明 为证明这个定理，我们考虑映射 Σ，它把 C 的有序点对 $X(s_1)$，$X(s_2)$ $(0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant L)$ 映到以 O 为起点而平行于由 $X(s_1)$ 到 $X(s_2)$ 的割线的单位向量的终点。这些有序点对能够被表示为在 (s_1,s_2) 平面中由 $0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant L$ 所决定的一个三角形 $\triangle$。$\triangle$ 到 Γ 的映射 Σ 是连续的。我们也注意到，它限制在边 $s_1=s_2$ 上就是切映射 T。

对任意一点 $p\in\triangle$，命 $\tau(p)$ 表示 OX 到 $O\Sigma(p)$ 的角，且使 $0\leqslant\tau(p)<2\pi$。这个函数也未必连续。然而，我们将证明，存在连续函数 $\bar{\tau}(p)$，$p\in\triangle$，使

$$\bar{\tau}(p)\equiv\tau(p)\pmod{2\pi}.$$

事实上，设 m 是 $\triangle$ 的内点，我们用经过 m 的半径复盖 $\triangle$。由在前面的引理的证明中所用的办法，我们能够确定一个函数 $\bar{\tau}(p)$，$p\in\triangle$，使 $\bar{\tau}(p)\equiv\tau(p)\pmod{2\pi}$，且使它沿每一个过 m 的半径都是连续的。剩下来要证明的是它在 $\triangle$ 中是连续的。为此，设 p_0 是 $\triangle$ 的一点，因为 Σ 是连续的，由线段 mp_0 的紧致性得到，必存在一个数 $\eta=\eta(p_0)>0$，使得，对 $q_0\in mp_0$，以及对使距离 $d(q,q_0)<\eta$ 的任一点 $q\in\triangle$，点 $\Sigma(q)$ 和 $\Sigma(q_0)$ 不是对径点，这后一条件等价于关系：

(2) $$\bar{\tau}(q)-\bar{\tau}(q_0)\not\equiv 0 \pmod{\pi}.$$

现给定 ε，$0<\varepsilon<\pi/2$，我们选取 p_0 的一个邻域 U，使 U 被包含在 p_0 的 η 邻域内，并使得，对 $p\in U$，$O\Sigma(p_0)$ 和 $O\Sigma(p)$ 之间的夹角小于 ε。这是可能的，因为映射 Σ 是连续的，最后的条件能表示为

(3) $$\bar{\tau}(p)-\bar{\tau}(p_0)=\varepsilon'+2k(p)\pi,\quad |\varepsilon'|<\varepsilon,$$

其中 $k(p)$ 是整数。设 q_0 是线段 mp_0 上的任意一点，作平行于 p_0p 的线段 q_0q，且使 q 在 mp 上。沿 mp，$\bar{\tau}(q)-\bar{\tau}(q_0)$ 是 q 的连续函数，且当 q 与 m 一致时函数值为零，因 $d(q,q_0)$ 小于 η，由方程 (2) 得到

$$|\bar{\tau}(q)-\bar{\tau}(q_0)|<\pi.$$

特别，对 $q_0=p_0$，

$$|\bar{\tau}(p)-\bar{\tau}(p_0)|<\pi.$$

将这一结果与方程 (3) 联系起来，我们得到

$$k(p)=0,$$

这就证明了 $\bar{\tau}(p)$ 在 $\triangle$ 中是连续的。因 $\bar{\tau}(p)\equiv\tau(p) \pmod{2\pi}$，容易看出 $\bar{\tau}(p)$ 是可微分的。

现在设 $A(0,0)$，$B(0,L)$ 和 $D(L,L)$ 是 $\triangle$ 的顶点，C 的旋转指数由下列线积分所决定：

$$2\pi\gamma=\int_{AD} d\bar{\tau}.$$

因为 $\bar{\tau}(p)$ 在 $\triangle$ 内有定义，所以

$$\int_{AD} d\bar{\tau}=\int_{AB} d\bar{\tau}+\int_{BD} d\bar{\tau}.$$

为计算右端的线积分的值，我们选取适当的坐标系。不妨假设 $X(0)$ 是 C 的“最低点”，即纵坐标为极小值的点，且选 $X(0)$ 作为坐标原点。于是 C 在 O 的切向量是水平的，并把它规定为 OX 的方向。这样，曲线 C 就处于以 OX 轴为界的上半平面内，且线积分

$$\int_{AB} d\tau$$

就等于当 P 沿 C 运行一周时 OP 旋转的角度。因为 OP 永不指向下方，故这个角度为 $\varepsilon\pi$，$\varepsilon=\pm 1$。类似地，线积分

$$\int_{BD} d\tau$$

就等于当 P 沿 C 绕行一周时，PO 旋转的角度，其值也是 $\varepsilon\pi$。因此，这两个积分的和为 $2\varepsilon\pi$，所以曲线 C 的回转指数为 ± 1，这就完成了定理的证明。

我们还能够用一个积分公式来定义回转指数。事实上，利用在引理中的函数 $\tau(s)$，我们可把曲线的单位切向量和单位法向量的分量表示如下：

$$e_1=(\cos\tau(s),\sin\tau(s)),$$
$$e_2=(-\sin\tau(s),\cos\tau(s)).$$

这就得到

$$d\tau(s)=de_1\cdot e_2=k\,ds,$$

从这个方程，我们导出以下关于回转指数的积分公式：

$$2\pi\gamma=\int_C k\,ds. \tag{4}$$

这一公式对闭曲线成立，并不要求曲线是简单的。

图14给出一个例子，它是回转指数为零的一条闭曲线。

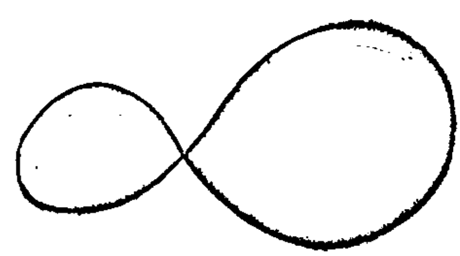

图 14

在微分几何中有许多有趣的定理对较一般的一类曲线，即所谓分段光滑的曲线也成立。这样的曲线是由有限段光滑弧

$$A_0A_1, A_1A_2, \cdots, A_{m-1}A_m$$

所构成的，而通过公共顶点 A_i，$i=1,\cdots,m-1$ 的两段弧的切线可以是不同的。曲线称为闭的，如果 $A_0=A_m$。分段光滑闭曲线

的一个最简单的例子就是直线多边形。

回转指数的概念和切线回转定理都能推广到分段光滑闭曲线。现不加证明将结果简述如下。设 $s_i(i=1,\cdots,m)$ 是从 A_0 到 A_i 的弧长，故 $s_m=L$ 就是曲线的长。并设曲线已被定向，则切映射在除 A_i 以外的所有点都有定义。在顶点 A_i 有两个单位向量分别切于 $A_{i-1}A_i$ 和 A_iA_{i+1}，(规定 $A_{m+1}=A_1$)。它们在 Γ 上的对应点分别用 $T^-(A_i)$ 和 $T^+(A_i)$ 表示。设 φ_i 是从 $T^-(A_i)$ 到 $T^+(A_i)$ 的角，且 $-\pi<\varphi_i<\pi$。简言之，φ_i 是从 $A_{i-1}A_i$ 的切线到 A_iA_{i+1} 的切线的外角。对每一段弧 $A_{i-1}A_i$，都能定义一个连续函数 $\tau(s)$，它是由 OX 到在 $X(s)$ 的切向量的角。由方程

$$2\pi\gamma=\sum_{i=1}^{m}\left\{\tau(s_i)-\tau(s_{i-1})\right\}+\sum_{i=1}^{m}\varphi_i \tag{5}$$

决定的数 γ 是一个整数，称为曲线的回转指数。这时关于切线回转定理也成立。

定理 若一分段光滑的曲线是简单的，则它的回转指数等于 ± 1。

作为切线回转定理的一个应用，我们给出下面关于简单闭凸曲线的特征。

附注 一条简单闭曲线是凸的，必须且只须它可以取适当的定向使它的曲率 $\geqslant 0$。

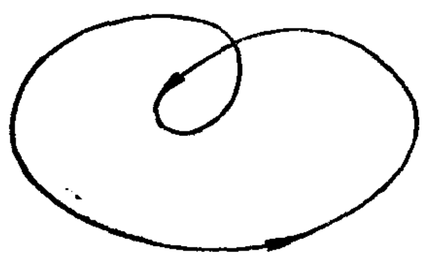

图 15

首先指出，若曲线不是简单的，则定理不成立。事实上，图15给出一条非凸的曲线，其曲率 $K>0$。

证明 为证明这一定理，我们构作函数 $\tau(s)$，故 $k=d\tau/ds$。条件 $k\geqslant 0$ 就等价于说 $\tau(s)$ 是单调不减的函数。因为 C 是简单的，我们能够假设 $\tau(s)$ $(0\leqslant s\leqslant L)$ 由 0 增加到 2π。因此，若在 $X(s_1)$ 和 $X(s_2)$ $(0\leqslant s_1<s_2<L)$ 的切线

有相同的指向，则C从$X(s_1)$到$X(s_2)$的弧是一直线段，它们在各点的切线一致。

假定$\tau(s)$ $(0\leqslant s\leqslant L)$是单调不减的，而$C$是非凸的，则在$C$上有一点$A=X(s_0)$，使得$C$在$A$的切线$t$的两旁都有$C$的点。选定$t$的正侧，并考虑从$C$上的任一点$X(s)$到$t$的有向垂直距离。这是一个$s$的连续函数，并假定它在曲线$C$上的点$M$和$N$分别达到极大和极小值。显然，$M$和$N$都不在$t$上，但$C$在$M$和$N$的切线都平行于$t$。因此，这两条切线和$t$这三者之中必有两条有相同的指向；由前一段的讨论，这是不可能的。

其次，假设C是凸的。为证明$\tau(s)$是单调的，我们假设

$$\tau(s_1)=\tau(s_2),\qquad s_1<s_2,$$

则曲线在$X(s_1)$和$X(s_2)$的切线有相同的指向。但是，又有一切线与它们平行而指向相反。由C的凸性，前面这两条切线必重合。

因此，我们考虑与C相切于两个不同的点A和B的直线t。现说明线段AB必为C的一部分。事实上，若非如此，设D是AB上的一点但不在C上，过D作垂直于t的但在包含C的半平面内的直线u。则u与c相交至少两点。在这些交点之中，设F是离t最远的，而G是离t最近的，故$F\neq G$。则G是三角形ABF的一个内点。C在G的切线的两边都有C的点，这与C的凸性矛盾。

由此可见，在上一段的假设下，线段AB是C的一部分，且在A和B的切线方向相同。这就证明了连接$X(s_1)$和$X(s_2)$的线段属于C。后者就蕴涵了$\tau(s)$在区间$s_1\leqslant s\leqslant s_2$中保持常数。因此，函数$\tau(s)$是单调的。定理证毕。

定理的前一半也可以说明如下：

附注　一条闭曲线若$k(s)\geqslant 0$，且其旋转指数为1，则必是凸的。

切线回转定理实质上是由Riemann发现的。以上的证明是由

H. Hopf 给出的。(见 *Compositio Mathematica*, 2 (1935), 50—62)。为进一步的阅读，可以参看：

1. H. Whitney, "On regular closed curves in the plane," *Compositio Mathematica*, 4 (1937), 276—284.

2. S. Smale, "Regular curves on a Riemannian manifold," *Transactions of the American Mathematical Society*, 87 (1958), 492—511.

3. S. Smale, "A classification of immersions of the two-sphere," *Transactions of the American Mathematical Society*, 90 (1959), 281—290.

2. 四顶点定理

关于平面曲线的一个有趣的定理是所谓的"四顶点定理"。定向平面曲线的顶点指的是使曲率有相对极值的点。因为构成曲线的点集是紧致的，故一条平面闭曲线至少有两个顶点，各对应于曲率的最小值和最大值。下面的定理说至少有四个顶点。

定理 一条简单的闭凸曲线至少有四个顶点。

这个定理由 Mukhopadhyaya 在 1909 年首先发现，下面给出的证明是 G. Herglotz 的工作。定理的结论对非凸曲线也对，但是证明比较困难。这个定理的结论不能进一步改进，因为一个具有不等轴的椭圆恰有四个顶点，就是它与对称轴的交点。

证明 假设曲线 C 仅有两个顶点 M 和 N，我们将证明由此引出矛盾。直线 MN 不会与 C 相交于其它点；倘若相交于 Q 点，则在 M,N,Q 这三点的中间一点所作曲线的切线必包含另外两点在内。由上一节的证明，线段 MN 必为曲线 C 的一部分，这就得到在 M 和 N 的曲率都是零，这与 M 和 N 分别使曲线的曲率取最小值和最大值矛盾。

我们用 0 和 s_0 分别表示 M 和 N 的参数，并取 MN 为 x_1 轴。则能假设

$$x_2(s) < 0, \qquad 0 < s < s_0,$$
$$x_2(s) > 0, \qquad s_0 < s < L,$$
其中 L 是曲线 C 的长。设 $(x_1(s), x_2(s))$ 是曲线 C 上对应于参数 s 的点的定位向量，则其单位切向量和单位法向量分别为
$$e_1 = (x_1', x_2'), \qquad e_2 = (-x_2', x_1'),$$
其中"$'$"表示对 s 的微商. 由 Frenet 公式
$$x_1'' = -kx_2', \qquad x_2'' = kx_1', \tag{6}$$
这就得到
$$\int_0^L kx_2' ds = -x_1'\Big|_0^L = 0\,.$$
左端的积分可以写成下列和式：
$$\int_0^L kx_2' ds = \int_0^{s_0} kx_2' ds + \int_{s_0}^L kx_2' ds.$$

对和式中的每一部分应用第二中值定理。第二中值定理说：设 $f(x), g(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 是 x 的两个函数，且 $f(x)$ 和 $g'(x)$ 连续，$g(x)$ 单调，则必存在 ξ，$a < \xi < b$，满足方程
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

因为 $k(s)$ 在区间 $0 \leqslant s \leqslant s_0$ 和区间 $s_0 \leqslant s \leqslant L$ 中都是单调的，于是得到
$$\begin{aligned}\int_0^{s_0} kx_2' ds &= k(0)\int_0^{\xi_1} x_2' ds + k(s_0)\int_{\xi_1}^{s_0} x_2' ds \\ &= x_2(\xi_1)(k(0) - k(s_0)), \qquad 0 < \xi_1 < s_0,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\int_{s_0}^L kx_2' ds &= k(s_0)\int_{s_0}^{\xi_2} x_2' ds + k(L)\int_{\xi_2}^L x_2' ds \\ &= x_2(\xi_2)(k(s_0) - k(0)), \qquad s_0 < \xi_2 < L.\end{aligned}$$
因为左端的和为零，所以，
$$(x_2(\xi_1) - x_2(\xi_2))(k(0) - k(s_0)) = 0,$$
但是，
$$x_2(\xi_1) - x_2(\xi_2) < 0, \qquad k(0) - k(s_0) > 0,$$

这就得到矛盾。

这就说明在C上至少还有一个顶点，因为取相对极值的点是成对出现的，所以至少有四个顶点，于是证明了定理。

在顶点的$k'=0$。因此，我们也可以说，在一条简单的闭凸曲线上至少有四个点使得$k'=0$。

四顶点定理对简单的闭的非凸面曲线也是对的；可以参看：

1. S.B.Jackson, "Vertices for plane curves," *Bulletin of Amercian Mathematical Socity*, 50 (1944), 564—578.

2. L.Vietoris, "Ein einfacher Beweis des Vierscheitelsatzes der ebenen Kurven," *Archiv der Mathematik*, 3 (1952), 304—306.

为了进一步的研究，可以看：

1. P.Scherk, "The four-vertex theorem," Proceeding of the First Canadian Mathematical Congress, Montreal (1945), 97—102.

3. 平面曲线的等周不等式

定理 具有定长的所有闭的简单平面曲线中，圆所围的面积最大。换言之，若L是简单闭曲线C的长度，A是曲线所围的面积，则

$$L^2-4\pi A\geqslant 0, \tag{7}$$

且等号成立时，必须C为圆周。

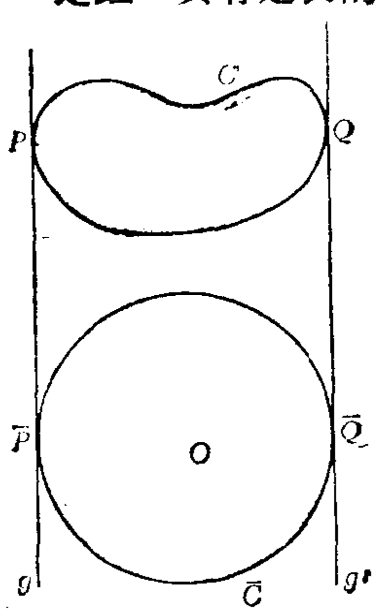

图 16

对这个定理已有许多证明，其区别在于优美的程度以及所假设的条件（连续性和凸性）。下面将给出两个证明，它们分别为 E.Schmidt(1939) 和 A.Hurwitz(1902) 的工作。

Schmidt的证明 将C围在与C分别相切于P和Q的两条平行直线g

和 g' 之间(图16)。设 $s=0$，s_0 分别为点 P 和 Q 的参数，并作一与 g 和 g' 分别切于 $\bar{P}$ 和 $\bar{Q}$ 的圆 $\bar{C}$，设其半径为 r，并取它的中心为坐标系的原点。命 $X(s)=(x_1(s),x_2(s))$ 为 C 的定位向量。故

$$(x_1(0),x_2(0))=(x_1(L),x_2(L)).$$

$\bar{C}$ 的定位向量可以取作 $(\bar{x}_1(s),\bar{x}_2(s))$，使得

$$\tag{8} \begin{aligned} &\bar{x}_1(s)=x_1(s),\\ &\bar{x}_2(s)=\begin{cases} -\sqrt{r^2-x_1^2(s)}, & 0\leqslant s\leqslant s_0,\\ +\sqrt{r^2-x_1^2(s)}, & s_0\leqslant s\leqslant L. \end{cases} \end{aligned}$$

一条长为 L 的闭曲线所围的面积可以表示为线积分：

$$\begin{aligned} A&=\int_0^L x_1x_2'\,ds=-\int_0^L x_2x_1'\,ds\\ &=\frac{1}{2}\int_0^L (x_1x_2'-x_2x_1')\,ds. \end{aligned}$$

将这一公式分别应用到 C 和 C'，得到

$$A=\int_0^L x_1x_2'\,ds,$$

$$\bar{A}=\pi r^2=-\int_0^L \bar{x}_2\bar{x}_1'\,ds=-\int_0^L \bar{x}_2x_1'\,ds,$$

$\bar{A}$ 表示曲线 $\bar{C}$ 所围的面积，将上面两式相加得到

$$\tag{9} \begin{aligned} A+\pi r^2&=\int_0^L (x_1x_2'-\bar{x}_2x_1')\,ds\\ &\leqslant\int_0^L \sqrt{(x_1x_2'-\bar{x}_2x_1')^2}\,ds\\ &\leqslant\int_0^L \sqrt{(x_1^2+\bar{x}_2^2)(x_1'^2+x_2'^2)}\,ds\\ &=\int_0^L \sqrt{x_1^2+\bar{x}_2^2}\,ds=Lr. \end{aligned}$$

因为两个正数的几何平均小于或等于它们的算术平均，所以

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2}\leqslant\frac{1}{2}(A+\pi r^2)\leqslant\frac{1}{2}Lr.$$

两边平方并约掉 r 就得到不等式(7)。

现在假设方程(7)中等号成立；则 A 和 πr^2 的几何平均与算术平均相等，所以 $A=\pi r^2$，$L=2\pi r$。因为直线 g 和 g' 的方向是任意的，这就说明 C 在所有的方向有相同的宽度。此外，在方程(9)中等号必须处处成立。特别，

$$(x_1x_2'-\bar{x}_2x_1')^2=(x_1^2+\bar{x}_2^2)(x_1'^2+x_2'^2),$$

于是，

$$\frac{x_1}{x_2'}=\frac{-\bar{x}_2}{x_1'}=\pm\frac{\sqrt{x_1^2+\bar{x}_2^2}}{\sqrt{x_1'^2+x_2'^2}}=\pm r.$$

由方程(9)的第一个等式可以看出其比值为 r，即

$$x_1=rx_2',\qquad \bar{x}_2=-rx_1'.$$

当交换 x_1 和 x_2 时，上述关系仍然成立，故有

$$x_2=r\,x_1'.$$

因此，我们得到

$$x_1^2+x_2^2=r^2$$

这就证明了 C 是一圆。

Hurwitz 的证明利用了 Fourier 级数的理论，我们将先证明 Wirtinger 的引理。

引理 设 $f(t)$ 是周期为 2π 的连续的周期函数，且具有连续的导数 $f'(t)$。若

$$\int_0^{2\pi}f(t)\,dt=0,$$

则

$$\int_0^{2\pi}f'(t)^2dt\geqslant\int_0^{2\pi}f(t)^2dt. \tag{10}$$

此外，等号成立必须且只须

$$f(t)=a\cos t+b\sin t. \tag{11}$$

证明 为证明这一引理，我们将 $f(t)$ 展开成 Fourier 级数：

$$f(t)\sim\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt).$$

因为$f'(t)$是连续的，它的 Fourier 级数可以由上式逐项微分得到：

$$f'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nt - na_n\sin nt).$$

因为

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \pi a_0,$$

由假设的条件得到 $a_0=0$。由 Parsevel 公式，我们得到

$$\int_0^{2\pi}[f(t)]^2dt = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

$$\int_0^{2\pi}[f'(t)]^2dt = \sum_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2).$$

因此

$$\int_0^{2\pi}[f'(t)]^2\,dt - \int_0^{2\pi}[f(t)]^2dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)(a_n^2+b_n^2).$$

这是大于或等于零的。它等于零，必须 $a_n=b_n=0$ 对全体 $n>1$ 成立。所以，$f(t)=a_1\cos t+b_1\sin t$，这就证明了引理。

Hurwitz 的证明 要证明不等式(7)，为简单起见，我们假设 $L=2\pi$，且

$$\int_0^{2\pi}x_1(s)\,ds = 0.$$

后一假设意味着曲线的重心在 x_1 轴上，这总可以通过选取适当的坐标系得到。曲线的长度和曲线所围的面积可以分别表示为积分

$$2\pi = \int_0^{2\pi}(x_1'^2+x_2'^2)\,ds \quad 和 \quad A = \int_0^{2\pi}x_1x_2'\,ds.$$

从这两个方程得到

$$2(\pi - A) = \int_0^{2\pi}(x_1'^2 - x_1^2)\,ds + \int_0^{2\pi}(x_1 - x_2')^2ds.$$

由引理，第一个积分是$\geqslant 0$的，第二个积分显然是$\geqslant 0$的。因此

$$A \leqslant \pi,$$

这就是等周不等式，等号成立必须

$$x_1 = a\cos s + b\sin s, \qquad x_2' = x_1.$$

于是得到

$$x_1 = a\cos s + b\sin s,$$
$$x_2 = a\sin s - b\cos s + c,$$

即C为一圆周。

为进一步阅读，可以看：

1. E. Schmidt, "Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphärischen Raum jeder Dimensionenzahl," *Math. Zeit.*, 49(1943), 1—109.

4. 空间曲线的全曲率

一条长为L的空间闭曲线的**全曲率**定义为积分

$$\mu = \int_0^L |k(s)|\,ds, \tag{12}$$

其中$k(s)$是曲线的曲率。对空间曲线，我们仅定义了$|k(s)|$。

假设C是定向的。以空间的原点O为起点作平行于C的切向量的单位向量。它们的端点描出单位球面上的一条闭曲线Γ，称为C的**切线象**，C上曲率为零的点的象是Γ上的**奇点**(即在这一点没有切线或有高阶密接的切线)。显然，C的全曲率等于Γ的长。

Fenchel 的定理是与全曲率有关的。

定理 空间闭曲线C的全曲率$\geqslant 2\pi$。等于2π必须且只须C是一条平面凸曲线。

关于这一定理的下列证明是由 B. Segre (*Bolletino della*

Unione Mathematica Italiana, 13 (1934), 279—283) 及由 H. Rutishauser 和 H. Samelson (*Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 227 (1948), 755—757) 独立发现的。也可以看：W. Fenchel, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 57 (1951), 44—54。其证明依赖于下面的引理：

引理 设 Γ 是单位球面上的可求长的闭曲线，其长 $L<2\pi$。则在球面上存在一点 m 使得 Γ 上的所有的点 x 与 m 的球面距离 $\overline{mx}\leqslant L/4$。若 Γ 的长为 2π，但不是两段大半圆弧的联，则存在一点 m，使 $\overline{mx}<\pi/2$ 对 Γ 上所有的 x 成立。

我们用记号 $\overline{ab}$ 表示球面上的两点 a 和 b 之间的球面距离。若 $\overline{ab}<\pi$，则由条件

$$\overline{am}=\overline{bm}=\frac{1}{2}\overline{ab}$$

决定的点 m 就是它们的中点。设 x 是满足条件 $\overline{mx}\leqslant\pi/2$ 的一个点，则

$$2\overline{mx}\leqslant\overline{ax}+\overline{bx}.$$

事实上，设 x' 是 x 的关于 m 的对称点，则

$$\overline{x'a}=\overline{xb},$$

$$\overline{x'x}=\overline{x'm}+\overline{mx}=2\overline{mx}.$$

利用三角形不等式就得到

$$2\overline{mx}=\overline{x'x}\leqslant\overline{x'a}+\overline{ax}=\overline{ax}+\overline{bx}, \tag{13}$$

这就证明了上述不等式。

现在来**证明引理** 为证明引理的第一部分，我们取 Γ 上的两点 a 和 b，它们把曲线分成相等的两段弧。于是 $\overline{ab}<\pi$，且用 m 表示它们的中点。设 x 是 Γ 上一点，使 $2\overline{mx}<\pi$。这样的点是存在的，例如点 a。于是，

$$\overline{ax}\leqslant\widehat{ax},\quad \overline{bx}\leqslant\widehat{bx},$$

其中 $\widehat{ax}$ 和 $\widehat{bx}$ 分别表示沿 Γ 的弧长。由方程(13)则得到

$$2\overline{mx} \leqslant \widehat{ax} + \widehat{bx} = \widehat{ab} = \frac{L}{2}.$$

因此，作为Γ上的函数，

$$f(x) = \overline{mx}, \quad x \in \Gamma,$$

它或者$\geqslant \pi/2$，或者$\leqslant L/4 < \pi/2$。因为Γ是连通的，而$f(x)$是Γ上的连续函数，故函数$f(x)$的象在区间$(0, \pi)$内是连通的。所以，必有

$$f(x) = \overline{mx} \leqslant \frac{L}{4}.$$

其次考虑Γ的长是2π的情况。若Γ包含一对对径点，则其长为2π必须它是两个大半圆弧的联。故Γ必定不包含一对对径点。假设有一对点a和b，它们平分Γ，且使

$$\overline{ax} + \overline{bx} < \pi$$

对全体$x \in \Gamma$成立，又设m表示$\overline{ab}$的中点。如果

$$f(x) = \overline{mx} \leqslant \frac{1}{2}\pi,$$

则由方程(13)，

$$2\overline{mx} \leqslant \overline{ax} + \overline{bx} < \pi.$$

这就意味着$f(x)$不能取值$\pi/2$。因为它的象是连通的，以及$f(a) < \pi/2$，因而，

$$f(x) < \pi/2, \quad x \in \Gamma.$$

于是就在这一情况下证明了引理。

剩下来要考虑的情况是，Γ不包含任何一对对径点，但对平分Γ的任一对点a和b，均有一点$x \in \Gamma$，使

$$\overline{ax} + \overline{bx} = \pi$$

成立。读者利用初等几何的结果就可以证明这是不可能的。于是，引理证毕。

定理的证明 为证明 Fenchel 的定理，我们取定一个向量A，

且命

$$g(s)=A\cdot X(s),$$

式中右端表示向量 A 和 $X(s)$ 的数量积。函数 $g(s)$ 在 C 上是连续的，故必有极大值和极小值。因为 $g'(s)$ 存在，所以，若在 s_0 取极值则必有

$$g'(s_0)=A\cdot X'(s_0)=0.$$

这就是说，作为在球面上的一点 A，曲线的切线象上至少有两点与它的距离为 $\pi/2$。因为 A 是任意的，故切线象与任意的大圆都相交，由引理，它的长$\geqslant 2\pi$。

下面假设曲线的切线象的长为 2π。由引理，它必为两个大半圆弧的联。于是，曲线 C 就是两段平面弧的联。因为 C 的切线处处存在，它必为一平面曲线。假设给 C 以定向使得它的回转指数

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^L k(s)\,ds\geqslant 0,$$

则有

$$0\leqslant\int_0^L\{|k|-k\}\,ds=2\pi-\int_0^L k\,ds,$$

故其旋转指数必为 0 或 1。对在平面内给定的向量，必有与它平行的 C 的切向量 t，使 C 在 t 的左侧，则 t 与这个向量同向，且在它与曲线相切的点有 $k\geqslant 0$。这就意味着

$$\int_{k>0} k\,ds\geqslant 2\pi.$$

又因为 $\int_C |k|\,ds=2\pi$，故没有使 $k<0$ 的点，且

$$\int_C k\,ds=2\pi.$$

由第一节的附注，C 是凸的。

作为推论我们有下列定理。

推论 若空间闭曲线 C 的 $|k(s)|\leqslant 1/R$，则 C 的长

$$L\geqslant 2\pi R.$$

这是因为

$$L=\int_0^L ds\geqslant\int_0^L R|k|ds=R\int_0^L|k|ds\geqslant 2\pi R.$$

Fenchel 定理对分段光滑的闭曲线也成立。这类曲线的全曲率定义为

$$\mu=\int_0^L|k|ds+\sum_i a_i, \tag{14}$$

其中 a_i 是在顶点的角。换句话说，在这种情况，其切线象是由几段弧组成的，每一段弧对应于 C 的一段光滑弧；将相邻的顶点用单位球面上的最短的大圆弧连接起来，如此得到的曲线的长就是 C 的全曲率。能够证明，对逐段光滑的曲线 $\mu\geqslant 2\pi$ 也成立。

我们希望给出 Fenchel 定理的另一个证明以及与之相关的关于纽结的全曲率的 Fary-Milnor 定理，参看 Fary(*Bulletin de la société Mathematique de France*, 77(1949), 128—138) 和 J. Milnor(*Annals of Mathematics*, 52(1950), 248—257)。其基础是关于在单位球面上与一段弧相交的大圆的测度的 Crofton 定理。每一个定向大圆决定唯一的"极"，即这个圆所在平面的单位法向量的端点。在单位球面上的大圆的集合的测度指的就是它们的极所构成的区域的面积。Crofton 定理说明如下：

定理 设 Γ 是单位球面 Σ_0 上的一段光滑弧，则与 Γ 相交的定向大圆的测度(每个定向大圆计算的次数等于它与 Γ 的交点的个数)等于 Γ 的长度的 4 倍。

证明 设 Γ 表示为单位向量作为它的弧长 s 的函数 $e_1(s)$，局部地(即在 s 的某个邻域)，设 $e_2(s)$ 和 $e_3(s)$ 是光滑地依赖于 s 的单位向量，其数量积

$$e_i\cdot e_j=\delta_{ij},\qquad 1\leqslant i,j\leqslant 3, \tag{15}$$

且

(16) $$\det(e_1, e_2, e_3) = +1,$$

则有

(17) $$\begin{cases} \dfrac{de_1}{ds} = a_2 e_2 + a_3 e_3, \\ \dfrac{de_2}{ds} = -a_2 e_1 + a_1 e_3, \\ \dfrac{de_3}{ds} = -a_3 e_1 - a_1 e_2. \end{cases}$$

在上列方程组中系数矩阵的反称性可以由方程(15)的微分得到。因为 s 是 Γ 的弧长，则有

(18) $$a_2^2 + a_3^2 = 1,$$

故可命

(19) $$a_2 = \cos\tau(s), \qquad a_3 = \sin\tau(s).$$

若一个定向大圆与 Γ 相交于点 $e_1(s)$，它的极就是

$$Y = \cos\theta\, e_2(s) + \sin\theta\, e_3(s),$$

反之亦然。于是，(s,θ) 可以作为这些极构成的区域内的局部坐标；我们希望找出这个区域的面积元素的一个表示式。

为此，我们计算

$$dY = (-\sin\theta\, e_2 + \cos\theta\, e_2)(d\theta + a_1 ds) \\ - e_1(a_2\cos\theta + a_3\sin\theta)ds.$$

因为 $-\sin\theta\, e_2 + \cos\theta\, e_3$ 和 e_1 是垂直于 Y 的两个单位向量，所以，Y 的面积元素是

(20) $$|dA| = |a_2\cos\theta + a_3\sin\theta|\, d\theta ds \\ = |\cos(\tau - \theta)|\, d\theta ds,$$

其中在左边的绝对值说明计算的面积指的是测度而不是有向的。

设 $Y^\perp$ 是以 Y 为极的定向大圆，$n(Y^\perp)$ 是 $Y^\perp$ 和 Γ 的交点的个数，则在定理中所说的 μ 就是

$$\mu = \int n(Y^\perp)\, dA = \int_0^\lambda ds \int_0^{2\pi} |\cos(\tau - \theta)|\, d\theta,$$

其中 λ 是 Γ 的长。当 θ 由 0 到 2π 时，对固定的 s，$|\cos(\tau - \theta)|$

的变差是 4。我们得到

$$\mu=4\lambda,$$

这就证明了 Crofton 定理。

应用这一定理到每一段子弧并相加，我们看到，当 Γ 是单位球面上的分段光滑的曲线时定理的结论也成立。事实上，这个定理对球面上的任何可求长曲线都成立，但是其证明很长。

对空间闭曲线，若其切线象满足 Crofton 定理的条件，则 Fenchel 定理是一个容易得到的结果。事实上，Fenchel 定理的证明告诉我们，一条空间闭曲线的切线象与每个大圆相交至少两点，即 $n(Y^{\perp})\geqslant 2$。这就得到它的长是

$$\lambda=\int|k|ds=\frac{1}{2}\int n(Y^{\perp})|dA|\geqslant 2\pi,$$

因为单位球面的全面积是 4π。

Crofton 定理还能导出下面的 Fary 和 Milnor 的定理，它给出关于纽结的全曲率的一个必要条件。

定理 一个纽结的全曲率 $\geqslant 4\pi$。

因为"高度函数"$Y\cdot X(s)$ 的极大值或极小值的个数 $n(Y^{\perp})$ 必为偶数。假设空间闭曲线 C 的全曲率 $<4\pi$，则存在 $Y\in\Sigma_0$，使得 $n(Y^{\perp})=2$。现不妨假设 Y 就是点 $(0,0,1)$，这总可以经过一个旋转达到。则函数 $x_3(s)$ 仅有一个极大值和一个极小值。相应的这两个点把 C 分成两部分，在其中的一部分 x_3 是增加的，而在另一部分 x_3 是减少的。在这两个端点的水平面之间的每一个水平面与 C 都相交于两点。假使把它们用线段连接起来，所有这些线段将构成同胚于一个圆盘的曲面，这就证明了 C 不是"纽结"。

为进一步阅读，可以看：

1. S.S.Chern and R.K.Lashof, "On tne total curvature of immersed manifolds," I, *American Journal of Mathematics*, 79 (1957), 302—318, 以及 II, *Michigan Mathematical Journal*, 5(1958), 5—12.

2. N. H. Kuiper, "Convex immersions of closed surfaces in E^3," Comm. Math. Helv., 35(1961), 85—92.

关于积分几何，可看本书① 中的 Santalo 的文章。

5. 空间曲线的变形

大家都知道，在两条曲线之间若存在一个一一对应，使对应点有相等的弧长、曲率(假设$\neq 0$)和挠率，则它们仅差一个空间的运动。自然地，我们将考虑在对应点仅有相等的弧长和曲率的对应。我们将这种对应叫做空间曲线的变形。在这方面最重要的结果是 A.Schur 的定理，它说明这样的几何事实：假使一段弧被"伸张开来"，则它的端点之间的距离将变长。以下所说的曲率均指绝对值。现将 Schur 定理叙述如下。

定理 设C是曲率为$k(s)$的平面弧，它和它的弦AB一起构成一条凸曲线。设曲线C^*与C有相同的参数和弧长，且其曲率$k^*(s)\leqslant k(s)$。若d^*和d分别表示连结C^*及C的端点的弦长，则$d\leqslant d^*$。而且等号成立，必须且只须C和C^*是全等的。

证明 设Γ和Γ^*分别为C和C^*的切线象，P_1和P_2是Γ上的两点，P_1^*和P_2^*是它们在Γ^*上的对应点。用$\widehat{P_1P_2}$和$\widehat{P_1^*P_2^*}$表示它们的弧长，而用$\overline{P_1P_2}$和$\overline{P_1^*P_2^*}$表示它们的球面距离，则有

$$\overline{P_1P_2}\leqslant\widehat{P_1P_2},\qquad \overline{P_1^*P_2^*}\leqslant\widehat{P_1^*P_2^*}.$$

关于曲率的不等式意味着

$$\widehat{P_1^*P_2^*}\leqslant\widehat{P_1P_2}. \tag{21}$$

因为C是凸的，Γ在一个大圆上，若假定$\widehat{P_1P_2}\leqslant\pi$，则有

$$\overline{P_1P_2}=\widehat{P_1P_2}.$$

---

① "本书"是指"Studies in Global Geometry and Analysis." 见273页脚注，积分几何方面的书还可以看 L. A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability, London Addison Wisley, 1976.

现在假设Q是C上的一点，且过这一点的切线平行于这段弧的弦。用P_0表示这一点在Γ上的象。于是，对Γ上的任一点P，$\widehat{P_0P}\leqslant\pi$皆能满足。若用$P_0^*$表示$P_0$在$\Gamma^*$上的对应点，则有

$$(22)\qquad \overline{P_0^*P^*}\leqslant\widehat{P_0P}=\overline{P_0P}.$$

由此得到

$$(23)\qquad \cos\overline{P_0^*P^*}\geqslant\cos\overline{P_0P},$$

这是因为余弦函数在0与π之间是单调减小的函数。

因为C是凸的，d是C在它的弦上的投影：

$$(24)\qquad d=\int_0^L\cos\overline{P_0P}\,ds.$$

另一方面，我们有

$$(25)\qquad d^*\geqslant\int_0^L\cos\overline{P_0^*P^*}\,ds,$$

因为右边的积分等于C^*的投影，也就是连接端点的弦在Q的对应点Q^*的切线上的投影。于是，由(23)，(24)和(25)就得到

$$d^*\geqslant d.$$

假设$d=d^*$，则(22)，(23)和(25)皆为等式，且连接C^*的端点A^*和B^*的弦必平行于在Q^*的切线。特别，

$$\overline{P_0^*P^*}=\overline{P_0P},$$

这就说明A^*Q^*和B^*Q^*是平面弧。另一方面，利用(21)就得到

$$\overline{P_0^*P^*}\leqslant\widehat{P_0^*P^*}\leqslant\widehat{P_0P}=\overline{P_0P},$$

或

$$\widehat{P_0^*P^*}=\widehat{P_0P}.$$

因此，弧$\widehat{A^*Q^*}$和$\widehat{B^*Q^*}$与AQ和BQ在对应点有相同的曲率，所以它们是全等的。

剩下来要证明的是弧 $\widehat{A^*Q^*}$ 和 $\widehat{B^*Q^*}$ 在同一平面上。假若不然，则曲线在 Q^* 的切线必为它们所在平面的交线。因为这条直线是平行于 A^*B^* 的，唯一的可能是它包含 A^* 和 B^*；然而，由此可知 C 在 Q 的切线也必包含其端点 A 和 B。这就得出矛盾。因此，C^* 是平面弧且与 C 全等。

Schur 定理有许多应用。例如，它给出下列极小问题的一个解：决定曲率 $k(s)\leqslant 1/R$ 的最短闭曲线，其中 R 为一常数，其答案为一圆周。

附注 曲率 $k(s)\leqslant 1/R$(R 为常数)的最短闭曲线是一半径为 R 的圆周。

由 Fenchel 定理的推论，这样一条曲线的长为 $2\pi R$。将它与一半径为 R 的圆周比较，由 Schur 定理($d^*=d=0$)就可以推断它必为圆周。

作为 Schur 定理的第二个应用，我们将导出 Schwarz 定理。它是与连接给定的两点以给定的常数为曲率的上界的弧的长度有关的。现叙述 Schwarz 定理如下：

定理 设 C 是连接给定点 A 和 B 的弧，其曲率 $k(s)\leqslant 1/R$，且 $R\geqslant\frac{1}{2}d$，其中 $d=\overline{AB}$。设 S 为通过 A 和 B 的、半径为 R 的圆周。则 C 的长度必 $\leqslant S$ 上的劣弧 AB，或 $\geqslant S$ 上的优弧 AB。

证明 注意，定理中假设 $R\geqslant\frac{1}{2}d$ 对圆周 S 的存在是必要的。为证明这一定理，我们不妨假设 C 的长 $L<2\pi R$，否则就不需要证明了。于是，我们将 C 与在 S 上具有相同长度的弧作比较，并设此弧的弦长为 d'。因此，Schur 定理的条件满足，这就得到 $d'\leqslant d$，d 是 A 和 B 之间的距离。所以，$L\geqslant S$ 上的对应于弦 AB 的优弧的长，或 $\leqslant$ 对应于弦 AB 的劣弧的长。

特别，我们考虑连接 A 和 B 而曲率为 $1/R(R\geqslant d/2)$ 的弧。这样的弧的长度没有上界，例如圆螺旋线。它们以 d 为下界，但

可以尽可能地接近 d。所以这是一个沒有解的极小问题的例子。

最后，我们附带说明 Schur 定理能推广到分段光滑的曲线，现不加证明地把这个推广说明如下。

附注 设 C 和 C^* 是具有相同长度的两条分段光滑的曲线，且 C 与它的弦构成一条简单的平面凸曲线。取以一个端点为起点的弧长作为参数，设 $k(s)$ 是 C 在正常点的曲率，$a(s)$ 是在顶点的切向之间的角；在 C^* 上相应的量用相同的符号加上星号表示。d 和 d^* 分别表示 C 和 C^* 的端点之间的距离。于是，若

$$k^*(s) \leqslant k(s)$$

和

$$a^*(s) \leqslant a(s),$$

则有

$$d^* \geqslant d.$$

并且等号成立必须且只须

$$k^*(s) = k(s)$$

和

$$a^*(s) = a(s).$$

最后的条件并不意味着 C 和 C^* 是全等的。事实上，在空间中存在不全等的多边形，而且有相等的边和角。

6. Gauss-Bonnet 公式

我们考虑曲面 M 上的内蕴 Riemann 几何。为简化计算且不失一般性，假设在曲面上取等温参数 u 和 v：

$$ds^2 = e^{2\lambda(u,v)}(du^2 + dv^2), \tag{26}$$

则面积元素为

$$dA = e^{2\lambda}\, du dv, \tag{27}$$

区域 D 的面积为积分

$$A = \iint_D e^{2\lambda}\, du dv, \tag{28}$$

曲面的 Gauss 曲率是

(29) $$K=-e^{-2\lambda}(\lambda_{uu}+\lambda_{vv}).$$

大家已经知道由 Riemann 度量定义的 Levi-Civita 平行性。为解析地表示出来，我们记

(30) $$u^1=u, \qquad u^2=v,$$

和

(31) $$ds^2=\sum g_{ij}\,du^i\,du^j.$$

在上式及以下的讨论中，小写拉丁字母在 1 到 2 的范围内变化，并且求和符号表示对所有的重复指标求和。由 g_{ij} 通过方程

(32) $$\sum g_{ij}\,g^{jk}=\delta_i^k$$

引进 g^{ij}，以及由

(33) $$\begin{cases} \Gamma_{ijk}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}+\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}-\dfrac{\partial g_{jk}}{\partial u^j}\right), \\ \Gamma^j_{ik}=\sum g^{jh}\;\Gamma_{ihk} \end{cases}$$

得到 Christoffel 符号。对一个以 ξ^i 为分量的向量，Levi-Civita 平行决定于“协变微分”

(34) $$D\xi^i=d\xi^i+\sum\Gamma^i_{jk}\,du^k\xi^j.$$

所有这些方程都是在经典 Riemann 几何中熟知的，它们由初步的张量分析就可以得到。以下是新的概念。假设曲面是定向的。考虑M的全体单位切向量所构成的空间 B。这个空间 B 是三维的，因为具有相同起点的全体单位向量构成一维空间。（空间 B 叫做一个纤维空间，也就是说在一个邻域中，每一点上所有的单位切向量构成的空间，在拓扑上是一个乘积空间。）对一个单位切向量

$$\xi=(\xi^1,\xi^2),$$

命

$$\eta=(\eta^1,\eta^2)$$

是垂直于 ξ 的一个单位切向量，且 ξ 和 η 构成一个正的定向。显然，η 是由 ξ 准一决定的。现引进线性微分形式

$$(35)\qquad \varphi=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 2} g_{ij}\,D\xi^i\,\eta^j,$$

则φ在B上定义，通常称它为**连络形式**。

因为ξ是单位向量，我们能将它的分量写成如下的形式：

$$(36)\qquad \xi^1=e^{-\lambda}\cos\theta,\qquad \xi^2=e^{-\lambda}\sin\theta.$$

于是

$$(37)\qquad \eta^1=-e^{-\lambda}\sin\theta,\qquad \eta^2=e^{\lambda}\cos\theta.$$

经过计算得到

$$(38)\qquad \begin{aligned}\Gamma^1_{11}&=\Gamma^2_{12}=-\Gamma^1_{22}=\lambda_u,\\ \Gamma^1_{12}&=\Gamma^2_{22}=-\Gamma^2_{11}=\lambda_v.\end{aligned}$$

由此得到重要的关系式

$$(39)\qquad \varphi=d\theta-\lambda_v du+\lambda_u dv,$$

求外微分得到

$$(40)\qquad d\varphi=-K\,dA.$$

方程(40)或许是二维局部 Riemann 几何中最重要的公式。

连络形式φ是B上的一个微分形式。如果在M的一个子集上定义一个单位切向量场，则可利用φ得到此子集上的一个微分形式。例如，设C是M上一条光滑曲线，其弧长为s，$\xi(s)$是沿C的一个光滑单位切向量场，则

$$\varphi=\sigma\,ds,$$

σ称为ξ沿C的**变差**。如果$\sigma=0$，向量场ξ叫做沿C**平行的**。若ξ与C处处相切，则σ称为C的**测地曲率**。如果沿C的单位切向量是平行的，即其测地曲率为零，则C是M上的一条测地线。

考虑M的一个区域D，在D上定义了一个单位切向量场，它有一个孤立奇点P_0，P_0是D的一个内点。设r_ε是以P_0为中心、半径为ε的测地圆。则由方程(39)，极限

$$(41)\qquad \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{r_\varepsilon}\varphi$$

是一个整数，称为向量场在 P_0 的指数。

图17给出一些具有孤立奇点的向量场的例子。它们分别是：(a) 源点或极大，(b) 渊点或极小，(c) 中心点，(d) 简单鞍点，(e) 猴鞍点，(f) 双极点。它们的指数分别是 1,1,1,−1，−2 和 2。

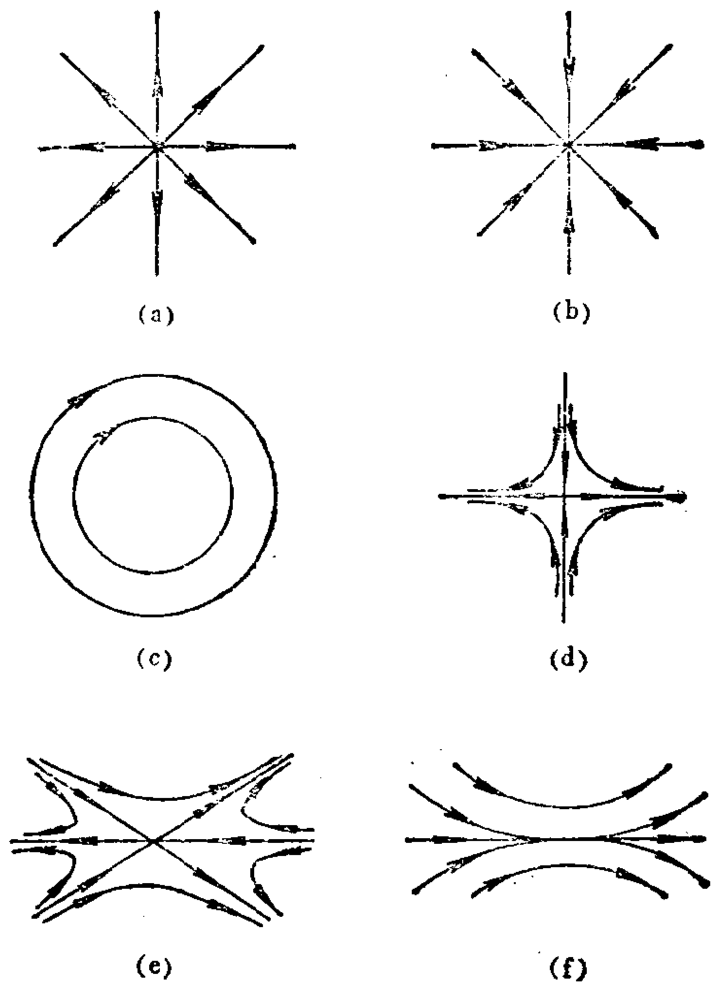

图 17

所谓 Gauss-Bonnet 公式就是下面的定理。

定理 设 D 是 M 的一个紧致的定向区域，其边界是分段光滑的曲线 C。则

$$\int_C k_g ds + \int_D K dA + \sum_i (\pi - \alpha_i) = 2\pi\chi, \tag{42}$$

其中 k_g 是 C 的测地曲率，$\pi-\alpha_i$ 是在顶点的外角，χ 是 D 的 Euler 示性数。

证明 首先考虑 D 属于一个坐标域 (u, v) 的情形，且其边界 C 为一 n 边的简单多边形，设其边为 C_i，顶角为 α_i，$1\leqslant i\leqslant n$。假设 D 是正定向的。对弧 C_i 的每一点都有 C_i 的一个单位切向量。这样，在每一个顶点就有两个切向量，其夹角为 $\pi-\alpha_i$。由切线回转定理(§1.)，在绕 C 一周时 θ 的全变差为

$$2\pi-\sum_i(\pi-\alpha_i),$$

这就得到

$$\int_C k_g ds=2\pi-\sum_i(\pi-\alpha_i)+\int_C -\lambda_v du+\lambda_u dv.$$

由 Stokes 定理，上式右端的积分等于 $-\iint_D KdA$。于是，公式在这一特殊情况下得到证明。

对一般情况，设 D 被重分为一些多边形 D_λ $(\lambda=1, \cdots, f)$ 的联，使得：1）每一个 D_λ 属于一个坐标域；2）两个 D_λ 或者没有公共点，或者有一个公共的顶点，或者有一个公共的边。此外，设 D_λ 有由 D 诱导的定向，所以每一条内边在不同的多边形中有相反的方向。设 v 和 e 分别为 D 的在这个重分中的内顶点和内边的数目，即不在 C 上的顶点数和边数。则上面的公式能应用于每一个 D_λ。将所有的这些关系式相加，因为沿每一条内边的测地曲率的积分抵消，则得到

$$\int_C k_g ds+\int_D KdA$$

$$=2\pi f-\sum_{i,\lambda}(\pi-\alpha_{\lambda i})-\sum_i(\pi-\alpha_i),$$

其中 α_i 是在 D 的顶点的角，而在右边的第一个和式是在这个重分的全体内顶点上展开的。因为每一条内边恰是两个 D_λ 的边，

以及关于一个顶点的内角和是 2π，于是，这个和等于

$$-2\pi e+2\pi v.$$

整数

(43) $$\chi(D)=v-e+f$$

称为D的 Euler 示性数，代入上式就得到(42)。由之还得出整数χ不依赖D的重分。

特别，若C没有顶点，则有

(44) $$\int_C k_g ds+\iint_D KdA=2\pi\chi.$$

此外，若D就是曲面M，则得到

(45) $$\iint_S KdA=2\pi\chi.$$

由此可知，若 $K=0$，则M的示性数为零，且M同胚于环面。若 $K>0$，则 $\chi>0$，且M同胚于球面。

在曲面上的向量场的研究中，Euler 示性数有着 重 要 的 地位。

附注 在定向闭曲面M上，具有有限个奇点的向量场的指数和等于M的示性数 $\chi(M)$。

证明 设 p_i $(1\leqslant i\leqslant n)$是这个向量场的奇点。$r_i(\varepsilon)$ 是 以 p_i 为中心、ε 为半径的测地圆，$\Delta(\varepsilon_i)$ 是 $r_i(\varepsilon)$ 所围的圆盘。在区域 $M-\bigcup\limits_i \Delta_i(\varepsilon)$ 上积分 kdA，并利用方程(40)就得到

$$\iint_{M-\bigcup\limits_i \Delta_i(\varepsilon)} K\,dA=\sum_i\int_{r_i(\varepsilon)}\varphi,$$

其中 $r_i(\varepsilon)$是定向的，使它是 $\Delta_i(\varepsilon)$ 的边界。命 $\varepsilon\to0$ 就得到定理。

我们给出 Gauss-Bonnet 公式的两个进一步的应用。第一个是 Jacobi 定理。设 $x(s)$ 是空间闭曲线的定位向量，s 是 它的弧长。$T(s)$，$N(s)$ 和 $B(s)$ 分别是单位切向量、单位主法向量和单

位次法向量。特别，以 $N(s)$ 为定位向量得到的在单位球面上的曲线就是主法线象。它的切线处处存在，如果在每一点的

$$k^2+w^2 \neq 0, \tag{46}$$

其中 k $(\neq 0)$ 和 w 分别为曲线 $x(s)$ 的曲率和挠率。下面就是 Jacobi 定理。

定理 若一条空间闭曲线的主法线象的切线处处存在，则它分单位球面为面积相等的两部分。

证明 为证明这个定理，我们由下列方程决定 τ：

$$k=\sqrt{k^2+w^2}\cos\tau, \qquad w=\sqrt{k^2+w^2}\sin\tau, \tag{47}$$

则有

$$\begin{aligned} & d(-\cos\tau\, T+\sin\tau\, B) \\ & \qquad =(\sin\tau\, T+\cos\tau\, B)\,d\tau-\sqrt{k^2+w^2}\,N ds. \end{aligned}$$

因此，若 σ 是 $N(s)$ 的弧长，$\dfrac{d\tau}{d\sigma}$是 $N(s)$ 在单位球面上的测地曲率。设 D 是以 $N(s)$ 为边界的区域之一。因为 $K=1$，由 Gauss-Bonnet 公式得到

$$\int_{N(s)} d\tau+\iint dA=2\pi,$$

这就得到 $A=2\pi$。定理证毕。

第二个应用是关于凸曲面的 Hadamard 定理。

定理 若在欧氏空间中的一个定向闭曲面的 Gauss 曲率恒为正数，则它必为凸曲面(即它在其每一个切平面的一边)。

在 1. 中我们曾对曲线讨论过类似的定理。对曲面，不必假设它是不自交的。

证明 由 Gauss-Bonnet 定理得到曲面 M 的 Euler 示性数是正数，所以

$$\chi(M)=2,$$

且

$$\iint_M K dA=4\pi.$$

假设 M 是定向的。我们考虑 Gauss 映射

(48) $$g: M \to \Sigma_0$$

(其中 Σ_0 是以 O 为中心的单位球面)，它把 M 的每一点 p，对应于以 O 为起点的平行于 M 在 P 点的单位法向量的终点。条件 $K>0$ 保证了 g 在每一点都有非零的函数行列式，因而在局部上是一对一的。由此得到 $g(M)$ 是 Σ_0 的开子集。因为 M 是紧致的，$g(M)$ 是 Σ_0 的紧致子集。因此 $g(M)$ 也是闭的。所以，g 是在上的映射。

假设 g 不是一对一的，即存在 M 上的不同的两点 p 和 q，使 $g(p)=g(q)$。则有 q 的一个邻域 U，使得 $g(M-U)=\Sigma_0$。因为 $\iint\limits_{M-U} K dA$ 是 $g(M-U)$ 的面积，故

$$\iint\limits_{M-U} K dA \geqslant 4\pi.$$

但是
$$\iint\limits_{U} K dA > 0,$$

所以
$$\iint\limits_{M} K dA = \iint\limits_{U} K dA + \iint\limits_{M-U} K dA > 4\pi,$$

这就得到矛盾。Hadamard 定理证毕。

Hadamard 定理在 $K \geqslant 0$ 这一较弱条件下也成立，但是其证明比较困难；可以看 4. 中提到的Chern-Lashof 的文章。

为进一步阅读，可以看：

1. S. S. Chern, "On the Curvatura integra in a Riemannian manifold," *Annals of Mathematics*, 46 (1945), 674—684.

2. H. Flander, "Development of an extended exterior differential calculus," *Transactions of the American Mathematical Society*, 75(1953), 311—326.

7. Cohn-Vossen 和 Minkowski 的唯一性定理

Cohn-Vossen 的刚硬性定理可以叙述如下。

定理 在两个闭凸曲面之间的一个等距对应必为一运动，或一运动加反射。

换句话说，这样的一个等距是平凡的。显然，这个定理在局部是不成立的。以下的证明是G.Herglotz的工作。

证明 我们首先将讨论关于欧氏空间中的曲面理论的一些概念。设曲面S表示为它的定位向量X作为参数u和v的函数。并假设有直到二阶的连续的偏导数，且X_u和X_v在每一点都是线性无关的，ξ是单位法向量，使S成为定向的。命

$$
(49)\qquad \begin{aligned} \mathrm{I} &= dX\cdot dX = Edu^2+2Fdudv+Gdv^2, \\ \mathrm{II} &= -dX\cdot d\xi = Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2, \end{aligned}
$$

分别称为曲面的第一和第二基本形式，H和K分别表示平均曲率和Gauss 曲率。

只须证明在等距对应下它们的第二基本形式是相等的。设取局部坐标使在对应点有相同的局部坐标。于是，对这两个曲面，E, F和G都是相等的，且有相同的Christoffel 记号。设第二个曲面为S^*，相应的量用相同的记号加上星号表示。现引进

$$
(50)\qquad \lambda=\frac{L}{D},\quad \mu=\frac{M}{D},\quad \nu=\frac{N}{D},
$$

其中$D=\sqrt{EG-F^2}$，则Gauss 曲率为

$$
(51)\qquad K=\lambda\nu-\mu^2=\lambda^*\nu^*-\mu^{*2},
$$

即这两个曲面有相同的Gauss 曲率。平均曲率分别为

$$
(52)\qquad \begin{aligned} H &= \frac{1}{2D}(G\lambda-2F\mu+E\nu), \\ H^* &= \frac{1}{2D}(G\lambda^*-2F\mu^*+F\nu^*). \end{aligned}
$$

进一步引进

$$
(53)\qquad J=\lambda\nu^*-2\mu\mu^*+\nu\lambda^*.
$$

定理的证明依赖下面的恒等式:

$$(54)\qquad DJ\xi=\frac{\partial}{\partial u}(\nu^*X_u-\mu^*X_v)-\frac{\partial}{\partial v}(\mu^*X_u-\lambda^*X_v).$$

首先注意，Codazzi 方程能通过 λ^*,μ^*,ν^*表示为下列形式：

$$(55)\qquad \begin{cases}\lambda_v^*-\mu_u^*+\Gamma_{22}^2\lambda^*-2\Gamma_{12}^2\mu^*+\Gamma_{11}^2\nu^*=0,\\ \mu_v^*-\nu_u^*-\Gamma_{22}^1\lambda^*+2\Gamma_{12}^1\mu^*-\Gamma_{11}^1\nu^*=0.\end{cases}$$

其次，Gauss 方程为

$$(56)\qquad \begin{cases}X_{uu}-\Gamma_{11}^1X_u-\Gamma_{11}^2X_v-D\lambda\xi=0,\\ X_{uv}-\Gamma_{12}^1X_u-\Gamma_{12}^2X_v-D\mu\xi=0,\\ X_{vv}-\Gamma_{22}^1X_u-\Gamma_{22}^2X_v-D\nu\xi=0.\end{cases}$$

将上列方程分别乘以 X_v, $-X_u$, ν^*, $-2\mu^*$ 和 λ^*，再相加就得到(54)。

设

$$(57)\qquad \begin{cases}p=X\cdot e_3,\\ y_1=X\cdot X_u,\\ y_2=X\cdot X_v,\end{cases}$$

式中的右端是向量的数量积。故 $p(u,v)$ 就是从原点到在 $X(u,v)$ 的切平面的有向距离。将方程(54)的两边对 X 作数量积就得到

$$(58)\qquad DJp=-\nu^*E+2\mu^*F-\lambda^*G$$
$$+(\nu^*y_1-\mu^*y_2)_u-(\mu^*y_1-\lambda^*y_2)_v.$$

设 C 是 S 上的一条闭曲线，它将 S 分成两个区域：D_1 和 D_2，均以 C 为边界。此外，C 作为 D_1 和 D_2 的边界所诱导的定向有相反的方向。对每一个区域应用 Green 公式，先看 D_1：

$$(59)\qquad \iint_{D_1} JpdA=\iint_{D_1}(-\nu^*E+2\mu^*F-\lambda^*G)\,dudv$$
$$+\int_C(\mu^*y_1-\lambda^*y_2)\,du+(\nu^*y_1-\mu^*y_2)\,dv.$$

对 D_2 也有类似的等式，将它们相加，并注意到线积分抵消，这就得到

$$\iint_S JpdA = \iint_S (-\nu^* E + 2\mu^* F - \lambda^* G)\, du dv.$$

由方程(52)，

(60) $$\iint_S JpdA = -2\iint_S H^* dA.$$

特别，当 S 和 S^*恒同时，就得到

(61) $$\iint_S 2KpdA = -2\iint_S HdA.$$

将上面的两个方程相减就得到：

(62) $$\iint_S \begin{vmatrix} \lambda^* - \lambda & \mu^* - \mu \\ \mu^* - \mu & \nu^* - \nu \end{vmatrix} pdA$$
$$= 2\iint_S H^* dA - 2\iint_S HdA.$$

为完成定理的证明，我们需要下面的初等的引理。

引理 设

(63) $$ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$$

都是正定的二次型，且

(64) $$ac - b^2 = a'c' - b'^2,$$

则

(65) $$\begin{vmatrix} a' - a & b' - b \\ b' - b & c' - c \end{vmatrix} \leqslant 0,$$

且等号成立必须这两个二次型是恒等的。

证明 不妨设 $b' = b$，因为这总可以经过对变量的适当的线性变换达到，而引理的条件在变量的线性变换下是不变的。这样，方程(65)的左端就变为

$$(a' - a)(c' - c) = -\frac{c}{a}(a' - a)^2,$$

这就证明了不等式(65)。此外，等式成立仅当 $a' = a$ 和 $c' = c$。

现在选取原点使它在S的里面，故$p>0$。则方程(62)的左边的积分是非正的，因此得到

$$\iint_S H^* dA \leqslant \iint_S H dA.$$

因为S和S^*之间的关系是对称的，故又有

$$\iint_S H dA \leqslant \iint_S H^* dA.$$

因此

$$\iint_S H dA = \iint_S H^* dA.$$

这就得到方程(62)的左端的积分为零。于是，

$$\lambda^*=\lambda, \quad \mu^*=\mu, \quad \nu^*=\nu,$$

这就完成了Cohn-Vossen 定理的证明。

由Hadamard定理，我们看到，对$K>0$的闭曲面，Gauss映射

$$g: S \to \Sigma_0$$

是一对一的。因此，S上的点能够表示成为它的法向ξ的函数，进一步，S上的任何数量函数也都可以表示为ξ的函数。Minkowski 定理说明，当$K(\xi)$为已知时，S唯一决定。

定理 设S是闭凸曲面，其 Gauss 曲率$K>0$。则函数$K(\xi)$决定S仅差一个平移。

证明 我们将以上面的证明作为模型，利用积分公式给一个证明(参看 S.S.Chern, *American Journal of Mathematics*, 79 (1957), 949—950)。设u和v是单位球面上的等温参数，故有

$$(66) \qquad \begin{cases} \xi_u^2=\xi_v^2=A>0, \\ \xi_u \cdot \xi_v=0. \end{cases}$$

通过映射g^{-1}我们也取u和v作为S上的参数。因为ξ_u和ξ_v都垂直于ξ且是线性无关的，故每一个垂直于ξ的向量都可以表示为它们的线性组合。由于

$$X_u\cdot\xi_v=X_v\cdot\xi_u,$$

故可将X_u和X_v表示为

$$(67)\qquad\left\{\begin{array}{l}-X_u=a\xi_u+b\xi_v,\\ -X_v=b\xi_u+c\xi_v.\end{array}\right.$$

将这两个方程与ξ_u和ξ_v作内积，则有

$$(68)\qquad Aa=L,\quad Ab=M,\quad Ac=N.$$

此外，再将(67)中两个方程的两边作向量积，得到

$$X_u\times X_v=(ac-b^2)(\xi_u\times\xi_v).$$

但是

$$(69)\qquad X_u\times X_v=D\xi,\quad \xi_u\times\xi_v=A\xi,$$

连系方程(68)就得到

$$D=A(ac-b^2)=\frac{KD^2}{A},$$

于是

$$(70)\qquad A=KD,\quad ac-b^2=\frac{1}{K}.$$

因为 $Adudv$ 和 $Ddudv$ 分别是Σ_0 和 S 的体积元素，方程(70)的第一式表示了K是这些体积元素之比这一熟知的事实。

假设S^*是具有相同的函数$K(\xi)$的另一个凸曲面。我们建立S和S^*之间的一个同胚，使它们在对应点有相同的法向，则参数u和v可作为S和S^*的参数，且对应点有相同的参数值。对S^*的相应的函数和向量用相同的记号加上星号表示。因为$K=K^*$，由方程(70)得到

$$ac-b^2=a^*c^*-b^{*2},$$

$$D=D^*.$$

设

$$(71)\qquad p=X\cdot\xi,\quad p^*=X^*\cdot\xi,$$

它们是从原点到这两个曲面的切平面的距离。基本的关系是恒等式

$$(X,X^*,X_u)_v-(X,X^*,X_v)_u$$
$$=A\{2(ac-b^2)p^*+(-ac^*-a^*c+2bb^*)p\}$$
$$=A\left\{2(ac-b^2)(p^*-p)+\begin{vmatrix} a-a^* & b-b^* \\ b-b^* & c-c^* \end{vmatrix} p\right\}.$$

这可以由方程(67)，(69)，(70)和(71)立即得到。由这个恒等式，应用 Green 定理就得到积分公式

(72)
$$\int_{\Sigma_0}\left\{2(ac-b^2)(p^*-p)+\begin{vmatrix} a-a^* & b-b^* \\ b-b^* & c-c^* \end{vmatrix} p\right\}\cdot A\,du\,dv=0.$$

不妨假设原点在曲面 S 和 S^* 的内部(必要时可以经过平移达到)，于是 $p>0$ 以及 $p^*>0$。因为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ b^* & c^* \end{pmatrix}$$

都是正定的矩阵，由前面的关于代数的引理得到

$$\begin{vmatrix} a-a^* & b-b^* \\ b-b^* & c-c^* \end{vmatrix}\leqslant 0.$$

因此，

(73)
$$\int_{\Sigma_0}(ac-b^2)(p^*-p)A\,du\,dv\geqslant 0.$$

当将 S 和 S^* 交换时，相同的关系仍然成立。因此，方程(73)左端的积分必恒等于零。则由方程(72)得到

$$\int_{\Sigma_0}\begin{vmatrix} a-a^* & b-b^* \\ b-b^* & c-c^* \end{vmatrix} pA\,du\,dv=0,$$

这只有当 $a=a^*$，$b=b^*$ 和 $c=c^*$ 才有可能。由此可知

$$X_u^*=X_u, \quad X_v^*=X_v,$$

即 S 和 S^* 仅差一平移。

为进一步阅读，可以看：

1. S. S. Chern, "Integral formulas for hypersurfaces in euclidean space and their applications to uniqueness theorems," *Journal of Math. and Mech.*, 8(1959), 947—955.

2. T. Ostuki, "Integral formulas for hypersurfases in a Riemannian manifold and their applications," *Tôhoku Mathematical Jour.*, 17 (1965), 335—348.

3. K. Voss, "Differentialgeometrie geschlossener Flächen im euklidischen Raum," *Jahresberichte deutscher Math.Verein*, 63(1960—1961), 117—136.

8. 关于极小曲面的 Bernstein 定理

所谓极小曲面就是在局部上求解 Plateau 问题的曲面，即以给定空间曲线为边界的面积最小的曲面。在解析上，它可以由平均曲率恒等于零这一条件决定。假设曲面的方程为

$$z=f(x,y), \tag{74}$$

其中$f(x,y)$是二次连续可微的。于是，极小曲面就是偏微分方程

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0 \tag{75}$$

的解，其中

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{76}$$

方程(75)称为极小曲面方程，它是非线性的椭圆型的微分方程。

Bernstein 定理就是下面的"唯一性定理"。

定理 若由方程(74)表示的极小曲面对 x 和 y 的全部的值成立，则它必为平面。换句话说，方程(75)的在整个 (x,y) 平面有效的唯一解是一个线性函数。

证明 我们将把这一定理归结为下面的 Jörgens 定理的推论。

定理 设函数 $z=f(x,y)$ 是方程

$$rt-s^2=1,\quad r>0 \tag{77}$$

的解，对全体 x 和 y 成立，则 $f(x,y)$ 是关于 x 和 y 的二次多项式。

对固定的 (x_0,y_0) 和 (x_1,y_1) 考虑函数

$$h(\tau)=f(x_0+\tau(x_1-x_0),\ y_0+\tau(y_1-y_0)),$$

则有

$$h'(\tau)=(x_1-x_0)p+(y_1-y_0)q,$$

$$h''(\tau)=(x_1-x_0)^2 r+2(x_1-x_0)(y_1-y_0)s+(y_1-y_0)^2 t\geqslant 0,$$

其中在函数 p,q,r,s,t 中的自变量是 $x_0+\tau(x_1-x_0)$ 和 $y_0+\tau(y_1-y_0)$。从最后的一个不等式得到

$$h'(1)\geqslant h'(0),$$

或

$$(x_1-x_0)(p_1-p_0)+(y_1-y_0)(q_1-q_0)\geqslant 0, \tag{78}$$

其中

$$\begin{cases} p_i=p(x_i,y_i), \\ q_i=q(x_i,y_i), \end{cases} \quad i=0,1。 \tag{79}$$

考虑 Lewy 变换：

$$\begin{cases} \xi=\xi(x,y)=x+p(x,y), \\ \eta=\eta(x,y)=y+q(x,y)。 \end{cases} \tag{80}$$

令

$$\begin{cases} \xi_i=\xi(x_i,y_i), \\ \eta_i=\eta(x_i,y_i), \end{cases} \quad i=0,1。 \tag{81}$$

由方程(78)得

$$(\xi_1-\xi_0)^2+(\eta_1-\eta_0)^2\geqslant(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2, \tag{82}$$

因此，映射

$$(x,y)\to(\xi,\eta) \tag{83}$$

是使距离增加的。

此外，因为

$$\begin{aligned} &\xi_x=1+r, \quad \xi_y=s, \\ &\eta_x=s, \quad \eta_y=1+t, \end{aligned} \tag{84}$$

所以

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=2+r+t\geqslant 2, \tag{85}$$

由方程(80)决定的映射是局部一对一的。由此可知，映射(83)是(x,y)平面到(ξ,η)平面上的微分同胚。

因此，我们可以将方程(77)的解$f(x,y)$看作为ξ和η的函数，命

$$F(\xi,\eta)=x-iy-(p-iq), \tag{86}$$

$$\zeta=\xi+i\eta. \tag{87}$$

经计算即可看出，$F(\xi,\eta)$满足Cauchy-Riemann方程，故$F(\zeta)=F(\xi,\eta)$是ζ的正则函数。此外，

$$F'(\zeta)=\frac{t-r+2is}{2+r+t}. \tag{88}$$

从最后的这一关系式，我们得到

$$1-|F'(\zeta)|^2=\frac{4}{2+r+t}>0.$$

于是，$F'(\zeta)$在全ζ平面是有界的。由 Liouville 定理，

$$F'(\zeta)=\text{const}.$$

另一方面，由方程(88)得到

$$\left\{\begin{aligned} r&=\frac{|1-F'|^2}{1-|F'|^2},\\ s&=\frac{i(\bar{F}'-F')}{1-|F'|^2},\\ t&=\frac{|1+F'|^2}{1-|F'|^2}. \end{aligned}\right. \tag{89}$$

由此可知，r,s,t都是常数，Jörgens 定理得到证明。

Bernstein定理是Jörgens定理的容易得到的结果。事实上，命

$$W=(1+p^2+q^2)^{1/2}, \tag{90}$$

则极小曲面的方程等价于下列方程中的每一个：

$$
(91)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{-pq}{W}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1+p^2}{W}=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1+q^2}{W}+\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{-pq}{W}=0. \end{cases}
$$

于是，存在一个 C^2 函数 $\varphi(x,y)$ 使得

$$
(92)\qquad \begin{cases} \varphi_{xx}=\dfrac{1}{W}(1+p^2), \\ \varphi_{xy}=\dfrac{1}{W}pq, \\ \varphi_{yy}=\dfrac{1}{W}(1+q^2). \end{cases}
$$

这些偏导数满足方程

$$
\varphi_{xx}\varphi_{yy}-\varphi_{xy}^2=1,\quad \varphi_{xx}>0.
$$

由Jörgens 定理，φ_{xx}，φ_{xy}和φ_{yy}都是常数。因此，p 和 q 是常数，$f(x,y)$是线性函数（Bernstein 定理的这一证明是 J.C.C.Nitsche 给出的，可看 *Annals of Mathematics*，66(1957)，543—544）。

关于极小曲面的许多文献，可以看下面的综合报告：

1. J.C.C.Nitsche, "On new results in the theory of minimal surfaces," *Bulletin of the American Mathematical Society*, 71(1965), 195—270.

附录二　微分几何与理论物理①

陈　省　身

我第一次看见周先生，是在1930年秋季，在清华。那年我从南开毕业，投考清华研究院数学系，考试科目中有“力学”，周先生是命题和阅卷人。他一见我就说：“我看过你的考卷”。1937年我们在西南联大同事，我还旁听过他的“电磁学”。

微分几何和理论物理都用微积分作工具，一者研究几何现象，一者研究物理现象。后者自然广泛些。但任何物理现象都在空间发生，所以前者又是后者的基础。两者都用推理的方法，但理论物理还须有试验来支持。几何不受这个限制，因此选择问题比较自由，但推理要有数学的严格性。这个自由度把数学推到新的领域。有数学经验和远见的人，能在大海航行下，达到重要的新的领域。例如，广义相对论所需要的黎曼几何和规范场论所需要的纤维空间内的连络，都在物理应用前为数学家所发展。这个“殊途同归”的现象真令人有神秘之感。

微分几何与理论物理的关系非言可尽。本文只略举几点，间附拙见，请大家指教。

1.　动力学和活动标架

在动力学中要描写一个固体的运动，就把一个标架竖固的装在固体上，而描写标架的运动。在三度空间的所谓标架指一点x，及经过x的互相垂直的单位矢量e_i，$i=1,2,3$。如x亦代表点x

① 本文原载“理论物理与力学论文集”，科学出版社，1982年．文中的周先生是指周培源教授．

的坐标矢量，则有

$$
(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\sum\limits_i p_i(t)e_i, \\ \dfrac{de_i}{dt}=\sum\limits_j q_{ij}(t)e_j, & 1\leqslant i,j\leqslant 3, \end{cases}
$$

其中 t 是时间，而

$$
(2)\qquad q_{ij}(t)+q_{ji}(t)=0.
$$

函数 $p_i(t)$，$q_{ij}(t)$完全描写了标架及固体的运动。

动力学和空间的曲线论有密切关系，后者甚至可看为前者的特例。要把这个方法应用到曲面论，就须考虑两参数族的标架。这个计划为法国大几何学家G. Darfoux(1842—1917)成功地和精采地完成。他的大著Théorie des Surfaces 四册，是微分几何的经典。

把这个活动标架法发扬光大的是Elie Cartan(1869—1951)(Gauss, Riemann, Cartan公认为历史上三个最伟大的微分几何学家)。现在，活动标架法已成为微分几何中极为重要的办法。试述其含义如次：

在多参数标架族时，相当于方程式(1)的是偏微分方程式，它的系数适合积分条件。表示这些条件的最好方法，是用外微分算法。把(1)和(2)两式写为

$$
(3)\qquad \begin{cases} dx=\sum\limits_i \omega_i e_i, \\ de_i=\sum\limits_j \omega_{ij}e_j, \end{cases} \qquad 1\leqslant i,j\leqslant 3,
$$

$$
(4)\qquad \omega_{ij}+\omega_{ji}=0,
$$

其中ω_i,ω_{ij}为参数空间的一次微分式。最广泛的情形是参数空间是全体标架所成的空间。这个空间是六维的，因为定 x 需要三个坐标，而以 x 为原点的标架成三参数族。固定一个标架，有唯一个运动，把它变为另一标架。所以全体标架所成的空间与运动群

同胚，记为G。

求(3)式的外微分，则得

$$(5)\qquad \begin{cases} d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}, \\ d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{jk}, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i, j, k \leqslant 3,$$

其中“$\wedge$”代表外积。这是群G的 Maurer-Cartan 方程式，与G的李代数乘法方程是对偶的。可见从动力学到活动标架，到李群的基本方程是一串自然的过程。

这个演变还可继续推进。爱因斯坦的广义相对论发表后，Cartan于1925年发表一文，文中发展广义仿射空间的理论，及它在相对论的应用。此文的一个结论是(5)式的推广：

$$(6)\qquad \begin{cases} d\omega_i = \sum_i \omega_j \wedge \omega_{ji}, \\ d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}, \end{cases} \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant 3,$$

其中Ω_{ij}是二次微分式，叫做曲率式，是三维黎曼几何的基本方程。

处理微分几何的一般方法是张量分析。它的基本观点是利用局部坐标的切矢量作标架。现在看来，这个约束弊多利少。但是张量分析简单明瞭，在初等的问题中，其功用是不可磨灭的。

2. 曲面论与孤立子及σ-模型

在三维欧氏空间E^3内设曲面S。于一点$x \in S$，命x是它的坐标矢量，并命ξ表其单位法矢量，则S的不变量是两个二次微分式：

$$(7)\qquad \mathrm{I} = (dx, dx) > 0, \quad \mathrm{II} = -(dx, d\xi),$$

分别称谓第一及第二基本式，前者并是正定的。第二基本式的两个特征值k_i，$i=1,2$，称为S的主曲率。它们的对称函数

(8) $$H=\frac{1}{2}(k_1+k_2),\quad K=k_1k_2$$

分别称为中曲率与全曲率(Gauss 曲率)。这些曲率有简单的几何意义，谅为熟知的事实。例如，$H=0$ 的曲面是最小曲面。

中曲率或全曲率是常数的曲面显然有研究的价值。如 x,y,z 为E^3的坐标，而 S 有方程式

(9) $$z=z(x,y),$$

则

$$H=\text{const}\quad 或\quad K=\text{const}$$

可表为函数$z(x,y)$的二阶非线性的偏微分方程。求这样的曲面等于解相当的方程。例如，最小曲面 $H=0$ 的方程是

(10) $$(1+z_y^2)z_{xx}-2z_xz_yz_{xy}+(1+z_x^2)z_{yy}=0.$$

此方程是非线性椭圆式的。

另一重要的例子是$K=$负常数，可假设为$K=-1$。在这样的曲面上渐近曲线是不重合的实曲线。命 φ 为其夹角，则可在 S 上选择参数 u,t，使

(11) $$\varphi_{ut}=\sin\varphi.$$

这是有名的 Sine-Gordon(SG) 方程。反之，如有 SG-方程的一解，可作出一个 $K=-1$ 的曲面。

由此解释，曲面的变换论，在偏微分方程论有重要的应用。它的根据是下面的Bäcklund定理：

设曲面S，S^*成对应，使连接对应点$x\in S$，$x^*\in S^*$的直线为两曲面的公切线。命 r 为对应点间的距离，ν 为曲面在对应点法线的夹角。如 $r=\text{const}$，$\nu=\text{const}$，则S和S^*的全曲率同是 $-\sin\nu/r^2$ (=负常数)。

此定理使得我们从一常全曲率的曲面，造出同一常全曲率的曲面，即从SG-方程的一解造出新解。

如释$\varphi(u,t)$为直线 u 上的波动，t为时间，则SG-方程有孤立子解，而上述变换可引至新解，增减其孤立子个数。这样可得任

意个孤立子的 SG-方程的解。

负常全曲率曲面在高度的一个推广是 E^{2n-1}($=(2n-1)$ 维欧氏空间)内的 n 维常曲率支流形。这种支流形相当于一偏微分方程组，可能是 SG-方程在高度的推广。滕楚莲和巴西女数学家 Keti Tenenblat证明了Bäcklund 定理在高维的推广。

常中曲率的曲面或最小曲面在理论物理上有同样多的应用。如 $f:X\to Y$是两个黎曼流形间的映射，可以定义它的能(Energy) $E(f)$。这个函数(Functional)的临界映射称为调和映射。这是调和函数和最小支流形的推广。调和映射适合一组椭圆式的二阶偏微分方程。如果X是紧致的，调和映射是比较稀有的。因为它的出发点是变分原则，这些映射就可能在物理上有用。

从几何的观点讲，已知流形 X,Y ($\dim X<\dim Y$)，如何把 X嵌入或浸入Y成为最小支流形，是一极有兴味的问题，即使 $X=S^2$为二维球面，此问题亦不简单。在此假设下，早年E.Calabi，陈省身和 L.Barbosa 研究了 $Y=S^n$(n 维球面)的情形。1980年物理学家A.M.Din和W.J.Zakrzewski 确定了所有的调和映射 $f:S^2\to P_n(\boldsymbol{C})$($n$ 维复投影空间)，称为σ-模型。Y为其它空间的情形，如 $SU(n)$，$Q_n(\boldsymbol{C})$(复二次超曲面)，或 $G(n,k)$ (Grassmann流形)，其中的最小二维球面为何，亦为大家所渴欲了解的。此问题至今未全解决。

对于最小曲面数学分析上有强的“有理性 (Regularity)”性质，即在某种边界条件下，有有理的或光滑的最小曲面存在，这个重要的结果在几何上有无数应用。在广义相对论 R.Schoen 和丘成桐用来证明所谓“正质量假设(Positive Mass Conjecture)”。

3. 规范场论

规范场论的数学基础是矢量丛的观念。这个演进在数学上是十分自然的：牛顿的微积分讨论函数 $y=f(x)$。我们可推广自变数为m 维空间的坐标，因变数为 n 维空间的矢量，即得m 变数的

矢量值函数。通常也可把函数记为映射 $f: X\to Y$，其中 $X=\boldsymbol{R}^m$，$Y=\boldsymbol{R}^n$。这个映射可以表为一个“图(Graph)” $F: X\to X\times Y$，$F(x)=(x,f(x))$，$x\in X$。映射 F 的右端是两个拓扑空间的积。命 $\pi: X\times Y\to X$，使 $\pi(x,y)=x$，$x\in X$，$y\in Y$，则 F 合于性质 $\pi\circ F(x)=x$。

矢量丛的概念，在近代数学有决定的重要性，要点是把乘积 $X\times Y$ 易为空间 E，它只是局部的乘积。易言之，有空间 E 及映射 $\pi: E\to X$，使每点 $x\in X$ 有邻域 U 合于条件：$\pi^{-1}(U)$ 与 $U\times Y$ 是拓扑相等的。

局部乘积的空间是否必然是整体的乘积？即上述的 E 是否必与 $X\times Y$ 拓扑相等？这在数学上是一个极为微妙的问题，它的解答引至示性类(Characteristic Classes)的观念.（答案是 E 不必是 $X\times Y$。）

设矢量丛 $\pi: E\to X$。映射 $F: X\to E$ 合于条件 $\pi\circ F(x)=x$，$x\in X$，称为截面(Section)。截面的微分须要连络(Connection)。量度微分的非交换性是曲率。

规范场就是矢量丛的连络，物理学家称为Gauge Potential，曲率则称为 Strength。微分几何与理论物理眞是“同气连枝，同胞共哺”了。

据我了解，一切物理的理论最终要“量子化(Quantization)”。在数学上我们需要研究无穷维的空间及分离(Discrete)现象。

4. 结论

我当然还需要提到广义相对论与黎曼几何的关系。沒有相对论，黎曼几何是不易受数学界的重视的。

杨振宁先生曾用一个图来表示数学与物理的关系①。另作一

① 参见Chen-Ning Yang, Fibre Bundles and the Physics of the Magnetic Monopole, The Chern Symposium 1979, Springer-Verlag, 1980.

图(见图18)以结束此文。

图 18

参考文献

[1] L.Auslander and R.E.Mackenzie, Introduction to Differentiable Manifolds, McGraw-Hill, New York, 1963.

[2] W.H.Boothby, An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, Academic Press, New York, 1975.

[3] E.Cartan, Les Systèmes Différentiels Extérieurs et leurs Applications Géométriques, Paris, 1945.

[4] S.S.Chern, "Characteristic Classes of Hermitian Manifolds," *Ann. of Math.*, 47, 85—121, 1946.

[5] S.S.Chern, Differential Manifolds, Univ. of Chicago, Lecture notes, 1953.

[6] S.S.Chern, Complex Manifolds without Potential Theory, D.Van Nostrand, Princeton, 1967.

[7] C.Chevalley, Theory of Lie Groups, Princeton Univ. Press, Princeton, 1946.

[8] P. Griffiths, "On Cartan's Method of Lie Groups and Moving Frames as applied to Uniqueness and Existence Questions in Differential Geometry", *Duke Math.J.*, 14, 775—814, 1974.

[9] N.J.Hicks, Notes on Differential Geometry, D. Van Nostrand, Princeton, 1965.

[10] W.Hurewicz, Lectures in Ordinary Differential Equations, M. I. T.Press, Cambridge, Mass., 1966.

[11] S.Kobayashi and K.Nomizu, Foundations of Differential Geometry, vols. I and II, Interscience, New York, 1963 and 1969.

[12] K.Nomizu, Lie Groups and Differential Geometry, Publ. Math. soc. of Japan, No.3, 1956.

[13] A.Newlander and L.Nirenberg, "Complex Analytic Coordinate in Almost Complex Manifolds", *Ann. of Math.*, 65, 391—404, 1957.

[14] I.M.Singer and J.A.Thorpe, Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry, Scott-Foresman, Illinois, 1967.

[15] N.Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton Univ. Press, Princeton, 1951.