

目 录

第一章 代数基础	1
§ 1. 反对称形式	1
§ 2. 辛向量空间, 辛基底	8
§ 3. $sl(2, \mathbb{K})$ 在辛向量空间上的反对称形式代数中的标准线性表示	9
§ 4. 辛群	13
§ 5. 辛复结构	20
第二章 辛流形	24
§ 6. 流形上的辛结构	24
§ 7. 辛流形上的微分形式代数的算子	29
§ 8. 辛坐标	35
§ 9. Hamilton 向量场和辛向量场	40
§ 10. 辛坐标下的 Poisson 括号	51
§ 11. 辛流形的子流形	56
第三章 余切丛	66
§ 12. Liouville 形式和余切丛上的标准辛结构.....	66
§ 13. 余切丛上的辛向量场	71
§ 14. 余切丛的 Lagrange 子流形	79
第四章 辛 G-空间	87
§ 15. 定义和例子	88
§ 16. Hamilton \mathfrak{g} -空间和矩射.....	92
§ 17. 矩射的等价不变性	102
第五章 Poisson 流形	107
§ 18. Poisson 流形的结构	107
§ 19. Poisson 流形的叶子	112
§ 20. Lie 代数的对偶上的 Poisson 结构	116

第六章 一个分级情形	129
§ 21. $(0, n)$ 维超流形	129
§ 22. $(0, n)$ 维辛超流形	135
参考文献.....	139
名词索引.....	141
记号.....	143

第一章 代数基础

§ 1. 反对称形式

我们用 V 来表示特征 $\neq 2$ 的域 k 上的有限维向量空间, 用 $A^p(V)$ 来表示 V 上取值于 k 中的反对称 p -线性形(或称 p -形式)所构成的向量空间, 特别地, $A^0(V) = k$, $A^1(V)$ 就是 V 的对偶空间 V^* .

设 $\alpha \in A^p(V)$, $\beta \in A^q(V)$, 则 p -形式 α 和 q -形式 β 的外积 $\alpha \wedge \beta$ 是一个 $p+q$ -形式, 它在 $(x_1, \dots, x_{p+q}) \in \underbrace{V \times \dots \times V}_{p+q}$ 处的值由下式决定

$$\begin{aligned} & (\alpha \wedge \beta)(x_1, \dots, x_{p+q}) \\ &= \sum_{\tau \in \Theta(p, q)} \text{sg}(\tau) \alpha(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) \beta(x_{\tau(p+1)}, \dots, x_{\tau(p+q)}), \end{aligned}$$

其中 $\Theta(p, q)$ 表示集合 $\{1, 2, \dots, p+q\}$ 的所有满足下面的条件的置换 τ 的全体:

$$(i) \tau(1) < \tau(2) < \dots < \tau(p)$$

且

$$(ii) \tau(p+1) < \tau(p+2) < \dots < \tau(p+q).$$

用这种方式定义的外积满足结合律, 从而在

$$A(V) = \bigoplus_p A^p(V)$$

上定义了一个分级代数结构. 根据外积的定义, 若 $\alpha \in A^p(V)$, $\beta \in A^q(V)$, 则我们有

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

因为这一性质, 所以我们称分级代数 $A(V)$ 为 Z_2 -可换的(或 Z_2 -交换).

设 f_1, \dots, f_n 为 V 的一组基, 并且设 λ 为任意一个从集合 $\{1, 2, \dots, p\}$ 到集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 内的映射, 我们记

$$f^\lambda = f_{\lambda(1)} \wedge \cdots \wedge f_{\lambda(p)},$$

则当 λ 遍取所有的从 $\{1, 2, \dots, p\}$ 到 $\{1, 2, \dots, n\}$ 内的满足条件

$$\lambda(1) < \lambda(2) < \cdots < \lambda(p)$$

的映射时, 所得到的 f^λ 的全体就构成空间 $A^p(V)$ 的一组基. 设 $n = \dim V$, 则对任一整数 $p \geq 0$, 我们有 $\dim A^p(V) = \binom{n}{p}$.

对任一 $x \in V$, 我们定义分级空间 $A(V)$ 的一个 -1 级的自同态 $i(x)$ 如下:

$$(i(x)\alpha)(x_1, \dots, x_{p-1}) = \alpha(x, x_1, \dots, x_{p-1}),$$

对所有的 $\alpha \in A^p(V)$ 和所有的 $x_1, \dots, x_{p-1} \in V$ 都成立. 设 $\alpha \in A^p(V)$, 则 $i(x)\alpha$ 是 $-(p-1)$ -形式, 我们称 $i(x)\alpha$ 为 α 通过 x 的内积. 根据 $i(x)$ 的定义可知, 映射

$$x \mapsto i(x)$$

是从 V 到 $A(V)$ 的自同态空间 $\text{End}(A(V))$ 内的一个线性映射. 对任意的 $x, y \in V$, 我们有

$$(1.1) \quad i(x) \circ i(y) + i(y) \circ i(x) = 0.$$

若 $\alpha \in A^p(V)$, $\beta \in A(V)$, 则我们有

$$(1.2) \quad i(x)(\alpha \wedge \beta) = (i(x)\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i(x)\beta).$$

由于这个性质, 所以我们称 $i(x)$ 为分级代数 $A(V)$ 的 Z_2 -导子.

1.3. 定义. 设 α 是向量空间 V 上的一个反对称 p -形式. 我们称由 V 中所有满足 $i(x)\alpha = 0$ 的元素 x 所构成的子空间为 α 的核, 记为 $\text{Ker}\alpha$. α 的核的余维数称为 α 的秩 ($= \dim V - \dim \text{Ker}\alpha$).

设 V, W 为域 k 上的两个向量空间, f 为从 V 到 W 的一个线性映射, 我们利用下面的等式

$$(A(f)\beta)(x_1, \dots, x_p) = \beta(f(x_1), \dots, f(x_p)),$$

其中 $\beta \in A^p(W)$ 和 $x_1, \dots, x_p \in V$ 均为任意, 来定义一个从分级代数 $A(W)$ 到分级代数 $A(V)$ 内的同态 $A(f)$. 由 $A(f)$ 的定义知, 若 f 是内射 (或满射), 则 $A(f)$ 也是内射 (或满射).

设 $\alpha \in A^p(V)$, N 为 V 的一个向量子空间且 $N \subset \text{Ker}\alpha$. 记从 V 到 V/N 上的标准映射为 q , 则不难看出, 存在唯一的一个 p -形式 $\beta \in A^p(V/N)$ 使 $\alpha = A(q)\beta$. 我们有

$$\text{Ker}\beta = q(\text{Ker}\alpha).$$

由一个反对称 2-形式定义的正交性. 设 ω 是向量空间 V 上的一个反对称 2-形式. V 的两个元素 x, y 称为是互相正交的 (对于 ω), 如果有 $\omega(x, y) = 0$. 设 E 是 V 的一个子空间, 我们以 E^\perp 来表示由 V 中所有满足 $\omega(x, y) = 0, \forall y \in E$, 的 x 所构成的 V 的子空间, 并把它称为 E 的正交补. 我们不加证明地引用下列结论, 读者可试证之:

(i) 对 V 的任一子空间 E 都有

$$\begin{aligned} E^\perp &\supset \text{Ker}\omega, \\ (E^\perp)^\perp &= E + \text{Ker}\omega, \\ ((E^\perp)^\perp)^\perp &= E^\perp. \end{aligned}$$

(ii) 若 E, F 为 V 的两个子空间, 则有

$$(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp.$$

(iii) 若 $E \subset F$, 则 $E^\perp \supset F^\perp$.

(iv) 若 $\text{Ker}\omega \subset E \cap F$, 则有

$$(E + F)^\perp = E^\perp + F^\perp.$$

1.4. 引理. 设 $\omega \in A^2(V)$ 并设 E 为 V 的一个子空间, 则我们有

$$\dim E^\perp = \dim V - \dim E + \dim(E \cap \text{Ker}\omega).$$

证. 根据 $i(x)$ 的定义知, 映射

$$x \mapsto i(x)\omega, \quad x \in V,$$

是从 V 到 V^* 的线性映射, 它的核为 $\text{Ker}\omega$. 在这个映射下, E 的象的维数是

$$\dim E - \dim(E \cap \text{Ker}\omega).$$

但根据对偶性, E 的象是 E^\perp 的正交补, 所以它的维数等于 E^\perp 的余维数, 所以结论成立. 证完.

1.5. 定义. 设 ω 是向量空间 V 上的一个反对称 2-形式. 又

设 E 是 V 的一个子空间, 则

若 $E \subset E^\perp$, E 称为 (V, ω) 的迷向子空间;

若 $E \supset E^\perp$, E 称为 (V, ω) 的余迷向子空间;

若 $E = E^\perp$, E 称为 (V, ω) 的 Lagrange 子空间;

若 $E \cap E^\perp = (0)$, E 称为 (V, ω) 的辛子空间.

由定义可知, 所有维数 ≤ 1 的子空间都是迷向的, 所有余维数 ≤ 1 且含 $\text{Ker}\omega$ 的子空间都是余迷向的, 而根据包含关系来确定的极小迷向子空间和极小余迷向子空间都是 Lagrange 子空间.

1.6. 命题. 设 $\omega \in A^2(V)$ 并设 L 为 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间, 则

$$\text{秩 } \omega = 2(\dim L - \dim \text{Ker}\omega).$$

证. 事实上, 因为 L 是一 Lagrange 子空间, 所以

$$L \cap \text{Ker}\omega = L^\perp \cap \text{Ker}\omega = \text{Ker}\omega.$$

从而利用引理 1.2 得

$$\dim L = \dim V - \dim L + \dim \text{Ker}\omega.$$

证完.

推论. V 上任一反对称 2-形式的秩都是偶数, 空间 (V, ω) 的所有 Lagrange 子空间具有相同的维数.

1.7. 命题. 设 $\omega \in A^2(V)$ 并设 W 是 (V, ω) 的一个余迷向子空间, 则对 (V, ω) 的任一 Lagrange 子空间 L , $L \cap W = W^\perp$ 都是 $(W, \omega|_W)$ 的一个 Lagrange 子空间.

证. 因为 L 和 W 都是余迷向的, 所以

$$\text{Ker}\omega \subset L \cap W.$$

从而

$$(L \cap W)^\perp = L^\perp + W^\perp = L + W^\perp.$$

又由于 W 是余迷向的, 所以

$$(L \cap W)^\perp \cap W = (L + W^\perp) \cap W = L \cap W + W^\perp.$$

这说明 $L \cap W + W^\perp$ 在 $(W, \omega|_W)$ 中的正交补就是它本身. 证完.

1.8. 命题. 设 $\omega \in A^2(V)$ 并设 N 为 V 的一个含于 $\text{Ker}\omega$ 中的子空间. 设

$$q: V \rightarrow V/N$$

为标准映射, $\omega' \in A^2(V/N)$ 满足关系式

$$A(q)\omega = \omega,$$

则映射

$$L \mapsto q(L)$$

是从 (V, ω) 的 Lagrange 子空间所构成的集合到 $(V/N, \omega')$ 的 Lagrange 子空间所构成的集合上的一个双射 (bijection).

证. 因为对任意的 $x, y \in V$ 有

$$\omega'(q(x), q(y)) = \omega(x, y),$$

所以对任一子空间 $E \subset V$, $q(E^\perp)$ 是 $q(E)$ 关于 ω' 的正交补. 因此, 若 L 是 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间, 则 $q(L)$ 是 $(V/N, \omega')$ 的一个 Lagrange 子空间. 由于 $N \subset \text{Ker}\omega$, 所以 (V, ω) 的任一 Lagrange 子空间均含 N , 于是有

$$L = q^{-1}(q(L)).$$

这说明映射

$$L \mapsto q(L)$$

是一内射. 现证它也是满射. 设 L' 是 $(V/N, \omega')$ 的一个 Lagrange 子空间, 令

$$L = q^{-1}(L'),$$

则有

$$q(L^\perp) = q(L)^\perp = L',$$

从而

$$L^\perp + N = L + N.$$

又因为

$$N \subset \text{Ker}\omega \subset L^\perp \text{ 且 } N = \text{Ker}q \subset L,$$

所以有 $L^\perp = L$. 于是证明了 L 是 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间且有 $q(L) = L'$. 证完.

1.9. 命题. 设 $\omega \in A^2(V)$ 并设 L 为 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间. 令 J 为 (V, ω) 的所有满足 $E \cap L = (0)$ 的迷向子空间

E 所构成的集合。若 F 是由包含关系来确定的 J 的一个极大元，则 V 是 L 和 F 的直和。

证。事实上，若 $x \in F^\perp$ ，则子空间 $F + kx$ 是迷向子空间，从而

$$F + kx \subset F \quad \text{或者} \quad (F + kx) \cap L \neq (0).$$

无论怎样都有 $F^\perp \subset F + L$ 。于是有

$$F^\perp \cap L = F^\perp \cap L^\perp = (F + L)^\perp \subset (F^\perp)^\perp = F + \text{Ker}\omega.$$

因而

$$F^\perp \cap L \subset (F + \text{Ker}\omega) \cap L = \text{Ker}\omega$$

且

$$V = (F^\perp \cap L)^\perp = F + \text{Ker}\omega + L^\perp = F + L.$$

证完。

我们称由命题 1.9 给出的 F 为 Lagrange 子空间 L 的迷向补子空间。

推论 1. 设 L 为 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间，设 f_1, \dots, f_r 为 V 的对偶空间 V^* 里的一组线性无关的 1-形式使得

$$L = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \text{Ker} f_i,$$

则在 V^* 中存在 r 个线性无关的 1-形式 f_{r+1}, \dots, f_r 使 $f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_r$ 线性无关且

$$\omega = \sum_{i=1}^r f_i \wedge f_{r+i}.$$

证。事实上，设 F 是 L 在 V 中的迷向补子空间， e_1, \dots, e_r 为 F 的一组满足 $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ 的基。令

$$f_{r+i} = i(e_i)\omega, \quad i = 1, \dots, r,$$

则因为 F 是迷向的，所以有

$$i(e_j)f_{r+i} = \omega(e_i, e_j) = 0, \quad i, j = 1, \dots, r.$$

因此，

$$i(e_j)(\omega - \sum_{i=1}^r f_i \wedge f_{r+i}) = f_{r+i} - f_{r+i} = 0$$

对所有 $1 \leq j \leq r$ 成立。由此推知形式

$$\omega - \sum_{i=1}^r f_i \wedge f_{r+i}$$

的核包含 F . 另外, 由推论的假设知上面的形式限制在 L 上为 0. 又由 F 的定义有

$$V = F + L.$$

于是便有

$$\omega = \sum_{i=1}^r f_i \wedge f_{r+i}.$$

为证 f_1, \dots, f_{2r} 的无关性, 注意到 ω 的核包含

$$\bigcap_{1 \leq i \leq r} \text{Ker} f_i,$$

但是它的核的维数是

$$2 \dim L - \dim V = \dim V - 2r,$$

于是 f_1, \dots, f_{2r} 是线性无关的. 证完.

推论 2. 设 L 是 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间, 则存在 (V, ω) 的 Lagrange 子空间 \tilde{L} 使得

$$L \cap \tilde{L} = \text{Ker} \omega,$$

因而也就有

$$V = L + \tilde{L}.$$

证. 沿用推论 1 的符号, 令

$$\tilde{L} = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \text{Ker} f_{r+i}$$

便可. 证完.

推论 3. 若域 k 的特征为 0, ω 的秩为 $2r$, 则 ω 的 r 阶外积幂 $\omega^r \neq 0$ 而 $r+1$ 阶外积幂 $\omega^{r+1} = 0$.

证. 沿用推论 1 的符号, 设

$$\omega = \sum_{i=1}^r f_i \wedge f_{r+i}$$

则有

$$\begin{aligned} \omega^r &= r! f_1 \wedge f_{r+1} \wedge f_2 \wedge f_{r+2} \cdots f_r \wedge f_{2r} \\ &= (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} r! f_1 \wedge f_2 \cdots f_{2r}. \end{aligned}$$

由此推得结论成立. 证完.

§ 2. 辛向量空间, 辛基底

设 V 是特征 $\neq 2$ 的域 k 上的向量空间.

2.1. 定义. 设 ω 是 V 上的一个反对称 2-形式. 若 $\text{Ker}\omega = (0)$, 则我们称 ω 为 V 上的一个辛形式, 这时, 我们把 (V, ω) 称为辛空间.

若 (V, ω) 是一辛空间, 则 $\dim V = \text{秩}\omega$, 从而 V 是偶维数空间. 此时 (V, ω) 的 Lagrange 子空间的维数为 $\frac{1}{2} \dim V$.

例 1. 设 W 是域 k 上维数为 r 的一个向量空间, W^* 为 W 的对偶空间. 对任意的 $x_1, x_2 \in W$ 和任意的 $f_1, f_2 \in W^*$, 令

$$\omega((f_1, x_1), (f_2, x_2)) = f_1(x_2) - f_2(x_1),$$

则 ω 是 $W^* \times W$ 上的一个辛形式. 不难看出, $W^* \times 0$ 和 $0 \times W$ 都是 $(W^* \times W, \omega)$ 的 Lagrange 子空间.

例 2. 设 f_1, \dots, f_r 是向量空间 k^r 的自然坐标, 则

$$\omega = \sum_{i=1}^r f_i \wedge f_{r+i}$$

是 k^{2r} 上的一个辛形式, 我们称它为 k^{2r} 上的标准辛形式, 而称辛空间 (k^{2r}, ω) 为 $2r$ 维的标准辛 k -空间.

根据命题 1.7 的推论 2, 辛空间 (V, ω) 的任一 Lagrange 子空间 L 在 V 中都有一 Lagrange 补子空间, 即有 (V, ω) 的 Lagrange 子空间 \tilde{L} 使得

$$L \cap \tilde{L} = (0) \quad \text{且} \quad V = L \dot{+} \tilde{L}.$$

2.2. 命题. 设 (V, ω) 是一 $2n$ 维的辛空间, L_1 和 L_2 是 (V, ω) 中互补的两个 Lagrange 子空间. 设 e_1, \dots, e_n 是 L_1 的一组基, 则存在 L_2 的一组唯一的基 e_{n+1}, \dots, e_{2n} 使得

$$\omega(e_i, e_{n+i}) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

证. 事实上, 映射

$$x \mapsto (i(x)\omega)|_{L_1}$$

• • •

是从 L_2 到 L_1 的对偶空间 L_1^* 上的一个同构。令 f_1, \dots, f_n 为 L_1^* 中与 e_1, \dots, e_n 相对偶的一组基。对任一 $1 \leq i \leq n$, 取 $e_{n+i} \in L_2$ 使

$$(i(e_{n+i})\omega)|_{L_1} = -f_i,$$

则 e_{n+1}, \dots, e_{2n} 为 L_2 的一组基且

$$\omega(e_i, e_{n+i}) = f_i(e_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

证完。

2.3. 定义. 设 (V, ω) 是一 $2n$ 维的辛空间。若 V 的一组基 e_1, \dots, e_{2n} 满足

$$\omega(e_i, e_{n+i}) = \delta_{ij} \quad \text{且} \quad \omega(e_i, e_j) = \omega(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0, \\ i, j = 1, 2, \dots, n,$$

则我们称它为 (V, ω) 的一组辛基。

由命题 1.9 的推论 2 和命题 2.2 可知任一辛空间 (V, ω) 都有辛基。

若 (V, ω) 是一辛空间, 则在一组辛基下, ω 所对应的矩阵具有形式

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I_n 为 n 阶单位方阵。

若 (V, ω) 是一辛空间, 则 V 的一组基 e_1, \dots, e_{2n} 是一组辛基的充要条件为: 对于 V^* 中相对于 e_1, \dots, e_{2n} 的对偶基 f_1, \dots, f_{2n} ,

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i \wedge f_{n+i}.$$

习题. 设 L_1 和 L_2 是辛空间 (V, ω) 的两个 Lagrange 子空间. 试证明在 V 中存在同时为 L_1 和 L_2 的 Lagrange 补的子空间。

§ 3. $sl(2, k)$ 在辛向量空间上的反对称形式 代数中的标准线性表示

在这一节中, k 表示特征为 0 的域, $sl(2, k)$ 表示 k 上由基

元素

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

所生成的三维 Lie 代数 (见本节末的注)。

设 (V, ω) 是 k 上 $-2n$ 维的辛空间。对 $\alpha \in A^r(V)$, 记空间 $A(V)$ 的自同态

$$\beta \mapsto \alpha \wedge \beta, \quad \beta \in A(V),$$

为 $\mu(\alpha)$, 则 $\mu(\alpha)$ 是 $A(V)$ 的一个 r 级的自同态, 即它把每一子空间 $A^p(V)$ 映入子空间 $A^{p+r}(V)$ 中。特别地,

$$X = \mu(\omega)$$

是一 2 级自同态。设 e_1, \dots, e_{2n} 是 (V, ω) 的一组辛基, 则自同态

$$Y = \sum_{j=1}^n i(e_j)i(e_{n+j})$$

是一 -2 级的自同态。

3.1. 引理。对每一 $x \in V$ 都有

$$i(x) = Y \circ \mu(f) - \mu(f) \circ Y,$$

其中 $f = i(x)\omega$ 。

证。根据定义, 对任一 e_j , $1 \leq j \leq 2n$, $i(e_j)$ 都是一个 -1 级的 Z_2 - 导子, 即对任意的 $\alpha \in A^p(V)$ 和 $\beta \in A^q(V)$ 都有

$$i(e_j)(\alpha \wedge \beta) = (i(e_j)\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i(e_j)\beta).$$

所以对任一 $\beta \in A(V)$ 我们有

$$\begin{aligned} (i(e_j) \circ \mu(f))(\beta) &= i(e_j)((i(x)\omega) \wedge \beta) \\ &= (i(e_j)i(x)\omega) \wedge \beta + (-1)(i(x)\omega) \wedge (i(e_j)\beta), \\ (\mu(f) \circ i(e_j))(\beta) &= f \wedge (i(e_j)\beta) \\ &= (i(x)\omega) \wedge (i(e_j)\beta). \end{aligned}$$

又

$$\mu(f(i(e_j)))(\beta) = f(i(e_j)) \wedge \beta = \omega(x, e_j)\beta.$$

于是推出

$$i(e_j) \circ \mu(f) + \mu(f) \circ i(e_j) = \mu(f(i(e_j))), 1 \leq j \leq 2n.$$

现设

$$x = \sum_{i=1}^{2n} x_i c_i,$$

则有

$$\mu(f(c_i)) = -x_{n+i}, \quad \mu(f(c_{n+i})) = x_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

于是有

$$\begin{aligned} Y \circ \mu(f) &= \sum_{j=1}^n i(c_j) i(c_{n+j}) \mu(f) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j i(c_j) - \sum_{j=1}^n i(c_j) \mu(f) i(c_{n+j}), \\ \mu(f) \circ Y &= \sum_{j=1}^n \mu(f) i(c_j) i(c_{n+j}) \\ &= - \sum_{j=1}^n x_{n+j} i(c_{n+j}) - \sum_{j=1}^n i(c_j) \mu(f) i(c_{n+j}). \end{aligned}$$

两式相减得

$$Y \circ \mu(f) - \mu(f) \circ Y = \sum_{j=1}^{2n} x_j i(c_j) = i(x).$$

证完.

现在我们证明上面所定义的 $A(V)$ 的自同态 Y 不依赖于辛基底 c_1, \dots, c_{2n} 的选择.

事实上, 设 c'_1, \dots, c'_{2n} 是 (V, ω) 的另一组辛基, 并设

$$Y' = \sum_{j=1}^n i(c'_j) i(c'_{n+j}),$$

则由引理 3.1 得

$$(Y' - Y) \circ \mu(f) = \mu(f) \circ (Y' - Y),$$

对任意的 1-形式 $f = i(x)\omega$ 成立. 因而对任意的 $f \in V^*$ 成立. 于是对任意的 $f \in V^*$, $Y' - Y$ 的核是 $\mu(f)$ 的不变子空间. 又因为代数 $A(V)$ 是由 $V^* = A^1(V)$ 所生成的, 所以 $Y' - Y$ 的核是 $A(V)$ 的一个理想. 但 $Y' - Y$ 的核显然含 $A(V)$ 的单位元. 于是 $Y' = Y$.

若设 f_1, \dots, f_{2n} 是 V^* 的一组相对于 c_1, \dots, c_{2n} 的对偶基, 则有

$$i(e_j)\omega = f_{n+j}, \quad i(e_{n+j})\omega = -f_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

从而利用 (1.1) 和 (1.2) 两式有

$$\begin{aligned} [X, Y] &= Y \circ X - X \circ Y \\ &= \sum_{j=1}^n (-i(e_{n+j}) \circ \mu(f_{n+j}) + \mu(f_j) \circ i(e_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \mu(f_j) \circ i(e_j) - n \cdot id. \end{aligned}$$

其中 id 表示单位映射. 因为 $A(V)$ 的自同态

$$\sum_{j=1}^{2n} \mu(f_j) \circ i(e_j)$$

是 $A(V)$ 的零级导子, 容易知道它在 $A(V)$ 上为恒等变换, 从而它限制在 $A^p(V)$ 上等于 $p \cdot id$. 若令

$$H = [Y, X],$$

则对任意的 $\alpha \in A^p(V)$ 有

$$H(\alpha) = (p - n)\alpha.$$

3.2 命题. 定义从 $sl(2, k)$ 到 $A(V)$ 的自同态空间内的线性映射 ρ 使

$$\rho \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = X, \quad \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = Y, \quad \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = H,$$

则 ρ 是 Lie 代数 $sl(2, k)$ 在空间 $A(V)$ 上的一个线性表示.

证. 事实上, 根据定义, $[Y, X] = H$. 又 H 是 $A(V)$ 的零级导子, 而 X 和 Y 则分别是 $A(V)$ 的 2 级和 -2 级的导子, 直接计算便得到

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y,$$

因此 ρ 是 $sl(2, k)$ 的一个表示. 证完.

H 在 $A(V)$ 里的特征向量显然是 $A(V)$ 的齐次元素. 特别地, 我们把含于 $\text{Ker} X \setminus (0)$ 中的 H 的特征向量称为表示 ρ 的素元素 (参看文献 [13]). 根据 Lie 代数的表示理论, 若 $\varphi \in A(V)$ 而且 φ 是一素元素, $H(\varphi) = r\varphi$, 那么 r 是一 ≥ 0 的整数, 而下列元素:

$$\varphi, Y(\varphi), \dots, Y^r(\varphi)$$

构成 $A(V)$ 的一个 $sl(2, k)$ 单子模的基. 因为由

$$H(\varphi) = r\varphi$$

知道 $\varphi \in A^{n+r}(V)$, 所以所有素元素的级数 $\geq n$. 由于 $\text{Ker} X$ 是由素元素所生成的 $A(V)$ 的子空间, 所以 $\text{Ker} X$ 包含在 $A^n(V) + A^{n+1}(V) + \dots + A^{2n}(V)$ 中.

例. 1) 设 ω^n 是 ω 的 n 次外积幂, 则 $\omega^n \neq 0$, $\omega^n \in A^{2n}(V)$ 且 ω^n 是一素元素, 在表示 ρ 下, 它生成一个 $n+1$ 维 $sl(2, k)$ 子模

$$k + k\omega + \dots + k\omega^n.$$

2) 因为 X 是 -2 级导子, 所以 $A^{2n-1}(V)$ 的任一非零元素都是素元素. 每一个这样的素元素都生成一个 n 维子模.

3.3. 命题. 对于 $r = 0, 1, \dots, n$, 我们有

i) X^r 把 $A^{n+r}(V)$ 同构地映到 $A^{n+r}(V)$ 上;

ii) Y^r 把 $A^{n+r}(V)$ 同构地映到 $A^{n+r}(V)$ 上.

证. 这是 Lie 代数表示理论的直接结果 (参看文献 [31]), 也可参看文献 [27].

习题. 试证明子空间

$$\text{Ker} X \cap A^{n+r}(V)$$

的维数是

$$\binom{2n}{n+r} - \binom{2n}{n+r+2}.$$

注. 在本书中, 我们假定读者具有 Lie 代数, Lie 群及表示理论的基础知识, 读者可参看文献 [13] 和 [31].

§ 4. 辛 群

设 (V_1, ω_1) 和 (V_2, ω_2) 是域 k 上的两个辛空间. 设 φ 是从 V_1 到 V_2 上的一个向量空间的同构, 若 φ 满足 $\omega_1 = A(\varphi)\omega_2$, 则称它为从 (V_1, ω_1) 到 (V_2, ω_2) 上的一个同构.

(V_1, ω_1) 和 (V_2, ω_2) 之间存在同构的充要条件是 $\dim V_1 =$

$\dim V_2$. 事实上, 若 V_1 和 V_2 都是 $2n$ 维的, 设 e_1, \dots, e_{2n} (或 e'_1, \dots, e'_{2n}) 为 V_1 (或 V_2) 的一组辛基, 则由

$$\varphi(e_i) = e'_i, \quad i = 1, \dots, 2n,$$

所定义的映射 $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ 就是从 (V_1, ω_1) 到 (V_2, ω_2) 上的一个同构. 而必要性是显然的.

设 (V, ω) 是一辛空间, 所谓 (V, ω) 的一个自同构, 指的是从 (V, ω) 到其自身上的一个同构, 所以 (V, ω) 的一个自同构是 V 的线性变换群 $Gl(V)$ 的一个元素, 若把它记为 s , 则它满足下式:

$$\omega(sx, sy) = \omega(x, y), \quad \forall x, y \in V.$$

易知 (V, ω) 的自同构全体构成群 $Gl(V)$ 的一个子群, 我们把它记为 $Sp(V, \omega)$. 特别, 标准辛空间 (k^{2n}, ω) 的自同构群记为 $Sp(2n, k)$. 若 $k = R$, 则把 $Sp(2n, k)$ 简记为 $Sp(2n)$ 并称它为 $2n$ 维辛群.

设 e_1, \dots, e_{2n} 是 (V, ω) 的一组辛基. 设矩阵 $S \in Gl(2n, k)$, 则 S 为 (V, ω) 的某一自同构在基 e_1, \dots, e_{2n} 下的矩阵的充要条件是

$${}^t S J_{2n} S = J_{2n},$$

其中 ${}^t S$ 是 S 的转置矩阵, J_{2n} 是 ω 在基 e_1, \dots, e_{2n} 下的矩阵, 即

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $S \in Gl(2n, k)$ 并设

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

其中 A, B, C, D 都是 $n \times n$ 矩阵, 则 $S \in Sp(2n, k)$ 的充分必要条件是

$${}^t CA - {}^t AC = 0, \quad {}^t CB - {}^t AD = I_n,$$

(4.1)

$${}^t DA - {}^t BC = -I_n, \quad {}^t DB - {}^t BD = 0.$$

因为 $\det J_{2n} = 1$, 所以若 $S \in Sp(2n, k)$, 则由等式

$${}^tS J_{2n} S = J_{2n}$$

可得 $(\det S)^2 = 1$. 更确切些, 我们有

4.2. 命题. 设 (V, ω) 是一辛空间, 则对任一 $s \in Sp(V, \omega)$, 我们有 $\det(s) = 1$.

证. 事实上, 若设 $\dim V = 2n$, 则因为

$$A(s)\omega = \omega,$$

所以我们有

$$A(s)\omega^n = \omega^n.$$

因为 $\omega^n \in A^{2n}(V)$, 所以

$$A(s)\omega^n = \det(s)\omega^n.$$

若 V 是特征等于 0 的域 k 上的向量空间, 则我们有 $\omega^n \neq 0$ (命题 1.9 的推论 3), 从而 $\det(s) = 1$. 而对一般情形, 则可用“除幂 $\omega^{[n]}$ (la puissance diviéc $\omega^{[n]}$) 代替 ω^n 加以讨论, 注意到 $\omega^{[n]}$ 仍然是 $A^{2n}(V)$ 的一个基便可. 证完.

设 T 是一不定元. 我们以 $k[T]$ 来表示 k 上的以 T 为不定元的一元多项式环.

4.3 命题. 设 (V, ω) 是一个 $2n$ 维的辛空间, $s \in Sp(V, \omega)$. 若 $P \in k[T]$ 是 s 的特征多项式, 则我们有

$$T^{2n} P\left(\frac{1}{T}\right) = P(T).$$

证. 事实上, 简记 $J_{2n} = J$, $I_{2n} = I$, 则 $J^2 = -I$. 若 S 是 s 在 V 的某一组辛基下的矩阵, 则因为 ${}^tSJS = J$, 从而有 ${}^tS = -JS^{-1}J$. 于是有

$$\begin{aligned} P(T) &= \det(S - TI) = \det({}^tS - TI) \\ &= \det(-JS^{-1}J - TI) = \det(S^{-1} - TI). \end{aligned}$$

又因为 $\det(S) = 1$, 所以有

$$\begin{aligned} P(T) &= \det(S)\det(S^{-1} - TI) \\ &= \det(I - TS) = T^{2n} P\left(\frac{1}{T}\right). \end{aligned}$$

证完.

设 L 是辛空间 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间, 则对任意的

$s \in Sp(V, \omega)$, $s(L)$ 显然是 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间. 可见 $Sp(V, \omega)$ 作用于 (V, ω) 的所有的 Lagrange 子空间所成的集合上.

4.4. 命题. 群 $Sp(V, \omega)$ 可递地作用于由所有的 (L, \hat{L}) 所构成的集合上, 这里 L 和 \hat{L} 是 (V, ω) 中任意的两个互为 Lagrange 补的 Lagrange 子空间.

证. 事实上, 根据命题 2.2, 对于任意一个 Lagrange 互补对 (L, \hat{L}) , 存在 (V, ω) 的一组辛基 e_1, \dots, e_{2n} 使得 e_1, \dots, e_n 为 L 的一组基而 e_{n+1}, \dots, e_{2n} 为 \hat{L} 的一组基. 又因为 $Sp(V, \omega)$ 在 (V, ω) 的所有辛基所构成的集合上的作用是可递的, 所以命题得证. 证完.

设 L 是辛空间 (V, ω) 的任意一个 Lagrange 子空间, 我们用 $S(L)$ 来表示 L 在 $Sp(V, \omega)$ 中的稳定子.

4.5. 命题. 设 L 和 \hat{L} 是 (V, ω) 中任意的两个互为 Lagrange 补的 Lagrange 子空间, 则从 $S(L)$ 到 $Gl(L)$ 内的映射

$$s \mapsto s|L$$

诱导出从 $S(L) \cap S(\hat{L})$ 到 $Gl(L)$ 上的一个同构.

证. 事实上, 取 (V, ω) 的一组辛基使得 e_1, \dots, e_n 是 L 的基而 e_{n+1}, \dots, e_{2n} 是 \hat{L} 的基, 利用关系式 (4.1), 可知 $S(L) \cap S(\hat{L})$ 是 $Gl(V)$ 中这样一些元素的集合, 它们在基 e_1, \dots, e_{2n} 下的矩阵有形状

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 $A \in Gl(n, k)$ 是 s 在 L 上的限制 $s|L$ 所对应的矩阵, 于是知命题成立. 证完.

推论. 设 $S(L)_0$ 是从 $S(L)$ 到 $Gl(L)$ 上的同态映射

$$s \mapsto s|L$$

的核, 则群 $S(L)$ 是正规子群 $S(L)_0$ 和子群 $S(L) \cap S(\hat{L})$ 的半直积. 又群 $S(L)_0$ 单可递地作用于 (V, ω) 的所有的 L 的 Lagrange 补子空间所构成的集合上.

下面我们来确定 $S(L)_0$ 的结构. 记 q 为从 V 到 V/L 上的标准映射, 记 $B(V/L)$ 为 V/L 上的对称双线性型所构成的空间, 因为 ω 的秩等于 V 的维数, 所以对任一 $b \in B(V/L)$, 存在 V 的唯一的一个自同态 \tilde{b} 使得

$$(4.2) \quad \omega(\tilde{b}(x), y) = b(q(x), q(y))$$

对任意的 $x, y \in V$ 都成立.

4.6. 命题. 映射

$$b \mapsto id_V + \tilde{b}$$

是从加法群 $B(V/L)$ 到 $Sp(V, \omega)$ 的子群 $S(L)_0$ 上的一个同构.

证. 对任意的 $b \in B(V/L)$, 我们有 $\tilde{b}(L) = (0)$, 这里 \tilde{b} 由 (4.2) 式所定义. 又因为 $\tilde{b}(V) \subset L^\perp = L$, 从而 $\tilde{b}^2 = 0$. 于是映射 $b \mapsto id_V + \tilde{b}$ 是从加法群 $B(V/L)$ 到群 $Gl(V)$ 内的同态. 这个同态是一内射. 这是因为 $q: V \rightarrow V/L$ 是满射, 若 $\tilde{b} = 0$, 则有 $b = 0$. 对任意的 $b \in B(V/L)$ 和任意的 $x, y \in V$, 因为 $\omega(\tilde{b}(x), \tilde{b}(y)) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} & \omega(x + \tilde{b}(x), y + \tilde{b}(y)) \\ &= \omega(x, y) + \omega(\tilde{b}(x), y) + \omega(x, \tilde{b}(y)) \\ &= \omega(x, y) + b(q(x), q(y)) - b(q(y), q(x)) \\ &= \omega(x, y). \end{aligned}$$

于是 $id_V + \tilde{b} \in Sp(V, \omega)$. 因为 $\tilde{b}(L) = (0)$, 所以

$$id_V + \tilde{b} \in S(L)_0, \quad \forall b \in B(V/L).$$

现若 $s \in Sp(L)_0$, 我们在 V 上定义一双线性型如下:

$$(x, y) \mapsto \omega(s(x) - x, y) = \omega(x, s^{-1}(y) - y), \quad \forall x, y \in V.$$

若 x, y 中至少有一个属于 L , 则显然有 $(x, y) = 0$. 所以对任意的 $y \in V$, 我们有

$$S(y) - y = s^{-1}(s(y) - y) = y - s^{-1}(y).$$

于是知双线性型 $(x, y) \mapsto \omega(s(x) - x, y)$ 是对称的. 因为它的核含 L , 所以存在 $b \in B(V/L)$ 使

$$\omega(s(x) - x, y) = b(q(x), q(y)), \quad \forall x, y \in V.$$

于是我们有 $s = id_V + \tilde{b}$, 于是同态 $b \mapsto id_V + \tilde{b}$ 的象是

$S(L)_0$. 证完.

由命题 4.5 和命题 4.6, 我们得到一个标准正合列

$$(0) \longrightarrow B(V/L) \longrightarrow S(L) \longrightarrow Gl(L) \longrightarrow (1).$$

从上面我们还知道群 $S(L)$ 同构于具有下列形状的矩阵所构成的线性群:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix},$$

其中 $A \in Gl(n, k)$, 而 B 则是 $n \times n$ 阶对称矩阵. 该矩阵线性群是一 $n^2 + \frac{n(n+1)}{2}$ 维的线性群.

设 (V, ω) 是一辛空间, 则 (V, ω) 的所有 Lagrange 子空间所构成的集合是 V 的 n 维平面 Grassman 流形的一个子流形 (设 $\dim V = 2n$), 我们把它记为 $\mathcal{L}(V, \omega)$. 设 L 是 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间, 则由 L 的所有 Lagrange 补空间构成的集合是 $\mathcal{L}(V, \omega)$ 的一个开的 Zariski. 由命题 4.5 的推论和命题 4.6, 可知这个开集有一仿射空间结构, 它的仿射变换群同构于 $B(V/L)$, 而因为 $B(V/L)$ 的维数是 $\frac{n(n+1)}{2}$, 所以 $\mathcal{L}(V, \omega)$ 是一 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维的流形. 而群 $Sp(V, \omega)$ 则是一维数为 $\dim \mathcal{L}(V, \omega) + \dim S(L) = n(n+1) + n^2 = 2n^2 + n$ 的线性代数群.

设 (V, ω) 为一辛空间, 我们用 $sp(V, \omega)$ 来表示 V 的自同态空间 $gl(V)$ 中所有满足

$$\omega(\alpha(x), y) + \omega(x, \alpha(y)) = 0, \quad \forall x, y \in V,$$

的 α 所构成的子空间.

4.7. 命题. 映射:

$$\alpha \mapsto (id_V - \alpha)(id_V + \alpha)^{-1}$$

是从 $sp(V, \omega)$ 中所有使 $id_V + \alpha$ 可逆的元素 α 所构成的集合到 $Sp(V, \omega)$ 中所有使 $id_V + s$ 为可逆的 s 所构成的集合上的一个双射.

证. 令 $id_V = I$, 则对任一 $\alpha \in sp(V, \omega)$, 等式

$$\omega((I + \alpha)(x), (I + \alpha)(y)) = \omega((I - \alpha)(x), (I - \alpha)(y))$$

对任意的 $x, y \in V$ 成立. 于是, 若 $I + \alpha$ 可逆, 则等式

$$\omega((I - \alpha)(I + \alpha)^{-1}(x), (I - \alpha)(I + \alpha)^{-1}(y)) = \omega(x, y)$$

对任意的 $x, y \in V$ 成立. 从而知

$$s = (I - \alpha)(I + \alpha)^{-1} \in Sp(V, \omega).$$

又因为

$$I + s = (I + \alpha)(I + \alpha)^{-1} + (I - \alpha)(I + \alpha)^{-1} = 2(I + \alpha)^{-1},$$

所以 $I + s$ 可逆.

反之, 若 $s \in Sp(V, \omega)$ 使 $I + s$ 可逆, 令

$$\alpha = (I + s)^{-1}(I - s),$$

则对任意的 $x, y \in V$ 有

$$\begin{aligned} & \omega(\alpha(x), y) + \omega(x, \alpha(y)) \\ &= -2\omega(x, y) + 2\omega((I + s)^{-1}(x), y) + 2\omega(x, (I + s)^{-1}(y)). \end{aligned}$$

令

$$x_1 = (I + s)^{-1}x, \quad y_1 = (I + s)^{-1}y,$$

由上式得

$$\begin{aligned} & \omega(\alpha(x), y) + \omega(x, \alpha(y)) \\ &= -2\omega((I + s)(x_1), (I + s)(y_1)) + 2\omega(x_1, (I + s)(y_1)) \\ & \quad + 2\omega((I + s)(x_1), y_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以 $\alpha = (I + s)^{-1}(I - s) \in sp(V, \omega)$. 又因

$$\begin{aligned} I + \alpha &= (I + s)^{-1}(I + s) + (I + s)^{-1}(I - s) \\ &= 2(I + s)^{-1}, \end{aligned}$$

所以 $I + \alpha$ 可逆而且 $s = (I - \alpha)(I + \alpha)^{-1}$. 于是映射

$$s \mapsto (I + s)^{-1}(I - s)$$

是映射

$$\alpha \mapsto (I - \alpha)(I + \alpha)^{-1}$$

的逆. 证完.

命题 4.7 中的双射: $\alpha \mapsto (I - \alpha)(I + \alpha)^{-1}$ 称为 Cayley 参数化 (参看文献 [30]).

注. 若 $\alpha, \beta \in sp(V, \omega)$, 则

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha \in sp(V, \omega).$$

若利用上式在 $sp(V, \omega)$ 上定义一括号运算, 则 $sp(V, \omega)$ 便成为 $Sp(V, \omega)$ 的 Lie 代数. 若 $k = R$ 或者 $k = C$, 则指数映射

$$\alpha \mapsto \exp \alpha$$

把 $sp(V, \omega)$ 映入 $Sp(V, \omega)$ 中 (参看文献 [12]).

§5. 辛复结构

在本书中, 假定 (V, ω) 是 R 上的 $2n$ 维辛空间. 因为 V 是一偶数维的向量空间, 所以在 V 上存在复结构, 即存在 V 的一个自同态 j 满足 $j^2 = -id_V$. 设 j 是 V 的一个复结构, 如果 $j \in Sp(V, \omega)$, 则我们称 j 为一辛复结构. 于是, 若 j 是一辛复结构, 则对任意 $x, y \in V$ 有

$$\omega(j(x), j(y)) = \omega(x, y).$$

并且有

$$\omega(x, j(y)) = \omega(j(x), -y) = \omega(y, j(x)).$$

于是

$$(x, y) = \omega(x, j(y)), \forall x, y \in V,$$

是 V 上的一个对称双线性型. 显然, 该双线性型是非退化的. 对 $\lambda + i\mu \in C$ 和 $x \in V$, 利用等式

$$(\lambda + i\mu)x = \lambda x + \mu j(x)$$

把 V 定义成为 C 上的向量空间, 则复值实线性型

$$h(x, y) = \omega(x, j(y)) - i\omega(x, y), \quad x, y \in V,$$

是 V 上的伪 Hermite 型. 事实上, 对任意的 $x, y \in V$, 我们有下面的等式:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \overline{h(y, x)}, \\ h(ix, y) &= h(j(x), y) \\ &= \omega(j(x), j(y)) - i\omega(j(x), y) \\ &= \omega(x, y) + i\omega(x, j(y)) = ih(x, y). \end{aligned}$$

5.1. 定义. 辛空间 (V, ω) 上的一个复结构 j 称为适应的 (adaptée), 若它是辛的并且由它所定义的对称双线性型 $(x, y) = \omega(x, j(y))$ 是正定的.

根据定义, 一个复结构 j 是一适应复结构相当于

$$(x, y) \mapsto h(x, y) = \omega(x, j(y)) - i\omega(x, y)$$

是一 Hermite 型.

5.2. 命题. 设 e_1, \dots, e_{2n} 是辛空间 (V, ω) 的一组辛基, j 是 V 上的复结构使对任意的 $1 \leq i \leq n$ 有 $j(e_i) = e_{n+i}$, 则 j 是一适应复结构. 反之, 若 j 是 (V, ω) 上的一个适应复结构, 则存在 (V, ω) 的一组辛基 e_1, \dots, e_{2n} 使 $j(e_i) = e_{n+i}$, $1 \leq i \leq n$.

证. 事实上, 若 $j(e_i) = e_{n+i}$, $1 \leq i \leq n$, 则我们有 $j(e_{n+i}) = -e_i$, 从而 j 在辛基 e_1, \dots, e_{2n} 下的矩阵是

$$-J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

于是由 §4 知 j 是辛的. 又因为在基 e_1, \dots, e_{2n} 下, 对称双线性型 $\omega(x, j(y))$ 的矩阵是 $(-J_{2n})^2 = I_{2n}$, 因此是正定的, 即 j 是适应复结构. 反之, 设 j 是 (V, ω) 上的一个适应复结构. 设 L 为 (V, ω) 的一个 Lagrange 子空间, e_1, \dots, e_n 是 L 的这样一组基, 它们对于双线性型 $(x, y) \mapsto \omega(x, j(y))$ 是正交基, 令 $e_{n+i} = j(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, 则 e_1, \dots, e_{2n} 是 (V, ω) 的一组辛基. 证完.

5.3. 命题. 设 j 是 (V, ω) 上的一个适应复结构, 则我们有

(i) 对 (V, ω) 的任意一个 Lagrange 子空间 L , $j(L)$ 是 L 的一个 Lagrange 补子空间;

(ii) V 的任一复子空间 (即在 j 的作用下不变子空间) 都是辛子空间.

证. 因为 $j \in Sp(V, \omega)$, 所以 $j(L)$ 是 Lagrange 子空间, 若 $x, y \in L$, 则我们有

$$\omega(x, j(j(y))) = -\omega(x, y) = 0,$$

从而 $j(L)$ 对于双线性型 $(x, y) \mapsto \omega(x, j(y))$ 与 L 正交. 因

为该双线性型是正定的,所以我们有 $L \cap j(L) = (0)$, 因此 $j(L)$ 是 L 的 Lagrange 补, (i) 得证. 现若 E 是 V 的一个复子空间, $x \in E \cap E^\perp$, 则由于 $j(x) \in E$, 所以 $\omega(x, j(x)) = 0$, 于是有 $x = 0$. 因此 $E \cap E^\perp = (0)$. 这说明 E 是一辛子空间. 证完.

5.4. 引理. 设 j 为辛空间 (V, ω) 的一个辛复结构, $s \in Gl(V)$, 则下列条件等价:

(i) $soj = jos$ 而且对任意的 $x, y \in V$ 有 $\omega(s(x), s(y)) = \omega(x, y)$,

(ii) $soj = jos$ 而且对任意的 $x, y \in V$ 有 $\omega(x, j(y)) = \omega(s(x), j(s(y)))$,

(iii) $\omega(s(x), s(y)) = \omega(x, y)$ 而且对任意的 $x, y \in V$ 有 $\omega(s(x), j(s(y))) = \omega(x, j(y))$.

证. 从 (i) 推 (ii) 和从 (ii) 推 (iii) 都是显然的. 若 (iii) 成立, 则

$$\omega(s(x), s(j(y)) - j(s(y))) = 0$$

对任意的 $x, y \in V$ 成立. 因此 $soj = jos$. 因此可由 (iii) 推出 (i). 证完.

引理 5.4 中的条件 (i) 等于说 $s \in Gl_c(V) \cap Sp(V, \omega)$, 条件 (ii) 等于说 $s \in Gl_c(V) \cap O(V, b)$, 这里 $O(V, b)$ 代表 V 的对于对称双线性型 $b(x, y) = \omega(x, j(y))$ 的正交变换群, 而 (iii) 则等于说 s 保持 Hermite 型 $h = b - i\omega$ 不变.

如果 (V, ω) 就是标准辛空间 (R^{2n}, ω) , 而 j 则是由矩阵 J_{2n} 所定义的复结构, 则 b 是 Euclid 线性型

$$b(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 2n,$$

而 h 则是标准的 Hermite 型

$$h(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

于是我们有下面的命题

5.5. 命题.

$$Sp(2n) \cap Gl(n, C) = O(2n) \cap Gl(n, C) = U(n),$$

其中 $O(2n)$ 表示正交群, $U(n)$ 表示酉群.

5.6. 推论. 酉群 $U(n)$ 是 $Sp(2n)$ 的一个极大紧子群.

证. 设 G 是 $Sp(2n)$ 的一个紧子群且设 $G \supset U(n)$. 设 b 为 R^{2n} 上的 Euclid 线性型. 由于 G 紧, 所以在 R^{2n} 上存在一个在 G 的作用下不变的 正定对称双线性型 \tilde{b} (参看文献 [5]). 不难知道, 可以选取 $\lambda \in R$ 使 $b - \lambda\tilde{b}$ 的秩 $< 2n$. 因为 $U(n) \subset O(2n)$, 所以 $b - \lambda\tilde{b}$ 的核是 $U(n)$ 的非零不变子空间. 又因为 $U(n)$ 在酉向量集上可递, 所以 $\text{Ker}(b - \lambda\tilde{b}) = R^{2n}$, 也即 $b = \lambda\tilde{b}$ 并且 $G \subset Sp(2n) \cap O(2n) = U(n)$. 所以 $G = U(n)$. 证完.

习题. 设 $S = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 是 $Sp(2n)$ 的一个元素, 其中 A, B, C, D 都是 $n \times n$ 矩阵. 令 P 为所有的这样的 $n \times n$ 复系数矩阵 Z 的集合, Z 对称并且 $\frac{1}{2i}(Z - \bar{Z})$ 是正定的. 证明若 $Z \in P$, 则 $CZ + D$ 可逆. 证明映射

$$(S, Z) \mapsto (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, S \in Sp(2n).$$

定义了群 $Sp(2n)$ 在 P 上的一个作用, 即对任意的 $S \in Sp(2n)$ 和 $Z \in P$ 有

$$(AZ + B)(CZ + D)^{-1} \in P.$$

证明该作用是可递的并求出 $iI_n \in P$ 的稳定子 (参看文献 [22]).

第二章 辛流形

在本章及以后各章里,“可微”指的是“ C^∞ 可微”,“流形”指的是 C^∞ 可微实流形,而“微分形式”及“向量场”则分别指外微分形式和 C^∞ 向量场.

设 M 是一个流形,我们以 $\Omega^p(M)$ 来表示 M 上的微分 p -形式所构成的空间,而以 $\mathcal{Q}(M)$ 来表示分级代数

$$\bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(M).$$

对于 M 上的一个向量场 X ,我们可以在 $\mathcal{Q}(M)$ 上定义两个很重要的算子:通过 X 的内积,记为 $i(X)$,以及Lie导子 $\theta(X)$. $i(X)$ 的定义见第一章,而 $\theta(X)$ 则可用下式来定义:

$$\theta(X) = d \circ i(X) + i(X) \circ d,$$

其中 d 是 $\mathcal{Q}(M)$ 的外微分算子.对 $i(X)$ 和 $\theta(X)$,我们有下列关系式(参看文献[12]):

$$\theta([X, Y]) = \theta(X) \circ \theta(Y) - \theta(Y) \circ \theta(X),$$

$$i([X, Y]) = \theta(X) \circ i(Y) - i(Y) \circ \theta(X),$$

$$i(X) \circ i(Y) + i(Y) \circ i(X) = 0.$$

其中 X 和 Y 都是 M 上的向量场.从定义可知Lie导子 $\theta(X)$ 是分级代数 $\mathcal{Q}(M)$ 的0级导子,内积 $i(X)$ 是-1级的 Z_2 -导子.

设 N 是流形 M 的一个子流形, $\alpha \in \Omega^p(M)$.我们记 $\alpha|_N$ 为 α 在 $\Omega^p(N)$ 中的拉回(pull back).

§ 6. 流形上的辛结构

6.1. 定义. 设微分形式 $\omega \in \Omega^2(M)$,若 ω 满足下面的两个条件:

(1) 对任一 $x \in M$, ω_x 都是点 x 处的切向量空间 $T_x M$ 的一

个辛结构,

$$(2) d\omega = 0,$$

则称它为流形 M 上的一个辛结构, 并且称 (M, ω) 为辛流形.

设 (M_1, ω_1) 和 (M_2, ω_2) 是两个辛流形,

$$\varphi: M_1 \rightarrow M_2$$

是一可微映射. 若 φ 满足条件

$$(6.2) \quad \omega_1 = \varphi^*(\omega_2),$$

则我们称 φ 为从 (M_1, ω_1) 到 (M_2, ω_2) 内的一个辛流形同态. 而从 (M_1, ω_1) 到 (M_2, ω_2) 上的一个辛流形同构, 则是满足条件 (6.2) 的一个从 M_1 到 M_2 上的微分同胚.

若

$$\varphi: (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$$

是一辛流形同态, 则对任一 $x \in M_1$, φ 在 x 点的微分是辛向量空间之间的一个同态

$$\varphi_x^T: (T_x M_1, (\omega_1)_x) \rightarrow (T_{\varphi(x)} M_2, (\omega_2)_{\varphi(x)}).$$

因此, 所有的辛流形同态都是浸入映射.

基本性质. 设 (M, ω) 是一辛流形, 则我们有:

(a) M 的维数是偶数.

(b) M 是可定向的. 若设 $\dim M = 2n$, 则 n 阶外积 ω^n 就是 M 上的一个体积元素.

(c) 若 $v \in T_x M$, 则 $i(v)\omega_x \in T_x^*(M)$. 由映射

$$v \mapsto i(v)\omega_x, \quad v \in T_x(M),$$

可定义从切丛 TM 到余切丛 T^*M 上的一个标准同构. 同样, 把 M 上的向量场 X 映为 1-形式 $i(X)\omega$ 的映射是从向量场模到 1-形式模上的标准同构.

(d) M 上所有的一阶标架所构成的纤维丛含有一个由结构群 $Sp(2n)$ 所决定的子丛, 这个子丛由辛标架构成, 所谓辛标架, 指的是满足 $A(\xi)\omega_x = \omega$ 的标架 $\xi: R^{2n} \rightarrow T_x M$, 其中 ω 是 R^{2n} 上的标准辛形式 (参看 § 2).

(e) 若 M 是紧流形, 则对 $i = 0, 1, \dots, n$, 上同调空间

(de Rham) $H^{2i}(M, R)$ 均非零. 事实上, 形式 ω^i 所对应的上同调类 $[\omega^i] = [\omega]^i \in H^{2i}(M, R)$. 由于 ω^n 是体积元素, 所以 $[\omega^n] \neq 0$, 故知 $[\omega^i] \neq 0$. 从而也就可以知道维数 $\neq 2$ 的球没有辛结构. 我们可以在同胚于 2 维球的投影空间 CP^1 上定义一辛结构.

注. 设 (M, ω) 是一 $2n$ 维的辛流形, 则对任意的 $\lambda \in R^+$, $\lambda\omega$ 都是 M 上的辛结构. 若 M 紧而且 $|\lambda| \neq 1$, 则辛流形 (M, ω) 和 $(M, \lambda\omega)$ 是不同构的, 这是因为

$$|\int_M \omega^n| \neq |\int_M (\lambda\omega)^n|.$$

例 1. 设 x_1, \dots, x_{2n} 是 R^{2n} 上的自然坐标, 则 2-形式

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$$

是流形 R^{2n} 上的一个辛结构, 我们称它为 R^{2n} 上的标准辛结构.

例 2. 设 G 是由 R^{2n} 上这样一些仿射变换 f 所构成的群, 这些 f 的线性部分属于 $Sp(2n)$, 则 G 含平移变换, 是辛流形 (R^{2n}, ω) 的可递自同构群. 若 Γ 是 G 的一个离散子群, 而且它在 R^{2n} 上的作用是自由作用, 则 R^{2n}/Γ 是一流形, 而且在 R^{2n}/Γ 上存在唯一的辛结构使得标准映射

$$R^{2n} \rightarrow R^{2n}/\Gamma$$

是一辛流形同态. 若取 Γ 为整平移群 Z^{2n} , 则可以在环面 R^{2n}/Z^{2n} 上定义一辛结构使该辛结构对于 R^{2n} 在 R^{2n}/Z^{2n} 上的自然作用是不变的.

例 3. 设 (M, ω) 是一辛流形,

$$\pi: \tilde{M} \rightarrow M$$

是 M 的一个覆盖, 则 $(\tilde{M}, \pi^*(\omega))$ 是辛流形而且 π 是辛流形同态.

例 4. 设 (M_1, ω_1) 和 (M_2, ω_2) 是两个辛流形. 设

$$pr_i: M_1 \times M_2 \rightarrow M_i, \quad i = 1, 2,$$

是标准投影, 则 $pr_1^*(\omega_1) + pr_2^*(\omega_2)$ 是 $M_1 \times M_2$ 上的一个辛结构. 我们称辛流形

$$(M_1 \times M_2, pr_1^*(\omega_1) + pr_2^*(\omega_2))$$

为辛流形 (M_1, ω_1) 和 (M_2, ω_2) 的积, 并把它记为

$$(M_1, \omega_1) \times (M_2, \omega_2).$$

Kähler 结构. 设 M 是 $-2n$ 维流形, J 是 M 上的一个复结构, 则作为 M 上的张量, J 是 $(1,1)$ 型的. 所以我们可以把它看作 M 上的向量场模的一个自同态. J 满足下列条件:

$$(1) \quad J^2 = -id,$$

$$(2) \quad J[X, Y] = [JX, Y] + [X, JY] + J[JX, JY],$$

其中 X, Y 是 M 上的任意的两个向量场.

设 g 是 M 上的微分对称 2-形式并且

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

对 M 上任意的向量场 X, Y 成立. 令

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y),$$

则 $\omega \in \mathcal{Q}^2(M)$.

若 g 在 M 的任意一点处的秩都是 $2n$, 即 g 是伪 Riemann 形式, 则对任意的 $x \in M$, ω_x 都是向量空间 $T_x M$ 上的辛形式而且 J_x 是 $(T_x M, \omega_x)$ 上的辛复结构. 形式 $h = g - i\omega$ 是 M 上的一个伪 Hermite 形式. 若还有 $d\omega = 0$, 则 ω 是 M 上的一个辛结构, 并且我们称 h 为伪 Kähler 形式. 最后, 若 $d\omega = 0$ 并且 g 在 M 的任意一点处的切空间都是正定的, 则 h 称为 M 上的一个 Kähler 形式. 若 h 是一 Kähler 形式, 则对任一 $x \in M$, J_x 都是 $(T_x M, \omega_x)$ 上的一个适应复结构.

若 h 是复流形 M 上的一个 Kähler 形式, 则对 M 的任意一个复子流形 N , h 在 N 上的拉回都是 N 上的一个 Kähler 形式. 特别, M 的所有复子流形都具有诱导的辛结构.

例 5. 设 CP^n 是由 C^{n+1} 中所有的复直线所构成的复投影空间. 任意一点 $D \in CP^n$ 处的切向量空间可以等同于复线性映射空间

$$\mathcal{L}_c(D, C^{n+1}/D).$$

若 η 为 C^{n+1} 上的标准 Hermite 形式, 即

$$\eta = \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i,$$

其中 z_1, \dots, z_{n+1} 是 C^{n+1} 上的自然坐标, 令 D^\perp 为 D 在 C^{n+1} 中对于 η 的正交超平面, 则可以把 D 点的切空间等同于复向量空间 $\mathcal{L}_c(D, D^\perp)$. 于是对任意的 $D \in CP^n$, 我们可以在 $T_D CP^n$ 上定义一 Hermite 形式如下:

$$\eta_D(\varphi, \psi) = \frac{\eta(\varphi(u), \psi(u))}{\eta(u, u)},$$

其中 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_c(D, D^\perp)$, $u \in D \setminus (0)$. 设 p 是从 $U = C^{n+1} \setminus (0)$ 到 CP^n 上的标准映射

$$u \mapsto Cu.$$

利用下式把切丛 TU 等同于 $U \times C^{n+1}$:

$$(u, v) = \frac{d}{dt}(u + tv)|_{t=0}, \quad u \in U, v \in C^{n+1}.$$

于是, 对任意的 $(u, v) \in T_u U$, 我们可定义

$$\mathcal{L}_c(C_u, (C_u)^\perp)$$

中的一个向量 $p^T(u, v)$, 使得

$$(p^T(u, v))(u) = v - \frac{\eta(v, u)}{\eta(u, u)} u.$$

这样, 对 $(u, v), (u, w) \in T_u U$ 我们有

$$\eta_{Cu}(p^T(u, v), (u, w)) = \frac{\eta(u, u)\eta(v, w) - \eta(v, u)\eta(w, u)}{\eta(u, u)^2},$$

这是 U 上由下式

$$\bar{\eta} = \frac{\left(\sum_j z_j \bar{z}_j\right) \left(\sum_j dz_j d\bar{z}_j\right) - \left(\sum_j \bar{z}_j dz_j\right) \left(\sum_j z_j d\bar{z}_j\right)}{\left(\sum_j z_j \bar{z}_j\right)^2}$$

所定义的 Hermite 型 $\bar{\eta}$ 在向量对 $(u, v), (u, w)$ 上的值. 于是, 对任一 $D \in CP^n$, η_D 都是 CP^n 上满足 $p^*(h) = \bar{\eta}$ 的 Hermite 形式 η 在 D 点的值. 记 η 的虚部为 ω , 则 $p^*(\omega)$ 是 $\bar{\eta}$ 的虚部. 令 $z_j = x_j + iy_j$, 则 $p^*(\omega)$ 就等于

$$-\frac{1}{r} \sum_j dx_j \wedge dy_j + \frac{1}{2} \frac{dr}{r^2} \wedge \sum (x_j dy_j - y_j dx_j),$$

其中 $r = \sum_j z_j \bar{z}_j$. 直接计算知 $p^*(\omega)$ 是一闭的 2-形式. 从而有

$$p^*(d\omega) = d(p^*(\omega)) = 0.$$

又因为 p 是子浸入, 所以 $d\omega = 0$. 这就证明了 η 是一 Kähler 形式而 ω 是 CP^n 上的一个辛结构.

酉群 $U(n+1)$ 在 CP^n 上的作用可递并且保持 Kähler 形式 h 不变. 设 $D \in CP^n$ 并设 $r_D \in U(n+1)$ 是由下面的条件所决定的反射:

$$r_D(x) = \begin{cases} -x, & x \in D, \\ x, & x \in D^\perp, \end{cases}$$

则 r_D 在 CP^n 上的作用保持点 D 不动而对任意的 $\varphi \in T_D CP^n$, $(r_D)^* \varphi = -\varphi$. 可见它是以 D 为中心点的一个“对称”. 于是对 CP^n 上任一微分 p -形式 α 有

$$(r_D^*(\alpha))_D = (-1)^p \alpha_D.$$

若 p 是一奇数且 α 在 $U(n+1)$ 下不变, 则

$$\alpha_D = (r_D^*(\alpha))_D = -\alpha_D$$

对所有 $D \in CP^n$ 都成立. 于是 $\alpha = 0$. 这推出 CP^n 上的 $U(n+1)$ 不变微分形式或者是偶数阶的或者是 0, 并且全都是闭的. 因为 η 是 $U(n+1)$ 不变微分形式, 所以这也从另一方面证明了 η 的虚部是闭形式. 用同样的方法可以证明, 所有齐性对称空间的不变微分形式都是闭的 (参看文献 [12]).

注. 存在不具有 Kähler 结构的紧辛流形, Thurston 给出了一个 4 维的例子, 构造的方法与例 2 类似 (参看文献 [29]).

§ 7. 辛流形上的微分形式代数的算子

设 (M, ω) 是一 $2n$ 维的辛流形. 由辛流形的定义, 对任意的

$x \in M$, $(T_x M, \omega_x)$ 都是一辛空间. 设 $\mathcal{Q}_x(M)$ 是向量空间 $T_x M$ 上的反对称形式代数. 如 §3 中所述, Lie 代数 $sl(2, R)$ 在每一 $\mathcal{Q}_x(M)$ 中有一标准线性表示. 这一线性表示可由 $sl(2, R)$ 在 $\mathcal{Q}(M)$ 上的一个标准线性表示通过限制在 $\mathcal{Q}_x(M)$ 上得到. 下面我们就来定义 $sl(2, R)$ 在 $\mathcal{Q}(M)$ 上的一个标准线性表示.

首先, 对任意的 $\beta \in \mathcal{Q}(M)$, 定义 $\mathcal{Q}(M)$ 的自同态 X 为

$$X(\beta) = \omega \wedge \beta.$$

其次, 定义 $\mathcal{Q}(M)$ 的自同态 H 为

$$H(\beta) = (p - n)\beta, \forall \beta \in \mathcal{Q}^p(M).$$

设 $x \in M$, e_1, \dots, e_{2n} 是 $(T_x M, \omega_x)$ 的一组辛基. 我们定义 $\mathcal{Q}(M)$ 的自同态 Y 使

$$(Y(\beta))_x = \sum_{j=1}^n i(e_j)i(e_{n+j})\beta_x, \forall \beta \in \mathcal{Q}(M).$$

在局部上, Y 可表达为

$$Y = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} i(E_j)i(E'_j),$$

其中 E_1, \dots, E_{2n} 和 E'_1, \dots, E'_{2n} 是满足 $\omega(E_j, E'_j) = \delta_{jj}$ 的两组向量场.

把 $\mathcal{Q}(M)$ 看作 $\mathcal{Q}^p(M) = C^\infty(M)$ 上的模. 容易看出, 算子 X, H, Y 是模 $\mathcal{Q}(M)$ 的自同态. 注意到这已经在 §3 中讨论过, 所以我们有

$$\begin{aligned} [H, X] &= H \circ X - X \circ H = 2X, \\ (7.1) \quad [H, Y] &= H \circ Y - Y \circ H = -2Y, \\ [X, Y] &= X \circ Y - Y \circ X = -H. \end{aligned}$$

所以算子 X, H, Y 在 $\mathcal{Q}(M)$ 上定义了 Lie 代数 $sl(2, R)$ 的一个标准线性表示. 这一表示在流形的研究, 尤其在 Kähler 流形的研究中起很重要的作用 (参看文献 [27]).

现设 ω 是一正合形式, 即在 M 上存在 1-形式 α 使 $d\alpha = -\omega$. 我们把由 α 定义的 $\mathcal{Q}(M)$ 的自同态

$$\beta \mapsto \alpha \wedge \beta, \quad \forall \beta \in \mathcal{Q}(M),$$

称为由 α 定义的左外积, 并记为 $\mu(\alpha)$. 利用 α , 我们在 $\mathcal{Q}(M)$ 上定义两个新的算子 P 和 Q 如下:

$$P = d - \mu(\alpha), \quad (7.2)$$

$$Q = [Y, P].$$

算子 P 和 Q 都是一阶微分算子. 例如, 对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 和 $\beta \in \mathcal{Q}(M)$, 我们有

$$P(f\beta) = fP(\beta) + d f \wedge \beta.$$

又 P 和 Q 分别是 1 级和 -1 级的导子, 即有

$$(7.3) \quad P(\mathcal{Q}^p(M)) \subset \mathcal{Q}^{p+1}(M), \quad Q(\mathcal{Q}^p(M)) \subset \mathcal{Q}^{p-1}(M).$$

7.4. 命题. 算子 X, Y, H, P 和 Q 满足下列关系式:

- (i) $[H, P] = P, [H, Q] = -Q$;
- (ii) $[X, P] = 0, [X, Q] = -P$;
- (iii) $[Y, P] = Q, [Y, Q] = 0$;
- (iv) $P^2 = X, Q^2 = Y, P \circ Q + Q \circ P = H$.

证. 关系式 (i) 可直接从 (7.3) 导出. 现证 (ii) 因为 $d\omega = 0$, 所以有 $[d, X] = 0$, 从而由 (7.2) 和 α 的定义有 $[X, P] = 0$. 根据定义, $Q = [Y, P]$, 所以我们有

$$\begin{aligned} [X, Q] &= [X, [Y, P]] = [[X, Y], P] + [Y, [X, P]] \\ &= -[H, P] = -P. \end{aligned}$$

(ii) 得证. 又因为 $d\alpha = -\omega$, 所以我们有

$$d \circ \mu(\alpha) + \mu(\alpha) \circ d = -X,$$

于是

$$P^2 = (d - \mu(\alpha))^2 = X.$$

因为 $Q = [Y, P]$, 所以

$$\begin{aligned} P \circ Q + Q \circ P &= P \circ Y \circ P - P^2 \circ Y + Y \circ P^2 - P \circ Y \circ P \\ &= [Y, X] = H. \end{aligned}$$

现在只剩下证明 $[Y, Q] = 0$ 和 $Q^2 = Y$. 设

$$\alpha = RX + RY + RH$$

是由 X, Y, H 生成的空间 $\mathcal{Q}(M)$ 上的自同态 Lie 代数 $gl(\mathcal{Q}(M))$

的子代数, 则 \mathfrak{a} 同构于 $sl(2, R)$. 记 ε 为 $gl(Q(M))$ 中由下列元素张成的向量子空间:

$$P, ad(Y)P, \dots, ad(Y)^r P, \dots$$

其中 ad 是 $gl(Q(M))$ 的伴随表示 (即 $ad(U)V = [U, V]$, $U, V \in gl(Q(M))$). 因为对大于 n 的正整数 r 有 $ad(Y)^r = 0$, 所以空间 ε 是有限维的. 又因为对所有 $r \geq 0$ 有

$$ad(H)ad(Y)^r P = (2r + 1)ad(Y)^r P,$$

所以 ε 在 $ad(Y)$ 和 $ad(H)$ 的作用下都不变. 又因为

$$\begin{aligned} & ad(X)ad(Y)^r - ad(Y)^r ad(X) \\ &= r(1 - r)ad(Y)^{r-1} - r ad(H)ad(Y)^{r-1}, \end{aligned}$$

所以 ε 在 $ad(X)$ 下也不变. 因为 $ad(X)P = 0$ 而且 $ad(H)P = P$, 所以 P 对于 \mathfrak{a} 的由伴随表示 ad 限制在 ε 上而得到的线性表示来说, 是权为 1 的素元素. 我们知道 (参看文献 [13] 或 [31]), 这时一定有 $ad(Y)^2 P = 0$, 从而

$$[Y, Q] = ad(Y)Q = ad(Y)^2 P = 0.$$

把 Q^2 分别写成

$$Q^2 = Q \circ Y \circ P - Q \circ P \circ Y = Y \circ Q \circ P - Q \circ P \circ Y,$$

和

$$Q^2 = Y \circ P \circ Q - P \circ Y \circ Q = Y \circ P \circ Q - P \circ Q \circ Y,$$

就得到 $2Q^2 = [Y, H] = 2Y$. 证完.

利用所谓“Lie 超代数”的概念, 命题 7.4 中的关系式可用“Lie 超代数”的语言很好地表达出来. 下面我们就来定义 Lie 超代数, 并且给出一些例子.

7.5. 定义. (参看文献 [14].) 域 k 上的一个 Lie 超代数是 k 上的一个 Z_2 -分级向量空间 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1$, 和一双线性映射 (称为括号)

$$[,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

使得下面的 (1)–(3) 成立:

- (1) $[\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{p+q}$, $p, q \in Z_2$,
- (2) $[x, y] = (-1)^{pq}[y, x]$, 对 $\forall x \in \mathfrak{g}_p, y \in \mathfrak{g}_q$,

$$(3) [x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{pq}[y, [x, z]],$$

对 $\forall x \in \mathfrak{g}_p, y \in \mathfrak{g}_q$.

例 1. 设

$$V = \bigoplus_{p \in Z} V_p$$

是一 Z -分级向量空间. 记 $gl(V)_r$ 为 $gl(V)$ 中所有满足 $\alpha(V_p) \subseteq V_{p+r}$ 的元素 α 所构成的集合. 在 Z -分级空间

$$gl(V)_* = \bigoplus_{r \in Z} gl(V)_r$$

上定义一括号如下:

$$[\alpha, \beta] = \alpha \circ \beta - (-1)^{pq} \beta \circ \alpha, \quad \forall \alpha \in gl(V)_p, \beta \in gl(V)_q.$$

对于这样定义的括号, 若将 $gl(V)_*$ 原来在 Z 中的分级按模 2 同余类重新分级, 则空间 $gl(V)_*$ 就成为一 Lie 超代数.

例 2. 设

$$A = \bigoplus_{p \in Z} A_p$$

是一 Z -分级结合代数 ($A_p A_q \subseteq A_{p+q}$), $gl(A)_p$ 的定义同例 1. 若 $\alpha \in gl(A)_p$ 且

$$\alpha(xy) = \alpha(x)y + (-1)^{pr} x\alpha(y), \quad \forall x \in A_r, y \in A,$$

则我们称 α 为 A 的一个 Z_2 -导子. 记 $Der(A)_p$ 为 $gl(A)_p$ 中所有的 Z_2 -导子构成的子空间, 则

$$Der(A)_* = \bigoplus_{p \in Z} Der(A)_p$$

是 $gl(A)_*$ 的一个 Lie 子超代数, 即它是在 $gl(A)_*$ 的括号下不变的分级子空间.

例 3. 设 e_{-1}, e_0, e_1 是 R^3 的一组自然基, 在 R^3 上定义一 Z -分级如下:

$$e_p \text{ 的级数} = p, \quad p = -1, 0, 1.$$

设 b 是 R^3 上的双线性型, 它在基 e_{-1}, e_0, e_1 下对应着矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则 b 在 $R_{e_{-1}} + R_{e_1}$ 上的限制是辛形式而在 R_{e_0} 上的限制则是对称正定型 (称 b 为正交辛形式). 设 $osp(2, 1)$ 是 $gl(3, R) = gl(R^3)$ 中这样的一个 Z -分级子空间, 它的 p 级元素是 $gl(3, R)_p$ 中满足

$$b(\alpha(x), y) + (-1)^{pr} b(x, \alpha(y)) = 0, \quad \forall x \in R_{e_r}, y \in R^3,$$

的元素 α , 则 $osp(2, 1)$ 是 $gl(3, R)$ 的一个 Lie 子超代数 (比较例 1). 它是 5 维的, 而且下列元素构成它的一组基:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ Y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & P &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ Q &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

元素 X, P, H, Q, Y 的 Z -级数分别是 2, 1, 0, -1, -2. $osp(2, 1)$ 中由偶数级元素所张成的子空间是同构于 $sl(2, R)$ 的子代数.

现设 (M, ω) 是一辛流形, 并设 X, H, Y, P, Q 是本节开头通过满足等式 $d\alpha = -\omega$ 的 α 而定义出的 $Q(M)$ 中的算子. 不难证明 (读者可作为习题自证之), 从 $osp(2, 1)$ 到 $gl(Q(M))$ 中的映射 ρ :

$$\begin{aligned} \rho(X) &= X, \quad \rho(H) = H, \quad \rho(Y) = Y, \\ \rho(P) &= P, \quad \rho(Q) = Q, \end{aligned}$$

是一 Lie 超代数同态. 于是, α 的选取确定了 $osp(2, 1)$ 在分级空间 $Q(M)$ 中的一个线性表示.

Lie 超代数 $osp(2, 1)$ 与 $sl(2, R)$ 很相似 (参看文献 [14] 和 [21]). 例如, $osp(2, 1)$ 是单代数, 即它不含除 (0) 和它本身以外的理想子代数. $osp(2, 1)$ 的所有有限维线性表示都是半单的

(即完全可约的). 对任一整数 $n \geq 0$, 在同构意义下存在唯一的一个 $2n + 1$ 维的单线性表示 (不可约线性表示). 对于这个表示, H 的权是区间 $[-n, n]$ 中的所有整数. 若 $n > 0$, 则表示分解为 $sl(2, R) \subset osp(2, 1)$ 的两个维数分别是 n 和 $n + 1$ 的单表示的直和. 最后, 我们指出, $osp(2, 1)$ 的所有单表示的维数都是奇数.

§ 8. 辛 坐 标

利用 Darboux 的一个定理, 可得到这样一个结论: 两个同维数的辛流形是局部同构的. 在本节中, 我们用对维数进行归纳的方法, 给出这个结论的一个证明. Moser (参看文献 [29]) 指出了另一通过变换给出的证明, 他的结果我们将在 §11 中加以叙述.

设 M 是一流形, α 是 M 上任意的一个 p -形式. 考虑切丛 TM 中所有这样的元素 ν , 它们满足条件: 若 $\nu \in T_x M$, 则 $i(\nu)\alpha_x = 0$. 这些 ν 所构成的集合称为 α 的核, 记为 $\text{Ker}\alpha$. 若 $\text{Ker}\alpha$ 是 TM 的纤维维数是 $\dim M - r$ 的子向量丛, 则称 α 具有常秩 r .

8.1. 引理. 设 M 是一流形, 映射

$$\varphi: M \rightarrow R^r$$

是一子浸入. 设 $\alpha \in \Omega^p(M)$. 若

$$\text{Ker}\varphi^T \subset (\text{Ker}\alpha) \cap (\text{Ker}d\alpha),$$

则对 M 的任一点 x^0 , 存在 x^0 的一个开邻域 U 和 $\Omega(\varphi(U))$ 中的一个形式 β , 使 $\alpha|_U = \varphi^*(\beta)$.

证. 设 $n = \dim M$, 并设 y_1, \dots, y_r 是 R^r 的自然坐标. 令 $x_i = y_i \circ \varphi$. 因为 φ 是子浸入, 所以存在 x_0 在 M 中的一个开邻域 V 和 V 上的可微函数 x_{s+1}, \dots, x_n 使得 x_1, \dots, x_n 是 V 上的坐标系.

对于 $i = s + 1, \dots, n$, 向量场 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 是 V 上纤维丛 $\text{Ker}\varphi^T$ 的截

面. 设 $\mathfrak{S}(p, n)$ 为所有满足

$$r(1) < r(2) < \dots < r(p)$$

的映射 τ

$$[1, p] \rightarrow [1, n]$$

所成的集合。并设 $\alpha|_V$ 的坐标表达式是

$$\alpha|_V = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(p, n)} f_\tau dx_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\tau(p)}.$$

因为对 $j > s$ 有

$$i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) \alpha = 0,$$

所以若 $\tau(p) > s$, 则 $f_\tau = 0$. 于是有

$$\alpha|_V = \sum_{\tau} f_\tau (dy_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge dy_{\tau(p)}), \quad \tau \in \mathfrak{S}(p, s).$$

又因为对 $j > s$ 有

$$i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) d\alpha = 0,$$

所以对所有的 $j > s$ 有

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_\tau = 0.$$

于是推出, 在 x_0 的某一开邻域中, 设该邻域为 U , 函数 f_τ 具有形式 $f_\tau = \varphi^*(g_\tau)$, 这里 g_τ 是 $\varphi(U)$ 上的可微函数. 令

$$\beta = \sum_{\tau} g_\tau dy_{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge dy_{\tau(p)}, \quad \tau \in \mathfrak{S}(p, s),$$

则我们有

$$\alpha|_V = \varphi^*(\beta).$$

证完.

8.2. 命题. 设 M 和 N 是两个流形, 映射

$$\varphi: M \rightarrow N$$

是一到上的子浸入. 假定 φ 的纤维是连通的. 设 α 是 M 上的一个微分形式使得

$$\text{Ker } \varphi^T = (\text{Ker } \alpha) \cap (\text{Ker } d\alpha),$$

则在 N 上存在唯一的一个微分形式 β 使得

$$\alpha = \varphi^*(\beta).$$

证. 根据引理 8.1, 对任一 $x \in M$, 存在 x 的一个开邻域 U_x .

和 $\varphi(U_x)$ 上的微分形式 β_x 使得

$$\alpha|_{U_x} = \varphi^*(\beta_x).$$

把 β_x 看作是空间 N 上的纤维丛的一个截面, 则对任意的 $x, y \in M$, 在 $\varphi(U_x \cap U_y)$ 上我们有 $\beta_x = \beta_y$. 又因为 φ 的纤维是连通的, 于是在 $\varphi(U_x) \cap \varphi(U_y)$ 上有 $\beta_x = \beta_y$. 从而在 $\varphi(M) = N$ 上存在一个微分形式 β 使等式

$$\beta_x = \beta|_{\alpha(U_x)}$$

对所有的 $x \in M$ 都成立. 于是 $\alpha = \varphi^*(\beta)$. 又因为

$$\varphi^T: TM \rightarrow TN$$

是满射, 所以上式唯一地确定了 β . 证完.

设 M 是一流形, 向量丛 TM 的一个子向量丛 E 称为是可积的, 若它是一微分流形并且对它上的任两可微截面 $X, Y, [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ 都是 E 的截面.

例如, 若

$$\varphi: M \rightarrow N$$

是一常秩可微映射, 则子纤维丛 $\text{Ker} \varphi^T \subset TM$ 便是可积的.

下面引述的 Frobenius 定理表明, 在局部上, TM 的所有可积子丛都可用上面例子中的同样的方法得到. 该定理的证明读者可在任何一本关于流形的书上找到.

Frobenius 定理. 设 M 为一维流形, E 是 TM 的一个可积子丛. 设 E 的纤维的维数是 r , TM 的纤维的维数是 n , 则在局部上, M 上存在坐标 x_1, \dots, x_n 使

$$E = \bigcap_{r < i < n} \text{Ker } dx_i.$$

于是对上述的局部坐标, $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_r}$ 在局部上是 E 的截面

的一组基.

推论. 设 M 是一流形, E 是 TM 的一个可积子丛, 则对任意的 $x \in M$, 存在 x 在 M 中的一个开邻域 U 和子浸入

$$\varphi: U \rightarrow R^{n-r}$$

使得

$$\text{Ker}\varphi^T = E \cap TU.$$

证. 这是 Frobenius 定理的直接推论. 证完.

8.3. 命题. 设 M 是一流形, $\alpha \in \Omega^p(M)$ 是一闭微分 p -形式, 并设 α 在 M 上每一点处的秩都是 r , 则对任意的 $x \in M$, 存在 x 的一个开邻域 U , 子浸入

$$\varphi: U \rightarrow R^r$$

以及 p -形式 $\beta \in \Omega^p(\varphi(U))$ 使得

$$\alpha|_U = \varphi^*(\beta).$$

并且, β 也是闭形式, 它在 $\varphi(U)$ 的每一点处的秩也是 r .

证. 因为 α 在 M 的每一点处的秩都是 r , 所以 $E = \text{Ker}\alpha$ 是 TM 的一个子丛而且其纤维的维数是 $n - r$, 这里 $n = \dim M$. 因为 $E = \text{Ker}\alpha$, 所以 E 的可微截面是 M 上的满足 $i(X)\alpha = 0$ 的向量场 X . 若 X, Y 是 E 的两个截面, 则我们有

$$\begin{aligned} i([X, Y])\alpha &= \theta(X)i(Y)\alpha + i(Y)\theta(X)\alpha \\ &= i(Y)\theta(X)\alpha \\ &= i(Y)(di(X)\alpha + i(X)d\alpha) = 0. \end{aligned}$$

所以 $[X, Y]$ 也是 E 的截面. 从而 E 是可积的. 由 Frobenius 定理的推论, 对任意的 $x \in M$, 存在 x 的一个开邻域 U_0 和子浸入 $\varphi: U_0 \rightarrow R^r$ 使得

$$\text{Ker}\varphi^T = E \cap TU_0.$$

因为

$$(\text{Ker}\alpha) \cap (\text{Ker}d\alpha) = \text{Ker}\alpha = E \supset \text{Ker}\varphi^T,$$

根据引理 8.1, 存在 x 的一个含于 U_0 中的开邻域 U 和 $\beta \in \Omega^p(\varphi(U))$ 使得

$$\alpha|_U = \varphi^*(\beta).$$

又因为 φ 是子浸入并且

$$\varphi^*(d\beta) = d\varphi^*(\beta) = d\alpha = 0,$$

所以我们有 $d\beta = 0$. 因为

$$\text{Ker}\beta = \varphi^T(\text{Ker}\alpha|_U) = 0,$$

所以 β 的秩恒等于 r . 证完.

推论. 设 α 是流形 M 上在每一点处的秩都是 $2r$ 的闭 2-形

式, 则对任意的 $x \in M$, 存在 x 的一个开邻域 U 和子浸入

$$\varphi: U \rightarrow R^{2r},$$

以及 $\varphi(U)$ 上的一个辛结构 ω 使得

$$\alpha|_U = \varphi^*(\omega).$$

证. 直接应用命题 8.3 便可. 证完.

8.4. 定理 (Darboux). 设 M 是一流形, α 是 M 上在每一点处的秩都是 $2r$ 的闭 2-形式, 则对任意的 $x \in M$, 存在 x 的一个开邻域 U 和 U 上的可微函数 x_1, \dots, x_{2r} 使得

$$\alpha|_U = dx_1 \wedge dx_{r+1} + \dots + dx_r \wedge dx_{2r}.$$

证. 我们对 $2r + \dim M$ 进行归纳. 当 $2r + \dim M = n$ 时, 结论显然成立.

下面我们把证明分作两步.

(1) 设 $2r < \dim M$. 根据命题 8.3 的推论, 存在 x 的一个邻域 U_0 , 子浸入

$$\varphi: U_0 \rightarrow R^{2r}$$

和 $\varphi(U_0)$ 上的辛结构 ω 使得

$$\alpha|_{U_0} = \varphi^*(\omega).$$

因为

$$\dim \varphi(U) = 2r < \dim M,$$

因此我们可以假设结论在 $2r - 2$ 时成立, 而对 $\dim \varphi(U) = 2r$, 存在 $y = \varphi(x)$ 在 R^{2r} 中的一个开邻域 V 和 V 上的可微函数 y_1, \dots, y_{2r} 使得

$$\omega|_V = dy_1 \wedge dy_{r+1} + \dots + dy_r \wedge dy_{2r}.$$

令 $x_i = y_i \circ \varphi$, 则得

$$\alpha|_{\varphi^{-1}(V)} = dx_1 \wedge dx_{r+1} + \dots + dx_r \wedge dx_{2r}.$$

于是我们就对所有 $2r < \dim M$ 证明了结论.

(2) 设 $2r = \dim M$. 此时, α 是 M 上的一个辛结构, 而映射

$$X \mapsto i(X)\alpha$$

是从 M 上的向量场模到模 $\mathcal{O}^1(M)$ 上的一个模同构. 所以对 M 上任一可微函数 f , 在 M 上存在唯一的一个向量场 H , 使得 $i(H)\alpha =$

df (我们将在 §9 中仔细研究映射 $f \mapsto H_f$). 设 f 是 x 的某一邻域上的可微函数使 $df_x \neq 0$, 则在 x 的某一邻域上有 $H_f \neq 0$. 我们还可以在 x 的一个充分小的开邻域 U_0 上找到一可微函数 g , 使对 U_0 的任一点都有 $H_f \cdot g = 1$. 现设 $\alpha' = \alpha - df \wedge dg$, 则 $d\alpha' = 0$ 且

$$i(H_f)\alpha' = df - (i(H_f)i(H_f)\alpha) \wedge dg - df \wedge (i(H_f)dg) = 0.$$

于是 α' 在 U_0 上任一点处的秩都 $< 2r$. 另一方面,

$$\alpha' = (\alpha')^r + r(\alpha')^{r-1} \wedge df \wedge dg = r(\alpha')^{r-1} \wedge df \wedge dg.$$

这说明在 U_0 的任一点处都有 $(\alpha')^{r-1} \neq 0$. 于是 α' 在 U_0 上是常秩为 $r-1$ 的形式. 由 (1) 可知在 x 的某一含于 U_0 中的开邻域 U 上存在可微函数 x_1, \dots, x_{r-1} 和 x_{r+1}, \dots, x_{2r-1} 使得

$$\alpha' = dx_1 \wedge dx_{r+1} + \dots + dx_{r-1} \wedge dx_{2r-1}.$$

于是得知在 U 上有

$$\alpha = dx_1 \wedge dx_{r+1} + \dots + dx_r \wedge dx_{2r},$$

其中 $x_r = f$, $x_{2r} = g$. 证完.

注. 因为 α 在每一点处的秩都是 $2r$, 所以函数 x_1, \dots, x_{2r} 在 U 的任意一点处都是不相关的.

8.5. 定义. 设 (M, ω) 是一 $2n$ 维辛流形, U 是 M 的一个开集. U 上的坐标 x_1, \dots, x_{2n} 称为辛坐标, 若

$$\omega|_U = dx_1 \wedge dx_{n+1} + \dots + dx_n \wedge dx_{2n}.$$

由 Darboux 定理知, 在 M 的每一点的一个适当的邻域上, 存在局部的辛坐标. 设 M 的维数是 $2n$. 对 R^{2n} 中的开集, 我们把它看作具有由 R^{2n} 上的标准辛结构的拉回辛结构的 $2n$ 维辛流形. 于是, 利用 M 的一个开集 U 上的辛坐标, 可定义一个从 $(U, \omega|_U)$ 到 R^{2n} 的一个开集上的同构. 局部辛坐标的存在还证明了两个同维数的辛流形是局部同构的.

§ 9. Hamilton 向量场和辛向量场

设 X 是流形 M 上的一个向量场, U 是 M 的一个开集, I 是 R 的

包含 0 的一个开区间. 设可微映射

$$\varphi: I \times U \rightarrow M$$

满足下面的两个条件:

(i) $\varphi(0, x) = x, \forall x \in U,$

(ii) 映射: $a \mapsto \varphi(a, x)$ 对 $\forall x \in U$ 都是 X 的一条积分曲线,

则我们称 φ 是由 X 产生的一个流 (flow).

记 t 为投影

$$R \times M \rightarrow R,$$

并把偏导算子 $\frac{\partial}{\partial t}$ 看作流形 $R \times M$ 上的向量场, 则上面的条件

(ii) 等价于要求

$$\varphi^T \circ \frac{\partial}{\partial t} = X \circ \varphi,$$

而在 $\Omega(M)$ 上则等价于

$$\theta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \theta(x).$$

设 $a \in I$, 则可定义一浸入

$$\lambda_a: x \mapsto (a, x), x \in U.$$

于是 λ_a 把 U 映入 $I \times U$ 中, 而且 $\varphi_a = \varphi \circ \lambda_a$ 是一依赖于参数 $a \in I$ 的从 U 到 M 内的可微映射族. 由 φ 的定义可知, 对每一 $a \in I$, φ_a 都是从 U 到 $\varphi_a(U)$ 上的一个微分同胚.

9.1. 引理. 设 α 是 M 上的一个微分 p -形式, X 是 M 上的一个向量场, $\varphi: I \times U \rightarrow M$ 是由 X 产生的一个流, 则为使 U 上的 p -形式 $\varphi_a^*(\alpha)$ 不依赖于参数 $a \in I$, 充分必要条件是在 $\varphi(I \times U)$ 上有 $\theta(X)\alpha = 0$.

证. 由微分形式

$$\varphi_a^*(\alpha), a \in I,$$

所构成的族可以看作是 $I \times U$ 上的微分形式

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) (dt \wedge \varphi^*(\alpha)).$$

但是我们有

$$\begin{aligned}
 & \theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (dt \wedge \varphi^*(\alpha)) \\
 &= i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (dt \wedge \varphi^*(\alpha)) \\
 &= i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (dt \wedge \theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \varphi^*(\alpha)) \\
 &= i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) (dt \wedge \varphi^* \theta(X)\alpha).
 \end{aligned}$$

所以若 $\theta(X)\alpha = 0$, 则 $\varphi^*(\alpha)$ 不依赖于 $a \in I$. 反之, 若 $\varphi^*(\alpha)$ 不依赖于 a , 则根据上面的计算, 我们有

$$\varphi^* \theta(X)\alpha = dt \wedge r, \quad r \in \Omega^{p-1}(I \times U).$$

从而对任意的 $a \in I$ 有

$$\varphi_* \theta(X)\alpha = \lambda_*^* \varphi^* \theta(X)\alpha = \lambda_*^*(dt) \wedge \lambda_*^*(r) = 0.$$

又由于全部 φ_a 都是子浸入, 因此在 $\varphi(I \times U)$ 上有 $\theta(X)\alpha = 0$. 证完.

9.2. 定义. 设 (M, ω) 是一辛流形, 若 M 上的一个向量场 X 满足 $\theta(X)\omega = 0$, 则我们称它为辛向量场.

因为 $d\omega = 0$, 所以向量场 X 为一辛向量场当且仅当 1-形式 $i(X)\omega$ 是闭的. 根据引理 9.1 可知, 若 X 是辛向量场, 则对任意一个由 X 产生的流

$$\varphi: I \times U \rightarrow M,$$

和任意的 $a \in I$, 我们有

$$\varphi_*^*(\omega) = \varphi_0^*(\omega) = \omega|_U.$$

从而 φ_a 是从 $(U, \omega|_U)$ 到 $(\varphi(U), \omega|_{\varphi(U)})$ 上的一个同构.

下面我们把辛流形 (M, ω) 上所有的辛向量场所构成的集合记为 $S(M, \omega)$. 因为映射

$$X \mapsto \theta(X)$$

是一实线性映射, 所以由辛向量场的定义可知 $S(M, \omega)$ 是 M 的向量场空间的一个子空间. 又因为

$$\theta([X, Y]) = [\theta(X), \theta(Y)],$$

所以若 X, Y 是辛向量场, 则 $[X, Y]$ 也是辛向量场. 于是 $S(M, \omega)$ 是 M 上的向量场所构成的 Lie 代数的一个子代数. 若 $X \in S(M, \omega)$, 则对任一开集 $U \subset M$, 有

$$X|_U \in S(U, \omega|_U).$$

注意到映射

$$X \mapsto i(X)\omega, \quad X \text{ 是 } M \text{ 上的向量场,}$$

是一双射, 所以利用它可定义辛向量场空间 $S(M, \omega)$ 到 M 的闭 1-形式所构成的向量空间上的一个标准同构. 为了更好地研究这一同构的性质, 我们先简单回顾一下 de Rham 群的定义. 设 $Z^p(M)$ 是映射

$$d: \mathcal{Q}^p(M) \rightarrow \mathcal{Q}^{p+1}(M)$$

的核, 即 $Z^p(M)$ 是 M 上所有的闭 p -形式所构成的空间. 设 $B^p(M)$ 是

$$d: \mathcal{Q}^{p-1}(M) \rightarrow \mathcal{Q}^p(M)$$

的象, 则 $B^p(M) \subset Z^p(M)$. 于是我们可定义

$$H^p(M) = Z^p(M)/B^p(M), \quad 0 \leq p \leq n.$$

这里 $n = \dim M$. 我们把 $H^p(M)$ 称为 M 的 p 维 de Rham 群. 为了明确 $H^p(M)$ 是 R -模, 我们也把它写成 $H^p(M, R)$. 容易知道 $H^0(M, R) = R$, 若 M 是连通的.

现对任意的 $X \in S(M, \omega)$, 令 X 与 $i(X)\omega$ 所代表的 $H^1(M, R)$ 中的上同调类对应, 我们就得到一个标准满线性映射

$$\rho: S(M, \omega) \rightarrow H^1(M, R).$$

下面我们来定义一个从空间 $C^\infty(M)$ 到空间 $S(M, \omega)$ 内的标准线性映射 H . 对任一函数 $f \in C^\infty(M)$, 令 f 对应于 M 上的向量场 H_f 使得 $i(H_f)\omega = df$. 于是 H_f 是唯一确定的. 因为 df 是闭的, 所以 H_f 是一个辛向量场. 又根据定义知 H 的核与 d 的核重合. 从而该核就是 M 上的局部为常数的函数空间 $H^0(M, R)$. 前面说过, 若 M 是连通的, 则 $H^0(M, R) = R$. 对任意的 $f \in C^\infty(M)$, $i(H_f)\omega$ 都是一正合形式, 于是 $\rho(H_f) = 0$. 反之, 若 $X \in S(M, \omega)$ 且 $\rho(X) = 0$, 则存在 $f \in C^\infty(M)$ 使 $i(X)\omega = df$, $X = H_f$. 于

是我们得到一标准正合列

$$(9.3) \quad (0) \rightarrow H^0(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{H} S(M, \omega) \\ \xrightarrow{\rho} H^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow (0).$$

9.4. 定义. 辛流形 (M, ω) 上的形如 $H_f (f \in C^\infty(M))$ 的向量场称为 Hamilton 向量场.

根据定义可知, 所有的 Hamilton 向量场都是辛向量场. 若 $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$, 特别地若 M 单连通, 则由 (9.3) 知所有的辛向量场都是 Hamilton 向量场. 一般地, 对 $H^1(M, \mathbb{R}) \neq 0$ 的情形, 因为每一个闭的 1-形式都局部地重合于一个正合 1-形式, 所以任一辛向量场都局部地重合于一个 Hamilton 向量场.

例1. 考虑经典力学的动力系统. 可以把它看作是某一流形 Q (称 Q 为组态空间, 参看文献[2]和[9]) 的切丛 TQ 上的一组向量场. 而 Lagrange 动力系统则是在定义了辛结构的 TQ 上的一组 Hamilton 向量场. 例如, 描述质量为 m 的质点在欧氏空间 $Q = \mathbb{R}^3$ 中的运动的动力系统, 在势 U 的作用下, 具有下面的形式:

$$X = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i},$$

其中 q_1, q_2, q_3 是 \mathbb{R}^3 中的自然坐标, 而 $\dot{q}_i = dq_i (i = 1, 2, 3)$ 是 $T\mathbb{R}^3$ 上的函数. 质量为 m 的质点的轨迹是 X 的积分曲线在 \mathbb{R}^3 上的投影.

设

$$\omega = m \sum_{i=1}^3 dq_i \wedge d\dot{q}_i,$$

则 ω 是 $T\mathbb{R}^3$ 上的一个辛结构. 若设

$$f = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m \dot{q}_i^2 - U$$

为“动-势能”函数, 则有

$$df = \sum_{i=1}^3 m \dot{q}_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i,$$

而且 $i(X)\omega = df$. 于是 $X = H_f$.

例 2. 设 $\omega = dx_1 \wedge dx_2$ 是 R^2 上的标准辛结构, 令

$$C = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

则对 R^2 上任一可微函数 f 有

$$\begin{aligned} d(i(fC)\omega) &= \theta(fC)\omega \\ &= 2f\omega + df \wedge \omega = (2f + Cf)\omega. \end{aligned}$$

所以, 为使 fC 是一辛向量场, 充分必要条件是 $Cf + 2f = 0$. 在一般情形下, 这个条件在 0 点的邻域内不能保证. 例如, 若 $f = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}$, 则向量场 fC 是 $R^2 \setminus (0)$ 上的一个辛向量场. 但是这时我们有

$$i(fC)\omega = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2},$$

这不是正合微分形式, 所以向量场 fC 不是 Hamilton 向量场.

Hamilton 向量场和辛向量场的一些整体性质. 设 (M, ω) 是一辛流形, $f \in C^\infty(M)$, 则 Hamilton 向量场 H_f 在点 $x \in M$ 处为 0 的充分必要条件是 $df_x = 0$, 即 x 是 f 的一个临界点. 若 M 是紧流形 (维数 > 0), 则 M 上每一 Hamilton 向量场在 M 上至少有两个零点, 而对于不是 Hamilton 场的辛向量场, 则可能在任一点处都 $\neq 0$.

例. 设 f 是 R^{2n} 上的一个非零线性型. 由于 df 以及 R^{2n} 上的标准辛结构都在平移下不变, 所以 H_f 也在平移下不变. 令 x 是 H_f 在环面 R^{2n}/Z^{2n} 上的投影, 则在 R^{2n}/Z^{2n} 的商辛结构下, X 是一辛向量场 (比较 §6, 例 2). 这一辛向量场恒不为 0.

若 (M, ω) 是一紧辛流形而且 $H^1(M, R) = (0)$, 则 (M, ω) 的所有由某一辛向量场所产生的流所给出的自同构 φ 至少有两个不动点. 事实上, 这时辛向量场是 Hamilton 向量场, 而它的零点就是 φ 的不动点. 这一性质对 (M, ω) 的恒等映射的 C^1 逼近 (C^1 -proche) 自同构也成立 (参看文献 [29]).

设 (M, ω) 是一 $2n$ 维的辛流形, U 是 M 上的体积有限的连通开集, 即

$$\int_U \omega^n < \infty.$$

(例如, 相对紧开集.) 设 X 是 (M, ω) 上的一个辛向量场且设 $\varphi: I \times U \rightarrow M$ 是由 X 产生的一个流. 于是对任意的 $a \in I$, $\varphi_a^*(\omega) = \omega|_U$, 所以

$$\int_{\varphi_a(U)} \omega^n = \int_U \omega^n.$$

若 $\varphi_a(U) \subset U$, 则必有 $\varphi_a(U) = U$. 设 S 是 U 的边界, 若 S 是 M 的一个超曲面, 则不可能对每一 $y \in S$, 向量 X_y 都横截于 S (transverse à S). 特殊地, 若 $X = H_f$, 则 f 在 S 上的限制的临界点就是所有使得 $X_y \in T_y S$ 的点 y .

9.5. 引理. 设 X, Y 是辛流形 (M, ω) 上的两个辛向量场, 则

$$[X, Y] = H_{\omega(X, Y)}.$$

证. 事实上,

$$\begin{aligned} i([X, Y])\omega &= \theta(X)i(Y)\omega - i(Y)\theta(X)\omega \\ &= \theta(X)i(Y)\omega = (di(x) + i(x)d)i(Y)\omega \\ &= d(i(X)i(Y)\omega) = d\omega(Y, X), \end{aligned}$$

再由 $H_{\omega(X, Y)}$ 的定义便知引理成立. 证完.

9.6. 引理. 设 X 是 (M, ω) 上的一个辛向量场, $f \in C^\infty(M)$, 则

- (i) $Xf = \omega(H_f, X)$,
- (ii) $[X, H_f] = H_{Xf}$.

证 事实上,

$$Xf = df(X) = (i(H_f)\omega)(X) = \omega(H_f, X).$$

而 (ii) 是 (i) 和引理 9.5 的直接推论. 证完.

9.7. 定义. 设 (M, ω) 是一辛流形. 我们称从 $C^\infty(M) \times C^\infty(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 内的实双线性映射

$\{, \}: (f, g) \mapsto \{f, g\} = H_f g, f, g \in C^\infty(M)$, 为 Poisson 括号.

9.8. 引理. 设 f, g 是辛流形 (M, ω) 上的两个可微函数, 则有

$$\{f, g\} = \omega(H_g, H_f), \quad [H_f, H_g] = H_{\{f, g\}},$$

其中 $[,]$ 是 M 上的向量场 Lie 代数通常的括号.

证. 事实上,

$$\{f, g\} = H_f g = i(H_f)dg = i(H_f)i(H_g)\omega = \omega(H_g, H_f),$$

所以第一个等式成立. 再利用引理 9.5 便可证明第二式. 证完.

9.9. 命题. Poisson 括号满足下列等式:

$$(i) \{f, g\} + \{g, f\} = 0,$$

$$(ii) \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,$$

$$(iii) \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\},$$

其中 $f, g, h \in C^\infty(M)$.

证. (i) 可由 $\{f, g\} = \omega(H_g, H_f)$ 导出. 利用引理 9.8, 我们有

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= H_f H_g h = [H_f, H_g]h + H_g H_f h \\ &= H_{\{f, g\}}h + \{g, \{f, h\}\} \\ &= \{\{f, g\}, h\} + \{g, \{f, h\}\}. \end{aligned}$$

再利用 (i) 便得 (ii). 最后,

$$\begin{aligned} \{f, gh\} &= H_f(gh) = (H_f g)h + g(H_f h) \\ &= \{f, g\}h + g\{f, h\}. \end{aligned}$$

证完.

命题 9.9 里的关系式 (i) 和 (ii) 表明, $C^\infty(M)$ 对 Poisson 括号构成 R 上的一个 Lie 代数.

9.10. 命题. 若在 $H^0(M, R)$ 和 $H^1(M, R)$ 上定义零括号使它们成为 Lie 代数, 则正合序列 (9.3)

$$(0) \rightarrow H^0(M, R) \rightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{H} S(M, \omega) \xrightarrow{\rho} H^1(M, R) \rightarrow (0)$$

成为一 Lie 代数正合列.

证. 若 $f, g \in H^0(M, R)$, 则因函数 g 在局部上是常数, 所以有 $\{f, g\} = H_f g = 0$. 于是内射 $H^0(M, R) \rightarrow C^\infty(M)$ 是一 Lie 代数同态. 根据引理 9.8 可知

$$H: C^\infty(M) \rightarrow S(M, \omega)$$

也是 Lie 代数同态. 设 $X, Y \in S(M, \omega)$ 是两个辛向量场, 根据引

理 9.5, 我们有

$$i([X, Y])\omega = i(H_{\omega(Y, X)})\omega = d(\omega(Y, X)).$$

于是 $[X, Y]$ 在 $H^1(M, R)$ 中的象是零, 所以映射

$$\rho: S(M, \omega) \rightarrow H^1(M, R)$$

是 Lie 代数同态. 证完.

我们已经知道, 辛向量场集 $S(M, \omega)$ 是 M 的向量场 Lie 代数的一个 Lie 子代数, 而根据引理 9.8, 我们知道 Hamilton 向量场的全体构成 $S(M, \omega)$ 的一个 Lie 子代数.

9.11. 命题. 由 Poisson 括号所定义的 Lie 代数 $C^\infty(M)$ 的中心是 M 上的局部常数函数空间 $H^0(M, R)$.

证. 事实上, 若 $f \in C^\infty(M)$ 且对任意的 $g \in C^\infty(M)$ 有 $\{f, g\} = 0$, 则 $H_f g = \{f, g\} = 0$ 对所有的 $g \in C^\infty(M)$ 都成立. 于是 $H_f = 0$. 又我们已经知道 $H^0(M, R)$ 是 H 的核, 所以 $f \in H_0(M, R)$. 反之, 对任意的 $f \in H^0(M, R)$ 当然有 $\{f, g\} = 0, \forall g \in C^\infty(M)$. 证完.

设 (P, ω_P) 和 (Q, ω_Q) 是两个辛流形且设

$$\varphi: P \rightarrow Q$$

是一可微映射. 因为映射

$$X \mapsto i(X)\omega_P$$

是从 P 上的向量场模到模 $\mathcal{Q}^1(P)$ 上的一个同构, 所以对 Q 上任一向量场 Y , 存在 P 上唯一的一个向量场 $\varphi^*(Y)$ 使下式成立:

$$i(\varphi^*(Y))\omega_P = \varphi^*(i(Y)\omega_Q).$$

映射 $\varphi^*: Y \mapsto \varphi^*(Y)$ 是一实线性映射. 若 $g \in C^\infty(M)$, 则有

$$\varphi^*(gY) = \varphi^*(g)\varphi^*(Y).$$

9.12. 引理. $(P, \omega_P), (Q, \omega_Q)$ 同上. 设 Y 是 Q 上的一个辛向量场, 则 $\varphi^*(Y)$ 是 P 上的一个辛向量场并且对任意的 $g \in C^\infty(Q)$ 都有

$$\varphi^*(H_g) = H_{\varphi^*(g)}.$$

证. 事实上, 若 Y 是一辛向量场, 则

$$di(\varphi^*(Y))\omega_P = d\varphi^*(i(Y)\omega_Q) = \varphi^*(di(Y)\omega_Q) = 0,$$

所以由 $\theta(\varphi^*(Y))$ 的定义知

$$\theta(\varphi^*(Y))\omega_P = di(\varphi^*(Y))\omega_P + i(\varphi^*(Y))d\omega_P = 0.$$

于是 $\varphi^*(Y)$ 是辛向量场. 又对任意的函数 $g \in C^\infty(Q)$ 有

$$i(\varphi^*(H_g))\omega_P = \varphi^*(i(H_g)\omega_Q) = \varphi^*(dg) = d\varphi^*(g),$$

所以 $\varphi^*(H_g) = H_{\varphi^*(g)}$. 证完.

9.13. 引理. 设 (P, ω_P) 和 (Q, ω_Q) 是两辛流形,

$$\varphi: (P, \omega_P) \rightarrow (Q, \omega_Q)$$

是一辛流形同态, 则对任一点 $x \in P$ 和任意的 Q 上的向量场 Y , 向量

$$\varphi^T(\varphi^*(Y)_x) - Y_{\varphi(x)}$$

对于 $(\omega_Q)_{\varphi(x)}$ 与 $\varphi^T(T_x P)$ 正交.

证. 事实上, 因为 $\omega_P = \varphi^*(\omega_Q)$, 所以对任一向量 $v \in T_x P$, 我们有

$$\begin{aligned} \omega_Q(\varphi^T(\varphi^*(Y)_x), \varphi^T v) &= \omega_P(\varphi^*(Y)_x, v) \\ &= (i(\varphi^*(Y))\omega_P)(v) = (\varphi^*(i(Y)\omega_Q))(v) \\ &= (i(Y)\omega_Q)(\varphi^T v) = \omega_Q(Y_{\varphi(x)}, \varphi^T v). \end{aligned}$$

因此结论成立. 证完.

9.14. 命题. 设 (P, ω_P) 和 (Q, ω_Q) 是两辛流形, $\varphi: (P, \omega_P) \rightarrow (Q, \omega_Q)$ 是一辛流形同态. 若 $\dim P = \dim Q$, 则对任意的 $f, g \in C^\infty(Q)$ 有

$$\varphi^*\{f, g\} = \{\varphi^*(f), \varphi^*(g)\}.$$

并且对 Q 上的任意两个向量场 X, Y 有

$$\varphi^*[X, Y] = [\varphi^*(X), \varphi^*(Y)].$$

证. 因为 $\dim P = \dim Q$, 所以 φ 在局部上是一辛流形同构, 注意到 Poisson 括号的定义是局部性的, 便知第一个等式自然成立. 下面我们给出一个直接的证明. 根据引理 9.13, 我们有 $\varphi^T \circ \varphi^*(Y) = Y \circ \varphi$, 从而 $\varphi^*(Y)\varphi^*(g) = \varphi^*(Yg)$ 对 Q 上任一向量场 Y 和任意的 $g \in C^\infty(Q)$ 成立. 于是, 若 $f, g \in C^\infty(Q)$, 则由引理 9.12 得

$$\begin{aligned}
& \{\varphi^*(f), \varphi^*(g)\} \\
&= H_{\varphi^*(f)}\varphi^*(g) = \varphi^*(H_f)\varphi^*(g) \\
&= \varphi^*(H_f g) = \varphi^*\{f, g\}.
\end{aligned}$$

现设 X, Y 是 Q 上的两个向量场, $g \in C^\infty(Q)$, 则有

$$\begin{aligned}
& (\varphi^*[X, Y])\varphi^*(g) = \varphi^*([X, Y]g) \\
&= \varphi^*(X)\varphi^*(Yg) - \varphi^*(Y)\varphi^*(Xg) \\
&= [\varphi^*(X), \varphi^*(Y)]\varphi^*(g).
\end{aligned}$$

因为 φ 是一子浸入, 所以必有

$$\varphi^*[X, Y] = [\varphi^*(X), \varphi^*(Y)].$$

证完.

在命题 9.14 的假定下, 映射

$$\varphi^*: C^\infty(Q) \rightarrow C^\infty(P)$$

是一 Lie 代数同态 (利用 Poisson 括号把它们定义为 Lie 代数). 要注意, 不是局部同胚的辛流形的同态不具有这个性质.

例. 设 $(P, \omega_P) = (R^2, dy_1 \wedge dy_2)$ 而

$$(Q, \omega_Q) = (R^4, dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4),$$

则浸入:

$$\varphi: (a_1, a_2) \rightarrow (a_1, 0, a_2, 0)$$

是一辛流形同态. 我们有

$$\varphi^*(x_1 x_4) = \varphi^*(x_1 x_2) = 0.$$

下面我们来计算 $\{x_1 x_4, x_1 x_2\}$. 现在

$$\omega_Q = dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4,$$

所以有

$$\begin{aligned}
i\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\omega &= dx_3, & i\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\omega &= dx_4, \\
i\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\omega &= -dx_1, & i\left(\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\omega &= -dx_2.
\end{aligned}$$

根据 H_{x_i} 的定义有

$$i(H_{x_i})\omega = dx_i,$$

所以

$$H_{x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad H_{x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad H_{x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad H_{x_4} = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

于是得 (利用命题 9.9)

$$\begin{aligned} \{x_1x_4, x_1x_2\} &= \{x_1x_4, x_1\}x_2 + \{x_1x_4, x_2\}x_1 \\ &= \{x_1, x_1\}x_4x_2 + \{x_4, x_1\}x_1x_2 + \{x_1, x_2\}x_1x_4 + \{x_4, x_2\}x_1^2 \\ &= x_1^2. \end{aligned}$$

而且

$$\varphi^*\{x_1x_4, x_1x_2\} = \varphi^*(x_1^2) = y_1^2 \neq 0.$$

所以 φ^* 不是 Lie 代数同态.

§ 10. 辛坐标下的 Poisson 括号

设 (M, ω) 是一辛流形, 由于在这一节中, 我们只限于考虑局部的性质, 所以我们不妨假定 x_1, \dots, x_{2n} 是整个 (M, ω) 上的一个辛坐标系. 于是, 若把 R^{2n} 中的开集看作是具有标准辛结构的辛流形, 则 x_1, \dots, x_{2n} 定义了一个从 (M, ω) 到 R^{2n} 的某一开集上的一个同构. 因为

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$$

若

$$X = \sum_{i=1}^{2n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

是 M 上的一个向量场, 则有

$$i(X)\omega = \sum_{i=1}^n (a_i dx_{n+i} - a_{n+i} dx_i).$$

因此, 如果 $f \in C^\infty(M)$ 且 $i(X)\omega = df$, 则

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_{n+i}}, \quad a_{n+i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n).$$

于是知道, 函数 $f \in C^\infty(M)$ 所对应的 Hamilton 向量场 H_f 有表达式

$$H_f = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+i}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \right),$$

而对 $f, g \in C^\infty(M)$, 我们有

$$(10.1) \{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+i}} \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_{n+i}} \right).$$

特别地,对于坐标函数有

$$H_{x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_{n+i}}, \quad H_{x_{n+i}} = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\{x_i, x_{n+i}\} = \{x_{n+i}, x_{n+i}\} = 0,$$

$$\{x_i, x_{n+i}\} = -\delta_{ij},$$

其中 $i, j = 1, \dots, n$.

现假定 $(M, \omega) = (R^{2n}, \omega)$, 其中

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$$

是 R^{2n} 上的标准辛结构. 设 P 是由 $C^\infty(R^{2n})$ 中的多项式函数所构成的子代数. 对任整数 $r \geq 0$, 记 P_r 为 r 次齐次多项式所构成的空间. 根据式 (10.1), 对任意 $r, s \geq 0$ 有

$$\{P_r, P_s\} \subset P_{r+s-2}.$$

令 $\mathfrak{g}_r = P_{r+2}$, 则有

$$\{\mathfrak{g}_r, \mathfrak{g}_s\} \subset \mathfrak{g}_{r+s}.$$

将 P 按 \mathfrak{g}_r 在 Z 中分级后, 我们就得到一个分级 Lie 代数. 这个分级 Lie 代数的中心是 \mathfrak{g}_{-2} , 即常数函数空间. 空间 \mathfrak{g}_{-1} 由 R^{2n} 上的线性函数构成, 而空间 \mathfrak{g}_0 则由二次型构成. \mathfrak{g}_0 是一维数为 $n(2n+1)$ 的 Lie 子代数. 利用映射 $f \mapsto H_f$, 我们可以定义从 \mathfrak{g}_{-1} 到常向量场 (在 R^{2n} 的平移作用下不变的向量场) 所构成的空间上的一个同构. 利用同一映射, 我们还可以得到从 \mathfrak{g}_0 到 $S(R^{2n}, \omega)$ 中的一次辛向量场所构成的 Lie 子代数上的一个同构. 该子代数同构于 §4 中介绍过的辛群 $Sp(n)$ 的 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(R^{2n}, \omega_0)$. 事实上, 设 α 是 R^{2n} 上的一个自同态, 令 L_α 为 R^{2n} 上满足

$$L_\alpha \cdot x_i = -x_i \circ \alpha, \quad i = 1, \dots, 2n,$$

的向量场. 对任意的 $\xi \in R^{2n}$, 记 L_ξ 为满足

$$L_\xi x_i = x_i(\xi), \quad i = 1, \dots, 2n,$$

的向量场, 则有

$$[L_\alpha, L_\xi] = L_{\alpha(\xi)}.$$

于是对任意的 $\xi, \eta \in R^{2n}$,

$$\begin{aligned} & (\theta(L_\alpha)\omega)(L_\xi, L_\eta) \\ &= L_\alpha\omega(L_\xi, L_\eta) - \omega([L_\alpha, L_\xi], L_\eta) - \omega(L_\xi, [L_\alpha, L_\eta]) \\ &= \omega(L_{\alpha(\xi)}, L_\eta) + \omega(L_\xi, L_{\alpha(\eta)}) \\ &= \omega_0(\alpha(\xi), \eta) + \omega_0(\xi, \alpha(\eta)), \end{aligned}$$

其中

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n x_i \wedge x_{n+i} \in A^2(R^{2n}).$$

于是向量场 L_α 为辛向量场当且仅当 $\alpha \in \mathfrak{sp}(R^{2n}, \omega_0)$.

10.2. 引理. 若 $f \in P_1$ 且 $f \neq 0$, 则 P 的自同态映射

$$g \mapsto \{f, g\}, \quad g \in P,$$

是满自同态.

证. 事实上, 设 u_1, \dots, u_{2n} 是辛空间 (R^{2n}, ω_0) 的一组辛基使得 $f(u_i) = \delta_{1i}$, 又设 y_1, \dots, y_{2n} 为 u_1, \dots, u_{2n} 的对偶基, 则 y_1, \dots, y_{2n} 是流形 (R^{2n}, ω) ($R^{2n}, \underline{\omega}$) 上的辛坐标, 并且等式

$$\{f, g\} = - \frac{\partial g}{\partial x_{n+1}}$$

对任意的 $g \in P$ 成立, 故结论成立. 证完.

10.3. 引理. Lie 代数 P 中仅有的理想子代数是 (0) , P_0 (零次多项式集合) 和 P .

证. 事实上, 设 \mathfrak{a} 为 Lie 代数 P 的一个含有次数 > 0 的多项式函数的理想, 因为对所有的 i 有 $\{x_i, \mathfrak{a}\} \subset \mathfrak{a}$, 从而 \mathfrak{a} 在 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 的作用下不变. 于是 \mathfrak{a} 中含这样一个多项式函数 $f = f_0 + f_1$, 这里 $f_0 \in P_0$, $f_1 \in P_1 \setminus (0)$. 所以对任意的 $g \in P$, 我们有 $\{f, g\} = \{f_1, g\}$. 又由于映射

$$g \mapsto \{f_1, g\}, \quad g \in P,$$

是满射 (引理 10.2), 所以有 $\mathfrak{a} = P$. 又 (0) 和 P_0 显然是理想. 证完.

形式辛向量场 Lie 代数. 设 (M, ω) 为一辛流形, $x \in M$. 记

m_x^p 为由 $C^\infty(M)$ 中在点 x 处的值为零的函数构成的极大理想. 设

$$m_x^\infty = \bigcap_{p>0} m_x^p.$$

根据命题 9.9, 对任意的 $f \in C^\infty(M)$, 映射

$$g \mapsto \{f, g\}, \quad g \in C^\infty(M),$$

是 $C^\infty(M)$ 的一个导子. 所以对任意的 $p > 0$, 有 $\{f, m_x^p\} \subset m_x^{p-1}$, 并且 $\{f, m_x^\infty\} \subset m_x^\infty$. 这说明 m_x^∞ 不但对结合代数结构是 $C^\infty(M)$ 的一个理想, 而且对由 Poisson 括号所定义的 Lie 代数结构也是一个理想. 于是我们可以定义商代数. 我们把商代数

$$J_x(M) = C^\infty(M)/m_x^\infty$$

称为点 x 处的射流 (jet) 代数. 它是一 Lie 代数. 我们仍然把 $J_x(M)$ 的 Lie 代数括号称为 Poisson 括号并记为 $\{, \}$.

10.4. 命题. (0) , R 和 $J_x(M)$ 是 Lie 代数 $J_x(M)$ 中仅有的理想.

证. (0) 和 R 显然是 $J_x(M)$ 的理想. 我们证明 $J_x(M)$ 中除 (0) 和 R 外仅有的理想是 $J_x(M)$ 本身. 为此, 在 x 的某一邻域内选定在点 x 处为零的辛坐标系, 于是就把所考虑的情形化为考虑辛流形 (R^{2n}, ω) 在点 x 处的函数射流代数 $J_0(R^{2n})$, 这里 $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$ 是标准辛结构. 作为结合代数, $J_0(R^{2n})$ 等同于关于 x_1, \dots, x_{2n} 的形式序列代数 (l'algèbre des séries formelles en x_1, \dots, x_{2n}). 若

$$f = \sum_{p>0} f_p, \quad f_p \in P_p; \quad g = \sum_{p>0} g_p, \quad g_p \in P_p,$$

则

$$\{f, g\} = \sum_{p, q>0} \{f_p, g_q\}.$$

设 \mathfrak{a} 为 Lie 代数 $J_0(R^{2n})$ 的一个不包含于 $R = P_0$ 中的理想. 因为 $\{x_i, \mathfrak{a}\} \subset \mathfrak{a}$, $i = 1, \dots, 2n$, \mathfrak{a} 在偏导 $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, 2n$, 的作用下不变. 于是 \mathfrak{a} 中至少含一个这样的元素

$$h = \sum_{p>0} h_p, \quad h_p \in P_p,$$

其中 h_1 是 P_1 中的非零元素. 于是映射

$$g \mapsto \{h, g\}, \quad g \in J_0(R^{2n}),$$

是 $J_0(R^{2n})$ 的一个满同态. 事实上, 若

$$g = \sum_{p>0} g_p \in J_0(R^{2n}),$$

则 $\{h, g\}$ 在 P_r 中的项是

$$\{h, g\}_r = \{h_1, g_{r+1}\} + \{h_2, g_r\} + \cdots + \{h_{r+1}, g_1\}.$$

于是根据引理 10.2, 对任意的

$$f = \sum_{p>0} f_p \in J_0(R^{2n}),$$

我们可以逐步地定义 g_p 使

$$f_r = \{h_1, g_{r+1}\} + \cdots + \{h_{r+1}, g_1\}$$

对任意的 r 成立. 令 $g = \sum_{p>0} g_p$, 则有 $\{h, g\} = f$. 但是 $h \in \mathfrak{a}$,

所以 $f \in \mathfrak{a}$. 由 f 的任意性便得 $\mathfrak{a} = J_0(R^{2n})$. 证完.

设 X 是流形 M 上的一个向量场, 则 Lie 导子

$$\theta(X): f \mapsto Xf$$

保持 m_x^* 不变, 通过作商, 便在射流代数 $J_x(M)$ 上诱导出一个导子 $J_x(X)$, 我们称它为向量场 X 在点 x 处的射流 (jet). 若 (M, ω) 是一辛流形, 则下面的两个映射

$$f \mapsto H_f \quad \text{和} \quad X \mapsto J_x(X)$$

的复合映射是一个从 Lie 代数 $C^\infty(M)$ 到由 $J_x(M)$ 的导子构成的 Lie 代数内的一个同态. 因为任一辛向量场都在 x 的某个邻域内与一 Hamilton 向量场重合, 所以同态映射 $f \mapsto J_x(H_f)$ 的象是辛向量场在点 x 处的射流 Lie 代数. 若 $f \in m_x^*$, 则有

$$H_f C^\infty(M) \subset m_x^*,$$

于是 $J_x(H_f) = 0$. 通过作商, 我们得到从 Lie 代数 $J_x(M)$ 到辛向量场在点 x 处的射流所构成的 Lie 代数上的一个满同态. 若 $f \in C^\infty(M)$ 且 $J_x(H_f) = 0$, 则有 $H_f C^\infty(M) \subset m_x^*$, 于是对所有的 $g \in$

$C^\infty(M)$ 都有 $\{f, g\} \in m_x^\omega$. 这表明 $f - f(x) \in m_x^\omega$. 于是, $J_x(f)$ 是常数 $f(x)$ 的射流. 总起来, 我们得到一正合序列

$$(0) \rightarrow R \rightarrow J_x(M) \rightarrow J_x(S(M, \omega)) \rightarrow 0.$$

10.5. **命题.** 辛流形上所有辛向量场在某一点处的射流全体构成的 Lie 代数是一单 Lie 代数.

证. 因为 $J_x(S(M, \omega))$ 同构于 $J_x(M)/R$, 所以这个命题实际上是命题 10.4 的另一种叙述形式. 证完.

§ 11. 辛流形的子流形

设 (M, ω) 是一辛流形并设 N 是 M 的一个子流形. 若 $x \in N$, 则 $T_x N$ 是辛向量空间 $(T_x M, \omega_x)$ 的一个向量子空间.

11.1. **定义.** 辛流形 (M, ω) 的子流形 N 称为是迷向子流形 (或余迷向子流形, Lagrange 子流形, 辛子流形), 如果对任一 $x \in N$, 空间 $T_x N$ 都是辛空间 $(T_x M, \omega_x)$ 的一个迷向 (或余迷向, Lagrange, 辛) 子空间.

对于从某一流形 P 到辛流形 (M, ω) 内的浸入映射, 我们也使用同样的术语. 例如, 浸入映射 $\varphi: P \rightarrow M$ 称为 Lagrange 浸入, 若对任意的 $y \in P$, φ^T 都把 $T_y P$ 映为 $(T_{\varphi(y)} M, \omega_{\varphi(y)})$ 的一个 Lagrange 子空间.

不论 (M, ω) 的子流形 N 是迷向的, 余迷向的, Lagrange 的或是辛的, ω 在 N 上的拉回 $\omega|_N$ 都是一常秩 2-形式. 若 N 是余迷向的, 则 $\omega|_N$ 的秩等于 $2 \dim N - \dim M$. 若 N 是 M 的 Lagrange 子流形, 则 $\dim N = \frac{1}{2} \dim M$.

设 N 是 M 的一个子流形, $i: N \rightarrow M$ 为内射, 则 TM 的逆象是底空间 N 上的向量丛, 我们把它记为 $T_N M$. 对任一 $x \in N$, $T_N M$ 在点 x 上的纤维可等同于 $T_x M$, 从而它具有辛向量空间结构. 把 TN 看作 $T_N M$ 的一个子向量丛, 并把 $T_N M$ 的在点 x 上的纤维是 $(T_x N)^\perp$ 的子向量丛记为 TN^\perp . 于是, 为使子流形 N 是迷

向的(或者余迷向的),充分必要条件是 $TN \subset TN^\perp$ (或 $TN \supset TN^\perp$);为使 N 是 Lagrange 的,充分必要条件是 $TN = TN^\perp$;而若 $TN \cap TN^\perp = (0)$,则 N 是辛子流形.

11.2. 扩充引理 (A. Weinstein). 设 M 是一 $2n$ 维流形, N 是 M 的一个闭子流形. 设 ω_0, ω_1 是 M 上的两个辛结构, 它们在 $\Lambda^2(T_N M)$ 上的限制相同. 则存在 N 在 M 中的两个开邻域 U_0 和 U_1 , 以及从 U_0 到 U_1 上的微分同胚 φ_1 使 φ_1 在 N 上的限制是恒等映射且 $\omega_0 = \varphi_1^*(\omega_1)$.

证. 我们需要引用 Poincaré 引理的一个一般形式(参看文献 [29]): 因为 N 是闭子流形, 所以存在 N 在 M 中的一个开邻域 V 和 V 上的 1-形式 β 使 β 在 $T_N M$ 上为零且 $d\beta = (\omega_0 - \omega_1)|_V$. 记从 $R \times M$ 到 R 上的投影映射为 ι , 把 M 上的微分形式和由投影所定义的它们在 $R \times M$ 上的拉回视为相同的, 则我们可以假设

$$\tilde{\omega} = \omega_0 + \iota(\omega_1 - \omega_0) \in \mathcal{Q}^2(R \times M).$$

这个微分形式在 $R \times N$ 的任意一点处的秩都是 $2n$. 因而在 $R \times N$ 在 $R \times M$ 中的某一开邻域上, 它的秩也是 $2n$, 我们设 V' 是这样的一个开邻域. 因为 $R \times V$ 是 $R \times N$ 的一个开邻域, 所以我们可选取 V' 使得 $V' \subset R \times V$. 根据 β 的定义和 V' 的选取, 我们知道 $\beta|_{V'}$ 的核是 TV' 的一个由向量场 $\frac{\partial}{\partial t}$ 所生成的子向量

丛. 因为 $i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\beta = 0$, 所以存在 V' 上的向量场 X 使得 $i(X)\tilde{\omega} =$

$\beta|_{V'}$. 而且我们可以选取 X 使得 $i(X)dt = 0$, 这是可以做到的, 因为这相当于选取 N 的邻域上的向量场使它依赖于参数 t . 因为 β 在 $T_N M$ 上为零, 所以向量场 X 在 $R \times N$ 上恒为零. 于是, 存在 $[0, 1] \times N$ 在 $R \times M$ 中的一个开邻域 W 和可微映射

$$\varphi: W \rightarrow R \times M,$$

使得

$$(i) \quad \varphi^* \circ \frac{\partial}{\partial t} = \left(X + \frac{\partial}{\partial t}\right) \circ \varphi,$$

$$(ii) \quad \varphi(0, x) = x, \text{ 对 } \forall (0, x) \in W.$$

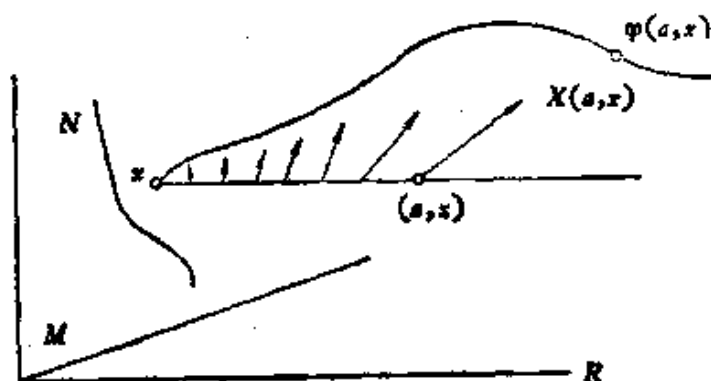
注意到在 $\Omega(\varphi(W))$ 上, 条件 (i) 等价于

$$\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \circ \varphi^* = \varphi^* \circ \theta\left(X + \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

把它应用到函数 t 上得

$$\frac{\partial}{\partial t}(t \circ \varphi) = 1.$$

于是在 $[0, 1] \times N$ 的某一邻域上有 $t \circ \varphi = t$ (参看下图).



对任意的 $x \in N$, 根据 W 的定义知道, 有 x 在 M 中的一个开邻域 V_x 使得 $[0, 1] \times V_x \subset W$. 于是有 N 在 M 中的开邻域 U_0 使得 $[0, 1] \times U_0 \subset W$. 对任一 $a \in [0, 1]$, 定义从 U_0 到 M 内的映射 φ_a 为

$$\varphi(a, x) = (a, \varphi_a(x)), \quad \forall x \in U_0.$$

我们证明 U_0 上的微分形式族 $\varphi_a^*(\omega)$ 不依赖于 a . 注意到该微分形式族实际上就是

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt \wedge \varphi^*(\omega)),$$

用 $\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ 作用得

$$\begin{aligned} & \theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(dt \wedge \varphi^*(\omega)) \\ &= i\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(dt \wedge \theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi^*(\omega)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \varphi^*(\tilde{\omega}) \\
&= \varphi^* \theta \left(X + \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{\omega} \\
&= \varphi^*(di(X)\tilde{\omega} + \omega_1 - \omega_0) \\
&= d\beta + \omega_1 - \omega_0 = 0.
\end{aligned}$$

所以 $\varphi_a^*(\tilde{\omega})$ 不依赖于参数 $a \in [0, 1]$, 从而

$$\varphi_1^*(\omega_1) = \varphi_0^*(\omega_0).$$

因为 φ_0 是恒等映射, 所以我们有 $\varphi_1^*(\omega_1) = \omega_0$, 也就是说, φ_1 是从 $(U_0; \omega_0)$ 到 $(\varphi_1(U_0), \omega_1)$ 上的一个同构. 又因为 X 在 $R \times N$ 上等于 0, 所以 φ_1 在 N 上的限制是恒等映射. 证完.

注1. 由于我们假定了 ω_0 和 ω_1 在 $\Lambda^2 T_N M$ 上相等而不仅仅是在 $\Lambda^2 TN$ 上相等, 所以我們能够在 N 的某一邻域上选取 1-形式 β 使 $d\beta = \omega_0 - \omega_1$. 并且我们可以选取这样的 β , 使得不但对任意的 $x \in N$ 都有 $\beta_x = 0$, 而且 β 在 N 的任一点处的一阶射流也等于零. 当 β 具有这些性质时, 相应的微分同胚 φ_1 就给出一个在 $T_N M$ 上为恒等映射的切丛映射 φ_1^\dagger (参看文献 [29]).

注2. 把引理 11.2 应用于 $N = \{x\}$, 则可推出在点 $x \in M$ 的某一邻域上存在辛坐标系.

11.3. 命题. 设 (M, ω) 是一辛流形, N 是 (M, ω) 的一个闭的 Lagrange 子流形, 则对任一点 $x \in N$, 存在 x 的开邻域 V 和 V 上的辛坐标系 y_1, \dots, y_{2n} 使得 $N \cap V$ 是 V 中满足 $y_1 = \dots = y_n = 0$ 的点集.

证. 事实上, 设 U 是 x 的一个开邻域且设 x_1, \dots, x_{2n} 是 U 上的坐标系使得对 $N \cap U$ 中的点, 等式 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 成

立. 把引理 11.2 应用于辛结构 $\omega_0 = \omega|_U$ 和 $\omega_1 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$, 便得到具有所求性质的辛坐标 $y_i = \varphi_1^\dagger(x_i)$. 证完.

辛流形的 Lagrange 子流形在辛流形理论中占有重要的地位, 许多内容的讨论都与它有关联. 我们先来看几个例子, 然后给

出一个构造 Lagrange 子流形的基本方法.

例 1. 设 (M, ω) 是一 2 维辛流形, 则它的所有 Lagrange 子流形都是 1 维的, 从而都是曲线, 因为 ω 是反对称形式, 所以 M 的任意一条曲线都是 Lagrange 子流形.

例 2. (R^{2n}, ω) 的 Lagrange 子流形. 我们设 x_1, \dots, x_{2n} 是 R^{2n} 上的辛坐标使得

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}.$$

设 U 是 R^n 的一个开子集且设

$$\varphi: x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$$

是从 U 到 R^n 内的一个可微映射. 令

$$N_\varphi = \{(x, \varphi(x)): x \in U\},$$

则 N_φ 称为 φ 在 $U \times R^n \subset R^{2n}$ 中的图形. 为使 N_φ 是 (R^{2n}, ω) 的一个 Lagrange 子流形, 充分必要条件是浸入

$$x \mapsto (x, \varphi(x)), x \in U,$$

是一迷向浸入. 这个条件可以表达为

$$\sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\varphi_i = 0.$$

换句话说, 为使 N_φ 为一 Lagrange 子流形, 充分必要条件是 1-形式 $\sum_{i=1}^n \varphi_i dx_i$ 是一闭形式. 如果 $\sum_{i=1}^n \varphi_i dx_i$ 是某一函数 $f: U \rightarrow R$ 的全微分, 则它当然就是闭的. 在这种特殊情形, 我们称 f 为 Lagrange 子流形 N_φ 的一个生成函数.

设

$$\psi: (x, y) \mapsto (\psi_1(x, y), \dots, \psi_n(x, y))$$

是从 $U \times R^n$ 到 R^n 内的一个可微映射. 我们利用 ψ 定义一个映射 ϕ

$$\phi: (x, y) \mapsto (x, y + \psi(x, y)), (x, y) \in U \times R^n,$$

则 ϕ 是从 $U \times R^n$ 到其自身内的可微映射. 为使 ϕ 是辛流形 $(U \times R^n, \omega)$ 的一个自同态, 充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\phi_i = 0.$$

这相当于要求 $\phi(x, y)$ 不依赖于 y 并且 $\sum_{i=1}^n \phi_i dx_i$ 是 U 上的闭形式. 若 ϕ 满足这两条, 则 ϕ 是辛流形 $(U \times R^n, \omega)$ 的一个自同构.

反之, 若 $\sum_{i=1}^n \phi_i dx_i$ 是 U 上的任意一个闭的微分 1-形式, 则我们可以利用 dx_i 的系数 $\phi_i (i = 1, \dots, n)$ 来定义上面的 ϕ , 从而得到 $(U \times R^n, \omega)$ 到其自身上的一个同构. 于是, 在 U 上的闭的微分 1-形式加法群和辛流形 $(U \times R^n, \omega)$ 的保持纤维 R^n 不变的自同构群之间存在一标准同构, 该自同构群的元素限制在纤维 $\{x\} \times R^n$ 上是一平移变换. 相应的 Lagrange 子流形 N_ϕ 是 Lagrange 子流形 $U \times \{0\}$ 在 ϕ 下的象.

11.4. 命题. 设 (M_1, ω_1) 和 (M_2, ω_2) 是两个辛流形, $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ 是一可微映射, 则 φ 是一辛流形同态的充分必要条件是: φ 的图形

$$\{(x, \varphi(x)) : x \in M_1\}$$

是辛流形 $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$ 的一个迷向子流形.

证. 事实上, 设 $\tilde{\varphi}$ 是由映射

$$x \rightarrow (x, \varphi(x)), \quad x \in M_1,$$

所定义的 M_1 到 $M_1 \times M_2$ 内的浸入, 则我们有

$$\tilde{\varphi}^*(pr_1^*(\omega_1) - pr_2^*(\omega_2)) = \omega_1 - \varphi^*(\omega_2).$$

于是 φ 是辛流形同态等价于 φ 的图形是 $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$ 的一个迷向子流形. 证完.

若 $\dim M_1 = \dim M_2$, 则从 (M_1, ω_1) 到 (M_2, ω_2) 内的一个辛流形同态的图形是 $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$ 的一个 Lagrange 子流形, 因为这时该同态的图形是 $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$ 的一个维数为 $\dim M_1$ 的迷向子流形. 但是 $(M_1, \omega_1) \times (M_2, -\omega_2)$ 的 Lagrange 子流形不一定是某一同态的图形.

用收缩法构造 Lagrange 子流形. 设 (M, ω) 是一辛流形,

$N \subset M$ 是 M 的一个余迷向子流形. 又设 (M', ω') 是另一辛流形,

$$\varphi: N \rightarrow M'$$

是一子浸入使得

$$\varphi^*(\omega') = \omega|_N.$$

因为 N 是一余迷向子流形, 故 $\omega|_N$ 是常秩的. 所以根据命题 8.3 的推论, 我们总可以找到这样的一个辛流形 (M', ω') 和一子浸入 φ 使得它在 N 的某个点的某一邻域内满足上面的条件.



设 L 为 (M, ω) 的一个 Lagrange 子流形. 我们假设 L 和 N 有一个“适用交” (bonne intersection), 即

(1) $L \cap N$ 是 M 的一个子流形,

(2) $T(L \cap N) = TL \cap TN$.

设 $x \in L \cap N$. 因为 $T_x N$ 是 $(T_x M, \omega_x)$ 的一个余迷向子空间, 所以子空间 $T_x L \cap T_x N + T_x N^\perp$ 是 $(T_x N, (\omega|_N)_x)$ 的一个 Lagrange 子空间 (命题 1.5).

因为

$$\varphi_x^T: T_x N \rightarrow T_{\varphi(x)} M'$$

是一满射且

$$\varphi^*(\omega') = \omega|_N,$$

所以子空间

$$\varphi_x^T (T_x L \cap T_x N + T_x N^\perp)$$

是 $(T_{\varphi(x)} M', \omega'_{\varphi(x)})$ 的一个 Lagrange 子空间. 但是

$$TN^\perp \subset \text{Ker} \varphi^T \text{ 且 } T_x L \cap T_x N = T_x(L \cap N),$$

于是对任意的 $x \in M$, $\varphi^T(T_x(L \cap N))$ 是

$$(T_{\varphi(x)} M', \omega'_{\varphi(x)})$$

的一个 Lagrange 子空间. 这证明了 φ 在 $L \cap N$ 上的限制是常秩 $\frac{1}{2} \dim M'$ 的, 在 N 的局部上, 该限制分解为到 M' 内的一个 Lagrange 浸入的一个连续子浸入 (se factorise en une submersion suivie d'une immersion Lagrangienne dans M').

于是, 对任意的 $x \in L \cap N$, 存在 x 在 N 中的一个邻域 V 使得 $\varphi(V)$ 是 (M', ω') 的一个 Lagrange 子流形. 我们把这样构造出

来的 (M', ω') 的 Lagrange 子流形称为是由 Lagrange 子流形 L 收缩而得到的。

下面我们来看一个例子。

例. 设

$$z_j = x_j + iy_j, \quad j = 1, \dots, n+1,$$

是 C^{n+1} 上的自然坐标并设

$$h = \sum_{j=1}^{n+1} dz_j d\bar{z}_j$$

是标准 Hermite 型, h 的虚部是

$$- \sum_{j=1}^{n+1} dx_j \wedge dy_j.$$

这是 C^{n+1} 上的一个辛结构. 若记 p 为从 $C^{n+1} \setminus (0)$ 到投影空间 CP^n 上的标准投影, 则由 §6 中的例 5, 可知在 CP^n 上存在辛结构 ω 使得

$$p^*(\omega) = -\frac{1}{r} \sum_j dx_j \wedge dy_j + \frac{1}{2} \frac{dr}{r^2} \sum_j (x_j dy_j - y_j dx_j),$$

其中 $r = \sum_j x_j \bar{x}_j$. 设 S^{2n+1} 为由 $r = 1$ 所定义的球面. 因为它的余维数等于 1, 所以它是 $(C^{n+1}, -\sum_j dx_j \wedge dy_j)$ 的一个余迷向子流形. 我们有

$$p^*(\omega)|_{S^{2n+1}} = -\sum_j dx_j \wedge dy_j|_{S^{2n+1}}.$$

把 p 限制在 S^{2n+1} 上, 我们就得到利用辛流形

$$(C^{n+1}, -\sum_j dx_j \wedge dy_j)$$

的 Lagrange 子流形用收缩法构造 CP^n 的 Lagrange 子流形所需要的条件. 例如, 若 E 是辛空间

$$(C^{n+1}, \sum_j x_j \wedge y_j)$$

的一个 Lagrange 向量子空间, 则它是辛流形

$$(C^{n+1}, -\sum_j dx_j \wedge dy_j)$$

的一个 Lagrange 子流形, 而且它与 S^{2n+1} 的交 $E \cap S^{2n+1}$ 是一 n 维

球面.

标准投影映射 p 在 $E \cap S^{2n+1}$ 上的限制是一浸入, 通过作商, 由它可以得到一个从由 E 所决定的实投影空间到 CP^n 的某一 Lagrange 子流形上的微分同胚.

Poisson 括号和余迷向子流形. 设 (M, ω) 是一辛流形且设 N 是 (M, ω) 的一个余迷向子流形. 若函数 $f \in C^\infty(M)$ 在 N 上的限制是一常数, 则对任一向量 $v \in TN$ 有

$$(i(H_f)\omega)(v) = df(v) = 0.$$

于是对任意的 $x \in N$ 有 $(H_f)(x) \in TN^\perp$. 因为 N 是余迷向的, 所以有 $TN^\perp \subset TN$, 于是对任意的 x 有 $(H_f)(x) \in TN$. 所以, 由在 N 上为常数的函数所定义的 Hamilton 向量场与 N 相切.

现设 $f, g \in C^\infty(M)$ 且 f, g 在 N 上的限制均是常数. 那么, 因为 H_f 与 N 相切, 所以对任意的 $x \in N$ 有

$$\{f, g\}(x) = (H_f g)(x) = 0.$$

这说明 M 上的所有限制在 N 上为常数的可微函数在 Poisson 括号下构成 $C^\infty(M)$ 的一个 Lie 子代数.

我们现在进一步假定 N 的余维数是 k . 设

$$f_1, \dots, f_k \in C^\infty(M)$$

是一组在 N 上等于零且在 N 的所有的点上都有

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_k \neq 0$$

的函数, 则对任一 $x \in N$, 向量

$$(H_{f_1})(x), \dots, (H_{f_k})(x)$$

是 $T_x N^\perp$ 的一组基而且 $T_x N$ 是 $(T_x M, \omega_x)$ 中由

$$(H_{f_1})(x), \dots, (H_{f_k})(x)$$

所张成的子空间的正交补.

习题. Lagrange 叶结构 (feuilletages). 设 (M, ω) 是一辛流形且设 E 是 TM 的一个可积子丛, 我们假定 E 是 Lagrange 子丛, 也就是说, 对所有的 $x \in M$, E_x 都是 $(T_x M, \omega_x)$ 的一个 Lagrange 子空间. 设 P 是 M 的一个子流形, 若 P 满足下面两条:

$$(i) \quad T_x P = E_x, \quad \forall x \in P,$$

(ii) 在包含关系下, P 是 M 中所有满足 (i) 的子流形所构成的集合的一个极大元,

则我们称 P 为 E 的一片积分叶子. 因为 E 是一 Lagrange 子丛, 所以 E 的每一积分叶子都是 (M, ω) 的一个 Lagrange 子流形. 我们说 E 在 (M, ω) 上定义了一个 Lagrange 叶结构.

试证明: 若 X, Y 是 E 的两个可微截面, 则在 M 上存在唯一的一个向量场 $\nabla_X Y$ 使得对 M 上任意的向量场 Z 都有

$$\omega(\nabla_X Y, z) = X\omega(Y, Z) - \omega(Y, [X, Z]),$$

而且 $\nabla_X Y$ 是 E 的一个截面. 并证明, 对 E 的任意两个可微截面 X, Y , 有(参看文献 [28])

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

$$\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) = \nabla_{[X, Y]} Z,$$

其中 Z 是 M 上的一个向量场.

由此导出, 对 E 的任一积分叶子 P , 在 P 上存在一线性联络 ∇ , 它的曲率和挠率都是零, 并且可以这样来刻画它: 若 X 和 Y 是 E 的两个可微截面, 则

$$\nabla_X|_P(Y|_P) = (\nabla_X Y)|_P.$$

我们将在 §12 中利用余切丛来给出 Lagrange 叶结构的例子.

第三章 余切丛

§ 12. Liouville 形式和余切丛上的标准辛结构

在这节里,我们用 P 来表示一个流形, P 上的余切丛用 T^*P 表示. 向量丛 T^*P 在任意一点 $x \in P$ 处的纤维 T_x^*P 是向量空间 T_xP 的对偶空间, T_x^*P 中的元素是点 x 处的余切向量. 我们分别用 π 和 π_* 来表示向量丛 TP 和 T^*P 在 P 上的投影. 我们用 $T(T^*P)$ 来表示余切丛 T^*P 上的切丛并用 π_0 表示 $T(T^*P)$ 在底空间 T^*P 上的投影. 把 π_* 所定义的切空间映射记为 π_*^T , 则

$$\pi_*^T: T(T^*P) \longrightarrow TP.$$

不难看出下面的图是可交换的

$$\begin{array}{ccc}
 & T(T^*P) & \\
 \pi_0 \swarrow & & \searrow \pi_*^T \\
 T^*P & & TP \\
 \pi_* \searrow & & \swarrow \pi \\
 & P &
 \end{array}$$

因此,由下式所定义的映射 φ_1

$$\varphi_1: v \mapsto (\pi_0(v), \pi_*^T(v)), v \in T(T^*P),$$

是从 $T(T^*P)$ 到纤维丛积

$$T^*P \times_P TP$$

内的一个可微映射,按通常的方法,定义从

$$T^*P \times_P TP$$

到 R 内的映射 φ_2 如下:

$$\varphi_2: (\xi, u) \mapsto \xi(u), (\xi, u) \in T^*P \times_P TP,$$

则 φ_2 也是一可微映射. φ_1 与 φ_2 的合成映射 $\varphi_2 \circ \varphi_1$ 是从 $T(T^*P)$ 到 R 内的一个可微映射,它在每一纤维 $T_\xi(T^*P)$ ($\xi \in T^*P$) 上的

限制是线性映射,因此,它是流形 T^*P 上的微分 1-形式,这是一个十分重要的 1-形式. 为方便起见,若 $(\xi, u) \in T^*P \times_p TP$, 我们把实数 $\xi(u)$ 记为 $\langle \xi, u \rangle$.

12.1 定义 在余切丛 T^*P 上定义一个微分 1-形式 α 如下: 对任意的 $v \in T(T^*P)$, 令

$$(12.2) \quad \alpha(v) = \langle \pi_0^*(v), \pi_*^T(v) \rangle_p.$$

我们称 α 为 T^*P 上的一个 Liouville 形式.

显然,若 α 是 T^*P 上的 Liouville 形式,则有

$$\ker \alpha \supset \ker \pi_*^T.$$

把 $T(T^*P)$ 中满足 $\pi_*^T(v) = 0$ 的向量 v 称为垂直向量. 于是, Liouville 形式在 $T(T^*P)$ 的垂直向量上为零.

设 X 是 P 上的任意一个向量场,我们利用 X 来定义 T^*P 上的一个可微函数 f_X 如下:

$$f_X(\xi) = \langle \xi, X(\pi_*(\xi)) \rangle, \quad \forall \xi \in T^*P,$$

其中 $X(\pi_*(\xi))$ 代表向量场 X 在点 $\pi_*(\xi) \in P$ 的值. 于是 $f_X = 0$ 当且仅当 $X = 0$. 所以映射

$$F: X \mapsto f_X, \quad X \text{ 是 } P \text{ 的向量场},$$

是一实线性内射. 它的象是 $C^\infty(T^*P)$ 的一个子空间,这个子空间的每一函数在 T^*P 的纤维上的限制都是线性的. 若 $g \in C^\infty(P)$ 且若 X 是 P 上的一个向量场,则有

$$f_{gX} = (g \circ \pi_*) f_X.$$

设 U 是 P 的一个开集, x_1, \dots, x_n 是 U 上的坐标. 令

$$y_i = f \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

则函数组

$$(x_1 \circ \pi_*, \dots, (x_n \circ \pi_*), y_1, \dots, y_n,$$

是 $\pi_*^{-1}(U) = T^*U$ 上的坐标. 为了简化记号,下面我们把 $C^\infty(P)$ 中的元素 g 等同于 $C^\infty(T^*P)$ 中的元素 $g \circ \pi_*$. 根据这一假定,

$$x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$$

就是 $\pi_*^{-1}(U)$ 上的坐标. 若向量场 X 在 U 上的坐标表达式是

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

则在 $\pi_*^{-1}(U)$ 上有

$$(12.3) \quad f_x = \sum_{i=1}^n a_i y_i.$$

对任意的 $x \in P$, $\xi \in T_x^*P$ 和 $v \in T_x(T^*P)$, 我们有

$$\pi_*^T(v) = \sum_{i=1}^n dx_i(\pi_*^T(v)) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x,$$

从而, 利用 $\pi_0(v) = \xi$ 得

$$\alpha(v) = \langle \pi_0(v), \pi_*^T(v) \rangle = \sum_{i=1}^n y_i(\xi) dx_i(\pi_*^T(v)).$$

其中 $y_i(\xi) = \left\langle \xi, \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_x \right\rangle$. 但是,

$$\begin{aligned} dx_i(\pi_*^T(v)) &= (\pi_*^* dx_i)(v) \\ &= (d(x_i \circ \pi_*))(v) \\ &= dx_i(v), \end{aligned}$$

所以在 $\pi_*^{-1}(U)$ 上我们有

$$(12.4) \quad \alpha = \sum_{i=1}^n y_i dx_i.$$

12.5. **命题.** 设 α 是余切丛 T^*P 上的一个 Liouville 形式, 则 2-形式 $\omega = -d\alpha$ 是 T^*P 上的一个辛结构.

证. 事实上, 根据 (12.4), 若 x_1, \dots, x_n 是 P 的一个坐标邻域 U 上的坐标, 则在 $\pi_*^{-1}(U)$ 上有坐标 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ 使

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i,$$

于是 ω 在 T^*P 的每一点处的秩都是 $2n$. 又因为它是一个闭形式, 所以它是一个辛结构. 证完.

我们称 2-形式 $\omega = -d\alpha$ 为 T^*P 上的标准辛结构. 设 $U \subset P$ 是 P 的一个坐标邻域, x_1, \dots, x_n 是 U 上的坐标, 则

$$x_i = x_i \circ \pi_* \quad \text{和} \quad y_i = f \frac{\partial}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n,$$

是 $\pi_*^{-1}(U)$ 上的辛坐标。我们把它称为 T^*P 上由坐标 x_1, \dots, x_n 诱导出的局部辛坐标。

标准辛结构在经典力学中起着很重要的作用。利用 Legendre 变换使我们能把某一切丛 TQ 上的 Lagrange 动力系统 (参看 §9, 例 1) 换为具有标准辛结构的余切丛 T^*Q 上的一个 Hamilton 向量场 (参看文献[2])。

我们知道, 流形 P 上的任意一个微分 1-形式对应着向量丛 T^*P 的一个可微截面。对任意的 $\beta \in \mathcal{Q}^1(P)$, 我们把相应的截面记为 $\bar{\beta}$ 。

12.6. 命题. T^*P 上的 Liouville 形式 α 可用下列性质来刻画: 对 P 上任意的微分 1-形式 β 有

$$\beta = \alpha \circ \bar{\beta}^T \quad (-\bar{\beta}^*(\alpha)).$$

证. 设 $u \in T_*P$ 且设 $\beta \in \mathcal{Q}^1(P)$. 因为 $\pi_* \circ \bar{\beta}$ 是 P 的恒等映射, 我们有

$$(\pi_*^T \circ \bar{\beta}^T)(u) = u.$$

另一方面, 因为

$$\pi_* \circ \bar{\beta} = \bar{\beta} \circ \pi,$$

于是由公式 (12.2) 得

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \bar{\beta}^T)(u) &= \langle (\pi_* \circ \bar{\beta}^T)(u), (\pi_*^T \circ \bar{\beta}^T)(u) \rangle \\ &= \langle \bar{\beta}(x), u \rangle = \beta(u), \quad (x = \pi_*(u)). \end{aligned}$$

于是证明了 $\beta = \alpha \circ \bar{\beta}^T$. 又因为对任意一点 $\xi \in T_*^*P$, 切空间 $T_\xi(T^*P)$ 由这样的向量 $\bar{\beta}^T(T_*P)$ 生成, 其中 $\beta \in \mathcal{Q}^1(P)$ 且 $\bar{\beta}(x) = \xi$, 所以 α 由等式 $\beta = \alpha \circ \bar{\beta}^T$ 唯一确定. 证完.

设 P 和 Q 是两个流形, 并设

$$\varphi: P \longrightarrow Q$$

是一可微映射。下面我们假定 φ 在局部上是一微分同胚。于是, 对任意的 $x \in P$, φ_x^T 是从 T_xP 到 $T_{\varphi(x)}Q$ 上的一个同构。于是我们有逆同构

$$(\varphi_x^T)^{-1}: T_{\varphi(x)}Q \longrightarrow T_xP.$$

上面这个同构的共轭映射定义了同构

$$T_x^* \varphi: T_x^* P \longrightarrow T_{\varphi(x)}^* Q.$$

于是我们可以定义一个从 T^*P 到 T^*Q 上的可微映射 $T^*\varphi$, 使 $T^*\varphi$ 在每一纤维 T_x^*P 上的限制就是上面的 $T_x^*\varphi$.

于是, 对任意的 $x \in P$, $u \in T_x P$ 和 $\xi \in T_x^* P$, 我们有

$$(12.7) \quad \langle (T^*\varphi)(\xi), \varphi^T(u) \rangle = \langle \xi, u \rangle.$$

若 $\beta \in Q^1(Q)$, 则有

$$\langle (T^*\varphi)((\varphi^*\beta)_x), \varphi^T(u) \rangle = \langle (\varphi^*\beta)_x, u \rangle = \langle \beta_{\varphi(x)}, \varphi^T(u) \rangle.$$

于是有,

$$(T^*\varphi) \circ \overline{(\varphi^*\beta)} = \bar{\beta} \circ \varphi.$$

12.8. 命题. 设 P 和 Q 是两个流形, α_P 和 α_Q 分别是 T^*P 和 T^*Q 上的 Liouville 形式. 设

$$\varphi: P \longrightarrow Q$$

是一可微映射, 并设 φ 在局部上是微分同胚, 则有

$$\alpha_P = \alpha_Q \circ (T^*\varphi)^T.$$

证. 事实上, 由 (12.2) 和 (12.7), 对任意的 $\xi \in T^*P$ 和 $\nu \in T_x(T^*P)$ 有

$$\begin{aligned} & (\alpha_Q \circ (T^*\varphi)^T)(\nu) \\ &= \langle (\pi_Q \circ (T^*\varphi)^T)(\nu), (\pi_Q^T \circ (T^*\varphi)^T)(\nu) \rangle \\ &= \langle (T^*\varphi)(\xi), (\varphi^T \circ \pi_P^T)(\nu) \rangle \\ &= \langle \xi, \pi_P^T(\nu) \rangle \\ &= \langle \pi_P(\nu), \pi_P^T(\nu) \rangle = \alpha_P(\nu). \end{aligned}$$

所以等式成立. 证完.

推论. $T^*\varphi: T^*P \longrightarrow T^*Q$ 是一辛同态.

例. 利用作为辛流形的余切丛, 我们就得到一批 Lagrange 叶结构的例子. 事实上, 设 P 是一流形, 我们取标准辛结构使 T^*P 成为辛流形. 取 P 的一个坐标邻域 U , 设 x_1, \dots, x_n 是 U 的坐标, 则在 T^*P 的子流形 $\pi_*^{-1}(U)$ 上有由 x_1, \dots, x_n 诱导的辛坐标 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$. 把 $\pi_*^{-1}(U)$ 看作辛流形. 令

$$E = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \ker dx_i,$$

则 E 是 $T(\pi_*^{-1}(U))$ 的一个可积 Lagrange 子丛, $\pi_*^{-1}(U)$ 的每一

纤维空间都是 E 的一片积分叶子, 并且是 $\pi_*^{-1}(U)$ 的一个 Lagrange 子流形, 所以 E 在 $\pi_*^{-1}(U)$ 上定义了一个 Lagrange 叶结构.

§ 13. 余切丛上的辛向量场

在这节中, P 表示一个流形, α 表示 T^*P 上的 Liouville 形式, ω 表示标准辛结构 $-d\alpha$. 设 U 是 P 的一个坐标邻域, x_1, \dots, x_n 是 U 上的坐标. 设 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ 是由 x_1, \dots, x_n 诱导的 $\pi_*^{-1}(U)$ 上的辛坐标. 令

$$C = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

则 C 是 $\pi_*^{-1}(U)$ 上的一个向量场并且有 $\pi_* C = 0$, 即 C 是一垂直向量场. 显然, 我们可以在 P 上定义一向量场, 使该向量场在局部上具有上面的表达式. 我们仍把这个向量场记为 C .

13.1. 引理. 符号不变, 我们有

$$\begin{aligned} i(C)\omega &= -\alpha, \quad i(C)\alpha = 0, \\ \theta(C)\alpha &= \alpha, \quad \theta(C)\omega = \omega. \end{aligned}$$

证. 为验证第一个式子, 可以选取局部辛坐标 $x_1, \dots, x_n,$

y_1, \dots, y_n 使 $\alpha = \sum_{i=1}^n y_i dx_i$ (参看 §12), 然后直接计算便可.

利用第一式有

$$i(C)\alpha = -i(C)^2\omega = -\omega(C, C) = 0,$$

因此第二个式子成立. 又利用已证的一、二式有

$$\theta(C)\alpha = di(C)\alpha + i(C)d\alpha = -i(C)\omega = \alpha.$$

因此三式得证. 最后, 利用 $\theta \circ d = d \circ \theta$ 得

$$\theta(C)\omega = -\theta(C)d\alpha = -d\theta(C)\alpha = -d\alpha = \omega.$$

证完.

13.2. 引理. 对 P 上任一向量场 X 都有

$$Cf_X = f_X.$$

这里 f_X 如 §12 所定义.

证. 我们利用公式 (12.3), 在 P 上选取局部坐标 x_1, \dots, x_n 和 T^*P 上的局部辛坐标 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, 使在局部上有

$$f_X = \sum_{i=1}^n a_i y_i,$$

其中 a_i 是 P 上的函数在 T^*P 上的拉回. 由 C 的定义有 $C a_i = 0$, 因此

$$C f_X = \sum_{i=1}^n a_i C y_i = f_X.$$

证完.

13.3. 命题. 设 X 是 T^*P 上的一个辛向量场, 则

(i) 向量场 $X + [C, X]$ 是一 Hamilton 向量场而且

$$X + [C, X] = H_{\alpha(X)},$$

(ii) $[C, X]$ 是一辛向量场

证. 根据引理 13.1 有 $\theta(C)\omega = \omega$, $i(C)\omega = -\alpha$, 所以我们有

$$\begin{aligned} & i(X + [C, X])\omega \\ &= i(X)\omega + \theta(C)i(X)\omega - i(X)\theta(C)\omega \\ &= \theta(C)i(X)\omega \\ &= di(C)i(X)\omega + i(C)di(X)\omega. \end{aligned}$$

其中第一步等式我们利用了第二章的公式

$$i([X, Y]) = \theta(X) \circ i(Y) - i(Y) \circ \theta(X).$$

又因为

$$di(X) = \theta(X) - i(X)d,$$

且 X 是一辛向量场, 所以 $i(C)di(X)\omega = 0$. 再利用等式 $i(C)i(X) + i(X)i(C) = 0$ 得

$$\begin{aligned} i(X + [C, X])\omega &= -di(X)i(C)\omega \\ &= di(X)\alpha = d(\alpha(X)). \end{aligned}$$

于是 $X + [C, X] = H_{\alpha(X)}$ 是一 Hamilton 向量场. 而由 Hamilton 向量场的性质 (§9) 知它是一辛向量场, 于是 $[C, X]$ 是一辛向量场. 证完.

推论 1. 对任一函数 $f \in C^\infty(T^*P)$, 我们有

$$\alpha(H_f) = Cf, [C, H_f] = B_{(Cf-p)}.$$

证. 事实上, 直接计算得

$$\begin{aligned}\alpha(H_f) &= i(H_f)\alpha = -i(H_f)i(C)\omega \\ &= i(C)i(H_f)\omega = i(C)d_f = Cf.\end{aligned}$$

再根据命题 13.3 有

$$[C, H_f] = H_{\alpha(H_f)} - H_f = H_{(Cf-p)}.$$

证完.

推论 2. 对任意的 $f, g \in C^\infty(T^*P)$, 我们有

$$C\{f, g\} = \{Cf, g\} + \{f, Cg\} - \{f, g\}.$$

其中 $\{, \}$ 是 Poisson 括号.

证. 事实上,

$$\begin{aligned}C\{f, g\} &= C(H_f g) = [C, H_f]g + H_f Cg \\ &= \{Cf, g\} - \{f, g\} + \{f, Cg\}.\end{aligned}$$

证完.

对任意的整数 r , 令 E_r 是 $C^\infty(T^*P)$ 中所有满足

$$Cf = (r+1)f$$

的函数 f 所构成的集合. 于是, 由 E_r 的定义知, E_r 中的元素是 T^*P 上这样的可微函数, 它们在每一纤维 $T^*_p P$ 上的限制是 $r+1$ 次的齐次多项式. 因此, 若 $r < -1$, 则我们有 $E_r = (0)$. 而空间 E_{-1} 则是在每一纤维上为常数的函数所构成的空间, 也就是 $C^\infty(P)$ 的所有元素在 T^*P 上的拉回所构成的空间. 任给两个整数 r, s , 我们有

$$E_r E_s \subset E_{r+s+1}.$$

又根据命题 13.3 的推论 2, 对 $\forall f \in E_r, \forall g \in E_s$ 有

$$\begin{aligned}C\{f, g\} &= (r+1)\{f, g\} + (s+1)\{f, g\} - \{f, g\} \\ &= (r+s+1)\{f, g\}.\end{aligned}$$

所以

$$\{E_r, E_s\} \subset E_{r+s}.$$

因此, 所有 E_r 的和是 $C^\infty(T^*P)$ 的一个子代数, 无论是对于结合代数结构或是对于由 Poisson 括号定义的 Lie 代数结构都对.

而且它是一 Z -分级 Lie 代数。

设 $S(T^*P, \omega)$ 是辛流形 (T^*P, ω) 上的辛向量场集。对任意的整数 r , 记 S_r 为 $S(T^*P, \omega)$ 中满足

$$[C, X] = rX$$

的辛向量场 X 所构成的空间。

设 U 为 P 的一个开邻域, x_1, \dots, x_n 为 U 上的坐标, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ 是 $\pi_*^{-1}(U)$ 上由 x_1, \dots, x_n 诱导出的辛坐标。取 $X \in S_r$, 并设在 $\pi_*^{-1}(U)$ 上 X 有表达式

$$X = \sum_{i=1}^n \left(f_i \frac{\partial}{\partial x_i} + g_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right).$$

于是, 在 T^*P 的开集 $\pi_*^{-1}(U)$ 中, 由 C 的定义有

$$[C, X] = \sum_{i=1}^n (Cf_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n (Cg_i - g_i) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

但是 $[C, X] = rX$, 所以有

$$Cf_i = rf_i, \quad Cg_i = (r+1)g_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

于是推出 f_i 和 g_i 限制在 T^*P 的, 含于 $\pi_*^{-1}(U)$ 中的纤维上分别是 r 和 $r+1$ 次的齐次多项式函数。特别地, 这证明了, 若 $r < -1$, 则 $S_r = (0)$ 。

13.4. 命题. 对任意的 $r \geq -1$ 和任意的 $f \in E_r$, 我们有 $H_f \in S_r$ 。

证. 事实上, 由命题 13.3 的推论 1 有

$$[C, H_f] = H_{(Cf-f)} = H_{rf} = rH_f.$$

所以 $H_f \in S_r$. 证完。

13.5. 命题. 对任意的整数 $r > -1$, 映射

$$H: f \mapsto H_f, \quad f \in C^\infty(T^*P),$$

(参看 §9) 诱导出从 E_r 到 S_r 上的一个同构。该同构的逆同构是

$$X \mapsto \frac{1}{r+1} \alpha(X), \quad X \in S_r.$$

证. 事实上, 若 $f \in E_r$, 则有

$$\alpha(H_f) = Cf = (r+1)f.$$

因为 $r > -1$, 所以 $r+1 \neq 0$, 所以该映射是一内射. 它也是满射, 这是因为若 $X \in S_r$, 则有

$$\begin{aligned} C\alpha(X) &= \theta(C)i(X)\alpha \\ &= i([C, X])\alpha + i(X)\theta(C)\alpha \\ &= (r+1)\alpha(X), \end{aligned}$$

所以 $\alpha(X) \in E_r$, 又根据命题 13.3 有

$$H_{\alpha(X)} = X + [C, X] = (1+r)X.$$

证完.

空间 E_{-1} 和 S_{-1} . 我们讨论一下两个特殊的空间: E_{-1} 和 S_{-1} . 由 E_{-1} 的定义不难看出, T^*P 上的局部是常数的函数空间 $H^0(T^*P, R)$ 包含在 E_{-1} 中. 利用正合序列 (9.3)

$$\begin{aligned} (0) \longrightarrow H^0(T^*P, R) \longrightarrow C^\infty(T^*P) \xrightarrow{H} S(T^*P, \omega) \\ \longrightarrow H^1(T^*P, R) \longrightarrow (0), \end{aligned}$$

得一序列

$$(13.6) \quad (0) \longrightarrow H^1(T^*P, R) \longrightarrow E_{-1} \xrightarrow{H} S_{-1} \longrightarrow H^1(T^*P, R) \longrightarrow (0).$$

我们有下面的结论:

13.7. 命题. 序列 (13.6) 是一正合序列.

证. 根据命题 13.3, 对任意的 $X \in S_{-1}$ 有

$$H_{\alpha(X)} = 0.$$

于是函数 $\alpha(X)$ 在局部上是常数. 因为 α 在 T^*P 的零截面上为零, 所以有 $\alpha(X) = 0$. 若 $X \in S_{-1}$ 且 X 在 $H^1(T^*P, R)$ 中的象为 0, 则存在 $f \in C^\infty(T^*P)$ 使 $H_f = X$. 又根据命题 13.3 的推论 1,

$$Cf = \alpha(H_f) = 0.$$

因此, 序列 (13.6) 在 S_{-1} 处是正合的. 现证映射

$$S_{-1} \longrightarrow H^1(T^*P, R)$$

是满射. 令 σ 为向量丛 T^*P 的零截面. 映射 $\sigma \circ \pi_*$ 在 T^*P 上同伦于单位映射. 于是同态

$$H^1(\pi_*): H^1(P, R) \longrightarrow H^1(T^*P, R)$$

实际上对任意的 i 都是同构。所以在 $H^i(T^*P, R)$ 中出现的每一上同调类都含这样的形式 r ，它是 P 上某一闭 1-形式在 $(\pi_*)^*$ 下的象。因为 C 是一垂直向量场，所以 $\theta(C)r = 0$ 。所以若 X 为 T^*P 上满足 $i(X)\omega = r$ 的辛向量场，则有

$$i([C, X])\omega = \theta(C)r - i(X)\theta(C)\omega = -i(X)\omega,$$

于是 $[C, X] = -X$ 且 $X \in S_{-1}$ 。所以 r 的上同调类是 S_{-1} 的某一元素的象。又序列在 E_{-1} 和 $H^0(T^*P, R)$ 处的正合性是显然的。证完。

注。正合序列 (13.6) 同构于下面的正合序列 $(0) \rightarrow$

$$H^0(P, R) \rightarrow C^\infty(P) \xrightarrow{d} Z^1(P) \rightarrow H^1(P, R) \rightarrow (0),$$

其中 $Z^1(P)$ 是 P 上的闭 1-形式所构成的空间，而映射 $Z^1(P) \rightarrow H^1(P, R)$ 是一个把闭 1-形式映为它所代表的上同调类的映射。事实上，我们定义空间 $\mathcal{Q}^1(P)$ 到 T^*P 上的向量场空间的一个标准同构使对 $\forall Y \in T(T^*P)$ 有

$$[C, Y] = -Y$$

如下：对任意的 $\beta \in \mathcal{Q}^1(P)$ ，定义 T^*P 上的向量场 X_β 使

$$i(X_\beta)\omega = (\pi_*)^*(\beta).$$

这个映射导出 $Z^1(P)$ 到 S_{-1} 上的一个同构，把它记为 ρ ，则不难验证下图是一交换图（习题）：

$$\begin{array}{ccccccccc} (0) & \longrightarrow & H^0(T^*P, R) & \longrightarrow & E_{-1} & \xrightarrow{H} & S_{-1} & \longrightarrow & H^1(T^*P, R) & \longrightarrow & (0) \\ & & \uparrow H^0(\pi_*) & & \uparrow (\pi_*)^* & & \uparrow \rho & & \uparrow H^1(\pi_*) & & \\ (0) & \longrightarrow & H^0(P, R) & \longrightarrow & C^\infty(P) & \longrightarrow & Z^1(P) & \longrightarrow & H^1(P, R) & \longrightarrow & (0). \end{array}$$

Lic 代数 E_0 和 S_0 。设 $D(P)$ 是 P 上的向量场所构成的 Lic 代数。在 §12 中，我们定义了从 $D(P)$ 到 $C^\infty(T^*P)$ 内的一个线性映射

$$F: X \mapsto f_X, \quad X \in D(P).$$

这是从 $D(P)$ 到 E_0 上的一个线性空间同构。

13.8. 引理。我们把 $C^\infty(P)$ 等同于 E_{-1} 。则对任意的 $X \in D(P)$ 和任意的 $g \in C^\infty(P)$ ，有

$$\{f_X, g\} = Xg.$$

证. 事实上, 设 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ 是由 P 上的局部坐标诱导出的 T^*P 上的局部坐标, 并且设

$$x = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

则

$$f_x = \sum_{i=1}^n a_i y_i.$$

从而

$$\{f_x, g\} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = Xg.$$

证完.

因为 $\{E_0, E_0\} \subset E_0$, 所以 E_0 对于由 Poisson 括号所定义的代数结构是一 Lie 代数.

13.9. 命题. 从 $D(P)$ 到 E_0 上的同构

$$F: X \mapsto f_x$$

是一 Lie 代数同构.

证. 事实上, 设 $X, Y \in D(P)$, $g \in C^\infty(P)$, 则

$$\begin{aligned} & \{f_x, f_y\}, g\} \\ &= \{f_x, \{f_y, g\}\} - \{f_x, \{f_x, g\}\} \\ &= X(Yg) - Y(Xg) = [X, Y]g = \{f_{(X, Y)}, g\}. \end{aligned}$$

这里, 同引理 13.8 一样, 我们把 $C^\infty(P)$ 等同于 E_{-1} . 由 F 的定义可知, 在局部坐标下有

$$\{f_x, f_y\} - f_{(X, Y)} = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

因此, 由上面的计算可知

$$\{f_x, f_y\} - f_{(X, Y)}$$

含于 Lie 代数 $C^\infty(T^*P)$ 的中心里, 从而它是 T^*P 上的局部常数函数. 又因为它含于 E_0 中, 所以它等于 0, 也就是说, F 是一 Lie 代数同构. 证完.

设 $X \in D(P)$, 我们定义 T^*P 上的一个 Hamilton 向量场 $T^*(X)$ 为

$$T^*(X) = H_{f_x}.$$

根据命题 13.5 和 13.9, 映射

$$T^*: X \mapsto T^*(X), X \in D(P),$$

是从 Lie 代数 $D(P)$ 到 Lie 代数 S_0 上的一个同构. 对任一 $g \in C^\infty(P)$, 我们有

$$T^*(X)g = H_{f_X}g = Xg, X \in D(P).$$

于是 $T^*(X)$ 是 P 上的一个可投影 (Projectable) 向量场, 而且它的投影是 X . 我们把向量场 $T^*(X)$ 称为 X 在 T^*P 中的拓展 (prolongement). 根据命题 13.3 的推论 1, 对任意的 $X \in D(P)$ 都有

$$\alpha(T^*(X)) = Cf_X = f_X.$$

13.10. 命题. 设 Y 是 T^*P 上的一个向量场, 则 Y 为 P 上某一向量场的拓展的充分必要条件是

$$(i) [C, Y] = 0,$$

$$(ii) \theta(Y)\alpha = 0.$$

证. 设 Y 是 P 上的向量场 X 的拓展, 即有 $Y = T^*(X)$. 那么, $Y \in S_0$, 从而 $[C, Y] = 0$. 又

$$\begin{aligned} \theta(Y)\alpha &= di(Y)\alpha + i(Y)d\alpha \\ &= d(\alpha(Y)) + i(Y)d\alpha \\ &= df_X - i(H_{f_X})\omega = 0. \end{aligned}$$

于是必要性得证. 反之, 若 Y 是 T^*P 上满足条件 (i) 和 (ii) 的向量场, 则有

$$C\alpha(Y) = (\theta(C)\alpha)(Y) + \alpha([C, Y]) = \alpha(Y),$$

所以 $\alpha(Y) \in E_0$. 另一方面, 因为 $\theta(Y)\alpha = 0$, 我们有

$$d\alpha(Y) = i(Y)\omega.$$

于是

$$Y = H_{\alpha(Y)} \in S_0,$$

所以 Y 是 P 上某一向量场的拓展. 证完.

例. 设 x_1, \dots, x_n 是 R^n 上的自然坐标, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ 是 T^*R^n 上由 x_1, \dots, x_n 诱导出的辛坐标. 若

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

是 R^n 上的一个向量场, 则它在 T^*R^n 上的拓展是

$$T^*(X) = \sum_{i=1}^n \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^n y_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

注. 若 $X \in D(P)$, 则由 $T^*(X)$ 所产生的任意一个流都是由 T^*P 的辛同构所构成的集合. 这些辛同构保持 Liouville 形式不变. 若 φ_t 是由 X 所产生的一个流, 根据 §12 的讨论可知 $T^*\varphi_t$ 是 T^*P 上由 $T^*(X)$ 产生的一个流.

空间 E_1 和 S_1 . E_1 由 T^*P 上这样的函数构成, 这些函数在每一纤维 T_x^*P 上的限制是二次齐次多项式. 如果对任意的 $x \in P$, $g \in E_1$ 在 T_x^*P 上的限制都是非退化的, 则可将它看作 P 上的一个伪 Riemann 度量, 并且我们可以用它来定义从余切丛 T^*P 到切丛 TP 上的一个同构如下: 设 $\xi \in T^*P$, 并设 $\pi_*(\xi) = x$, 定义 TP 中的元素 g_ξ 为

$$g_\xi: v \mapsto g(\xi, v), \quad \forall v \in T_x P,$$

则映射

$$\varphi: \xi \mapsto g_\xi, \quad \forall \xi \in T^*P,$$

就是从 T^*P 到 TP 上的一个同构. 若通过同构 φ 把 TP 等同于 T^*P , 则 Hamilton 向量场 $H_g (\in S_1)$ 称为由度量 g 激起的浪花 (spray). P 上的测地线是 H_g 的轨道在 P 上的投影. 注意到 $H_g g = \{g, g\} = 0$, 可知向量场切于由方程 $g = a (a \in R)$ 所定义的超曲面.

§ 14. 余切丛的 Lagrange 子流形

设 P 是一流形, $\beta \in \Omega^1(P)$. 与 §12 一样, 我们用 $\bar{\beta}$ 来表示余切丛上相应于 β 的截面, 则 $\bar{\beta}$ 是从 P 到 T^*P 内的一个浸入.

14.1. 命题. 浸入

$$\bar{\beta}: P \longrightarrow T^*P$$

是一 Lagrange 浸入的充分必要条件是 β 是一个闭 1-形式.

证. 事实上, 根据命题 12.6 我们有

$$\beta = \bar{\beta}^*(\alpha),$$

所以

$$d\beta = \bar{\beta}^*(d\alpha) = -\bar{\beta}^*(\omega).$$

其中 α 是 T^*P 的 Liouville 形式, 因此, 浸入 $\bar{\beta}$ 是迷向浸入当且仅当 $d\beta = 0$. 又因为

$$\dim P = \frac{1}{2} \dim T^*P,$$

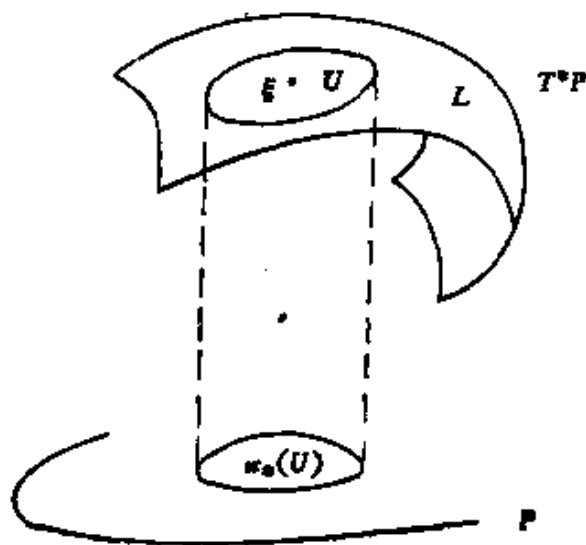
所以从 P 到 T^*P 内的迷向浸入必是 Lagrange 浸入. 于是 $\bar{\beta}$ 是一 Lagrange 浸入的充分必要条件是 $d\beta = 0$. 证完.

命题 14.1 的一个特殊的情形是, 对任一函数 $f \in C^\infty(P)$, 都有 T^*P 的一个 Lagrange 子流形与之相对应, 即 \overline{df} 的象. 我们把 \overline{df} 的象称为是由 f 生成的 Lagrange 子流形, 而称 f 为该子流形的一个母函数 (fonction génératrice).

设 L 是 T^*P 的一个 Lagrange 子流形, ξ 是 L 的一个点使得 $T_\xi L$ 横截于 $T_\xi(T^*P)$ 的垂直向量空间, 则映射

$$\pi_*: T^*P \longrightarrow P$$

限制在 L 所得到的映射 $\pi_*|_L = \pi_1$ 在点 ξ 的切空间映射 $(\pi_*^T)_\xi$ 是一切空间同构. 于是知道有 ξ 在 L 中的一个开邻域 U 使限制映射 $\pi_*|_U$ 是从 U 到 P 的开集 $\pi_*(U)$ 上的一个微分同胚 (参看下面的示意图).



设 β 是 $\pi_*(U)$ 上的一个微分 1-形式使映射 $\bar{\beta} \circ \pi_*$ 为 U 上的单位映射, 则 $\bar{\beta}$ 是从 $\pi_*(U)$ 到 U 上的 Lagrange 浸入. 根据命题 14.1, $d\bar{\beta} = 0$. 于是存在点 $\pi_*(\xi)$ 在 P 中的一个开邻域 V 以及函数 $f \in C^\infty(V)$ 使得

$$d\bar{f} = \bar{\beta}|_V.$$

因此, $\bar{d}f(V)$ 是 ξ 在 L 中的一个邻域, 在这个邻域中, f 是一母函数.

大家自然要问, 是不是 T^*P 中任意的 Lagrange 子流形在局部上都可以由一母函数生成? 答案是否定的. 在 T^*P 中存在这样的 Lagrange 子流形, 它们不是 T^*P 的截面, 因而不能, 即便是局部地, 也不能由某一函数生成. 例如, T^*P 的每一纤维都是 T^*P 的一个 Lagrange 子流形. 事实上, Liouville 形式在每一纤维上的拉回等于零, 所以 ω 在每一纤维上的拉回也是零, 又每一纤维的维数都是 T^*P 的维数的一半, 因而是 Lagrange 子流形. 这些 Lagrange 子流形不能由函数生成.

利用 P 上的一个函数来构造 T^*P 的 Lagrange 子流形的方法可推广如下. 我们不妨假定在 P 上存在整体的坐标 x_1, \dots, x_n , 不然, 我们可以取 P 的一个坐标邻域来进行讨论. 设 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ 为 T^*P 上由 x_1, \dots, x_n 诱导出的辛坐标. 设 r 是一正整数, a_1, \dots, a_r 是 R^r 上的自然坐标. 我们考虑积流形 $P \times R^r$. 令

$$pr_1: P \times R^r \longrightarrow P$$

是投影映射, 又设

$$F: P \times R^r \longrightarrow R$$

是 $P \times R^r$ 上的一个可微函数. 我们来定义投影 pr_1 的一个提升 (relèvement)

$$\gamma: P \times R^r \longrightarrow T^*P$$

使得

$$\pi_* \circ \gamma = pr_1,$$

$$y_i \circ \gamma = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

则 γ 是一可微映射.

令 N_F 为 $P \times R^s$ 中由下列方程所定义的点集:

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{\partial F}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial F}{\partial a_s} = 0.$$

我们假定在 N_F 上恒有

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right) \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{\partial F}{\partial a_s}\right) \neq 0.$$

于是, N_F 是 $P \times R^s$ 的一个 n 维闭子流形, 而且 γ 在 N_F 上的限制是一浸入. 事实上, 对任意的 $x \in N_F$, $P \times R^s$ 上的一个向量场 X 在点 x 处与 N_F 相切的条件是

$$X_x \left(\frac{\partial F}{\partial a_i} \right) = 0, \quad i = 1, \cdots, s.$$

换句话说, X_x 属于下面 s 个 1-形式的核的交集:

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right), \cdots, d\left(\frac{\partial F}{\partial a_s}\right).$$

于是, 根据 γ 的定义, $(\gamma|N_F)^T$ 的核是下列 1-形式的核的交集:

$$dx_i, d\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right), d\left(\frac{\partial F}{\partial a_j}\right), \quad i = 1, \cdots, n; \quad j = 1, \cdots, s.$$

也就是下列 1-形式的核的交集:

$$dx_i, \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial a_k} da_k, \quad \sum_{k=1}^s \frac{\partial^2 F}{\partial a_j \partial a_k} da_k, \\ i = 1, \cdots, n; \quad j = 1, \cdots, s.$$

因为在 N_F 上

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial a_j}\right), \quad j = 1, \cdots, s,$$

是无关系的, 因此下面的 $s \times (n + s)$ 阶矩阵

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial a_k} & \frac{\partial^2 F}{\partial a_j \partial a_k} \end{array} \right)$$

在 N_F 上的秩恒等于 s . 于是知道 $(\gamma|N_F)^T$ 的核是下列 1-形式的核的交:

$$dx_1, \cdots, dx_n, da_1, \cdots, da_s.$$

这就推出 $(\gamma|N_F)^T$ 的核仅含零向量, 也即 $\gamma|N_F$ 是一浸入.

另一方面, 对 T^*P 的 Liouville 形式

$$\alpha = \sum_{i=1}^n y_i dx_i,$$

有

$$\gamma^*(\alpha) = \gamma^* \left(\sum_{i=1}^n y_i dx_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i.$$

于是 $\gamma^*(\alpha)$ 在 N_F 上的拉回与 dF 在 N_F 上的拉回相同. 于是

$$\gamma^*(\omega)|N_F = \gamma^*(-d\alpha)|N_F = -d\gamma^*(\alpha)|N_F = 0.$$

所以 γ 在 N_F 上的限制是 N_F 到 T^*P 内的一个 Lagrange 浸入. 一般说来, 这个浸入不是内射 (参看例 2). 如果是内射, 则它的象 L 是 T^*P 的 Lagrange 子流形, $\alpha|L$ 是一正合 1-形式. 这时, 我们也说 F 是 L 的一个母函数.

注. 考虑投影

$$pr_1: P \times R^s \longrightarrow P$$

在 N_F 上的限制 $pr_1|N_F$. 易知 $(pr_1|N_F)^T$ 的核是下列 1-形式的核的交:

$$dx_1, \dots, dx_n, d\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}\right), \dots, d\left(\frac{\partial F}{\partial a_s}\right).$$

所以它最多是 s 维的. 如果我们把 Lagrange 浸入

$$\gamma: N_F \longrightarrow T^*P$$

和自然投影

$$\pi_*: T^*P \longrightarrow P$$

合起来, 则得到一个在任意一点的秩至少是 $n-s$ 的映射.

例 1. 设 $S = n$. 设 $p \in P$, p 点的坐标是 (p_1, \dots, p_n) . 又设

$$F = \sum_{i=1}^n (x_i - p_i) a_i,$$

则

$$N_F = \{p\} \times R^n \subset P \times R^n,$$

并且

$$y_i \circ \gamma = a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

也就是说, $\gamma|_{N_F}$ 是从 N_F 到纤维 T^*P 上的同构.

例2. 设 $P = R$ 并且设 $s = 1$, 而

$$F = F(x, a) = \frac{a^3}{3} + (x^2 - 1)a,$$

则

$$\frac{\partial F}{\partial a} = x^2 + a^2 - 1.$$

于是 N_F 是含于 $P \times R = R^2$ 中的单位圆. 对任意的 $(p, t) \in R^2$, 我们有

$$\gamma(p, t) = (p, 2pt),$$

并且

$$\gamma(0, 1) = \gamma(0, -1) = (0, 0).$$

所以映射

$$\gamma: N_F \longrightarrow T^*R$$

不是内射.

我们知道, 一般说来, T^*P 的 Lagrange 子流形即使在局部上也不一定由 $C^\infty(P)$ 的某一函数生成, 即在局部上也不一定是某一 \overline{df} 的象, 这里 $f \in C^\infty(P)$. 但是, 若 L 是 T^*P 的一个闭的 Lagrange 子流形, 则在局部上, 它可由我们刚才所叙述的方法构造出来. 事实上, 设 $\xi \in L$ 是任意的一点. 根据命题 11.3, 存在 ξ 在 T^*P 中的一个开邻域 U 和 U 上的辛坐标 $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$, 使得 v_1, \dots, v_n 在 $L \cap U$ 上全为 0. 根据引理 11.2, 我们可以假定坐标 $u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n$ 有这样的性质, 在 U 上任一点处

$$dx_1, \dots, dx_n, du_1, \dots, du_n$$

都是无关的. 其中 x_1, \dots, x_n 是 P 上的坐标. 设 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ 是 P 上由 x_1, \dots, x_n 诱导出的辛坐标, 则因为 $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n$ 和 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ (限制在 U 上) 都是 U 上的辛坐标, 所以形式

$$\sum_{i=1}^n (y_i dx_i - v_i du_i)$$

是 U 上的一个闭形式。因为任一闭形式在局部上都是正合的，所以我们可以假定存在 T^*P 上的可微函数 F 使在 U 上（必要时可将 U 适当缩小）有

$$dF|_U = \sum_{i=1}^n (y_i dx_i - v_i du_i).$$

于是在 U 上有

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = - \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial u_j}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

因为在 $L \cap U$ 上 v_1, \dots, v_n 全为 0，所以在 $L \cap U$ 上

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

又

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right) = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial y_i} dv_j - \sum_{j=1}^n v_j d\left(\frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right),$$

所以在 $L \cap U$ 上有

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right) = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_j}{\partial y_i} dv_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

但因为

$$dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_n$$

在 U 上无关，所以 $n \times n$ 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \end{pmatrix}$$

在 U 的任意一点处都可逆，所以形式

$$d\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right), \quad i = 1, \dots, n,$$

在 $L \cap U$ 上是无关的。利用辛坐标 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ 把 T^*P 等同于 $P \times R^n$ ，则构造出来的映射

$$\gamma: P \times R^n \longrightarrow T^*P$$

是一 Lagrange 浸入。又由于在 $L \cap U$ 上有

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = y_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

所以映射 γ 在 N_F 的开集 $L \cap U$ 上是单位映射.

正如 Weinstein 在文献[29]中所阐明的那样,通过 $P \times R^s$ 上的一个可微函数来构造 T^*P 的 Lagrange 子流形的方法,是另一具有更为直观的几何意义的构造方法的特殊情形. 下面我们简述一下这一方法,想了解详细论证的读者可参看有关的文献.

设 Q 是一个流形,

$$\varphi: Q \longrightarrow P$$

是一子浸入. 设 N 是 T^*Q 中所有具有形式 $\xi \circ \varphi^T$ ($\xi \in T^*P$) 的余切向量所构成的集合, 则 N 是 T^*Q 的一个子向量丛. 若 $\dim P = n$ 且 $\dim Q = n + s$, 则 $\dim N = 2n + s$. 设

$$\mu: N \longrightarrow T^*P$$

是一可微映射使得

$$\mu(\eta) \circ \varphi^T = \eta$$

对所有的 $\eta \in N$ 成立, 则可以证明:

1) 若 α_P 和 α_Q 分别是 T^*P 和 T^*Q 上的 Liouville 形式, 则

$$\alpha_Q|_N = \mu^*(\alpha_P).$$

又若 ω_P 和 ω_Q 分别是 T^*P 和 T^*Q 上的辛结构, 则有

$$\mu^*(\omega_P) = \omega_Q|_N.$$

2) N 对于辛结构 ω_Q 来说, 是余迷向的.

设 F 是 Q 上的一个可微函数, L 是 \overline{dF} (dF 所对应的 T^*Q 的截面) 在 T^*Q 中的象, 则 L 是 T^*Q 的一个 Lagrange 子流形. 若 L 和 N 有一“适用交”, 则可用收缩法在 T^*P 中构造一 Lagrange 子流形 (参看 §11). 对任意的 $\eta \in L \cap N$, 存在 η 在 $L \cap N$ 中的一个开邻域 V 使 $\mu(V)$ 是 T^*P 的一个 Lagrange 子流形.

第四章 辛 G -空间

在这章里,我们用 G 来表示一个 Lie 群,即 G 同时是一抽象群和一实解析流形,并且 G 的群运算与 G 的解析结构是相容的. 所谓相容的,意思是指由

$$(x, y) \mapsto xy^{-1}, \quad x, y \in G,$$

所定义的从 $G \times G$ 到 G 上的映射是一实解析映射.

定义 1. 设 M 是一流形,如果可微映射

$$\gamma: G \times M \rightarrow M$$

满足下面的两条:

(i) $\gamma(e, x) = x, \quad \forall x \in M, e$ 是 G 的单位元,

(ii) 若 $s_1, s_2 \in G$, 则

$$\gamma(s_1, \gamma(s_2, x)) = \gamma(s_1 s_2, x), \quad \forall x \in M,$$

则我们说 G 可微地作用在 M 上.

通常我们把 G 在 M 上的作用 γ 写成乘积的形式

$$\gamma(s, x) = sx, \quad s \in G, x \in M.$$

若把 $T(G \times M)$ 等同于 $TG \times TM$, 则 Lie 群 G 在 M 上的可微作用的切空间映射 γ^T 可以看作是从 $TG \times TM$ 到 TM 内的可微映射,容易看出,这是群 TG 在流形 TM 上的一个作用,我们同样把它写成乘积的形式. 我们把 M (或 G) 等同于 TM (或 TG) 的零截面的象. 在这些假定下,若 $s \in G, x \in M, a \in T_x G, v \in T_x M$, 则有

$$sv = \gamma^T(s, v) \in T_{xx}M,$$

$$ax = \gamma^T(a, x) \in T_{xx}M.$$

把 G 在单位元 e 处的切空间记为 \mathfrak{g} , 则对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 和 $x \in M$, 我们有 $a_x \in T_x M$. 映射

$$x \mapsto a_x, \quad x \in M,$$

对固定的 a 是 M 上的一个向量场, 我们把它记为 Γ_a . 特别地, 若 $M = G$ 且

$$\gamma: G \times G \rightarrow G$$

就是 Lie 群 G 的乘积, 则对 $a \in \mathfrak{g}$,

$$\Gamma_a: s \mapsto as, s \in G,$$

是 G 上的一个右不变向量场, 我们用专门的记号 R_a 来表示它. 显然, $R_a(e) = a$. 在 \mathfrak{g} 上定义一括号运算 $[\cdot, \cdot]$ 使对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$R_{[a,b]} = [R_a, R_b] (= R_a R_b - R_b R_a),$$

则向量空间 \mathfrak{g} 成为一实 Lie 代数, 我们称它为 G 的 Lie 代数.

定义2. 设 M 是一流形, G 是一 Lie 群, \mathfrak{h} 是任意的一个有限维实 Lie 代数, 则

(i) 若 G 可微地作用在 M 上, 我们称 M 为一 G -空间.

(ii) 若存在从 Lie 代数 \mathfrak{h} 到 M 的向量场 Lie 代数内的一个同态, 我们称 M 为一 \mathfrak{h} -空间.

若 \mathfrak{g} 是 G 的 Lie 代数, 则对任一 G -空间 M , 映射

$$\Gamma: a \mapsto \Gamma_a, a \in \mathfrak{g},$$

是从 \mathfrak{g} 到 M 的向量场 Lie 代数 $D(M)$ 内的一个同态, 从而 M 是一 \mathfrak{g} -空间. 我们把 M 的这一 \mathfrak{g} -空间结构称为伴随 \mathfrak{g} -空间结构.

注. 通常我们也从 Lie 群 G 上的左不变向量场出发来定义 G 的 Lie 代数, 它和由右不变向量场定义的 G 的 Lie 代数没有什么本质的区别.

§ 15. 定义和例子

15.1. 定义. 设 M 是一 G -空间. 若在 M 上有一在 G 的作用下不变的辛结构 ω , 则我们称 M 为一辛 G -空间.

根据定义, 若辛流形 (M, ω) 是一辛 G -空间, 则对任意的 $s \in G$, 微分同胚

$$s: x \mapsto sx, x \in M,$$

是 (M, ω) 的一个辛自同构。

15.2. 定义. 设 \mathfrak{h} 是一有限维实 Lie 代数, 流形 M 是一 \mathfrak{h} -空间. 若 M 上存在辛结构 ω 使对任意的 $a \in \mathfrak{h}$, 向量场

$$\Gamma_a: x \mapsto ax, x \in M,$$

都是 (M, ω) 的辛向量场, 则我们称 \mathfrak{h} -空间 M 为一辛 \mathfrak{h} -空间.

设 \mathfrak{g} 是 G 的 Lie 代数, M 是一 G -空间, ω 是 M 上的一个辛结构. 因为 M 是一 G -空间, 所以 M 是一 \mathfrak{g} -空间. 若 (M, ω) 是一辛 G -空间, 则它也是一辛 \mathfrak{g} -空间. 事实上, 任取 $a \in \mathfrak{g}$, 设

$$F: R \rightarrow G$$

是相应于 a 的 G 的单参数子群, 即 F 是从实数加法 Lie 群 R 到 G 内的一个 Lie 群同态. 对任意的 $x \in M$, 令

$$\varphi: (t, x) \mapsto F(t)x, t \in R,$$

则映射

$$\varphi: R \times M \rightarrow M$$

满足条件

$$(i) \varphi(0, x) = x, \forall x \in M,$$

(ii) 映射: $t \mapsto \varphi(t, x)$, $t \in R$, 对 $\forall x \in M$ 都是向量场

$$\Gamma_a: x \mapsto ax, x \in M,$$

的一条积分曲线.

事实上, 对任意的 $t \in R$ 有

$$\Gamma_a: \varphi(t, x) = aF(t)x.$$

又因为

$$F: R \rightarrow G$$

是相应于 a 的单参数子群, 所以

$$\frac{dF(t)}{dt} = aF(t).$$

于是有

$$\frac{d\varphi(t, x)}{dt} = \frac{dF(t)}{dt} x = aF(t)x.$$

于是 φ 是由 Γ_a 产生的一个流. 因为 ω 是 G 不变的, 所以

$\varphi_t^*(\alpha)$ 不依赖于参数 $t \in R$. 根据引理 9.1 得

$$\theta(\Gamma_s)\omega = 0.$$

即 Γ_s 对任意的 $s \in \mathfrak{g}$ 都是一辛向量场. 这就证明了 (M, ω) 也是一辛 \mathfrak{g} -空间. 反之, 若 (M, ω) 是一辛 \mathfrak{g} -空间, 则在 G 是一连通 Lie 群时, (M, ω) 也是一辛 G -空间.

例 1. 设 P 是 G -空间, 并设

$$\gamma : G \times P \rightarrow P$$

是相应的作用. 对任意的 $s \in G$,

$$\gamma_s : x \rightarrow sx, \quad x \in P,$$

是 P 的一个微分同胚. 采用 §12 中的记号, 映射

$$T^*\gamma_s : T^*P \rightarrow T^*P$$

满足关系

$$\langle (T^*\gamma_s)(\xi), \gamma^T(u) \rangle = \langle \xi, u \rangle, \quad \forall \xi \in T^*_s P, u \in T_x P.$$

于是映射

$$T^*\gamma : (s, \xi) \mapsto (T^*\gamma_s)(\xi), \quad s \in G, \xi \in T^*P,$$

定义了 G 在 T^*P 上的一个作用, 我们也把它写成乘积的形式

$$T^*\gamma : (s, \xi) \mapsto s\xi, \quad s \in G, \xi \in T^*P.$$

于是, 对任意的 $(\xi, \nu) \in T^*P \times T_x P$ 和 $s \in G$ 有

$$\langle s\xi, s\nu \rangle = \langle \xi, \nu \rangle.$$

所以, 上面所定义的 G 在 T^*P 上的作用实际上是唯一满足这一等式的作用. 根据命题 12.8, 我们知道 T^*P 上的 Liouville 形式 α_P 在 G 的这一作用下不变. 因此, 若 $\omega_P = -d\alpha_P$ 是 T^*P 上的标准辛结构, 则 (T^*P, ω_P) 就是一辛 G -空间.

例 2. 设 $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$ 是 R^{2n} 上的标准辛结构. 在辛

群 $Sp(2n)$ 的自然作用下, 辛流形 (R^{2n}, ω) 便是一辛 $Sp(2n)$ -空间. 同样把 R^{2n} 看作 Lie 群, 则在平移变换作用下, (R^{2n}, ω) 是一辛 R^{2n} -空间.

若 (M, ω) 是一辛 G -空间, ω 在 G 的每一轨道上的拉回都是一常秩闭 2-形式. 但在一般情形下, 该闭形式不一定是轨道上的

辛结构。我们有下面的引理。

15.3. 引理. 设 (V, ω) 是一实辛向量空间, H 是 $Sp(V, \omega)$ 的一个紧子群, 设 V^H 是由 V 中的 H 不动向量所构成的子空间, 则 V^H 是 (V, ω) 的一个辛子空间。

证. 设 x_1, \dots, x_{2n} 是 V 的一组辛基, 定义 V 的一个线性映射 j 使

$$\begin{aligned} j(x_i) &= x_{n+i}, & i &= 1, \dots, n, \\ j(x_{n+i}) &= -x_i, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

再定义 V 上的一个双线性型 b 如下:

$$b(x_1, x_2) = \omega(x_1, j(x_2)), \quad \forall x_1, x_2 \in V,$$

则 b 是 V 上的一个正定对称双线性型. 因为 H 是 $Sp(V, \omega)$ 的一个紧子群, 所以由 §5 的结果知 b 在 H 的作用下不变, 即对任意的 $s \in H$ 有

$$b(x_1, x_2) = b(sx_1, sx_2), \quad \forall x_1, x_2 \in V.$$

令 F 是 V 中由

$$\{sx - x : s \in H, x \in V\}$$

所张成的子空间. 因为 $H \subset Sp(V, \omega)$, 所以对任意的 $x, y \in V$ 和 $s \in H$ 有

$$\omega(sx - x, y) = \omega(x, s^{-1}y - y).$$

特别地, 若 $y \in V^H$, 则有

$$\omega(sx - x, y) = 0.$$

因此, F 是 V^H 在 V 中对于 ω 的正交补. 同样, 由于 b 在 H 下不变, 所以我們也有

$$b(sx - x, y) = b(x, s^{-1}y - y), \quad \forall x, y \in V, s \in H.$$

于是, 对于 b 来说, F 也与 V^H 正交. 设 V^H 在 V 中对于 b 的正交补是 $(V^H)^\perp$, 则

$$(V^H)^\perp = F.$$

于是

$$V^H \cap (V^H)^\perp = V^H \cap F = (0).$$

所以 V^H 是一辛子空间. 证完.

15.4. 命题. 设 (M, ω) 是一辛 G -空间. 若 G 是一紧 Lie 群, 则 G 不动点集

$$M^G = \{x \in M : sx = x \text{ 对所有 } s \in G\}$$

是 (M, ω) 的一个辛子流形.

证. 因为 G 是紧的, 所以在 M 上可定义一个在 G 的作用下不变的 Riemann 度量 g . 对于 g , 我们可以在 TM 的零截面的一个开邻域 U 上定义一个指数映射 (参看文献[12])

$$\exp: U \rightarrow M.$$

因为 g 在 G 的作用下不变, 所以对任意的 $s \in G$ 和 $v \in U$ 有

$$\exp(sv) = s(\exp v).$$

设 $x \in M^G$, W_x 是 x 在 $T_x M$ 中的一个开邻域使 $W_x \subset U$ 并且使 \exp 在 W_x 上的限制是从 W_x 到 $\exp(W_x)$ 上的一个微分同胚, 则

$$M^G \cap \exp(W_x) = \exp((T_x M)^G \cap W_x),$$

这里 $(T_x M)^G$ 是 $T_x M$ 中的 G 不动子空间. 于是 M^G 是 M 的一个子流形, 并且对任意的 $x \in M^G$ 有

$$T_x(M^G) = (T_x M)^G.$$

因为 (M, ω) 是一 G -空间, 所以对任意的 $s \in G$ 和 $x \in M^G$, $T_x M$ 的线性变换

$$v \mapsto sv, \quad v \in T_x M,$$

是 $Sp(T_x M, \omega_x)$ 的一个元素. 于是由引理 15.3 知

$$T_x M^G = (T_x M)^G$$

是 $(T_x M, \omega_x)$ 的一个辛子空间. 所以 M^G 是 (M, ω) 的一个辛子流形. 证完.

§ 16. Hamilton \mathfrak{g} -空间和矩射

下面我们用 \mathfrak{g} 来表示一个有限维实 Lie 代数.

16.1. 定义. 设 (M, ω) 是一辛 \mathfrak{g} -空间, 若对任意的 $a \in \mathfrak{g}$, 向量场

$$\Gamma_a: x \mapsto ax, \quad x \in M,$$

都是一 Hamilton 向量场, 则称 (M, ω) 为一 Hamilton \mathfrak{g} -空间.

若 (M, ω) 是一辛流形, 则我们有一 Lie 代数正合序列 (9.3)

$$(0) \rightarrow H^0(M, R) \rightarrow C^\infty(M) \xrightarrow{H} S(M, \omega) \xrightarrow{\rho} H^1(M, R) \rightarrow (0),$$

而 M 上的 Hamilton 向量场就是属于 H 的象集的 M 的辛向量场. 因此, 辛流形 (M, ω) 上的一个 Hamilton \mathfrak{g} -空间结构, 实际上是这样一个同态

$$\Gamma: \mathfrak{g} \rightarrow S(M, \omega),$$

它满足关系式

$$\rho \circ \Gamma = 0.$$

所以, 若 $H^1(M, R) = (0)$, 则上式恒成立, (M, ω) 上所有的辛 \mathfrak{g} -空间结构都是 Hamilton \mathfrak{g} -空间结构. 因为作为 Lie 代数, $H^1(M, R)$ 的括号运算是零运算, 所以若 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, 则从 \mathfrak{g} 到 $H^1(M, R)$ 内的任一 Lie 代数同态都是零同态. 因此, 若 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, 则 (M, ω) 上的所有辛 \mathfrak{g} -空间结构也都是 Hamilton \mathfrak{g} -空间结构.

设映射

$$\iota: \mathfrak{g} \rightarrow S(M, \omega)$$

是一 Lie 代数同态, 则 Γ 是辛流形 (M, ω) 上的一个 Hamilton \mathfrak{g} -空间结构的充要条件也可叙述为: 存在从 \mathfrak{g} 到 $C^\infty(M)$ 内的一个线性映射 $\tilde{\Gamma}$ 使

$$\Gamma = H \circ \tilde{\Gamma}.$$

如果 $\tilde{\Gamma}$ 是任意一个从 \mathfrak{g} 到 $C^\infty(M)$ 的线性映射, 则我们可以定义从 $C^\infty(M)$ 到 \mathfrak{g} 的对偶空间 \mathfrak{g}^* 内的一个可微映射 μ 如下: 对任意的 $a \in \mathfrak{g}$, $\mu(x)$ ($x \in M$) 在 a 处的值为

$$\langle \mu(x), a \rangle = \tilde{\Gamma}(a)(x).$$

容易看出 $\mu(x)$ 是一意确定的. 于是, 我们可以把 $a \in \mathfrak{g}$ 在 $\tilde{\Gamma}$ 下的象看作是下式所定义的 M 上的函数

$$\langle \mu, a \rangle: x \mapsto \langle \mu(x), a \rangle, \quad \forall x \in M.$$

若 Γ 是一 Hamilton \mathfrak{g} -空间结构, 则有

$$H_{\langle \mu, a \rangle} = \Gamma_a, \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

16.2. 定义. 设 (M, ω) 是一 Hamilton \mathfrak{g} -空间. 我们把任一满足关系式

$$H_{(\mu, \omega)} = \Gamma_a, \quad \forall a \in \mathfrak{g}$$

的可微映射

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

称为 \mathfrak{g} -空间 (M, ω) 的一个矩射.

16.3. 引理. 设

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是 Hamilton \mathfrak{g} -空间 (M, ω) 的一个矩射, 则下面的等式

$$(i) \quad d\langle \mu, a \rangle = \langle d\mu, a \rangle = i(\Gamma_a)\omega,$$

$$(ii) \quad \langle d\mu(ax), b \rangle = \omega(bx, ax),$$

$$(iii) \quad \langle d\mu(ax), b \rangle = \{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\}(x)$$

对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 和 $x \in M$ 都成立.

证. 由定义有

$$i(\Gamma_a)\omega = i(H_{(\mu, \omega)})\omega = d\langle \mu, a \rangle = \langle d\mu, a \rangle,$$

所以 (i) 成立. 由 (i) 有

$$\langle d\mu(ax), b \rangle = d\langle \mu, b \rangle(ax) = i(\Gamma_b)\omega(ax) = \omega(bx, ax),$$

所以 (ii) 成立. 又根据引理 9.8 有

$$\{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\} = \omega(H_{(\mu, b)}, H_{(\mu, a)}) = \omega(\Gamma_b, \Gamma_a),$$

所以

$$\{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\}(x) = \omega(bx, ax),$$

于是 (iii) 成立. 证完.

设 μ_1 和 μ_2 是 Hamilton \mathfrak{g} -空间 (M, ω) 上的两个矩射, 则对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 都有

$$\langle d(\mu_1 - \mu_2), a \rangle = 0,$$

所以 $d(\mu_1 - \mu_2) = 0$. 于是 $\mu_1 - \mu_2$ 在局部是常值映射. 所以 (M, ω) 的矩射之间只差一局部常值映射. 若 μ 是一矩射, 而

$$\varphi: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是一局部常值映射, 则因为 $H_{(\varphi, \omega)} = 0, \forall a \in \mathfrak{g}$, 所以

$$H_{(\mu+\varphi, \omega)} = H_{(\mu, \omega)} = \Gamma_a, \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

因此 $\mu + \varphi$ 是一矩射。如果 (M, ω) 是一连通 Hamilton \mathfrak{g} -空间, 则 (M, ω) 的任意两个矩射只差 \mathfrak{g}^* 的一个平移变换。

16.4 命题. 设 μ 是 Hamilton \mathfrak{g} -空间 (M, ω) 上的一个矩射, 则对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$, 函数

$$\{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\} - \langle \mu, [a, b] \rangle$$

是 M 上的一个局部常数函数。

证. 事实上, 根据引理 9.8 得

$$H_{\langle \mu, [a, b] \rangle} = \Gamma_{[a, b]} = [\Gamma_a, \Gamma_b] = [H_{\langle \mu, a \rangle}, H_{\langle \mu, b \rangle}] = H_{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle},$$

所以结论成立. 证完。

根据命题 16.4, 对 Hamilton \mathfrak{g} -空间 (M, ω) 的任意一个矩射 μ , 我们可以在 \mathfrak{g} 上定义一个取值于 $H^0(M, \mathbb{R})$ 中的反对称双线性映射 c_μ 如下:

$$c_\mu(a, b) = \{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\} - \langle \mu, [a, b] \rangle, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

因为 Poisson 括号满足 Jacobi 恒等式, 所以有

$$c_\mu([a, b], c) + c_\mu([b, c], a) + c_\mu([c, a], b) = 0, \quad \forall a, b, c \in \mathfrak{g}.$$

把 $H^0(M, \mathbb{R})$ 看作一个平凡 \mathfrak{g} -模, 则上面的等式表明 c_μ 是 \mathfrak{g} 上取值于 $H^0(M, \mathbb{R})$ 中的 2-闭链。若 $\mu' = \mu + \varphi$, $\varphi \in H^0(M, \mathbb{R})$, 是 M 的另一矩射, 则对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$c_{\mu'}(a, b) = c_\mu(a, b) - \langle \varphi, [a, b] \rangle.$$

这表明 $c_\mu - c_{\mu'}$ 是 \mathfrak{g} 上取值于 $H^0(M, \mathbb{R})$ 中的, 由等式

$$f(a) = \langle \varphi, a \rangle, \quad \forall a \in \mathfrak{g},$$

所定义的 1-上链的上边缘。于是知道, 作为 $H^2(\mathfrak{g}, H^0(M, \mathbb{R}))$ 中的一个元素, 2-闭链 c_μ 所对应的上同调类不依赖于 μ 的选取, 它由 (M, ω) 的 \mathfrak{g} -空间结构决定。我们把它记为

$$c(M, \omega).$$

16.5. 定义. 设 (M, ω) 是一辛 \mathfrak{g} -空间, 若同态

$$\Gamma: \mathfrak{g} \rightarrow S(M, \omega)$$

具有形式 $H \circ \tilde{f}$, 其中

$$H: C^\infty(M) \rightarrow S(M, \omega)$$

如 (9.3), 而 \tilde{f} 是从 \mathfrak{g} 到 Lie 代数 $C^\infty(M)$ (对于 Poisson 括号) 内

的一个同态, 则称 (M, ω) 为 Poisson \mathfrak{g} -空间, 或强 Hamilton \mathfrak{g} -空间.

为使一辛 \mathfrak{g} -空间 (M, ω) 是 Poisson 的, 充分必要条件是存在 (M, ω) 的一个矩射 μ 使 $c_\mu = 0$, 也就是 $\zeta(M, \omega)$ 是 0.

若 \mathfrak{g} 是一实半单 Lie 代数, 则任一辛 \mathfrak{g} -空间都是 Poisson 的. 事实上, 这时任一辛 \mathfrak{g} -空间都是 Hamilton 的. 根据 Whitehead 第二引理,

$$H^2(\mathfrak{g}, R) = (0)$$

(参看文献[13]). 所以

$$H^2(\mathfrak{g}, H^0(M, R)) = H^2(\mathfrak{g}, R) \otimes H^0(M, R) = (0).$$

于是 $\zeta(M, \omega) = 0$.

16.6. 命题. 设 (M, ω) 是一辛 \mathfrak{g} -空间. 若在 M 上存在一微分 1-形式 α 使对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 都有

$$\theta(\Gamma_a)\alpha = 0, \quad \omega = -d\alpha,$$

则 (M, ω) 是一 Poisson \mathfrak{g} -空间.

证. 事实上, 对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 我们有

$$d(\alpha(\Gamma_a)) = di(\Gamma_a)\alpha = \theta(\Gamma_a) - i(\Gamma_a)d\alpha = i(\Gamma_a)\omega,$$

所以 Γ_a 是一 Hamilton 向量场, 并且我们可以把 Γ 写成

$$\Gamma = H \circ \tilde{\Gamma},$$

其中 $\tilde{\Gamma}$ 是满足

$$\tilde{\Gamma}_a = \alpha(\Gamma_a), \quad \forall a \in \mathfrak{g},$$

的从 \mathfrak{g} 到 $C^\infty(M)$ 内的一个线性映射. 因此, 利用第二章一开头我们引用的公式, 得

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{[a,b]} &= i(\Gamma_{[a,b]})\alpha \\ &= i([\Gamma_a, \Gamma_b])\alpha \\ &= \theta(\Gamma_a)i(\Gamma_b)\alpha - i(\Gamma_b)\theta(\Gamma_a)\alpha \\ &= \theta(\Gamma_a)\alpha(\Gamma_b) = -\omega(\Gamma_a, \Gamma_b) = \{\tilde{\Gamma}_a, \tilde{\Gamma}_b\}, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

所以 $\tilde{\Gamma}$ 是一 Lie 代数同态, 因而 (M, ω) 是 Poisson 的. 证完.

推论. 设 P 是一 \mathfrak{g} -空间. 记 $T^*(\Gamma_a)$ 为 Γ_a ($a \in \mathfrak{g}$) 在 T^*P 上的拓展, 则映射

$$\Gamma^*: a \mapsto T^*(\Gamma_a), a \in \mathfrak{g},$$

是余切丛 T^*P 上的一个 Poisson \mathfrak{g} -空间结构。

证. 利用命题 13.10 和命题 16.6. 证完.

例 1. 取 $\mathfrak{g} = R^2$, \mathfrak{g} 的括号运算定义为零运算, 并且利用关系式 (x, y) 是 R^2 上的自然坐标)

$$\Gamma_{(a,b)} = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}, a, b \in R,$$

在 $(R^2, dx \wedge dy)$ 上定义一辛 \mathfrak{g} -空间结构, 则因为

$$\Gamma_{(a,b)} = H_{ay-bx},$$

所以这是 $(R^2, dx \wedge dy)$ 上的一个 Hamilton \mathfrak{g} -空间结构. 由等式

$$\mu(x, y) = (y, -x)$$

所定义的从 $\mathfrak{g} = R^2$ 到 $\mathfrak{g}^* = R^2$ 内的映射是一矩射. 对任意的 $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathfrak{g}$, 我们有

$$\begin{aligned} c_\mu((a_1, b_1), (a_2, b_2)) &= \{ \langle \mu, (a_1, b_1) \rangle, \langle \mu, (a_2, b_2) \rangle \} \\ &= \omega(\Gamma_{(a_1, b_1)}, \Gamma_{(a_2, b_2)}) \\ &= a_2 b_1 - a_1 b_2. \end{aligned}$$

这是因为 \mathfrak{g} 是一交换 Lie 代数. 又 c_μ 与矩射的选取无关, 故 c_μ 非零. 所以 \mathfrak{g} -空间 $(R^2, dx \wedge dy)$ 不是 Poisson 的.

例 2. 设

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{n+i}$$

是 R^{2n} 上的标准辛结构, 而

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n x_i \wedge x_{n+i}$$

是 R^{2n} 上的一个反对称双线性型.

对 R^{2n} 的任一自同态 a , 令 Γ_a 为 R^{2n} 上的线性向量场, 使对 R^{2n} 上任意的线性型 f 都有

$$\Gamma_a f = f \circ a,$$

则对任意的 $a, b \in \text{End}(R^{2n})$ 和 f 有

$$[\Gamma_a, \Gamma_b]f = \Gamma_a \Gamma_b f - \Gamma_b \Gamma_a f = f \circ b \circ a - f \circ a \circ b \\ = \Gamma_{(b \circ a - a \circ b)} f,$$

所以

$$[\Gamma_a, \Gamma_b] = \Gamma_{(b \circ a - a \circ b)}.$$

对 R^{2n} 的任一自同态 a , 由 Γ_a 的定义有

$$i(\Gamma_a)\omega = \sum_{i=1}^n ((x_i \circ a) dx_{n+i} - (x_{n+i} \circ a) dx_i).$$

因为

$$di(\Gamma_a)\omega = \theta(\Gamma_a)\omega,$$

所以 $i(\Gamma_a)\omega$ 是一闭 1-形式当且仅当 a 属于辛群 $Sp(2n)$ 的 Lie 代数 $sp(2n)$, 也就是说, 对任意的 $x, y \in R^{2n}$ 有 (参看 §4)

$$\omega_0(a(x), y) + \omega_0(x, a(y)) = 0.$$

因此, 映射

$$\Gamma: a \mapsto \Gamma_a, \quad a \in sp(2n),$$

是 (R^{2n}, ω) 上的一个辛 $sp(2n)$ -空间结构. 因为 $sp(2n)$ 是一实半单 Lie 代数, 所以 Γ 也是 Hamilton $sp(2n)$ -空间和 $\text{Poisso}_{sp(2n)}$ -空间结构. 设 e_1, \dots, e_{2n} 是 R^{2n} 的自然坐标, 则对任意的 $a \in sp(2n)$ 有

$$i(\Gamma_a)\omega = d\left(\sum_{j,k=1}^{2n} \omega_0(a(e_j), e_k) x_j x_k\right).$$

这也直接证明了 (R^{2n}, ω) 是一 Hamilton $sp(2n)$ -空间. 又我们有一二次矩射

$$\mu: R^{2n} \rightarrow (sp(2n))^*,$$

使得对任意的 $x \in R$ 有

$$\langle \mu(x), a \rangle = \omega_0(ax, x).$$

例 3. 设 $Q = R^3$ 是 3 维欧氏空间, q_1, q_2, q_3 是 Q 上的自然坐标. 于是在切丛 TQ 上有坐标

$$q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1 = dq_1, \dot{q}_2 = dq_2, \dot{q}_3 = dq_3,$$

参看 §9 的例 1. 若我们通过 Riemann 度量 $\sum_i dq_i^2$ 把 TQ 等同于

T^*Q , 则 T^*Q 上的 Liouville 形式可写成

$$\alpha_Q = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i dq_i.$$

在 TQ 上取辛结构 $-m d\alpha_Q$, 这里 $m \in \mathbb{R}$. 令 $gl(3)$ 为 Q 的自同态所构成的 Lie 代数, 则我们在 Q 中有一自然的 $gl(3)$ -空间结构. 对任意的 $a \in gl(3)$, 我们有

$$\Gamma_a = \sum_{i=1}^3 (q_i \circ a) \frac{\partial}{\partial q_i}.$$

根据命题 16.6 的推论, 对任一 $a \in gl(3)$, 在 $T^*Q = TQ$ 中有相应于 Γ_a 的一个拓展 $T^*(\Gamma_a)$, 并且可以在 $(TQ, -m d\alpha_Q)$ 上定义一 Poisson 空间结构使

$$\begin{aligned} & i(T^*(\Gamma_a))(-m d\alpha_Q) \\ &= m di(T^*(\Gamma_a))\alpha_Q \\ &= md \left(\sum_{i=1}^3 (q_i \circ a) dq_i \right). \end{aligned}$$

于是我们有一矩射

$$\mu: TQ \rightarrow gl(3)^*,$$

它由下式决定

$$\langle \mu, a \rangle = m \sum_{i=1}^3 (q_i \circ a) q_i, \quad \forall a \in gl(3).$$

如果我们只考虑 Q 的正交群的 Lie 代数 $so(3)$, 即仅限于考虑具有形状

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$

的 $gl(3)$ 的元素的集合, 则我们在 TQ 上有一 Poisson $so(3)$ -空间结构, 而且对任意的 $a \in so(3)$ 有

$$\begin{aligned} \langle \mu, a \rangle &= m(a_1(q_2 q_3 - q_3 q_2) + a_2(q_1 q_3 - q_3 q_1) \\ &\quad + a_3(q_1 q_2 - q_2 q_1)). \end{aligned}$$

其中 $a_i (i = 1, 2, 3)$ 的系数就是所谓的动力矩分量, 这里的动力矩指的是位置和速度都可由 TQ 中的一个点来表示的, 质量为 m

的质点关于原点的动力矩。我们所采用的矩射这一术语就来源于这个特殊情形。

例4. 设 $z_j = x_j + ix_{n+j}$, $j = 1, \dots, n$, 是 C^n 的自然坐标, $G = T^n$ 是 $U(n)$ 中由形如

$$\begin{pmatrix} e^{-ia_1} & & & \\ & e^{-ia_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-ia_n} \end{pmatrix}, a_1, \dots, a_n \in R,$$

的对角形矩阵所构成的子群, 则可以把 G 的 Lie 代数等同于具有零括号运算的 Lie 代数 R^n . 对应于 G 在 C^n 上的自然作用, 在流形 C^n 上有一伴随 \mathfrak{g} -空间结构 ($\mathfrak{g} = R^n$ 是 G 的 Lie 代数). 若

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{g},$$

则有

$$\Gamma_a = \sum_{j=1}^n a_j \left(x_{n+j} \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_{n+j}} \right).$$

在 C^n 上取辛结构

$$\omega = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dx_{n+j}.$$

因为 ω 在 $U(n)$ 的作用下不变, 从而它在 G 的作用下不变. 对任一 $a \in \mathfrak{g}$, 我们有

$$\begin{aligned} i(\Gamma_a)\omega &= \sum_{j=1}^n a_j (x_j dx_j + x_{n+j} dx_{n+j}) \\ &= \frac{1}{2} d \left(\sum_{j=1}^n a_j |z_j|^2 \right). \end{aligned}$$

因此 (C^n, ω) 是一 Hamilton \mathfrak{g} -空间. 若把 \mathfrak{g}^* 也等同于 R^n , 则我们有矩射

$$\mu(z) = \frac{1}{2} (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2), z \in C^n.$$

设

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (x_{n+j} dx_j - x_j dx_{n+j}),$$

则有

$$d\alpha = -\omega,$$

而且

$$i(\Gamma_a)\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_j |z_j|^2, \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

于是

$$\theta(\Gamma_a)\alpha = di(\Gamma_a)\alpha - i(\Gamma_a)\omega = 0.$$

根据命题 16.6, (C^n, ω) 是一 Poisson \mathfrak{g} -空间.

16.7. 命题. 设 (M, ω) 是一 Hamilton \mathfrak{g} -空间,

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是 (M, ω) 的一个矩射, 则对任意的 $x \in M$, $d\mu_x$ 的核是辛向量空间 $(T_x M, \omega_x)$ 中子空间

$$\mathfrak{g}_x = \{ax: a \in \mathfrak{g}\}$$

的对于 ω_x 的正交补. 为使 μ 在点 x 处是一浸入, 充分必要条件是 $\mathfrak{g}_x = T_x M$.

证. 根据引理 16.3, 对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 和 $v \in T_x M$, 有

$$\langle d\mu(v), a \rangle = \omega(ax, v),$$

于是命题成立. 证完.

若 (M, ω) 的一个 \mathfrak{g} -空间结构是某一辛 G -空间结构的伴随结构, 则空间 \mathfrak{g}_x 是点 x 的轨道 $G(x)$ 在 x 处的切空间. 为使 $\mathfrak{g}_x = T_x M$, 充分与必要条件是点 x 的轨道 $G(x)$ 是 M 的一个开集. 为使点 $x \in M$ 是矩射 μ 的一个平稳点, 即要使 $d\mu_x = 0$, 充分必要条件是 $\mathfrak{g}_x = (0)$. 若 $\mathfrak{g}_x = (0)$, 则点 x 在 G 的单位连通分枝的作用下不动. 于是矩射在任一由 G 的不动点所构成的 M 的子流形上是常值映射.

16.8 命题. 设 (M, ω) 是一 Hamilton \mathfrak{g} -空间,

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是一矩射, 则对任意的 $x \in M$, $d\mu_x$ 在 \mathfrak{g}^* 中的象是空间

$$\mathfrak{g}_x = \{a \in \mathfrak{g}: ax = 0\}$$

根据对偶在 \mathfrak{g}^* 中的正交补. 为使 μ 在点 x 处为一子浸入, 充分与

必要条件是 $\mathfrak{g}x = (0)$.

证. 同命题 16.7 一样, 利用

$$\langle d\mu(v), a \rangle = \omega(ax, v)$$

便可证明这个命题. 证完.

若一 \mathfrak{g} -空间结构是某一辛 G -空间的附属结构, 则 $\mathfrak{g}x$ 是点 x 的迷向子群

$$G_x = \{s \in G: sx = x\}$$

的 Lie 代数. 为使 $\mathfrak{g}x = (0)$, 充分与必要条件是 G_x 是 G 的一个离散子群.

注. 设 G 是一紧 Lie 群, (M, ω) 是一连通的 Hamilton G -空间, 则 M 所有的使 G 的轨道 $G(x)$ 具有极大维数的点 x 所构成的集合是 M 的一个稠开子集, 设为 U . (M, ω) 的任一矩射在 U 上是常秩的, 其秩就等于 U 中点的轨道的维数. 若 G 还是可换的, 并且在 M 上的作用有效, 则对任一 $x \in U$ 有

$$\dim G(x) = \dim G.$$

从而 (M, ω) 的矩射在 U 上的限制是子浸入 (比较例 1 和例 4).

如果 G 是一连通的紧交换 Lie 群 (即一环面), 而且 (M, ω) 是一连通的紧 Hamilton G -空间, 则 M 的 G 不动点集 M^G 只有有限个连通分枝, 设它们是

$$K_1, \dots, K_s.$$

若 μ 是 (M, ω) 的一个矩射, 则它在每一 K_i 上是常值映射. 可以证明 (参看文献 [3], [8], [11]), 这时 μ 的象是点集

$$\mu(K_i), i = 1, \dots, s,$$

在 \mathfrak{g}^* 中的凸包络.

§ 17. 矩射的等价不变性

设 G 是一 Lie 群, \mathfrak{g} 是 G 的 Lie 代数, 设 Ad 是 G 通常在 \mathfrak{g} 上的伴随表示, 即

$$Ad(s)a = sas^{-1}, s \in G, a \in \mathfrak{g}.$$

设 ad 是 \mathfrak{g} 在 \mathfrak{g} 上的伴随表示, 即

$$ad(a)b = [a, b], \quad a, b \in \mathfrak{g}.$$

我们定义 G 在 \mathfrak{g}^* 中的一个余伴随表示 Ad^* 如下:

$$Ad^*(s) = {}^t Ad(s^{-1}), \quad s \in G.$$

因为 \mathfrak{g} 的括号是用 G 上的右不变向量场的括号来定义的, 所以有

$$Ad(\exp a) = \exp(-ad(a)), \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

其中 \exp 表示 G 的指数映射. 于是

$$Ad^*(\exp a) = \exp(ad(a)), \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

设 (M, ω) 是一辛 G -空间. 若伴随的 \mathfrak{g} -空间结构是 Hamilton (或 Poisson) 的, 则我们称 (M, ω) 为 Hamilton (或 Poisson) G -空间.

若 M 是一 G -空间, 对任一 $s \in G$, 我们把 M 的微分自同胚

$$x \mapsto sx, \quad x \in M,$$

记为 s_M .

17.1. 引理. 设 (M, ω) 是一 Hamilton G -空间且设

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是一矩射, 则对任意的 $s \in G$, 映射

$$\mu \circ s_M = Ad^*(s) \circ \mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是一局部常值映射.

证. 对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$\begin{aligned} d\langle Ad^*(s) \circ \mu, a \rangle &= \langle Ad^*(s) d\mu, a \rangle \\ &= \langle d\mu, Ad(s^{-1})a \rangle. \end{aligned}$$

又根据引理 16.3 的 (i), 对任意的 $x \in M$ 和 $v \in T_x M$ 我们有

$$\begin{aligned} &\langle d\mu(v), Ad(s^{-1})a \rangle \\ &= \omega(s^{-1}asx, v) = \omega(asx, sv) \\ &= \langle d\mu(sv), a \rangle = (d\langle \mu \circ s_M, a \rangle)(v). \end{aligned}$$

于是对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$d\langle Ad^*(s) \circ \mu, a \rangle = \langle d(\mu \circ s_M), a \rangle,$$

因此映射

$$\mu \circ s_M = Ad^*(s) \circ \mu$$

在局部上是常值的。证完。

17.2. 命题. 设 (M, ω) 是一连通的 Hamilton G -空间,

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是 (M, ω) 的一个矩射, 则

(i) 对任意的 $s \in G$,

$$\varphi_\mu(s) = \mu(sx) - Ad^*(s)\mu(x)$$

是 \mathfrak{g}^* 中不依赖于点 $x \in M$ 的一个元素。

(ii) 对任意的 $s, t \in G$ 有

$$\varphi_\mu(st) = \varphi_\mu(s) + Ad^*(s)\varphi_\mu(t).$$

(iii) 对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$c_\mu(a, b) = \langle d\varphi_\mu(a), b \rangle,$$

c_μ 的定义见 §16.

证. 因为 M 是连通的, 利用引理 17.1 便可证明 (i). 根据 (i) 得

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(st) &= \mu(stx) - Ad^*(st)\mu(x) \\ &= \varphi_\mu(s) + Ad^*(s)\mu(tx) - Ad^*(s)Ad^*(t)\mu(x) \\ &= \varphi_\mu(s) + Ad^*(s)\varphi_\mu(t), \quad \forall s, t \in G, \end{aligned}$$

于是 (ii) 成立. 微分定义 φ_μ 的等式得

$$d\mu(ax) = ad(a)\mu(x) + d\varphi_\mu(a), \quad x \in M, a \in \mathfrak{g}.$$

从而对任意的 $x \in M$ 和 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$\langle d_\mu(ax), b \rangle = \langle \mu(x), [a, b] \rangle + \langle d\varphi_\mu(a), b \rangle.$$

但是根据引理 16.3 有

$$\langle d_\mu(ax), b \rangle = \{ \langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle \}(x),$$

因此

$$\begin{aligned} c_\mu(a, b) &= \{ \langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle \} - \langle \mu, [a, b] \rangle \\ &= \langle d\varphi_\mu(a), b \rangle, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

证完.

推论. 从 $G \times \mathfrak{g}^*$ 到 \mathfrak{g}^* 内的映射

$$(s, \xi) \mapsto s\xi = Ad^*(s)\xi + \varphi_\mu(s), \quad s \in G, \xi \in \mathfrak{g}^*,$$

是 Lie 群 G 在向量空间 \mathfrak{g}^* 上的一个仿射作用.

对于 \mathfrak{g}^* 的这一 G -空间结构, 矩射

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是 G -等价不变的, 即

$$\mu(sx) = s\mu(x) = Ad^*(s)\mu(x) + \varphi_\mu(s), \quad \forall s \in G, x \in M.$$

证. 设 e 是 G 的单位元, 则由定义有

$$\begin{aligned} (e, \xi) &\mapsto e\xi = Ad^*(e)\xi + \varphi_\mu(e) \\ &= \xi + \mu(x) - \mu(x) = \xi, \quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*. \end{aligned}$$

又由等式 (ii) 有

$$\begin{aligned} (s_1 s_2)\xi &= Ad^*(s_1 s_2)\xi + \varphi_\mu(s_1 s_2) \\ &= Ad^*(s_1)Ad^*(s_2)\xi + \varphi_\mu(s_1) + Ad^*(s_1)\varphi_\mu(s_2) \\ &= Ad^*(s_1)(Ad^*(s_2)\xi + \varphi_\mu(s_2)) + \varphi_\mu(s_1) \\ &= s_1(s_2\xi), \quad \forall s_1, s_2 \in G, \xi \in \mathfrak{g}^*. \end{aligned}$$

所以推论的前半部分成立. 而后半部分由 φ_μ 的定义便得. 证完.

注. 命题 17.2 表明 φ_μ 是 G 上取值于 \mathfrak{g}^* 中的一个 1-闭上链. 这种用矩射来定义的闭上链是一类特殊的闭上链 (参看 §20). 一般说来, G 在 \mathfrak{g}^* 上的一个作用即便其线性部分是 Ad^* , 也不一定能由某一矩射得到.

17.3. 命题. 设 (M, ω) 是一连通的 Hamilton G -空间, 则 (M, ω) 是一 Poisson 空间的一个充分条件是存在 (M, ω) 的一个矩射 μ 使得对任意的 $s \in G$ 都有

$$\mu \circ s_M = Ad^*(s) \circ \mu.$$

若 G 是连通的, 则该条件也是必要的.

证. 事实上, 若存在 M 的矩射 μ 使

$$\mu \circ s_M = Ad^*(s)\mu, \quad \forall s \in G,$$

则对任一 $s \in G$ 有

$$\varphi_\mu(s) = 0.$$

于是根据命题 17.2 的 (iii) 得 $c_\mu = 0$. 所以 (M, ω) 是一 Poisson G -空间. 反之, 若 (M, ω) 是一 Poisson G -空间, 则存在 (M, ω) 的一个矩射 μ 使 $c_\mu = 0$. 根据命题 17.2 的 (iii) 得

$$d\varphi_\mu(a) = 0, \forall a \in \mathfrak{g}.$$

又由命题 17.2 的 (ii) 得

$$d\varphi_\mu(sa) = Ad^*(s)d\varphi_\mu(a) = 0$$

对任意的 $s \in G$ 和 $a \in \mathfrak{g}$ 成立, 所以 $d\varphi_\mu = 0$. 若 G 连通, 则映射 φ_μ 是常值的. 但根据命题 17.2 的 (ii), 若 e 是 G 的单位元, 则

$$\varphi_\mu(e) = \varphi_\mu(ee) = \varphi_\mu(e) + Ad^*(e)\varphi_\mu(e) = 2\varphi_\mu(e).$$

所以 $\varphi_\mu(e) = 0$, $\varphi_\mu = 0$. 所以

$$\mu \circ s_M = Ad^*(s) \circ \mu.$$

证完.

注 1. 若 G 是一交换 Lie 群, 则对任意的 $s \in G$ 都有

$$Ad^*(s) = id.$$

因此, 对任一矩射 μ , φ_μ 都是从 G 到加法群 \mathfrak{g}^* 内的可微同态. 若 G 还是紧连通的 (即 G 是一环面), 则 $\varphi_\mu = 0$ 且

$$\mu(sx) = \mu(x), \forall s \in G, x \in M.$$

因为矩射在每一 G 的轨道上是常值的, 对任意的 $x \in M$, 有

$$\mathfrak{g}x = \{ax : a \in \mathfrak{g}\} \subset \text{Ker}d\mu_x.$$

根据命题 16.7 有

$$\text{Ker}d\mu_x = (\mathfrak{g}x)^\perp.$$

所以 G 的轨道是迷向子流形.

注 2. 若 (M, ω) 是一齐性 Hamilton G -空间, 也就是说, 对 M 的任意的两点 x_1, x_2 , 存在 G 的一个元素 s 使 $sx_1 = x_2$ (G 在 M 上可递), μ 是 M 的一个矩射, 则根据命题 16.7, μ 是一浸入. 由命题 17.2 的推论可知, 这时映射

$$\mu: M \rightarrow \mu(M)$$

是 G 在 \mathfrak{g}^* 上的仿射作用 (由 μ 定义) 的某一轨道的一个覆盖 (revêtement).

注 3. 有关本节的内容请读者参看文献 [17], [23].

第五章 Poisson 流形

§ 18. Poisson 流形的结构

Schouten-Nijenhuis 括号. 设 M 是一流形, 记 M 上的 p 阶反对称反变可微张量场空间为 $D_p(M)$. 于是每一空间 $D_p(M)$ 都是向量丛 $\Lambda^p TM$ 的可微截面空间. 我们有

$$D_0(M) = C^\infty(M).$$

在外积 \wedge 所定义的运算下,

$$D_*(M) = \bigoplus_{p \geq 0} D_p(M)$$

是一 Z -分级结合代数. 对任意的 $u \in D_p(M)$ 和 $v \in D_q(M)$, 外积 \wedge 满足下面的 Z_2 -交换律:

$$u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u.$$

我们在 $D_*(M)$ 上定义一个括号 $[,]$, 即双线性映射

$$\begin{aligned} [,]: D_*(M) \times D_*(M) &\rightarrow D_*(M), \\ [,]: (u, v) &\mapsto [u, v], \quad u, v \in D_*(M), \end{aligned}$$

要求它满足下列条件:

- (1) $[f, g] = 0,$
- (2) $[f, X_1 \wedge \cdots \wedge X_p]$
 $= (-1)^p [X_1 \wedge \cdots \wedge X_p, f]$
 $= \sum_{i=1}^p (-1)^i (X_i \cdot f) X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_p,$
- (3) $[X_1 \wedge \cdots \wedge X_p, Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_q]$
 $= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (-1)^{i+j} [X_i, Y_j] \wedge X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_i \wedge \cdots \wedge X_p \wedge Y_1 \wedge \cdots$
 $\wedge \hat{Y}_j \wedge \cdots \wedge Y_q.$

其中 $f, g \in D_0(M) = C^\infty(M)$ 和

$$X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q \in D_1(M)$$

都是任意的, 符号 \hat{X} 表示把 X 去掉. 这样定义的括号是唯一的, 我们把它称为 Schouten-Nijenhuis 括号 (参看文献 [20]), 它限制在

$$D_1(M) \times D_1(M)$$

上与通常的向量场括号一样. 若 X 是一向量场且若 $f \in D_0(M)$, 则

$$[X, f] = Xf.$$

对任意的整数 $p, q \geq 0$, 若 $u \in D_p(M)$ 且 $v \in D_q(M)$, 则有

$$[u, v] \in D_{p+q-1}(M),$$

而且

$$[u, v] = (-1)^{(p-1)(q-1)}[v, u].$$

对任意的 $u \in D_p(M)$, 映射

$$\text{adu}: v \mapsto [u, v], v \in D_*(M),$$

是分级结合代数 $D_*(M)$ 的一个 $p-1$ 阶的 Z_2 -导子, 即对任意的 $v \in D_q(M)$ 和 $w \in D_*(M)$ 有

$$[u, v \wedge w] = [u, v] \wedge w + (-1)^{(p-1)q} v \wedge [u, w].$$

Schouten-Nijenhuis 括号满足一带变号的 Jacobi 恒等式

$$[u, [v, w]] = [[u, v], w] + (-1)^{(p-1)(q-1)}[v, [u, w]],$$

$$\forall u \in D_p(M), v \in D_q(M), w \in D_*(M).$$

把 $D_*(M)$ 的分级移动一位, 即把 $D_p(M)$ 中的元素定义为 $p-1$ 级元素, 则在 $D_*(M)$ 上得到一 Lie 超代数结构, 它是一 Z_2 -分级代数 (参看定义 7.2).

如果 $u \in D_p(M)$ 且 $f \in D_0(M)$, 则

$$-[f, u] = i(df)u.$$

若 $p > 0$, 而且对使得 df_1, \dots, df_n 能生成 1-形式模 $\mathcal{O}(M)$ 的一组

$$f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M),$$

有

$$[f_i, u] = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

则必有 $u = 0$.

在以后的讨论中, ω 恒表示 $D_1(M)$ 中的一个元素, 若无特别声明, 总假设 ω 是取定的.

根据 Schouten-Nijenhuis 括号的性质, 对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$H_f := [f, \omega] = [\omega, f],$$

于是映射

$$H: f \mapsto H_f, \quad f \in C^\infty(M),$$

是从 $C^\infty(M)$ 到向量场空间 $D_1(M)$ 内的一个线性映射. 又对任意的 $X \in D_1(M)$ 和 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$(18.1) \quad [X, H_f] = [X, [f, \omega]] = [Xf, \omega] + [f, [X, \omega]],$$

从而有

$$(18.2) \quad [X, H_f] = H_{Xf} + \{f, [X, \omega]\}.$$

定义一个双线性映射

$$\{, \}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

为

$$\{f, g\} = H_f g (= [[\omega, f], g]), \quad \forall f, g \in C^\infty(M),$$

则对任意的 $f, g, h \in C^\infty(M)$ 有

$$(18.3) \quad \{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}.$$

因为对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 有

$$[f, g] = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} \{f, g\} + \{g, f\} &= [H_f, g] - [f, H_g] \\ &= [[\omega, f], g] - [f, [\omega, g]] \\ &= [\omega, [f, g]] = 0. \end{aligned}$$

所以得

$$(18.4) \quad \{f, g\} = -\{g, f\}.$$

若 X, Y 是 M 上的两个向量场, 则对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 和 $\alpha \in \mathcal{D}(M)$ 有

$$\begin{aligned}\langle \alpha, [f, X \wedge Y] \rangle &= \langle \alpha, [X \wedge Y, f] \rangle \\ &= \langle \alpha, (Yf)X - (Xf)Y \rangle \\ &= \langle \alpha \wedge df, X \wedge Y \rangle.\end{aligned}$$

所以对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 和 $\alpha \in \mathcal{Q}^1(M)$ 有

$$(18.5) \quad \langle \alpha, [f, w] \rangle = \langle \alpha \wedge df, w \rangle.$$

因此,对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 有

$$\{f, g\} = [f, w]g = \langle dg, [f, w] \rangle = \langle dg \wedge df, w \rangle,$$

即

$$(18.6) \quad \{f, g\} = \langle dg \wedge df, w \rangle.$$

设 U 是 M 的坐标邻域, x_1, \dots, x_n 是 U 上的坐标. 设 w 在 U 上的坐标表达式是

$$w = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad c_{ij} = -c_{ji},$$

则对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$, 在 U 上有

$$\begin{aligned}H_f &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \\ \{f, g\} &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j},\end{aligned}$$

并且

$$c_{ij} = \{x_i, x_j\}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

18.7. 引理. 下列条件是等价的:

(i) 对任意的 $f, g, h \in C^\infty(M)$,

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

(ii) 对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$,

$$H_{\{f,g\}} = [H_f, H_g].$$

(iii) 对任意的 $f \in C^\infty(M)$,

$$[H_f, w] = 0.$$

(iv) $[w, w] = 0$.

证. 直接计算得

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}$$

$$\begin{aligned} &= H_f(H_g h) + H_g(-H_f h) - H_{(f,g)} h \\ &= [H_f, H_g] h - H_{(f,g)} h. \end{aligned}$$

因此 (i) 和 (ii) 等价.

若 $f \in C^\infty(M)$, 则

$$[H_f, \omega] \in D_2(M).$$

若对任意的 $g \in C^\infty(M)$ 有

$$[g, [H_f, \omega]] = 0,$$

则必有 $[H_f, \omega] = 0$. 利用

$$\begin{aligned} &[H_f, H_g] - H_{(f,g)} \\ &= [H_f, [g, \omega]] - [H_f g, \omega] \\ &= [g, [H_f, \omega]], \end{aligned}$$

便知 (ii) 和 (iii) 等价. 最后, 根据等式

$$\begin{aligned} [f, [\omega, \omega]] &= [[f, \omega], \omega] - [\omega, [f, \omega]] \\ &= 2[[f, \omega], \omega] = 2[H_f, \omega], \end{aligned}$$

得 (iii) 和 (iv) 等价. 证完.

注. 设

$$\mathcal{B} \subset C^\infty(M)$$

是一函数组, \mathcal{B} 中所有函数的微分生成模 $\mathcal{Q}(M)$ (例如, 由 M 的坐标函数所构成的函数组), 则引理 18.7 中的 (i), (ii) 和 (iii) 只要求对 \mathcal{B} 中的函数 f, g, h 成立. 若 $[\omega, \omega] = 0$, 则根据 (18.4) 和引理 18.7, 括号 $\{, \}$ 在 $C^\infty(M)$ 上定义了一 Lie 代数结构. 若 M 是一辛流形, 即 $\omega = \omega$, 等式 (18.3) 表明, 这一括号对 $C^\infty(M)$ 的函数积的作用和 Poisson 括号一样.

18.8. 定义. 设 M 是一流形, ω 是 M 上的一个反对称反变 2 阶张量, 若 ω 满足

$$[\omega, \omega] = 0,$$

则称 ω 为 M 上的一个 Poisson 结构. 若 ω 是 M 上的一个 Poisson 结构, 则称 (M, ω) 为 Poisson 流形.

流形 M 上任一 Poisson 结构 ω 都在 $C^\infty(M)$ 中定义了一个括号 $\{, \}_\omega$. 设 (M_1, ω_1) 和 (M_2, ω_2) 是两个 Poisson 流形,

$$\varphi: M_1 \rightarrow M_2$$

是一可微映射. 若对任意的 $f, g \in C^\infty(M_1)$ 都有

$$\varphi^*\{f, g\}_{\omega_1} = \{\varphi^*(f), \varphi^*(g)\}_{\omega_2},$$

则 φ 称为从 (M_1, ω_1) 到 (M_2, ω_2) 内的一个同态.

注. 若 ω 是流形 M 上的一个 Poisson 结构, 则对任意的 $f \in C^\infty(M)$, 根据引理 18.7 有

$$[H_f, \omega] = 0,$$

这个等式说明, M 上由向量场 H_f 所生成的微分同胚流保持张量 ω 不变.

§ 19. Poisson 流形的叶子

设 ω 是流形 M 上的一个 Poisson 结构. 对任意的 $x \in M$, 定义线性映射

$$\gamma_x: T_x^*M \rightarrow T_xM,$$

使对任意的 $\xi, \eta \in T_x^*M$ 有

$$\langle \xi, \gamma_x(\eta) \rangle = \langle \xi \wedge \eta, \omega_x \rangle.$$

把 γ_x 的象记为 L_x , 则对任一 $x \in M$, L_x 是 T_xM 的一个维数等于 ω_x 的秩的向量子空间. L_x 的维数一般说来依赖于点 x , 但总是偶数. 我们保留 §18 中的记号.

19.1. 引理. 对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 和 $x \in M$, 我们有

$$H_f(x) \in L_x.$$

证. 事实上, 根据 (18.6), 对任意的 $g \in C^\infty(M)$ 有

$$\begin{aligned} (H_f g)(x) &= \{f, g\}(x) = \langle dg \wedge df, \omega \rangle(x) \\ &= \langle dg, \gamma_x(df_x) \rangle, \end{aligned}$$

所以

$$H_f(x) = \gamma_x(df_x) \in L_x.$$

证完.

若 ω 在 M 上秩恒等于 $2p$, 则对任意的 $x \in M$, 向量空间 L_x 是由所有 $H_f (f \in C^\infty(M))$ 所生成的 TM 的一个可微子丛的纤维.

具体来说,若

$$f_1, \dots, f_n \in C^\infty(M)$$

在点 $x \in M$ 的某一邻域上是不相关的, 则对该邻域里的任意一点 y , L_y 都是由

$$H_{f_i}(y), \quad i = 1, \dots, n,$$

所生成的 $T_x M$ 的向量空间. 因为对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$, 根据引理 18.7 有

$$[H_f, H_g] = H_{\{f, g\}}.$$

所以该向量丛, 记为 L , 是 TM 的一个可积子丛. 因此, M 是 L 的积分叶子的并集, 即 M 是这样的子流形 F 的并集, 这些 F 满足

$$T_x F = L_x, \quad \forall x \in F,$$

并且在包含关系下, 它们在 M 的所有满足这个等式的子流形中是极大的 (参看文献 [4]).

类似地, 在 ω 不是常秩的情形, 我们也把 M 的任一满足

$$T_x F = L_x, \quad \forall x \in F,$$

的极大子流形称为 Poisson 流形 (M, ω) 的一片叶子.

19.2. 命题. 设 F 是 Poisson 流形 (M, ω) 的一片叶子, 则存在唯一的一个 2-形式 $\omega_F \in \Omega^2(F)$ 使对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 有

$$\omega_F(H_f|_F, H_g|_F) = \{g, f\}|_F.$$

又 ω_F 是 F 上的一个辛结构, 对任意的 $f \in C^\infty(M)$, $H_f|_F$ 是对应于函数 $f|_F$ 的 F 上的 Hamilton 向量场.

证. 对任意的 $x \in F$ 和任意的 $\xi, \eta \in T_x^* M$, 由 γ_x 的定义我们有

$$\langle \xi \wedge \eta, \omega_x \rangle = \langle \xi, \gamma_x(\eta) \rangle = -\langle \eta, \gamma_x(\xi) \rangle.$$

因此, 当 ξ 和 η 中至少有一个属于映射

$$\gamma_x: T_x^* M \rightarrow T_x M$$

的核时,

$$\langle \xi \wedge \eta, \omega_x \rangle = 0.$$

因为

$$L_x = \gamma_x \text{ 的象,}$$

所以我们可以 L_x 上定义一个反对称双线性型 ω_x 如下: 对任意的 $u, v \in L_x$, 设

$$u = \gamma_x(\xi), v = \gamma_x(\eta), \xi, \eta \in T_x^*M,$$

则 ω_x 在 (u, v) 的值定义为

$$\omega_x(\gamma_x(\xi), \gamma_x(\eta)) = \langle \xi \wedge \eta, \omega_x \rangle.$$

显然该值与 ξ, η 的选取无关, 只依赖于

$$u = \gamma_x(\xi) \text{ 和 } v = \gamma_x(\eta).$$

因为对任意的 $x \in F$ 都有

$$L_x = T_x F,$$

所以在 F 上存在唯一的一个微分 2-形式 ω_F 使对任意的 $x \in F$ 有

$$(\omega_F)_x = \omega_x.$$

事实上, 根据 (18.6), 对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 我们有

$$\omega_F(H_f|_F, H_g|_F) = \langle df \wedge dg, \omega \rangle|_F = \{g, f\}|_F.$$

因为 F 上的向量场模由形如 $H_f|_F (f \in C^\infty(M))$ 的向量场所生成, 所以上式唯一地确定了 ω_F . 而且该等式表明 ω_F 是一微分形式, 即

$$\omega_F \in \Omega^2(F).$$

对任意的 $x \in M$, 根据 γ_x 的定义, $\text{Ker } \gamma_x$ 是 T_x^*M 上的双线性型

$$b: (\xi, \eta) \mapsto \langle \xi, \eta, \omega_x \rangle, \xi, \eta \in T_x^*M,$$

的核. 因此 ω_F 的秩在 F 的任一点 x 处都等于 $\dim F = \dim L_x$.

下面我们证明 ω_F 是一闭微分形式. 任取 $f, g, h \in C^\infty(M)$. 为简化符号, 把向量场 H_f, H_g, H_h 在 F 上的限制记为 H_f, H_g, H_h . 于是有

$$\begin{aligned} & (\theta(H_f)\omega_F)(H_g, H_h) \\ &= H_f\omega_F(H_g, H_h) - \omega_F([H_f, H_g], H_h) - \omega_F(H_f, [H_f, H_h]) \\ &= \{f, \{h, g\}\} - \{h, \{f, g\}\} - \{\{f, h\}, g\} = 0. \end{aligned}$$

所以对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$\theta(H_f)\omega_F = 0.$$

另一方面, 对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 我们有

$$(i(H_f)\omega_F)(H_g) = \{g, f\}|_F = (df(H_g))|_F.$$

于是对任意的 $f \in C^\infty(M)$ 有

$$(19.3) \quad i(H_f)\omega_F = (df)|_F = d(f|_F).$$

因此

$$i(H_f)d\omega_F = \theta(H_f)\omega_F = 0, \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

因为 $H_f (f \in C^\infty(M))$ 生成 F 的向量场模, 所以上式表明

$$d\omega_F = 0,$$

即 ω_F 是闭的. 于是我们证明了 ω_F 是叶子 F 上的一个辛结构. 又等式 (19.3) 说明 $H_f|_F$ 是 F 上相应于函数 $f|_F$ 的 Hamilton 向量场. 证完.

推论. 对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 有

$$\{f, g\}|_F = \{f|_F, g|_F\}_F,$$

其中等式左边的括号是 M 上由 ω 所定义的 Poisson 括号, 而右边的括号是叶子 F 上由辛结构 ω_F 所定义的 Poisson 括号.

证. 事实上,

$$\begin{aligned} \{f, g\}|_F &= \omega_F(H_f|_F, H_g|_F) \\ &= \omega_F(H_f|_F, H_g|_F) \\ &= \{f|_F, g|_F\}_F. \end{aligned}$$

证完.

若 ω 是流形 M 上秩恒等于 $\dim M$ 的 Poisson 结构, 则

$$L = TM,$$

而且 M 是 Poisson 流形 (M, ω) 的唯一的一片叶子, 从而 ω_M 是 M 上的一个辛结构. 由这一辛结构所定义的括号运算同由 Poisson 结构定义的括号运算是一样的. 反之, 若 ω 是流形 M 上的一个辛结构, 则可利用它定义从 TM 到 T^*M 上的一个同构:

$$\varphi: v \mapsto i(v)\omega, \quad v \in TM.$$

从而导出从 $D_1(M)$ 到 $Q^1(M)$ 上的一个同构. 在这一同构下, ω 的逆象是 M 上的一个秩恒等于 $\dim M$ 的 Poisson 结构 ω , ω 在叶子 M 上导出的辛结构与 ω 重合.

所以, 辛结构是 Poisson 结构的特殊情形. 命题 19.2 的推论表明, 对 Poisson 流形 (M, ω) 的任一片叶子 F , 恒等内射

$$i: F \rightarrow M$$

是一 Poisson 流形同态 (在 F 上取由辛结构 ω_F 所定义的 Poisson 结构).

可以证明 (参看文献[15]), 任一 Poisson 流形都是它的积分叶子的并集.

例. 设 X, Y 是流形 M 上的两个向量场, 并令

$$\omega = X \wedge Y \in D_2(M).$$

于是

$$\begin{aligned} [\omega, \omega] &= [X \wedge Y, X \wedge Y] = X \wedge [Y, X] \wedge Y + Y \wedge [X, Y] \wedge X \\ &= 2[X, Y] \wedge X \wedge Y. \end{aligned}$$

若 $[X, Y] = 0$, 则 (M, ω) 是一 Poisson 流形. 此时, 对任意的 $f, g \in C^\infty(M)$ 有

$$\{f, g\} = (Yf)(Xg) - (Xf)(Yg),$$

而且

$$H_f = (Yf)X - (Xf)Y.$$

在一般情况下, 在 M 上存在两种类型的叶子: 退化为一点的叶子和 2 维叶子. 第一种类型的叶子是 M 的使

$$(X \wedge Y)_x = 0$$

的点 x , 第二种类型的叶子构成了 M 的开集

$$U = \{x \in M: (X \wedge Y)_x \neq 0\}$$

上的一个叶结构.

§ 20. Lie 代数的对偶上的 Poisson 结构

在这节中, 我们记 \mathfrak{g} 为一 n 维实 Lie 代数, 记 a_1, \dots, a_n 为 \mathfrak{g} 的一组基. 我们把 \mathfrak{g} 等同于它自身的两次对偶 $(\mathfrak{g}^*)^*$, 于是可把空间 \mathfrak{g} 看成 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 的一个子空间, 而把 a_1, \dots, a_n 看作 \mathfrak{g}^* 上的坐标. 令

$$(20.1) \quad \omega = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n [a_i, a_j] \frac{\partial}{\partial a_i} \wedge \frac{\partial}{\partial a_j}.$$

为了避免符号混淆, 我们用 $[\cdot, \cdot]_s$ 表示 $D_*(\mathfrak{g}^*)$ 中的 Schouten-

Nijenhuis 括号, 而 \mathfrak{g} 自身的括号仍然用 $[,]$ 表示.

20.2. 引理. 由式 (20.1) 定义的张量 ω 是 \mathfrak{g}^* 上的一个 Poisson 结构, 而且, 对由 ω 定义的 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 中的 Poisson 括号 $\{, \}$ 和任意的 $b, c \in \mathfrak{g}$ 有

$$\{b, c\} = -[\omega, b]_S, c]_S = [b, c].$$

证. 设

$$\xi_1, \dots, \xi_n$$

是 \mathfrak{g}^* 的一组对偶于 a_1, \dots, a_n 的基, 则对任意的 $b \in \mathfrak{g}$ 有

$$\frac{\partial}{\partial a_i} b = \langle \xi_i, b \rangle, \quad i = 1, \dots, n,$$

于是有

$$\begin{aligned} & [\omega, b]_S \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left([a_i, a_j] \langle \xi_i, b \rangle \frac{\partial}{\partial a_j} - [a_i, a_j] \langle \xi_j, b \rangle \frac{\partial}{\partial a_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n [b, a_i] \frac{\partial}{\partial a_i}. \end{aligned}$$

因此对任意的 $b, c \in \mathfrak{g}$,

$$\{b, c\} = -[\omega, b]_S, c]_S = [b, c].$$

再根据 \mathfrak{g} 中的 Jacobi 恒等式可推出 $\{, \}$ 也满足 Jacobi 恒等式, 由引理 18.7 和它下面的注可知

$$[\omega, \omega]_S = 0,$$

所以 ω 是 \mathfrak{g}^* 的一个 Poisson 结构. 证完.

我们可以用下面的条件来刻画张量 ω (比较 (18.6)): 对任意的 $b, c \in \mathfrak{g}$ 有

$$\langle db \wedge dc, \omega \rangle = [c, b].$$

所以 ω 不依赖于基 a_1, \dots, a_n 的选择, 我们称它为 \mathfrak{g}^* 上的标准 Poisson 结构.

设 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 是两个 Lie 代数且设

$$\phi: \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$$

是一 Lie 代数同态. 如果我们在 \mathfrak{g}_1^* 和 \mathfrak{g}_2^* 上同取标准 Poisson 结

构,则由

$$\langle \phi(a), \xi \rangle = \langle a, \phi'(\xi) \rangle, \quad \forall a \in \mathfrak{g}_1, \xi \in \mathfrak{g}_1^*,$$

定义的映射

$$\phi': \mathfrak{g}_1^* \rightarrow \mathfrak{g}_1^*$$

是一 Poisson 流形同态。特别,若 \mathfrak{g} 是 Lie 群 G 的 Lie 代数,则 \mathfrak{g}^* 上的标准 Poisson 结构在 G 的余伴随表示下不变。

20.3. 命题. 设 \mathfrak{g} 是 Lie 群 G 的 Lie 代数并设 G 连通,则 G 的余伴随表示的全部轨道就是 \mathfrak{g}^* 的标准 Poisson 结构的全部叶子。

证. 对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 和 $\xi \in \mathfrak{g}^*$, 我们有

$$\begin{aligned} & b(Ad^*(\exp(ta))\xi) \\ &= \langle \exp'(ad(ta))\xi, b \rangle \\ &= \langle \xi, b \rangle + t\langle \xi, [a, b] \rangle + t^2(\dots). \end{aligned}$$

对 $a \in \mathfrak{g}$, 设 Γ_a 是 \mathfrak{g}^* 上相应于 a 的,在 G 的余伴随作用下的向量场

$$\Gamma_a: \xi \mapsto a\xi, \quad \xi \in \mathfrak{g}^*,$$

则对任意的 $b \in \mathfrak{g}$ 有(把 b 看作 \mathfrak{g}^* 上的函数)

$$\Gamma_a b = [a, b].$$

但由引理 20.2 有

$$[a, b] = \{a, b\} = H_a b.$$

因此,对任一 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$\Gamma_a = H_a.$$

对任意的 $\xi \in \mathfrak{g}^*$, 由形如

$$H_f(\xi), \quad f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*),$$

的向量构成的线性空间 L_ξ 与所有向量

$$\Gamma_a(\xi), \quad a \in \mathfrak{g},$$

构成的线性空间相重合,即重合于轨道 $Ad^*(G)\xi$ 在点 ξ 的切空间。于是推出标准 Poisson 结构的任一片叶子在 $Ad^*(G)$ 的作用下不变,而且对 $Ad^*(G)$ 的任一轨道 θ 和任意的 $\xi \in \theta$ 有

$$T_\xi \theta = L_\xi.$$

由于 G 是连通的,所以 $Ad^*(G)$ 的所有轨道便是所有的叶子。证完。

推论. 设 G 是一连通 Lie 群, 则 G 的余伴随表示的任一轨道 F 都具有唯一的一个辛结构 ω_F 使恒等浸入

$$j: F \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

对于 \mathfrak{g}^* 上的标准 Poisson 结构是一 Poisson 流形同态, 又 ω_F 是 G 不变辛结构.

证. 直接应用命题 19.2 和它的推论便可.

证完.

在以下的讨论中, 我们把上面推论里的辛结构 ω_F 称为轨道 F 上的标准辛结构.

20.4. 命题. 设 G 是一连通 Lie 群且设 F 是 G 的余伴随表示的一个轨道. 设 ω_F 是 F 上的标准辛结构, 则辛 G -空间 (F, ω_F) 是一 Poisson G -空间, 而且恒等浸入

$$\mu: F \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是 (F, ω_F) 的一个矩射.

证. 事实上, 根据命题 19.2, 对任意的 $a \in \mathfrak{g}$, 我们有

$$H_{\langle a, \omega \rangle} = H_a|_F = H_a|_F = \Gamma_a|_F.$$

于是对任意的 $\xi \in F$,

$$H_{\langle a, \omega \rangle}(\xi) = \Gamma_a(\xi).$$

这说明 (F, ω_F) 是一 Hamilton G -空间且 μ 是一矩射. 又显然 μ 是 G -等价不变的, 所以由命题 17.3 得 (F, ω_F) 是一 Poisson G -空间. 证完.

20.5. 命题. 设 (M, ω) 是一 Poisson G -空间, 且设

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是 (M, ω) 的一个矩射使对任意的 $s \in G$ 和 $x \in M$ 有

$$\mu(sx) = Ad^*(s)\mu(x),$$

则对于 \mathfrak{g}^* 上的标准 Poisson 结构, μ 是一 Poisson 流形同态.

证. 事实上, 由假设 μ 是 G -等价不变的, 根据命题 17.2, 2 维闭上链 $c_\mu = 0$. 于是对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$\begin{aligned} \{\mu^*(a), \mu^*(b)\} &= \{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\} \\ &= \langle \mu, [a, b] \rangle = \mu^*[a, b] = \mu^*\{a, b\}. \end{aligned}$$

因为 \mathfrak{g} 的一组基可看作 \mathfrak{g}^* 上的一个坐标系, 所以由上式有

$$\mu^*\{f, h\} = \{\mu^*(f), \mu^*(h)\}, f, h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

证完.

下面我们要证明, 当 (M, ω) 只是一个 Hamilton G -空间而不一定是 Poisson 空间, 在把 \mathfrak{g}^* 上的标准 Poisson 结构换为由 G -空间 (M, ω) 所确定的一个 Poisson 结构的条件下, 上述结论仍然成立 (参看文献 [17], [23]).

同前面一样, 我们用 a_1, \dots, a_n 来表示 \mathfrak{g} 的一组基. 我们把映射

$$\varphi: \xi \mapsto \sum_{i=1}^n \langle \xi, a_i \rangle \frac{\partial}{\partial a_i}, \xi \in \mathfrak{g}^*,$$

称为从 \mathfrak{g}^* 到 \mathfrak{g}^* 的向量场空间内的一个标准线性映射. 由定义知 φ 在 \mathfrak{g}^* 的平移变换下不变.

映射 φ 可以扩充为从外代数 $\Lambda(\mathfrak{g}^*)$ 到 \mathfrak{g}^* 的反对称反变张量代数 $D_*(\mathfrak{g}^*)$ 内的一个标准内射同态, 使 $\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)$ 在这一同态下的象是 \mathfrak{g}^* 上的在平移下不变的 p 阶反对称反变张量场空间. 事实上, 若把 $\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)$ 等同于 \mathfrak{g} 的反对称 p -形式空间 $A^p(\mathfrak{g})$, 则 p -形式

$$\beta \in A^p(\mathfrak{g})$$

对应着一个张量场

$$\tilde{\beta} \in D_p(\mathfrak{g}^*),$$

$\tilde{\beta}$ 的坐标表达式是

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{p!} \sum_{i_1, \dots, i_p} \beta(a_{i_1}, \dots, a_{i_p}) \frac{\partial}{\partial a_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial a_{i_p}},$$

其中指标 i_1, \dots, i_p 遍取所有整数 $1, \dots, n$.

对任意的 $\alpha \in A^p(\mathfrak{g})$ 和 $\beta \in A^q(\mathfrak{g})$ 我们有

$$[\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]_s = 0.$$

我们指出, 对代数 $A(\mathfrak{g})$ 的 +1 级 Z_2 -导子 d 有等式

$$(d\beta)(a, b) = -\beta([a, b]),$$

其中 $\beta \in A^1(\mathfrak{g})$ 和 $a, b \in \mathfrak{g}$ 都是任意的. 事实上, 该等式是下面

熟知的等式的直接结果:

$$(d\beta)(a, b) = a\beta(b) - b\beta(a) - \beta([a, b]).$$

d 是 \mathfrak{g} 上取值于 R 中的上链复形的上边缘运算(参看文献[13]).

20.6 命题. 对任意的 $p \geq 0$ 和 $\beta \in A^p(\mathfrak{g})$ 我们有

$$[\omega, \tilde{\beta}]_s = -\widetilde{(d\beta)}.$$

其中 ω 由 (20.1) 定义.

证. 因为映射

$$\rho: u \mapsto [\omega, u]_s, \quad u \in D_*(\mathfrak{g}^*),$$

是代数 $D_*(\mathfrak{g}^*)$ 的一个 Z_2 -导子, 而

$$\varphi: \beta \mapsto \tilde{\beta}, \quad \beta \in A(\mathfrak{g}),$$

是从代数 $A(\mathfrak{g})$ 到 $D_*(\mathfrak{g}^*)$ 内的同态, 所以只需对 $\beta = \xi \in \mathfrak{g}^*$ 来验证等式. 若 $\xi \in \mathfrak{g}^*$, 则有

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^n \langle \xi, a_i \rangle \frac{\partial}{\partial a_i}, \\ [\omega, \xi]_s &= -[\xi, \omega]_s \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \langle \xi, [a_i, a_j] \rangle \frac{\partial}{\partial a_i} \wedge \frac{\partial}{\partial a_j} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n d\xi(a_i, a_j) \frac{\partial}{\partial a_i} \wedge \frac{\partial}{\partial a_j} \\ &= -\widetilde{(d\xi)}. \end{aligned}$$

证完.

注. 我们有

$$2\tilde{d}^2\beta = 2[\omega, [\omega, \tilde{\beta}]_s]_s = [[\omega, \omega]_s, \tilde{\beta}]_s = 0.$$

因此关系式 $d^2 = 0$ 只是 $[\omega, \omega] = 0$ 的另一种形式.

推论. 设 $\beta \in A^2(\mathfrak{g})$ 是 \mathfrak{g} 上的一个 2-上链, 为使 $\omega - \tilde{\beta}$ 是 \mathfrak{g}^* 上的一个 Poisson 结构, 充分必要条件是 β 是一 2-闭上链, 即 $d\beta = 0$.

证. 事实上, 我们有

$$[\omega - \tilde{\beta}, \omega - \tilde{\beta}]_s = [\omega, \omega]_s - [\omega, \tilde{\beta}]_s - [\tilde{\beta}, \omega]_s$$

$$\begin{aligned}
 &= -2[\omega, \tilde{\beta}]_{\mathfrak{g}} \\
 &= 2(\widetilde{d\beta}),
 \end{aligned}$$

所以

$$\omega - \tilde{\beta}, \omega - \tilde{\beta}]_{\mathfrak{g}} = 0$$

的充要条件是 $d\beta = 0$. 证完.

于是 \mathfrak{g} 上每一 2-闭上链 β 都对应着 \mathfrak{g}^* 上的一个 Poisson 结构 $\omega - \tilde{\beta}$, 我们把 $\omega - \tilde{\beta}$ 在 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 中所定义的括号记为 $\{, \}_\beta$. 它可以由下式来刻画:

$$\begin{aligned}
 \{a, b\}_\beta &= [a, b] - [[\tilde{\beta}, a]_{\mathfrak{g}}, b]_{\mathfrak{g}} \\
 &= [a, b] + \beta(a, b), \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.
 \end{aligned}$$

设 G 是一 Lie 群, 而 \mathfrak{g} 是 G 的 Lie 代数, β 是 \mathfrak{g} 上的 2-闭上链, 则在一般情形下, Poisson 结构 $\omega - \tilde{\beta}$ 不一定是在 G 的余伴随表示的作用下不变的. 我们将看到, 若 G 是单连通的, 则 $\omega - \tilde{\beta}$ 在 G 在 \mathfrak{g}^* 上的某一仿射作用下是不变的, 该仿射作用的线性部分是 G 的一个余伴随表示.

20.7. 引理. 设 $\beta \in A^2(\mathfrak{g})$ 是 \mathfrak{g} 上取值于 R 中的 2-闭上链. 定义线性映射

$$\beta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

使

$$\langle \beta(a), b \rangle = \beta(a, b), \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

再利用对偶关系定义 \mathfrak{g} 在 \mathfrak{g}^* 上的表示 ad^* 为

$$\begin{aligned}
 -\langle ad^*(a)\xi, b \rangle &= \langle \xi, ad(a)b \rangle, \\
 &\quad \forall \xi \in \mathfrak{g}^*, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g},
 \end{aligned}$$

则对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$ad^*(a)\beta(b) - ad^*(b)\beta(a) - \beta([a, b]) = 0.$$

证. 事实上, 根据定义对任意的 $c \in \mathfrak{g}$ 有

$$\begin{aligned}
 &\langle ad^*(a)\beta(b) - ad^*(b)\beta(a) - \beta([a, b]), c \rangle \\
 &= -\beta(b, [a, c]) + \beta(a, [b, c]) - \beta([a, b], c) \\
 &= (d\beta)(a, b, c) = 0.
 \end{aligned}$$

所以等式成立. 证完.

这个引理表明,若 β 是一 2-闭链, 则 β 是 \mathfrak{g} 上取值于由 ad^* 所定义的 \mathfrak{g} 模 \mathfrak{g}^* 中的 1-闭链. 注意到对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$\langle \beta(a), a \rangle = 0.$$

一般说来, 在 \mathfrak{g} 上存在取值于 \mathfrak{g}^* 中的 1-闭链不满足这一条件, 例如, 当 \mathfrak{g} 是一可换 Lie 代数时, \mathfrak{g} 上便存在这样的 1-闭链.

20.8. 引理. 设 \mathfrak{g} 是单连通 Lie 群 G 的 Lie 代数, χ 是 \mathfrak{g} 上取值于 \mathfrak{g} 模 \mathfrak{g}^* (表示是 ad^*) 中的 1-闭链, 则存在唯一的一个可微映射:

$$f: G \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

使对任意的 $s, t \in G$ 和 $a \in \mathfrak{g}$ 都有

$$(i) \quad f(st) = f(s) + Ad^*(s)f(t),$$

$$(ii) \quad df(a) = \chi(a).$$

证. 对任一 $a \in \mathfrak{g}$, 令 L_a 为 G 上对应于 a 的左不变向量场

$$L_a: s \mapsto sa, \quad \forall s \in G.$$

设 α 是 G 上一个取值于 \mathfrak{g}^* 中的微分 1-形式使对任意的 $s \in G$ 和任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$\alpha(sa) = Ad^*(s)\chi(a),$$

则我们有

$$\begin{aligned} \alpha(s \exp(ta)b) &= Ad^*(s)Ad^*(\exp(ta))\chi(b) \\ &= Ad^*(s)\chi(b) - tAd^*(s)ad^*(a)\chi(b) + t^2 \cdots \end{aligned}$$

从而在点 $s \in G$ 处,

$$L_a\alpha(L_b) - L_b\alpha(L_a)$$

等于

$$-Ad^*(s)(ad^*(a)\chi(b) - ad^*(b)\chi(a)).$$

因为 χ 是一 1-闭链, 所以我们有

$$\begin{aligned} &L_a\alpha(L_b) - L_b\alpha(L_a) \\ &= -\alpha(L_{[a,b]}) = \alpha([L_a, L_b]). \end{aligned}$$

于是推出

$$\begin{aligned} (d\alpha)(L_a, L_b) &= L_a\alpha(L_b) - L_b\alpha(L_a) - \alpha([L_a, L_b]) \\ &= 0. \end{aligned}$$

这一等式对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 都成立, 所以 $d\alpha = 0$. 又因为 G 是单连通的, 所以存在唯一的一个从 G 到 \mathfrak{g}^* 内的可微映射 f 使 $df = \alpha$ 且 $f(e) = 0$ (e 是 G 的单位元). 现对任意的 $s \in G$ 和 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$df(sa) - Ad^*(s)df(a) = \alpha(sa) - Ad^*(s)\alpha(a) = 0.$$

这说明

$$f(st) - f(s) - Ad^*(s)f(t)$$

与 t 无关, 又当 $t = e$ 时它等于 0, 所以 f 满足条件 (i) 和 (ii).

反之, 若 f 满足 (i) 和 (ii), 则

$$df(sa) = Ad^*(s)df(a) = Ad^*(s)\alpha(a),$$

且 $f(e) = 0$, 由此便导出唯一性. 证完.

20.9. 引理. 设 \mathfrak{g} 是 Lie 群 G 的 Lie 代数且设

$$f: G \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是一可微映射使对任意的 $s, t \in G$ 有

$$f(st) = f(s) + Ad^*(s)f(t),$$

则

(i) 对任意的 $a \in \mathfrak{g}$ 和 $t \in G$ 有

$$ad^*(a)f(t) = df(a) - Ad^*(t)df(Ad(t^{-1})a).$$

(ii) 对由关系式

$$s\xi = Ad^*(s)\xi + f(s)$$

所定义的 G 在 \mathfrak{g}^* 上的仿射作用有

$$\Gamma_a b = [a, b] + \langle df(a), b \rangle, \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

证. 将等式

$$f(st) = f(s) + Ad^*(s)f(t)$$

分别对 s 和 t 求微分得

$$df(at) = df(a) - ad^*(a)f(t),$$

$$df(sa) = Ad^*(s)df(a), \quad \forall s, t \in G, \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

在第二式中把 s 换为 t , 把 a 换为 $Ad(t^{-1})a$ 得

$$df(at) = Ad^*(t)df(Ad(t^{-1})a).$$

再利用第一式便推出 (i).

把 \mathfrak{g} 中的元素看作 \mathfrak{g}^* 上的函数, 由等式

$$s\xi = Ad^*(s)\xi + f(s),$$

得

$$b(s\xi) = \langle s\xi, b \rangle = \langle Ad^*(s)\xi + f(s), b \rangle, \forall s \in G, \xi \in \mathfrak{g}^*.$$

对 s 求微分得

$$\begin{aligned} (\Gamma b)(\xi) &= db(a\xi) \\ &= \langle -ad^*(a)\xi + df(a), b \rangle \\ &= \langle \xi, [a, b] \rangle + \langle df(a), b \rangle \\ &= ([a, b])(\xi) + \langle df(a), b \rangle, \end{aligned}$$

对任意的 $\xi \in \mathfrak{g}^*$ 和 $a, b \in \mathfrak{g}$ 成立. (ii) 得证. 证完.

现设 \mathfrak{g} 是单连通 Lie 群 G 的 Lie 代数. 设 β 是 \mathfrak{g} 的取值于 \mathbb{R} 中的 2-闭链, 设 f_β 为 \mathfrak{g} 上取值于 \mathfrak{g}^* 中的 1-维上链使对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$\langle \beta(a), b \rangle = \beta(a, b).$$

根据引理 20.8, 存在唯一的一个从 G 到 \mathfrak{g}^* 中的可微映射 f_β , 使对任意的 $s, t \in G$ 和 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$f_\beta(st) = Ad^*(s)f_\beta(t) + f_\beta(s),$$

和

$$df_\beta(a) = \beta(a).$$

于是可由等式

$$s\xi = Ad^*(s)\xi + f_\beta(s), \forall s \in G, \xi \in \mathfrak{g}^*$$

来定义 G 在 \mathfrak{g}^* 中的一个仿射作用. 我们称这样定义的 G 在 \mathfrak{g}^* 中的仿射作用为附属于 2-闭链 β 的作用. 另一方面, 根据命题 20.6 的推论, 我们知道, 由 2-闭链 β 能决定一张量 $\tilde{\beta} \in D_2(\mathfrak{g}^*)$ 使 $\omega - \tilde{\beta}$ 是 \mathfrak{g}^* 上的一个 Poisson 结构.

20.10. 命题. 设 \mathfrak{g} 是 Lie 群 G 的 Lie 代数且设 β 是 \mathfrak{g} 上取值于 \mathbb{R} 中的 2-闭链. 若 G 是单连通的, 则在 G 在 \mathfrak{g}^* 中的, 附属于 β 的仿射作用下, \mathfrak{g}^* 上的 Poisson 结构 $\omega - \tilde{\beta}$ 是不变的.

证. 对任意的 $s \in G$, 令

$$s_*: \xi \mapsto Ad^*(s)\xi + f_\beta(s), \forall \xi \in \mathfrak{g}^*$$

为 \mathfrak{g}^* 中相应于 s 的仿射自同构. 记 $\{, \}_\beta$ 为 $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ 中由

Poisson 结构 $\omega - \tilde{\beta}$ 所定义的括号, 则对任意的 $s \in G$ 和 $a \in \mathfrak{g}$ 有

$$s_0^*(a) = Ad(s^{-1})a + \langle f_\beta(s), a \rangle.$$

在上式中我们已把 $s_0^*(a)$ 当作 \mathfrak{g}^* 上的函数, 并利用了定义 (见 §17)

$$Ad^*(s) = 'Ad(s^{-1}), s \in G.$$

于是, 根据引理 20.8 的 (ii) 有

$$\begin{aligned} & \{s_0^*(a), s_0^*(b)\}_\beta \\ &= \{Ad(s^{-1})a, Ad(s^{-1})b\}_\beta \\ &= Ad(s^{-1})[a, b] + \beta(Ad(s^{-1})a, Ad(s^{-1})b) \\ &= Ad(s^{-1})[a, b] + \langle \beta(Ad(s^{-1})a, Ad(s^{-1})b) \rangle \\ &= Ad(s^{-1})[a, b] + \langle Ad^*(s)df_\beta(Ad(s^{-1})a), b \rangle. \end{aligned}$$

又根据引理 20.9 的 (i) 得

$$Ad^*(s)df_\beta(Ad(s^{-1})a) = df_\beta(a) - ad^*(a)f_\beta(s).$$

因此对任意的 $s \in G$ 和 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$\begin{aligned} & \{s_0^*(a), s_0^*(b)\}_\beta \\ &= Ad(s^{-1})[a, b] + \langle df_\beta(a), b \rangle + \langle f_\beta(s), [a, b] \rangle \\ &= s_0^*([a, b]) + \langle df_\beta(a), b \rangle \\ &= s_0^*([a, b] + \beta(a, b)) \\ &= s_0^*\{a, b\}_\beta. \end{aligned}$$

这就证明了对任意的 $s \in G$, s_0^* 都是 Poisson 流形 $(\mathfrak{g}^*, \omega - \tilde{\beta})$ 的一个自同构. 所以 Poisson 结构 $\omega - \tilde{\beta}$ 对于 G 在 \mathfrak{g}^* 上的附属于 β 的仿射作用是不变的. 证完.

20.11. 命题. 条件与命题 20.10 相同. \mathfrak{g}^* 的由 Poisson 结构 $\omega - \tilde{\beta}$ 所定义的全部叶子就是 G 的附属于 β 的作用所给出的全部轨道.

证. 事实上, 根据引理 20.8 我们有

$$\begin{aligned} \Gamma b &= [a, b] + \langle df(a), b \rangle \\ &= [a, b] + \beta(a, b) \\ &= \{a, b\} = Hb, \forall a, b \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

这说明

$$\Gamma_a = H_a, \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

余下的证明和命题 20.3 的证明完全一样,证完.

推论. 对于由 G 的附属于 β 的仿射作用所给出的 \mathfrak{g}^* 中的任一轨道 F , 都有唯一的一个辛结构 ω_F 使恒等浸入

$$\mu: F \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

对于 \mathfrak{g}^* 上的 Poisson 结构 $\omega - \bar{\beta}$ 是一 Poisson 同态. 该辛结构 ω_F 在 G 的作用下不变. 又辛 G -空间 (F, ω_F) 是 Hamilton 的, μ 是一矩射.

证. 证明和 $\beta = 0$ 时的证明类似 (命题 20.3 的推论及命题 20.4). 证完.

设 (M, ω) 是一 Hamilton G -空间, 并设

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是矩射. 在 §16 中, 我们曾用 μ 定义了 \mathfrak{g} 上取值于 R 中的一个 2-闭链 c_μ

$$c_\mu(a, b) = \{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, b \rangle\} - \langle \mu, [a, b] \rangle \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

20.12. 命题. 在 \mathfrak{g}^* 上取 Poisson 结构 $\omega - \bar{c}_\mu$, 则矩射

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是一 Poisson 流形同态 (参看文献 [15], [17]).

证. 事实上, 对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 我们有

$$\begin{aligned} \{\mu^*(a), \mu^*(b)\} &= \{\langle \mu, a \rangle, \langle \mu, a \rangle\} \\ &= \langle \mu, [a, b] \rangle + c_\mu(a, b) \\ &= \mu^*([a, b] + c_\mu(a, b)) \\ &= \mu^*\{a, b\}_{c_\mu}. \end{aligned}$$

证完.

我们已经知道 (§17), 若 G 按下面定义的方式作用在 \mathfrak{g}^* 上: 对任意的 $s \in G$ 和 $\xi \in \mathfrak{g}^*$,

$$s\xi = Ad^*(s)\xi + \varphi_\mu(s),$$

其中

$$\varphi_\mu(s) = \mu(sx) - Ad^*(s)\mu(x), \quad x \in M,$$

则矩射

$$\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是 G -等价不变的. 又根据命题 17.2 我们有

$$c_\mu(a, b) = \langle d\varphi_\mu(a), b \rangle, \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

所以

$$d\varphi_\mu = c_\mu.$$

这说明如果 G 是连通的, 则 G 在 \mathfrak{g}^* 上的仿射作用可由 G 的单连通覆盖群的附属于闭上链 c_μ 的仿射作用通过作商而得到.

习题 1. 完成命题 20.11 及其推论的证明.

习题 2. 设 \mathfrak{g} 是单连通 Lie 群 G 的 Lie 代数且设 β 是 \mathfrak{g} 上取值于 R 中的 2-闭上链.

1) 证明 G 在 \mathfrak{g}^* 中的附属于 β 的仿射作用的由 \mathfrak{g}^* 的原点给出的轨道 $f_\beta(G)$ 的维数等于 β 的秩.

2) 设 β 的秩等于 $\dim \mathfrak{g}$. 在 G 上取左不变辛结构 ω 使对任意的 $a, b \in \mathfrak{g}$ 有

$$\omega(a, b) = \beta(a, b).$$

证明 (G, ω) 是一 Hamilton G -空间而且映射

$$f_\beta: G \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

是 (G, ω) 的一个矩射.

3) 仍假定 β 的秩等于 $\dim \mathfrak{g}$. 定义 \mathfrak{g} 中的乘积

$$(a, b) \mapsto ab, a, b \in \mathfrak{g},$$

使

$$\beta(ab, c) = -\beta(b, [a, c]), \forall a, b, c \in \mathfrak{g}.$$

证明对任意的 $a, b, c \in \mathfrak{g}$ 有

$$ab - ba = [a, b],$$

$$a(bc) - b(ac) = (ab)c - (ba)c.$$

即对于这一乘积, \mathfrak{g} 在 Vinberg 的定义下是一“左辛”代数(参看文献[25]).

第六章 一个分级情形

§ 21. $(0, n)$ 维超流形 (参看文献 [18], [19])

在这节里,我们把辛结构的观念推广到超流形上,下面先给出超流形,或者按 B. Kostant (参看文献 [18])的说法,称为分级流形的定义.

21.1. 定义. 设 M_0 是一 n_0 维的流形,设 A 是 M_0 上具有下列性质的一个 R -代数簇

(1) 对任意的开集 $U \subset M_0$, $A(U)$ 是一 Z_2 -分级代数

$$A(U) = A(U)_0 + A(U)_1,$$

其中 0 和 1 表示 Z_2 中仅有的两个元素;

(2) 簇 A 局部同构于 M_0 上的可微函数簇和看作 Z_2 -分级代数的外代数 $\Lambda(R^{n_1})$ ($n_1 \in Z^+$) 在 R 上所作的张量积;

则我们把 $M = (M_0, A)$ 称为一个 (n_0, n_1) 维的超流形, M_0 称为底空间.

根据定义,当开集 U 充分小时,我们有从 $A(U)$ 到 $C^\infty(U) \oplus \Lambda(R^{n_1})$ 上的一个同构,它将 $A(U)_p$ ($p \in Z_2$) 映到

$$C^\infty(U) \otimes \sum_{p \equiv p \pmod{2}} \Lambda^p(R^{n_1})$$

上.

下面我们仅限于讨论底流形 M_0 退缩为一个点 e 的特殊情形,这时 $M = (e, A)$ 的维数有形式 $(0, n)$. 这样的超流形由一个点 e 和一个同构于 $\Lambda(R^n)$ 的 Z_2 -分级代数 A 构成. 对这种特殊的超流形,所涉及的只是纯代数问题,因此我们可以用任一特征为 0 的域 k 来代替 R 进行讨论.

我们把同构于 $\Lambda(k^n)$ 的一个 Z_2 -分级 k -代数称为 k 上的秩

为 n 的 Grassman 代数. 因此, 一个 Grassman 代数是一维数为 2^n 的 Z_2 -交换代数, 它可由一组满足

$$x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$$

的 1 级元素 x_1, \cdots, x_n 所生成.

设 $M = (e, A)$ 是一 $(0, n)$ 维超流形. 我们称满足

$$x_1 x_2 \cdots x_n \neq 0$$

的 A_1 中的元素组 x_1, \cdots, x_n 为 M 上的坐标系. 若 x_1, x_2, \cdots, x_n 是 M 上的一个坐标系, 则 x_1, \cdots, x_n 生成代数 A . 所以选定一个坐标系相当于给出从 A 到 $\wedge(k^n)$ 上的一个同构. 设 m 是 A 的极大理想, 即由 A_1 或 M 上的一个坐标系所生成的理想. 我们把向量空间 m/m^2 称为 M 上的余向量空间, 并把它记为 T^*M . T^*M 是一 n 维空间, 它的所有元素都是 1 级的. T^*M 的对偶空间

$$T_e M = (m/m^2)^*$$

称为 M 上的向量空间. 设 $\text{Der } A$ 是由 A 的 Z_2 -导子所构成的左 A -模, 则 $\text{Der } A$ 的元素称为 M 上的向量场. 对任一 $X \in \text{Der } A$ 和 $a \in A$, 记 Xa 为 a 在 X 下的象. 作为 k 上的向量空间, $\text{Der } A$ 也是 Z_2 -分级的. 若 $p \in Z_2$, 则 $(\text{Der } A)_p$ 是 A 中满足

$$(1) XA_q \subset A_{p+q}, \quad q = 0, 1,$$

$$(2) X(ab) = (Xa)b + (-1)^{pq}(Xb)a, \quad \forall a \in A_q, \forall b \in A,$$

的 k -自同态 X 的集合. 作为 A 上的左模, $\text{Der } A$ 是一分级 A -模. 也就是说, 对任意的 $p, q \in Z_2$ 有

$$A_p(\text{Der } A)_q \subset (\text{Der } A)_{p+q}.$$

我们在 $\text{Der } A$ 上定义一括号 $[,]$ 如下

$$[X, Y] = X \circ Y - (-1)^{pq} Y \circ X,$$

$$\forall X \in (\text{Der } A)_p, Y \in (\text{Der } A)_q,$$

则 $\text{Der } A$ 成为 k 上的一个 Lie 超代数 (参看 7.5).

设 x_1, \cdots, x_n 是 $M = (e, A)$ 上的坐标系, 则对 $i = 1, \cdots, n$, 存在唯一的一个 $P_i \in (\text{Der } A)_1$ 使

$$P_i x_j = \delta_{ij}.$$

我们把 P_i 记为 $\frac{\partial}{\partial x_i}$. 于是, Z_1 -导子

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

构成 A -模 $\text{Der} A$ 的一组基, 并且对 $i, j = 1, \dots, n$ 有

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0.$$

设 A 是 k 上的一个 Grassman 代数 (在我们的意义下), 且设 E 是一 Z_1 -分级左 A -模. 因为 A 是 Z_1 -交换代数, 所以我们可以 在 E 上定义一右 A 模结构使

$$xa = (-1)^{p_q} ax, \quad \forall x \in E_p, a \in A_q.$$

于是对任意的 $a, b \in A$ 和 $x \in E$ 有

$$a(xb) = (ax)b.$$

因此, 所有 Z_1 -分级左 A -模都可定义成 (A, A) 上的双边模.

设 E 是一 Z_1 -分级左 A -模, 我们用 $\text{Hom}_A(E, A)$ 来表示这样的 一个 Z_1 -分级 k 向量空间, 它里边的 p 级元素是满足下列条件的 从 E 到 A 的 k -线性映射 φ :

$$(1) \varphi(E_q) \subset A_{p+q},$$

$$(2) \varphi(ax) = (-1)^{p_q} a\varphi(x), \quad \forall q \in Z_1, a \in A_q, x \in E.$$

我们可以在 $\text{Hom}_A(E, A)$ 上定义一 Z_1 -分级左 A 模结构使

$$(a\varphi)(x) = a(\varphi(x)), \quad \forall a \in A, x \in E, \varphi \in \text{Hom}_A(E, A).$$

我们称 Z_1 -分级 A 模

$$\mathcal{Q}^p(M) = \text{Hom}_A(\text{Der} A, A)$$

为超流形 $M = (e, A)$ 的微分 1-形式模. 可以证明存在唯一的一个 k -线性映射

$$d: A \rightarrow \mathcal{Q}^1(M)$$

使对任意的 $a \in A_p$ 和任意的 $X \in (\text{Der} A)_q$ 都有

$$(da)(x) = (-1)^{p_q} Xa.$$

我们有

$$dA_p \subset \mathcal{Q}^1(M)_p.$$

又对任意的 $a, b \in A$ 有

$$d(ab) = (da)b + a(db).$$

这里,若 $a \in A_p$ 且 $b \in A_q$, 则记

$$(da)b = (-1)^{pq} b(da),$$

可以证明,若 x_1, \dots, x_n 是 M 上的坐标系, 则 dx_1, \dots, dx_n 是 A 模 $\mathcal{Q}^1(M)$ 的一组基.

现在我们来定义超流形 TM 和 T^*M . 若 A 是一 Grassman 代数, 则任一 Z_2 -分级左 A 模都是一双边模, 所以对任意的 $p \geq 1$, 我们可以定义张量幂

$$\otimes^p E = \underbrace{E \otimes E \otimes \dots \otimes E}_{p \text{ 项}}$$

把所有 $\otimes^p E$ 的直和记为 $\otimes E$ 并赋予它通常的乘法, 则 $\otimes E$ 也称为张量代数. 这是一双分级的代数, 它是在 $Z \times Z_2$ 中分级的.

级数为 (p, p) 的元素是 $\otimes^p E$ 中由下列形式的元素

$$u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_p$$

其中 $u_i \in E_{p(i)}$ 且

$$\sum_{1 \leq i \leq p} p(i) = p$$

所张成的向量子空间中的元素.

设 I 是张量代数 $\otimes E$ 中由下列元素生成的双边理想:

$$u \otimes v - (-1)^{pq} v \otimes u, \quad u \in E_p, \quad v \in E_q.$$

令

$$S(E) = \otimes E / I,$$

则我们称代数 $S(E)$ 是 Z_2 -分级的, A 模 E 的对称代数. 由于 $\otimes E$ 是双分级的, 所以 $S(E)$ 也是一双分级代数, 它既在 Z 中有一分级, 也在 Z_2 中有一分级. 对于 Z_2 分级, 它是 Z_2 -交换的.

若 A 是一秩为 n 的 Grassman 代数, E 是一个具有由 r 个 1 级 (Z_2 -分级) 元素构成的一组基的自由 Z_2 -分级 A 模, 则对称代数 $S(E)$ 对于在 Z_2 中的分级, 是一秩为 $n + r$ 的 Grassman 代数. 特别地, $S(\text{Der } A)$ 和 $S(\text{Hom}_A^1(\text{Der } A, A))$ 是两个秩为 $2n$

的 Grassman 代数.

若 $M = (e, A)$ 是 $(0, n)$ 维的超流形, 则我们称超流形 $(e, S(Q^1(M)))$ 为 M 的切超流形并把它记为 TM , 而把超流形 $(e, S(\text{Der } A))$ 称为 M 的余切超流形并把它记为 T^*M . 超流形 TM 和 T^*M 都是 $(0, 2n)$ 维的. 标准内射同态

$$A \rightarrow S^0(\text{Der } A) \subset S(\text{Der } A)$$

可看作超流形 M 和 TM 之间的同态, 而标准内射

$$A \rightarrow S^0(Q^1(M)) \subset S(Q^1(M))$$

可以看作超流形 M 和 T^*M 之间的同态.

我们现在来定义超流形 $M = (e, A)$ 上的微分形式线丛 (complexe) $Q(M)$. 令

$$Q^0(M) = A,$$

$$Q^1(M) = \text{Hom}_A(\text{Der } A, A).$$

对于 $p > 1$, 定义 $Q^p(M)$ 如下:

(1) $Q^p(M)$ 是 $\text{Hom}_A(\overset{p}{\otimes} \text{Der } A, A)$ 的一个子模,

(2) 对 $1 \leq i \leq p$, 若 $\varphi \in Q^p(M)$, 则

$$\varphi(X_1 \otimes \cdots \otimes X_i \otimes X_{i+1} \otimes \cdots \otimes X_p)$$

$$= -(-1)^{p_i p_{i+1}} \varphi(X_1 \otimes \cdots \otimes X_{i+1} \otimes X_i \otimes \cdots \otimes X_p)$$

对任意的 $X_1, \cdots, X_p \in \text{Der } A$ ($X_i, 1 \leq i \leq p$, 的 Z_2 级数是 p_i) 成立. 我们把 $\varphi \in Q^p(M)$ 看作从 $(\text{Der } A)^p$ 到 A 内的映射并记

$$\varphi(X_1 \otimes \cdots \otimes X_p) = \varphi(X_1, \cdots, X_p).$$

A 模 $Q^p(M)$ 是 $\text{Hom}_A(\overset{p}{\otimes} \text{Der } A, A)$ 的一个 Z_2 -分级子模, 我们记 $Q^p_\rho(M)$ 为由 $Q^p(M)$ 的 Z_2 -级数是 ρ 的元素构成的子空间. 于是 $Q^p_\rho(M)$ 中的元素是 (p, ρ) 级的微分形式.

我们可以在

$$Q(M) = \overset{p}{\otimes} Q^p(M)$$

中定义一结合乘积

$$(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \wedge \psi, \varphi, \psi \in Q(M)$$

定义的方法类似于定义两个反对称形式的外积 (参看文献 [18],

[21]). 在这一乘积下, $\Omega(M)$ 是一 $Z \times Z_2$ - 分级代数, 即有

$$\Omega_p^q(M) \wedge \Omega_q^r(M) \subset \Omega_{p+q}^{r+q}(M).$$

若

$$a \in A_p = \Omega_p^0(M), \phi \in \Omega_q^r(M),$$

则我们有

$$a \wedge \phi = (-1)^{r_2 q} \phi \wedge a = a \phi.$$

若

$$\varphi \in \Omega_p^q(M), \psi \in \Omega_q^r(M),$$

则我们有

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{p_2 q + r_2 q} \psi \wedge \varphi.$$

设 x_1, \dots, x_n 是 M 上的坐标. 作为 k 上的代数, $\Omega(M)$ 由下列元素生成:

$$x_1, \dots, x_n \in \Omega_1^0, dx_1, \dots, dx_n \in \Omega_1^1,$$

它们满足下列关系式:

$$x_i x_j + x_j x_i = 0,$$

$$x_i dx_j + dx_j x_i = 0,$$

$$dx_i \wedge dx_j - dx_j \wedge dx_i = 0.$$

这表明, 作为左 A 模, $\Omega(M)$ 同构于

$$A \otimes_k [T_1, \dots, T_n],$$

其中 $k[T_1, \dots, T_n]$ 是域 k 上不定元 T_1, \dots, T_n 的多项式代数. 不难看出, 若 $n \neq 0$, 则对任意的 $p \geq 0$ 有 $\Omega^p(M) \neq (0)$.

若 $\Omega(M)$ 的一个 k 自同态 γ 满足

$$\gamma(\Omega_q^p(M)) \subset \Omega_{p+q}^{r+q}(M), \forall (p, q) \in Z \times Z_1,$$

则我们称它为 $\Omega(M)$ 的一个 (p, p) 级自同态. 若一个 (p, p) 级的自同态 γ 满足

$$\gamma(\varphi \wedge \psi) = \gamma(\varphi) \wedge \psi + (-1)^{p_2 q + r_2 q} \varphi \wedge \gamma(\psi),$$

$$\forall \varphi \in \Omega_p^q(M), \psi \in \Omega_q^r(M),$$

则称其为 $\Omega(M)$ 上的 $Z \times Z_2$ 导子. 可以证明 $\Omega(M)$ 中存在唯

一的一个 $(1, 0)$ 级的 $Z \times Z$, 导子 d 使得

$$(1) d^2 = 0,$$

$$(2) (da)(X) = (-1)^{pq} Xa, \quad \forall a \in A, X \in (\text{Der } A)_q.$$

这个导子可以扩充为前面所定义的映射

$$d: A \rightarrow \mathcal{Q}^1(M).$$

由 d 所定义的合成列是零调的, 即序列

$$0 \rightarrow k \rightarrow A = \mathcal{Q}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{Q}^1(M) \xrightarrow{d} \dots$$

是一正合序列.

§ 22. $(0, n)$ 维辛超流形

设 $M = (e, A)$ 是一 $(0, n)$ 维超流形, 设微分形式 $\omega \in \mathcal{Q}_0^1(M)$ 满足下面的条件:

$$(1) \text{ 若 } X \in \text{Der } A \text{ 使 } \omega(X, Y) = 0, \forall Y \in \text{Der } A, \text{ 则 } X = 0,$$

$$(2) d\omega = 0,$$

则我们称 ω 为 M 上的一个辛结构.

设 $X \in (\text{Der } A)_p$, 记 $i(X)$ 为 $\mathcal{Q}(M)$ 的一个由下式所定义的 $(-1, p)$ 级同态:

$$(i(X)\varphi)(Y_1, \dots, Y_{q-1}) = (-1)^{pq} \varphi(X, Y_1, \dots, Y_{q-1}),$$

其中 $\varphi \in \mathcal{Q}_q(M)$, $Y_1, \dots, Y_{q-1} \in \text{Der } A$ 均是任意的. 可以证明 $i(X)$ 是一 $(-1, p)$ 级的 $Z \times Z$ - 导子. 上面的条件 (1) 表明, 对于辛结构 ω , 映射

$$X \mapsto i(X)\omega, \quad \forall X \in \text{Der } A,$$

是一内射. 因此, 若条件 (1) 成立, 则映射

$$X \mapsto i(X)$$

是从 A 模 $\text{Der } A$ 到 A 模 $\mathcal{Q}^1(M)$ 上的一个同构.

设 ω 是 M 上的一个辛结构, 则它在 $T_e M$ 上导出一反对称双线性型 ω_e , 而且根据条件 (1), ω_e 是非退化的.

22.1. 命题. 设 ω 是 $M = (e, A)$ 上的一个辛结构, 则在 M 上存在坐标系 x_1, \dots, x_n 以及一个 $n \times n$ 阶的域 k 上的对称矩

阵 (λ_{ij}) 使

$$\omega = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} dx_i \wedge dx_j.$$

又 $\det(\lambda_{ij}) \neq 0$.

这一结论类似于 Darboux 定理 (§8), 是文献 [18] 中定理 5.3 的一个基本的并且是特殊的情形.

我们称 M 上的一个向量场 $X \in \text{Der} A$ 为辛向量场, 若它满足 $di(X)\omega = 0$. M 上的辛向量场全体构成 Lie 超代数 $\text{Der} A$ 的一个 Lie 子超代数 S . 可以证明 (参看文献 [14]), 若 $n \geq 4$, 则 S 是一单 Lie 超代数, 也就是说, S 和 (0) 是 S 仅有的两个理想.

对任意的 $a \in A$, 存在唯一的一个 $H_a \in \text{Der} A$ 使

$$i(H_a)\omega = da.$$

H_a 是一辛向量场. 序列

$$(0) \rightarrow k \rightarrow A \xrightarrow{H} S \rightarrow (0)$$

是一正合列.

在 A 上定义一 Poisson 括号如下:

$$\{a, b\} = H_a b, \quad \forall a, b \in A.$$

在这一括号下, A 成为一 Lie 超代数, 它的中心是 k . 映射

$$H: a \mapsto H_a, \quad a \in A,$$

是一 Lie 超代数同态. 对任意的 $a \in A_p$, $b \in A_q$ 和 $c \in A$ 有

$$\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{pq} b\{a, c\}.$$

设 x_1, \dots, x_n 是 M 上的坐标, 使得

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_i,$$

则对任意的 j 有

$$i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\omega = 2 dx_j,$$

$$H_{x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

于是对 $1 \leq i, j \leq n$ 有

$$\{x_i, x_j\} = \frac{1}{2} \delta_{ij}.$$

T^*P 上的标准辛结构. 设 $P = (e, A)$ 是一 $(0, n)$ 维超流形. 任意的

$$X \in \text{Der} A = S^1(\text{Der} A)$$

都可等同于 Grassman 代数 $S(\text{Der} A)$ 的一个元素. 另一方面, 对任意的 $X \in (\text{Der} A)_p$, 存在 $S(\text{Der} A)$ 的唯一的 Z_2 -分级级数是 p 的 Z_2 -导子 \tilde{X} 使

$$(1) \tilde{X}(a) = Xa, \quad \forall a \in A = S^0(\text{Der} A),$$

$$(2) \tilde{X}(Y) = [X, Y], \quad \forall Y \in \text{Der} A = S^1(\text{Der} A).$$

导子 \tilde{X} 对于 Z -分级是零级的. 又因为

$$T^*P = (e, S(\text{Der} A)),$$

所以 \tilde{X} 是 T^*P 上的一个向量场 (即 X 的拓展). 若 x_1, \dots, x_n

是 P 上的坐标, 我们把 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 看作 $S(\text{Der} A)$ 中的元素并令

$$y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

则 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ 是 T^*P 上的坐标且

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} y_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

在 T^*P 上存在唯一的一个微分形式

$$\alpha \in \mathcal{O}_1^1(T^*P),$$

使对任意的 $X \in \text{Der} A$ 有

$$\alpha(\tilde{X}) = X.$$

这一形式类似于 Liouville 形式. 在坐标 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ 下, 我们有

$$\alpha = \sum_{i=1}^n y_i dx_i.$$

微分形式

$$\omega = -d\alpha = \sum_{i=1}^n -dy_i \wedge dx_i$$

是 T^*P 上的一个标准辛形式。形式 ω_c 是标准同构于向量空间 $TP + (TP)^*$ 的向量空间 $T_c(T^*P)$ 上的对偶的中性形式 (La forme ω_c est la forme neutre de dualité sur l'espace $T_c(T^*P)$ qui est canoniquement isomorphe à $TP + (TP)^*$).

参 考 文 献

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden, Foundations of mechanics, 2nd edition, Benjamin Cummings Reading, 1978.
- [2] V. I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics. Nauka, Moscow, 1974.
- [3] M. F. Atiyah, Convexity and commuting hamiltonians, *Bull. London Math. Soc.*, 14, 1—15, 1982.
- [4] N. Bourbaki, Variétés différentielles et analytiques, Hermann, Paris, 1971.
- [5] C. Chevalley, Theory of Lie groups, Princeton Univ. Press, 1946.
- [6] G. Darboux, Sur le problème de Pfaff, *Bull. des Sc. math.*, 1882.
- [7] J. J. Duistermaat, Fourier integral operators, *Courant Inst. of Math. Sci.*, New York, 1973.
- [8] ———, On the momentum map, IUTAM-ISIMM, Symposium on modern developments in analytical mechanics, Torino, 1982.
- [9] C. Godbillon, Géométrie différentielle et mécanique analytique, Hermann, Paris, 1969.
- [10] V. Guillemin, S. Sternberg, The momentum map and collective motion, *Annals of Physic*, 127, 220—253, 1980.
- [11] ———, Convexity properties of the momenta mapping, *Invent. Math.*, 67, 491—513, 1982.
- [12] S. Helgason, Differential geometry on symmetric spaces, Academic Press, New York, 1962.
- [13] N. Jacobson, Lie algebras, Interscience Publishers, Wiley, New York, 1962.
- [14] V. Kac, Lie superalgebras, *Adv. Math.* 26, 8—96, 1977.
- [15] A. A. Kirillov, Local Lie algebras, *Uspekti Math. Nauk*, 31, 4, 55—76, 1976.
- [16] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of differential geometry, Interscience Publishers, New York, 1969.
- [17] B. Kostant, Quantization and unitary representations, *Lectures Notes in Math.*, 170, Springer, Berlin, 1970.
- [18] ———, Graded manifolds, graded Lie theory and prequantization, *Lectures Notes in Math.*, 570, Springer Berlin, 1977.
- [19] A. Leites, Introduction to the theory of supermanifolds, *Uspekti Math. Nauk*, 35, 1, 3—57, 1980
- [20] A. Lichnerowicz, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *J. Diff. Geom.*, 12, 253—300, 1977.
- [21] M. Scheunert, The theory of Lie superalgebras, *Lectures Notes in Math.*, 716, Springer, 1979.

- [22] C. L. Siegel, Symplectic geometry, *Amer. J. Math.*, 1—86, 1943.
- [23] J. M. Souriau, Structures des systemes dynamiques, Dunod Paris, 1969.
- [24] W. W. Symes, Hamiltonian group actions and integrable systems, *Physica*, 1. D, 339—374, 1980.
- [25] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, *Moscow Math. Soc.*, 12, 1963.
- [26] N. R. Wallach, Symplectic geometry and Fourier analysis, Math. Sci. Press, Brookline, Mass, 1977.
- [27] A. Weil, Variétés kähleriennes, Hermann, Paris, 1958.
- [28] A. Weinstein, Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, *Adv. Math.*, 6, 329—346, 1971.
- [29] —————, Lectures on symplectic manifolds, C. B. M. S. regional conference series, 29, A. M. S. Rhode Island, 1977.
- [30] H. Weyl, Classical groups, Princeton University Press, 1946.
- [31] 严志达, 半单纯李群李代数表示论, 上海科学技术出版社, 1963.

名词索引

三 画

三维 Lie 代数 10
上边缘 95
上边缘运算 121
上链复形 121

四 画

分级代数 1
分级流形 129
分级 A -模 130
双射 5

五 画

正交性 3
正交群 22
正合序列 44
外积 1
外代数 120
可积子丛 37
可微作用 87
生成函数 60
母函数 80
左外积 31
左不变向量场 88
左辛代数 128
右不变向量场 88
半单表示 34
平稳点 101
代数簇 129
对称代数 132
对偶的中性形式 138

六 画

动力矩 99
仿射作用 105

伪 Hermite 型 20
伪 Riemann 形式 27
伪 Kähler 形式 27
收缩法 61
曲率 65
合成列 135
齐性空间 106

七 画

余迷向子空间 4
余迷向子流形 56
余伴随表示 103
伴随表示 103
辛空间, 辛形式 8
辛子空间 4
辛基 9
辛空间同构 13
辛群 14
辛复结构 20
辛流形 24
辛流形同态 25
辛流形同构 25
辛坐标 40
辛向量场 42
辛子流形 56
辛 G -空间 88
辛 A -空间 89
辛结构 24
 向量空间 9
 流形 24
 余切丛 69
张量代数 132
酉群 22
形式辛向量场 Lie 代数 53

八 画

单子模 13
单代数 34
垂直向量 67
环面 106
线性联络 65
线丛 133
拓展 78

九 画

标准辛空间 8
适应复结构 21
适用交 62
迷向子空间 4
迷向子流形 56
迷向补子空间 6
复投影空间 27
复结构 20
指数映射 20
临界点 45
挠率 65

十 画

流 41
射流 55
射流代数 54
浪花 79
积分叶子 65
积分曲线 41
素元素 12
矩射 94

十一画以上

提升 81
强 Hamilton \mathfrak{g} -空间 96
超流形 129
等价不变 105
零调 135
稳定子 16
覆盖 106

其 他

Cayley 参数化 19
Darboux 定理 39
de Rham 群 43
Frobenius 定理 37

Grassman 代数 130
 G -空间 88
Hamilton 向量场 44
Hamilton \mathfrak{g} -空间 93
Hamilton G -空间 103
 A -空间 88
Kähler 形式 27
Lagrange 子空间 4
Lagrange 迷向补 6
Lagrange 补 8
Lagrange 子流形 56
Lagrange 叶结构 64
Lie 导子 24
Lie 超代数 32
Lie 群 87
Lie 代数 88
Liouville 形式 67
 p -形式 1
Poisson 括号 46
Poisson \mathfrak{g} -空间 96
Poisson G -空间 103
Poisson 结构 111
Poisson 流形 111
Schouten-Nijenhuis 括号 107
 Z_r -交换 1
 Z_r -导子 2

记 号

\mathbb{Z}	整数环
\mathbb{Z}^+	非负整数集
\mathbb{R}	实数域
\mathbb{C}	复数域
\mathbb{Z}_2	整数模 2 同余类环
TM	流形 M 的切丛
T^*M	流形 M 的余切丛
$C^\infty(M)$	流形 M 上 C^∞ 实可微函数全体
\longrightarrow	集合间的对应
\longmapsto	元素间的对应